

Funktionale Programmierung und Typtheorie

3. Übungsblatt

Aufgabe 1

Im Beweis (2. Übungsblatt, Aufgabe 4) wurde als Hilfslemma die Aussage

$$\forall e \in C \text{ gilt } (\lambda^*x.e)_{CL-\lambda} \Rightarrow_{\beta} \lambda x.(e)_{CL-\lambda}$$

benutzt. Beweisen Sie diese Aussage induktiv über den strukturellen Aufbau von $e \in C$.

Aufgabe 2

Geben Sie für die folgenden Terme eine Wohltypung im λ^{\rightarrow} -Church-Kalkül an:

- a) $(\lambda a : t_1.a)$
- b) $b : t_2 \vdash (\lambda a : t_1.b)$
- c) $b : t_1 \vdash (\lambda a : t_1.a) b$
- d) $c : t_1, b : t_2 \vdash (\lambda a : t_1.b) c$
- e) $(\lambda a : t_1.\lambda b : t_2.a)$

Aufgabe 3

Geben Sie für die folgenden Terme eine Wohltypung im $\lambda 2$ -Church-Kalkül an:

- a) $(\lambda a : t_1.a)$
- b) $(\Lambda t_1.\lambda a : t_1.a)$
- c) $(\Lambda t_1.\lambda a : t_1.a) t$
- d) $b : t \vdash (\Lambda t_1.\lambda a : t_1.a) t b$

Aufgabe 4

Beweisen Sie folgende Aussage aus dem Typerhaltungstheorem des λ^{\rightarrow} -Church-Kalküls:

$$e \Rightarrow_{\beta} e', \Gamma \vdash e : t \Rightarrow \Gamma \vdash e' : t.$$

Aufgabe 5

Diskutieren Sie anhand geeigneter Beispiele die Aussage des Typerhaltungstheorems:

Die Menge der wohlgetypten Terme ist unter Reduktion abgeschlossen, aber nicht unter Expansion.

Aufgabe 6

Beweisen Sie folgende Aussage aus dem Satz zur Eindeutigkeit der Typung im λ^\rightarrow -Church-Kalkül:

$$\Gamma \vdash e : t, \Gamma \vdash e' : t', e =_\beta e' \Rightarrow t \equiv t'.$$

Aufgabe 7

Leiten Sie für den Term $\lambda xyz.xz(yz)$ einen Typ im λ^\rightarrow -Curry-Kalkül her. Entwickeln Sie dazu zunächst den Herleitungsbaum und stellen Sie das System der Typgleichungen auf. Wenn der Term $\lambda xyz.xz(yz)$ im λ^\rightarrow -Curry-Kalkül wohlgetypt ist, hat das Gleichungssystem eine Lösung.

Aufgabe 8

Zeigen Sie, dass folgende Terme wohlgetypt im polymorphen $\lambda 2$ -Kalkül (explizit getypt) sind:

- a) $\Lambda a.\lambda x : a.\Lambda b.\lambda y : b.x : \forall a.(a \rightarrow \forall b.(b \rightarrow a))$
- b) $\lambda x : \forall a.(a \rightarrow a).\Lambda b.x (b \rightarrow b) (x b) : (\forall a.(a \rightarrow a) \rightarrow \forall b.(b \rightarrow b)).$

Aufgabe 9

Für den Term $\lambda x.xx$ sind folgende Typungen im implizit getypten $\lambda 2$ -Kalkül gegeben:

- a) $\lambda x.xx : \forall a_2.(\forall a_1.a_1) \rightarrow a_2$
- b) $\lambda x.xx : (\forall a.a \rightarrow a) \rightarrow (\forall a.a \rightarrow a)$
- c) $\lambda x.xx : \forall a_2.(\forall a_1.a_1) \rightarrow (a_2 \rightarrow a_2)$
- d) $\lambda x.xx : (\forall a.a) \rightarrow (\forall a.a).$

Zeigen Sie, dass die vier angegebenen Typen Wohltypungen des Terms sind. Diskutieren Sie Typisierungsmöglichkeiten des vorliegenden Terms im monomorph getypten Kalkül.