Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Informatik
Professur für Automatentheorie 21.02.2007

Grundlagen der Theoretischen Informatik

Prüfungsklausur

Studiengang Informatik, Medieninformatik und Ergänzungsstudiengang Softwaretechnik

Name:.................... **Vorname:**....................

Matrikelnummer:..

Aufgabe 1

Gegeben seien die Grammatiken G_1 und G_2:

- $G_1 = (N, \Sigma, P, S)$ mit
  $N = \{S, B, C\}$,
  $\Sigma = \{a, b, c\}$ und
  $P = \{S \to \varepsilon,\ S \to aS,\ S \to B,\ B \to \varepsilon,\ B \to bB,\ B \to C,\ C \to \varepsilon,\ C \to Cc\}$
- $G_2 = (N, \Sigma, P, S)$ mit
  $N = \{S, B, C, D\}$,
  $\Sigma = \{a, b, c\}$ und
  $P = \{S \to aSBC,\ S \to abC,\ CB \to DB,\ DB \to DC,\ DC \to BC,$
  $C \to c,\ bB \to bb\}$

Geben Sie für jede Grammatik $G \in \{G_1, G_2\}$ jeweils

a) das maximale i an, so dass G eine Typ-i Grammatik ist und

b) das maximale j an, so dass $L(G)$ eine Typ-j Sprache ist.

Begründen Sie die Wahl der i und j (vergessen Sie nicht zu formulieren, warum sie maximal sind).

Aufgabe 2

Welche der folgenden Aussage ist wahr bzw. nicht wahr? Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen. Für jede falsche Antwort erhalten Sie -1 Punkt (d.h. 1 Punkt wird abgezogen); für jede richtige Antwort $+1$ Punkt. Eine nicht gegebene Antwort wird mit 0 Punkten bewertet. Insgesamt können Sie für diese Aufgabe nicht weniger als 0 Punkte erhalten. Tragen Sie Ihre Antworten direkt in folgende Tabelle ein.

Antwort	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
wahr										
nicht wahr										

a) Die Ackermannfunktion wächst schneller als jede durch ein *LOOP*-Programm berechenbare Funktion.

b) Ist L in P und ist L NP-hart, dann ist $P = NP$.

c) Die Sprache $L = \{a^i \mid i \text{ ist eine Primzahl}\}$ ist eine reguläre Sprache.

d) $UNIV$ gehört zu $\mathcal{L}_0$.

e) Mithilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen kann bewiesen werden, dass eine Sprache L kontextfrei ist.

f) Sind L_1 und L_2 reguläre Sprachen, dann ist auch $(L_1 \cup L_2) \cdot (L_1 \cap L_2)^*$ regulär.

g) Das Erfüllbarkeitsproblem für aussagenlogische Formeln ist nicht entscheidbar.

h) Die Sprache $L = \{a^n b^{n+1} c^{n+2} | \ n \geq 1\}$ ist nicht kontextfrei.

i) Es ist entscheidbar, ob eine Turingmaschine $\mathcal{A}$ nur Wörter w mit $|w| \leq 5$ akzeptiert.

j) Das Komplement einer rekursiven Menge ist rekursiv.

Aufgabe 3

Gegeben sei das Wort $w = abac$ und die Grammatik G:
$G = (N, \Sigma, P, S)$ mit
$N = \{S, A, B, C, D\}$,
$\Sigma = \{a, b, c\}$ und
$P = \{S \to AB,\ A \to BA,\ A \to a, B \to AC,\ B \to BB,\ B \to b,\ C \to c,\ D \to AB\}$.

a) Ist die Grammatik G in *Chomsky*-Normalform? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Entscheiden Sie mithilfe des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus, ob $w \in L(G)$ gilt. Transformieren Sie, falls notwendig, G in *Chomsky*-Normalform und entfernen Sie zuvor, sofern vorhanden, nichtterminierende und nichterreichbare Symbole.

Aufgabe 4

Gegeben sei die Sprache $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_c\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$; $|w|_a$ ist die Anzahl der Vorkommen von a in w.

