Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Informatik
Dr. Monika Sturm

Wintersemester 09/10

Funktionale Programmierung und Typtheorie

1. Übungsblatt

Wiederholung (Berechenbarkeitsmodelle, *Church*sche These, berechenbare Funktionen)

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Alle primitiv rekursiven Funktionen sind berechenbar.

b) Ist eine Funktion f nicht primitiv rekursiv, dann ist f auch keine totale berechenbare Funktion.

c) Jede Turing-berechenbare Funktion ist auch μ-rekursiv.

d) Es gibt Funktionen, die nicht berechenbar sind.

e) Alle berechenbaren Funktionen sind λ-definierbar.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ f(x, y) \mapsto max(x, y)$ primitiv rekursiv ist.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) \mapsto \lceil \sqrt{x} \rceil$ μ-rekursiv ist.

Kapitel 2 (Ungetypter λ-Kalkül)

Aufgabe 4

Bestimmen Sie für folgende λ-Terme die Mengen der freien und gebundenen Variablen.

a) $\lambda y.xyy$

b) xyy

c) $(\lambda xy.f(xy))xy$

Aufgabe 5

Führen Sie die folgenden Substitutionen aus. Bei welchen Beispielen sehen Sie Probleme? Begründen Sie Ihre Antworten.

a) $x[x := u]$

b) $(x\ x)[x := u]$

c) $(x\ y)[x := u]$

d) $(x\ u)[x := u]$

e) $x[x := (\lambda x.x)]$

f) $y[x := u]$

g) $(y\ z)[x := u]$

h) $(\lambda y.y)[x := u]$

i) $(\lambda x.x)[x := u]$

j) $(\lambda u.x)[x := u]$

Aufgabe 6

Welche der folgenden Terme sind ineinander konvertierbar?

a) $(\lambda x.x) = (\lambda u.u)$

b) $(\lambda xy.x) = (\lambda vy.v)$

c) $(\lambda x.x(\lambda y.y)) = (\lambda y.y(\lambda y.y))$

d) $(\lambda x.z) = (\lambda z.z)$

e) $(\lambda x.z) = (\lambda x.y)$

f) $(\lambda x.((\lambda y.z)x)) = (\lambda x.z)$

g) $(\lambda uv.uv)vu = vu$

h) $(\lambda xyz.(xz)(yz))(\lambda u.u)(\lambda v.v) = (\lambda z.zz)$

Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass die folgenden λ-Terme eine Normalform besitzen:

a) $((\lambda yz.zy)(\lambda x.xxx))(\lambda wx.x)$

b) $(\lambda y.yyy)((\lambda ab.a)(\lambda x.x)(ss))$ mit $s \equiv \lambda xyz.xz(yz)$

Aufgabe 8

Reduzieren Sie, wenn möglich, die folgenden Terme in ihre Normalform.

a) $(\lambda xy.xy)xy$

b) $(\lambda yx.xy)xy$

c) $(\lambda x.xy)(\lambda y.xy)$

d) $(\lambda x.xx)((\lambda y.y)(\lambda z.z))$