Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Informatik
Dr.-Ing. Monika Sturm

19.12.2008

Übungsblatt 7 - Beweis

Aussage

$$(\forall b \in M.(\forall a \in M.a \prec b \rightarrow P(a)) \rightarrow P(b)) \longrightarrow \forall b \in M.P(b)$$

In Worten

Wenn man für jedes $b \in M$ die Eigenschaft $P(b)$ unter der Voraussetzung, dass $P(a)$ für alle kleineren $a \prec b$ gilt, zeigen kann, dann gilt P für alle $b \in M$.

Beweis

Voraussetzung

Für alle $b \in M$ gelte

$$(\forall a \in M.a \prec b \rightarrow P(a)) \rightarrow P(b)).$$

Zu zeigen ist, dann gilt $P(b)$ für alle $b \in M$.

Annahme

Es gebe ein $b \in M$ derart, dass $P(b)$ nicht gilt.

Mit dieser Annahme ist $\bar{P} =_{Def} \{b \in M \mid \neg P(b)\} \subseteq M$ nicht leer.

Da $(M, \prec)$ eine Wohlordnung ist, enthält $\bar{P}$ ein kleinstes Element $b_0 \in \bar{P}$.

Das heißt aber, dass für alle kleineren $a \in M,\ a \prec b_0$ gilt: $a \notin \bar{P}$ und somit $P(a)$.

Damit gilt $(\forall a \in M.a \prec b_0 \rightarrow P(a))$ und nach Voraussetzung auch $P(b_0)$. Aber $b_0 \in \bar{P}$, d.h. $P(b_0)$ gilt nicht.

Widerspruch!