Technische Universität Dresden
Fachrichtung Mathematik

Institut für Algebra

# Bindungen

Diplomarbeit
zur Erlangung des ersten akademischen Grades

**Diplommathematiker**

vorgelegt von

Name: Borgwardt Vorname: Stefan

geboren am: 06.11.1986 in: Halle/Saale

Tag der Einreichung: 03.08.2010

Betreuer: Prof. Dr. Bernhard Ganter

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einleitung

Die formale Begriffsanalyse ist eine mathematische Methode zur Darstellung von Begriffshierarchien auf der Grundlage einfacher Inzidenzstrukturen, genannt formale Kontexte. Die durch einen Kontext bestimmten Begriffe können zu einem vollständigen Verband geordnet werden. Das zentrale Resultat der Begriffsanalyse ist die Äquivalenz von Kontexten und vollständigen Verbänden. Darauf aufbauend kann man viele Konstruktionen auf beiden Seiten finden, die durch diese Äquivalenz aufeinander abgebildet werden, wie z. B. die Kontextsumme und das direkte Produkt vollständiger Verbände.

Für diese Arbeit ist außerdem die Kategorientheorie von Bedeutung. Sie beschäftigt sich mit der Modellierung von Beziehungen zwischen gleichartigen Objekten. Sogenannte Morphismen lassen sich dabei als verallgemeinerte Abbildungen zwischen den Objekten verstehen. Aufbauend auf diesem Graphen aus Objekten und Morphismen lassen sich verschiedene Konstruktionen auf höherer Ebene beschreiben, wie z. B. Limites und Tensorprodukte.

Diese Arbeit ist ein Versuch, die Bedeutung von Morphismen in der formalen Begriffsanalyse zu analysieren. Sogenannte Bindungen zwischen formalen Kontexten stehen in eindeutiger Beziehung zu $\bigvee$-erhaltenden Morphismen zwischen ihren Begriffsverbänden. Die Äquivalenz der beiden daraus resultierenden Kategorien ist eine kanonische Fortsetzung der grundlegenden Äquivalenz von formalen Kontexten und vollständigen Verbänden.

Dies ist nicht die einzige Möglichkeit für die Wahl von Morphismen zwischen Kontexten – es wurden bereits vielfältige Varianten untersucht ([Ern05, BS97, Krö05, KHZ05]). Die Besonderheit von Bindungen liegt zum einen in der engen Beziehung zu einigen anderen Konstruktionen in der formalen Begriffsanalyse. Zum anderen sind Bindungen binäre Relationen und als solche eng verwandt mit den formalen Kontexten selbst. Das Ziel ist im Folgenden, möglichst viel über die Rolle von Bindungen als Morphismen in der Begriffsanalyse herauszufinden.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert. In Kapitel 2 wird die formale Grundlage für die restliche Arbeit gelegt, insbesondere werden die benötigten Begriffe der formalen Begriffsanalyse und der Kategorientheorie eingeführt. Daran schließt sich in Kapitel 3 eine Darstellung der Kategorien von Kontexten mit Bindungen bzw. vollständigen Verbänden mit $\bigvee$-erhaltenden Morphismen an. Dabei steht die Äquivalenz der beiden Kategorien im Vordergrund. Der Rest des dritten Kapitels widmet sich einer genaueren Darstellung der beiden Kategorien und des Tensorprodukts auf ihnen, sowie einer Analyse von Alternativen für die Wahl der Morphismen. In Kapitel 4 werden Bindungen als vollwertige Kontexte betrachtet und einige Resultate abgeleitet. Kapitel 5 stellt Beziehungen zwischen Bindungen und anderen begriffsanalytischen Objekten her. Zum Abschluss enthält Kapitel 6 eine Zusammenfassung und Diskussion der dargestellten Zusammenhänge im Kontext anderer Literatur.

# 2 Grundlagen

In diesem Kapitel werden die mathematischen Grundlagen dieser Arbeit festgehalten. Es enthält eine Einführung in die drei Gebiete der Ordnungs- und Verbandstheorie, der formalen Begriffsanalyse und der Kategorientheorie. Die Begriffe und Notationen der Mengenlehre und Prädikatenlogik werden vorausgesetzt.

## 2.1 Ordnungs- und Verbandstheorie

Die grundlegenden Begriffe der Ordnungs- und Verbandstheorie sind z. B. in [GW96, Grä03] zu finden. Es wird die Kenntnis der Begriffe geordnete Menge, ordnungserhaltende Abbildung, vollständiger Verband, $\vee$-Morphismus, Vollhomomorphismus, etc. vorausgesetzt. Die für diese Arbeit wichtigen Begriffe werden nun explizit eingeführt.

