Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Informatik
Dr. Monika Sturm

Wintersemester 08/09

Funktionale Programmierung und Typtheorie

3. Übungsblatt

Aufgabe 1

Geben Sie für die folgenden Terme eine Wohltypung im $\lambda^{\rightarrow}$-Church-Kalkül an:

a) $(\lambda a : t_1.a)$

b) $b : t_2 \vdash (\lambda a : t_1.b)$

c) $b : t_1 \vdash (\lambda a : t_1.a)\, b$

d) $c : t_1, b : t_2 \vdash (\lambda a : t_1.b)\, c$

e) $(\lambda a : t_1.\lambda b : t_2.a)$

Aufgabe 2

Geben Sie für die folgenden Terme eine Wohltypung im $\lambda 2$-Church-Kalkül an:

a) $(\lambda a : t_1.a)$

b) $(\Lambda t_1.\lambda a : t_1.a)$

c) $(\Lambda t_1.\lambda a : t_1.a)\, t$

e) $b : t \vdash (\Lambda t_1.\lambda a : t_1.a)\, t\, b$

Aufgabe 3

Beweisen Sie folgende Aussage aus dem Typerhaltungstheorem des $\lambda \rightarrow$-Church-Kalküls:

$$e \Rightarrow_\beta e',\ \Gamma \vdash e : t \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash e' : t\,.$$

Aufgabe 4

Diskutieren Sie anhand geeigneter Beispiele die Aussage des Typerhaltungstheorems:
Die Menge der wohlgetypten Terme ist unter Reduktion abgeschlossen, aber nicht unter Expansion.

Aufgabe 5

Beweisen Sie folgende Aussage aus dem Satz zur Eindeutigkeit der Typung im $\lambda \rightarrow$-Church-Kalkül:

$$\Gamma \ \vdash \ e : t,\ \Gamma \ \vdash \ e' : t',\ e =_\beta e' \quad \Rightarrow \quad t \equiv t'\,.$$

Aufgabe 6

Leiten Sie für den Term $\lambda xyz.xz(yz)$ einen Typ im $\lambda \to$-Curry-Kalkül her. Entwickeln Sie dazu zunächst den Herleitungsbaum und stellen Sie das Gleichungssystem auf. Wenn der Term $\lambda xyz.xz(yz)$ im $\lambda \to$-Curry-Kalkül wohlgetypt ist, hat das Gleichungssystem eine Lösung.

Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass folgende Terme wohlgetypt im polymorphen $\lambda 2$-Kalkül (explizit getypt) sind:

a) $\Lambda a.\lambda x : a.\Lambda b.\lambda y : b.x : \forall a.(a \to \forall b.(b \to a))$

b) $\lambda x : \forall a.(a \to a).\Lambda b.x\ (b \to b)\ (x\ b) : (\forall a.(a \to a) \to \forall b.(b \to b))$.

Aufgabe 8

Entsprechend der Originalliteratur von *Barendregt* gibt es für den Term $\lambda x.xx$ folgende Wohltypungen im implizit getypten $\lambda 2$-Kalkül:

a) $\lambda x.xx : \forall a_2.(\forall a_1.a_1) \to a_2$

b) $\lambda x.xx : (\forall a.a \to a) \to (\forall a.a \to a)$

c) $\lambda x.xx : \forall a_2.(\forall a_1.a_1) \to (a_2 \to a_2)$

d) $\lambda x.xx : (\forall a.a) \to (\forall a.a)$.

Zeigen Sie mithilfe der Herleitungsbäume, dass die vier Aussagen richtig sind. Diskutieren Sie Ihre Lösungen im Vergleich der Typisierungsmöglichkeit des Terms im monomorphen Kalkül.