Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Informatik
Dr. Monika Sturm

Wintersemester 09/10

Funktionale Programmierung und Typtheorie

3. Übungsblatt

Aufgabe 1

Im Beweis (2. Übungsblatt, Aufgabe 4) wurde als Hilfslemma die Aussage

$$\forall e \in C \text{ gilt } (\lambda^* x.e)_{CL-\lambda} \Rightarrow_\beta \lambda x.(e)_{CL-\lambda}$$

benutzt. Beweisen Sie diese Aussage induktiv über den strukturellen Aufbau von $e \in C$.

Aufgabe 2

Geben Sie für die folgenden Terme eine Wohltypung im $\lambda^{\rightarrow}$-Church-Kalkül an:

a) $(\lambda a : t_1.a)$

b) $b : t_2 \vdash (\lambda a : t_1.b)$

c) $b : t_1 \vdash (\lambda a : t_1.a)\, b$

d) $c : t_1, b : t_2 \vdash (\lambda a : t_1.b)\, c$

e) $(\lambda a : t_1.\lambda b : t_2.a)$

Aufgabe 3

Geben Sie für die folgenden Terme eine Wohltypung im $\lambda 2$-Church-Kalkül an:

a) $(\lambda a : t_1.a)$

b) $(\Lambda t_1.\lambda a : t_1.a)$

c) $(\Lambda t_1.\lambda a : t_1.a)\, t$

d) $b : t \vdash (\Lambda t_1.\lambda a : t_1.a)\, t\, b$

Aufgabe 4

Beweisen Sie folgende Aussage aus dem Typerhaltungstheorem des $\lambda^{\rightarrow}$-Church-Kalküls:

$$e \Rightarrow_\beta e',\ \Gamma \vdash e : t \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash e' : t\,.$$

Aufgabe 5

Diskutieren Sie anhand geeigneter Beispiele die Aussage des Typerhaltungstheorems:

Die Menge der wohlgetypten Terme ist unter Reduktion abgeschlossen, aber nicht unter Expansion.

Aufgabe 6

Beweisen Sie folgende Aussage aus dem Satz zur Eindeutigkeit der Typung im $\lambda^{\rightarrow}$-Church-Kalkül:

$$\Gamma \vdash e : t,\ \Gamma \vdash e' : t',\ e =_\beta e' \ \Rightarrow\ t \equiv t'.$$

Aufgabe 7

Leiten Sie für den Term $\lambda xyz.xz(yz)$ einen Typ im $\lambda^{\rightarrow}$-Curry-Kalkül her. Entwickeln Sie dazu zunächst den Herleitungsbaum und stellen Sie das System der Typgleichungen auf. Wenn der Term $\lambda xyz.xz(yz)$ im $\lambda^{\rightarrow}$-Curry-Kalkül wohlgetypt ist, hat das Gleichungssystem eine Lösung.

Aufgabe 8

Zeigen Sie, dass folgende Terme wohlgetypt im polymorphen $\lambda 2$-Kalkül (explizit getypt) sind:

a) $\Lambda a.\lambda x : a.\Lambda b.\lambda y : b.x : \forall a.(a \rightarrow \forall b.(b \rightarrow a))$

b) $\lambda x : \forall a.(a \rightarrow a).\Lambda b.x\ (b \rightarrow b)\ (x\ b) : (\forall a.(a \rightarrow a) \rightarrow \forall b.(b \rightarrow b))$.

Aufgabe 9

Für den Term $\lambda x.xx$ sind folgende Typungen im implizit getypten $\lambda 2$-Kalkül gegeben:

a) $\lambda x.xx : \forall a_2.(\forall a_1.a_1) \rightarrow a_2$

b) $\lambda x.xx : (\forall a.a \rightarrow a) \rightarrow (\forall a.a \rightarrow a)$

c) $\lambda x.xx : \forall a_2.(\forall a_1.a_1) \rightarrow (a_2 \rightarrow a_2)$

d) $\lambda x.xx : (\forall a.a) \rightarrow (\forall a.a)$.

Zeigen Sie, dass die vier angegebenen Typen Wohltypungen des Terms sind. Diskutieren Sie Typisierungsmöglichkeiten des vorliegenden Terms im monomorph getypten Kalkül.