**Definition 2.1** Für eine geordnete Menge $\mathbb{P} = (P, \leq_{\mathbb{P}})$ bezeichne $\mathbb{P}^* = (P, \geq_{\mathbb{P}})$ die *duale geordnete Menge.*

Seien $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$ geordnete Mengen. Ein Paar $(\varphi, \psi)$ von Abbildungen $\varphi : P \to Q$ und $\psi : Q \to P$ heißt *Adjunktion (von* $\mathbb{P}$ *nach* $\mathbb{Q}$*)*, wenn für alle $p \in P$, $q \in Q$ Folgendes gilt:

$$\varphi p \leq q \Leftrightarrow p \leq \psi q$$

In diesem Fall heißt $\varphi$ *residuiert* und $\psi$ *residual (dual residuiert)*. Die Menge aller residuierten Abbildungen zwischen $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ wird mit $\mathbf{Res}(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ bezeichnet.

Eine Adjunktion $(\varphi, \psi)$ von $\mathbb{P}$ nach $\mathbb{Q}^*$ heißt auch *Galois-Verbindung von* $\mathbb{P}$ *nach* $\mathbb{Q}$. $\diamondsuit$

Unter bestimmten Umständen ist der Begriff der Galois-Verbindung besser geeignet, weil er symmetrisch ist: Eine Galois-Verbindung von $\mathbb{P}$ nach $\mathbb{Q}$ ist zugleich auch eine Galois-Verbindung von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{P}$, wenn man die beiden Teilabbildungen vertauscht. Für Adjunktionen lässt sich hingegen leichter eine Komposition definieren, indem die entsprechenden Teilabbildungen komponiert werden (siehe Hilfssatz 2.4).

**Hilfssatz 2.2** *Seien* $\mathbb{V}$ *und* $\mathbb{W}$ *vollständige Verbände. Wenn* $(\varphi, \psi)$ *eine Adjunktion von* $\mathbb{V}$ *nach* $\mathbb{W}$ *ist, so ist* $\varphi$ *ein* $\vee$*-Morphismus und* $\psi$ *ein* $\wedge$*-Morphismus.* $\varphi$ *ist genau dann surjektiv, wenn* $\psi$ *injektiv ist, und umgekehrt.*

*Jeder* $\vee$*-Morphismus* $\varphi$ *ist residuiert mit der eindeutig bestimmten residualen Abbildung* $\psi w := \bigvee\{v \in V \mid \varphi v \leq w\}$ *(für alle* $w \in W$*). Ebenso ist für einen* $\wedge$*-Morphismus die eindeutig bestimmte residuierte Abbildung gegeben durch* $\varphi v := \bigwedge\{w \in W \mid v \leq \psi w\}$ *(für alle* $v \in V$*).*

*Beweis:* [GW96, Hilfssatz 9] $\square$

Es ist also gerechtfertigt, wenn im Folgenden die Begriffe *residuierte Abbildung* und $\vee$-*Morphismus* synonym verwendet werden. Außerdem ist offenbar jede Adjunktion $(\varphi, \psi)$ bereits durch $\varphi$ oder $\psi$ eindeutig bestimmt.

**Definition 2.3** Da für eine Adjunktion $(\varphi, \psi)$ die beiden Abbildungen einander eindeutig bestimmen, kann man $\varphi^* := \psi$ und $\psi_* := \varphi$ definieren. $\diamondsuit$

Führt man zwei residuierte Abbildungen hintereinander aus, so ergibt sich wieder eine residuierte Abbildung. Deren zugehörige residuale Abbildung ergibt sich aus der Komposition der Residualen der Teilabbildungen, in umgekehrter Reihenfolge. Auf diese Weise ist also die Kompostion von Adjunktionen möglich.

**Hilfssatz 2.4** *Seien* $\varphi_1 \in \mathbf{Res}(\mathbb{U}, \mathbb{V})$ *und* $\varphi_2 \in \mathbf{Res}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. *Dann gilt* $(\varphi_1 * \varphi_2)^* = \varphi_2^* * \varphi_1^*$.

