Übung 7 - Aufgabe 3

```
data BBaum a = Empty | Node a (BBaum a) (BBaum a)
```

Anzahl der Blätter stehen in Beziehung zur Höhe eines Baumes:

```
size Empty          = 0
size (Node _ l r )  = 1 + size l + size r

depth Empty         = 0
depth (Node _ l r ) = 1 + max (depth l, depth r)
```

Für beliebige Bäume vom Typ `BBaum a` gilt

$$size\, t \;\leq\; 2^{depth\, t} \;-\; 1\,.$$

Institut für Theoretische Informatik LV Funktionale Programmierung und Typtheorie

Übung 7 - Aufgabe 3

Induktionsanfang

$(t = Empty)$

$size\ Empty = 0 \;\leq\; 2^0 \;-\; 1 = 2^{depth\ Empty} \;-\; 1$

Induktionsschritt

$(t = Node\ a\ l\ r)$

Aussage gilt für l und r.

$2^{depth\,(Node\ a\ l\ r)} - 1 = 2^{1+max(depth\, l, depth\, r)} - 1 = 2 * 2^{max(depth\, l, depth\, r)} - 1$

$size\ (Node\ a\ l\ r) = 1 \;+\; size\ l \;+\; size\ r$

$\leq\; 1 \;+\; (2^{depth\ l} - 1) \;+\; (2^{depth\ r} - 1) \quad \text{(IV)}$

$=\; 2^{depth\ l} \;+\; 2^{depth\ r} \;-\; 1 \leq\; 2 \;*\; 2^{max(depth\, l, depth\, r)} \;-\; 1$