Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Informatik
Professur für Automatentheorie

26.01.2007

Grundlagen der Theoretischen Informatik

Studiengang Informatik und Medieninformatik

Musterklausur

Aufgabe 1

Geben Sie eine Turingmaschine $\mathcal{A}$ an, die die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto (2 * n) + 1$ berechnet. Erläutern Sie die Arbeitsweise von $\mathcal{A}$.
Hinweis: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: n wird dargestellt als $a^n,\ a \in \Sigma$.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Chomsky-Grammatik

$G = (V, \Sigma, P, S)$ mit
$V = \{S, B\}$,
$\Sigma = \{a, b, c\}$,
$P = \{S \to aSBc,\ S \to abc,\ cB \to B,\ cB \to Bc,\ bB \to bb\}$

a) Von welchem maximalen Typ ist G? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Bestimmen Sie drei Wörter w der Sprache $L(G)$. Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Gilt $\varepsilon \in L(G)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Beschreiben Sie die durch G erzeugte Sprache $L(G)$.

e) Ist der maximale Typ von $L(G)$ kleiner als der von Ihnen in a) angegebene maximale Typ von G? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen. Begründen Sie Ihre Antworten - dabei dürfen Sie den gesamten Stoff und alle Resultate der Vorlesung verwenden.

a) Jedes Problem ist entscheidbar.

b) R ist entscheidbar gdw. R und $\bar{R}$ partiell entscheidbar sind.

c) Es sei L eine Sprache. Wenn es eine natürliche Zahl $n_0 \geq 1$ gibt, so daß gilt: jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$ läßt sich zerlegen in $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon, xy^kz \in L$ für alle $k \geq 0$, dann ist L regulär.

d) Die Ackermannfunktion ist LOOP-berechenbar, aber nicht WHILE-berechenbar.

e) Jede Typ-0-Sprache ist entscheidbar.

f) Wenn L eine Typ-2 Sprache ist und $L = L_1 \cup L_2$, dann sind L_1 und L_2 auch Typ-2 Sprachen.

g) Typ-3-Sprachen sind abgeschlossen unter $\cup$, $\cap$ und Komplement.

h) Typ-2-Sprachen sind abgeschlossen unter $\cup$, $\cap$ und Komplement.

Aufgabe 4

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G für die folgende Sprache der Wörter über $\{a, b, c\}$ an: $L = \{a^i b^j c^k \mid i = j \vee j = k \text{ und } i, j, k \geq 1\}$. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5

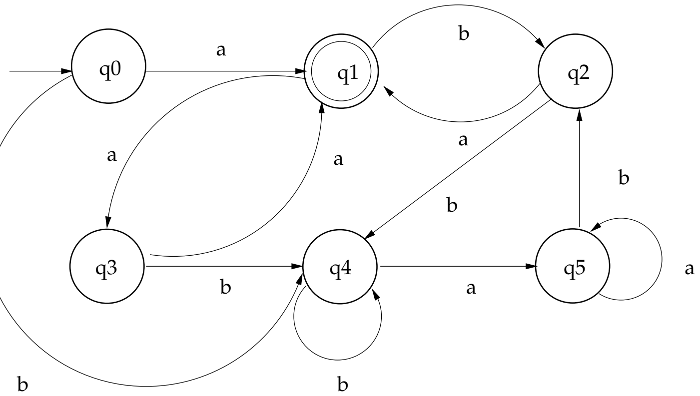
Geben Sie ein LOOP-Programm an, das die Funktion

$$f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x, y) \mapsto \begin{cases} x + y, \text{ falls } x \leq y \\ x - y, \text{ sonst} \end{cases}$$

berechnet und erklären Sie seine Arbeitsweise. Verwenden Sie dabei nur jene Wertzuweisungen, die in der Vorlesung in der Definition der Syntax von LOOP-Programmen definiert wurden - also keine weiteren Abkürzungen.

Aufgabe 6

Der DEA $\mathcal{A}$ sei wie folgt gegeben:



Geben Sie den zu $\mathcal{A}$ reduzierten DEA $\mathcal{A}_{red}$ an.

Aufgabe 7

Beim *Hitting Set* Problem ist eine Kollektion $C = \{C_1, \ldots, C_m\}$ von Teilmengen einer Grundmenge S ($C_i \subseteq S$, $1 \leq i \leq m$) und eine positive ganze Zahl $k \leq |S|$ gegeben. Gefragt ist, ob es eine Menge $S' \subseteq S$ gibt mit $|S'| \leq k$, so daß S' von *jeder* Teilmenge C_i mindestens ein Element enthält (d. h. $S' \cap C_i \neq \emptyset$ für alle i, $1 \leq i \leq m$).

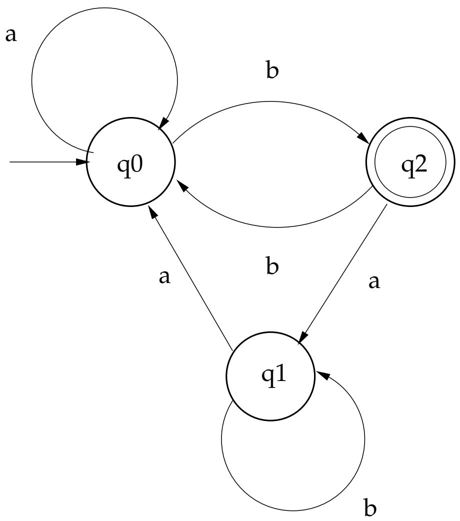
a) Geben Sie an, ob das Problem in NP ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Wann ist ein Problem NP-hart?

c) Welche Methode kennen Sie prinzipiell, um zu zeigen, daß ein Problem NP-hart ist?

Aufgabe 8

Gegeben sei folgender NEA $\mathcal{A}$:



Verwenden Sie das Lemma von Arden, um zu $\mathcal{A}$ einen regulären Ausdruck α anzugeben mit $L(\mathcal{A}) = L(\alpha)$. Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.

Aufgabe 9

Für das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ und $L \subseteq \Sigma^*$ sei

$$equal(L) \;:=\; \{w \in \Sigma^* \mid w \in L \text{ und } |w|_a = |w|_b\}.$$

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Ist L regulär, so auch $equal(L)$.

b) Ist L entscheidbar, so auch $equal(L)$.