

# Funktionale Programmierung und Typtheorie

## 1. Übungsblatt

**Wiederholung (Berechenbarkeitsmodelle, Churchsche These, berechenbare Funktionen)**

### Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- a) Alle primitiv rekursiven Funktionen sind berechenbar.
- b) Ist eine Funktion  $f$  nicht primitiv rekursiv, dann ist  $f$  auch keine totale berechenbare Funktion.
- c) Jede Turing-berechenbare Funktion ist auch  $\mu$ -rekursiv.
- d) Es gibt Funktionen, die nicht berechenbar sind.
- e) Alle berechenbaren Funktionen sind  $\lambda$ -definierbar.

### Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die Funktion  $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(x, y) \mapsto \max(x, y)$  primitiv rekursiv ist.

### Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(x) \mapsto \lceil \sqrt{x} \rceil$   $\mu$ -rekursiv ist.

## Kapitel 2 (Ungetypter $\lambda$ -Kalkül)

### Aufgabe 4

Bestimmen Sie für folgende  $\lambda$ -Terme die Mengen der freien und gebundenen Variablen.

- a)  $\lambda y. xyy$
- b)  $xyy$
- c)  $(\lambda xy. f(xy))xy$

### Aufgabe 5

Führen Sie die folgenden Substitutionen aus. Bei welchen Beispielen sehen Sie Probleme? Begründen Sie Ihre Antworten.

- a)  $x[x := u]$

- b)  $(x\ x)[x := u]$
- c)  $(x\ y)[x := u]$
- d)  $(x\ u)[x := u]$
- e)  $x[x := (\lambda x.x)]$
- f)  $y[x := u]$
- g)  $(y\ z)[x := u]$
- h)  $(\lambda y.y)[x := u]$
- i)  $(\lambda x.x)[x := u]$
- j)  $(\lambda u.x)[x := u]$

### Aufgabe 6

Welche der folgenden Terme sind ineinander konvertierbar?

- a)  $(\lambda x.x) = (\lambda u.u)$
- b)  $(\lambda xy.x) = (\lambda vy.v)$
- c)  $(\lambda x.x(\lambda y.y)) = (\lambda y.y(\lambda y.y))$
- d)  $(\lambda x.z) = (\lambda z.z)$
- e)  $(\lambda x.z) = (\lambda x.y)$
- f)  $(\lambda x.((\lambda y.z)x)) = (\lambda x.z)$
- g)  $(\lambda uv.uv)vu = vu$
- h)  $(\lambda xyz.(xz)(yz))(\lambda u.u)(\lambda v.v) = (\lambda z.zz)$

### Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass die folgenden  $\lambda$ -Terme eine Normalform besitzen:

- a)  $((\lambda yz.zy)(\lambda x.xxx))(\lambda wx.x)$
- b)  $(\lambda y.yyy)((\lambda ab.a)(\lambda x.x)(ss))$  mit  $s \equiv \lambda xyz.xz(yz)$

### Aufgabe 8

Reduzieren Sie, wenn möglich, die folgenden Terme in ihre Normalform.

- a)  $(\lambda xy.xy)xy$
- b)  $(\lambda yx.xy)xy$
- c)  $(\lambda x.xy)(\lambda y.xy)$
- d)  $(\lambda x.xx)((\lambda y.y)(\lambda z.z))$