Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Informatik
Professur für Automatentheorie

Wintersemester 06/07

Grundlagen der Theoretischen Informatik II

12. Übungsblatt

Hinweis

Folgende Aufgaben dienen der Selbstkontrolle und werden in der Übung nicht besprochen.

*) Folgende Variationen des primitiven Rekursionsverfahrens führen wieder zu primitiv rekursiven Funktionen:

a) Es seien $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Funktionen. Für die Funktion $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ gelte

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n, 0) &= g(x_1, \ldots, x_n) \\ f(x_1, \ldots, x_n, y+1) &= h(f(x_1, \ldots, x_n, y)). \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Sind g und h primitiv rekursiv, so auch f.

b) Es seien $g_1, g_2 : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ und $h_1, h_2 : \mathbb{N}^{n+3} \to \mathbb{N}$ Funktionen. Die Funktionen $f_i : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ entstehen aus g_1, g_2, h_1 und h_2 für $i \in \{1, 2\}$ durch *simultane Rekursion* wie folgt:

$$\begin{aligned} f_1(\vec{x}, 0) &= g_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}, 0) &= g_2(\vec{x}) \\ f_1(\vec{x}, y+1) &= h_1(\vec{x}, f_1(\vec{x}, y), f_2(\vec{x}, y), y) \\ f_2(\vec{x}, y+1) &= h_2(\vec{x}, f_1(\vec{x}, y), f_2(\vec{x}, y), y). \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Sind g_1, g_2, h_1 und h_2 primitiv rekursiv, so auch f_1 und f_2.
Beachte:
Verwenden Sie die Kodierungsfunktion $c : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ aus der Vorlesung.

Aufgabe 1

Man zeige, daß folgende Funktionen $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ LOOP-berechenbar sind:

a) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x, y) \mapsto x \dot{-} y$

b) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x, y) \mapsto mult(x, y)$

c) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x, y) \mapsto max(x, y)$

d) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x, y) \mapsto ggT(x, y)$

Aufgabe 2

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Jede berechenbare Funktion ist Turing-berechenbar.

b) Eine Relation R ist partiell entscheidbar gdw. R rekursiv aufzählbar ist.

c) Ist R nicht entscheidbar, so ist R oder $\bar{R}$ nicht partiell entscheidbar.

d) Wenn $R \subseteq (\Sigma^*)^n$ partiell entscheidbar ist, dann auch $\bar{R} = (\Sigma^*)^n \setminus R$.

Aufgabe 3

Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $x \mapsto \lfloor log_{10}(x) \rfloor$.

- Geben Sie ein WHILE-Programm an, das f berechnet.
- Notieren Sie f als μ-rekursive Funktion.