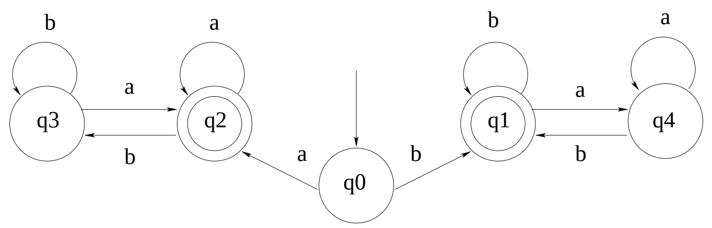
a) Entwerfen Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{A}$ mit $L(\mathcal{A}) = L$, der mit leerem Keller akzeptiert.

b) Welchen anderen Akzeptanzbegriff für Kellerautomaten kennen Sie aus der Vorlesung?

c) Welche Sprachklasse akzeptieren Kellerautomaten?

Aufgabe 5

Gegeben sei der folgende DEA $\mathcal{A}$:



a) Welche der folgenden Aussagen definiert genau die Sprache $L(\mathcal{A})$:

1. Die Wörter der Sprache enthalten eine ungerade Anzahl *a*s oder *b*s.
2. Die Wörter der Sprache enthalten gleich viele *a*s und *b*s.
3. Die Wörter beginnen und enden mit demselben Buchstaben.

b) Formulieren Sie das *Arden*-Lemma und wenden Sie es an, um einen regulären Ausdruck r mit $L(r) = L(\mathcal{A})$ anzugeben. Folgen Sie der Vorgehensweise aus der Vorlesung und weisen Sie dabei wichtige Zwischenergebnisse aus.

c) Geben Sie eine Grammatik G vom Typ 3 mit $L(G) = L(\mathcal{A})$ an. Begründen Sie für Ihre Grammatik den Typ 3.

Aufgabe 6

a) Zeigen Sie, wie man mithilfe des *WHILE*-Konstruktes das *LOOP*-Konstrukt simulieren kann. Benutzen Sie dazu y als neue Variable.

b) Geben Sie ein *WHILE*-Programm an, das die Funktion

$$f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x_1, x_2) \mapsto kgV(x_1, x_2)$$

berechnet und erklären Sie seine Arbeitsweise. Die Funktion f berechnet das *kleinste gemeinsame Vielfache* zweier natürlicher Zahlen.
Beachten Sie: $kgV(m, 0) = kgV(0, m) = 0$. Für die arithmetischen Operationen Multiplikation, Addition, modifizierte Differenz, Maximum, Minimum und Division mit Rest können Sie die Symbole $mult$, $+$, $\dot{-}$, max, min und div im Programm benutzen. (Beispiel: $x_{10} := max(x_{11}, x_{12})$)

c) Ist f μ-rekursiv? Geben Sie eine kurze Begründung an.

Aufgabe 7

Besitzen folgende Instanzen P_1, P_2 des Postschen Korrespondenzproblems *PKP* eine Lösung oder nicht? Geben Sie ggf. die Indexfolge einer Lösung an oder begründen Sie, warum es keine Lösung gibt.

a) $P_1 = (a, aba), (b, bab), (abab, ab)$

b) $P_2 = (ba, bab), (abb, bb), (bab, abb)$

Aufgabe 8

Bei dem Problem *Prob* sind zwei gerichtete Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ sowie eine positive ganze Zahl k gegeben.
Gefragt ist, ob es Teilmengen $V_1' \subseteq V_1$ und $V_2' \subseteq V_2$ mit $|V_1'| = |V_2'| = k$ sowie eine Bijektion $f : V_1' \to V_2'$ gibt, so dass für $f(u) = u'$ und $f(v) = v'$ gilt:
$(u, v) \in E_1$ gdw. $(u', v') \in E_2$.

a) Zeigen Sie, dass $Prob \in NP$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass *Prob* *NP*-hart ist, in dem Sie das aus der Vorlesung bekannte Problem *Clique* auf das Problem *Prob* reduzieren.

Aufgabe 9

Gegeben seien die Sprachen

$$L_1 = \{a^n b^n a^m b^m \mid n, m \geq 0\} \text{ und } L_2 = \{a^x b^y \mid x, y \geq 0\}.$$

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Begründen Sie Ihre Antworten - dabei dürfen Sie den gesamten Stoff und alle Resultate der Vorlesung und Übung verwenden.

a) $L_1 \cap L_2$ ist kontextfrei.

b) $L_1 \cdot L_2$ ist nicht entscheidbar.