*Beweis:* Für alle $w \in \mathbb{W}$ gilt

$$\begin{aligned}
(\varphi_1 * \varphi_2)^*(w) &= \bigvee\{u \in \mathbb{U} \mid \varphi_2(\varphi_1(u)) \leq w\} \\
&= \bigvee\left\{u \in \mathbb{U} \mid \varphi_1(u) \leq \bigvee\{v \in \mathbb{V} \mid \varphi_2(v) \leq w\}\right\} \\
&= \varphi_1^*\Big(\bigvee\{v \in \mathbb{V} \mid \varphi_2(v) \leq w\}\Big) \\
&= \big(\varphi_2^* * \varphi_1^*\big)(w)
\end{aligned}$$
$\square$

Ordnet man die die residuierten Abbildungen von $\mathbb{V}$ nach $\mathbb{W}$ punktweise, so ergibt sich ein vollständiger Verband.

**Hilfssatz 2.5** *Seien* $\mathbb{V}$ *und* $\mathbb{W}$ *vollständige Verbände. Die Menge* $\mathbf{Res}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ *zusammen mit der Ordnung, die durch* $\varphi_1 \leq \varphi_2 :\Leftrightarrow \forall v \in V : \varphi_1(v) \leq \varphi_2(v)$ *definiert wird, bildet einen vollständigen Verband* $\underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$.

*Beweis:* Das Supremum bzw. Infimum einer Menge von residuierten Abbildungen lässt sich genau wie die Ordnung punktweise definieren. Dies ergibt wieder eine residuierte Abbildung, denn das Bilden von Suprema bzw. Infima ist assoziativ. Dass dies wirklich das Supremum bzw. Infimum in $\underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ ist, lässt sich leicht aus der Definition folgern. $\square$

Ein weiterer natürlicher Begriff ist der der $\vee$-Kongruenz auf einem vollständigen Verband.

**Definition 2.6** Eine Relation $\Theta \subseteq V \times V$ auf einem vollständigen Verband $\mathbb{V}$ heißt *vollständige* $\vee$-*Kongruenzrelation*, falls sie eine Äquivalenzrelation ist, die außerdem mit Suprema verträglich ist, d. h. für alle $(x_t)_{t \in T}, (y_t)_{t \in T} \in V^T$ gilt

$$x_t \Theta y_t \text{ für alle } t \in T \implies \left(\bigvee_{t \in T} x_t\right) \Theta \left(\bigvee_{t \in T} y_t\right).$$
$\diamondsuit$

Die $\vee$-Kongruenzen auf einem vollständigen Verband sind genau die Kerne von $\vee$-Morphismen, die diesen Verband als Urbild haben. Außerdem gilt der folgende Zusammenhang zwischen Kern und Bild für alle $\vee$-Morphismen.

**Satz 2.7 (Homomorphiesatz)** *Seien* $\mathbb{V}$ *und* $\mathbb{W}$ *vollständige* $\vee$-*Halbverbände sowie* $\varphi : V \to W$ *eine residuierte Abbildung. Dann ist* $\ker \varphi$ *eine vollständige* $\vee$-*Kongruenzrelation auf* $\mathbb{V}$ *und* $\operatorname{im} \varphi$ *ein vollständiger* $\vee$-*Unterhalbverband von* $\mathbb{W}$ *und es gilt*

$$\mathbb{V}/_{\ker \varphi} \cong \operatorname{im} \varphi$$
$\square$

Ähnliche Aussagen gelten natürlich auch für vollständige $\wedge$-Kongruenzen und vollständige Kongruenzen auf vollständigen Verbänden. Zum Abschluss dieses Abschnitts folgt ein Hilfssatz, der Beziehungen zwischen Bildern und Kernen residuierter Abbildungen herstellt.

**Hilfssatz 2.8** *Seien $\mathbb{U}$, $\mathbb{V}$ und $\mathbb{W}$ vollständige Verbände, $\alpha : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ surjektiv, $\beta : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ injektiv und $\gamma : \mathbb{U} \to \mathbb{W}$.*

a) $\ker \alpha \subseteq \ker \gamma$ *gilt genau dann, wenn es eine Abbildung $\beta' : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ gibt mit $\gamma = \alpha * \beta'$.*

   *Gilt* $\ker \alpha \subseteq \ker \gamma$ *und ist $\gamma$ surjektiv, so ist auch $\beta'$ surjektiv. Sind $\alpha$ und $\gamma$ außerdem residuiert, so ist auch $\beta'$ residuiert.*

b) $\operatorname{im} \gamma \subseteq \operatorname{im} \beta$ *gilt genau dann, wenn es eine Abbildung $\alpha' : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ gibt mit $\gamma = \alpha' * \beta$.*

   *Gilt* $\operatorname{im} \gamma \subseteq \operatorname{im} \beta$ *und ist $\gamma$ injektiv, so ist auch $\alpha'$ injektiv. Sind $\beta$ und $\gamma$ außerdem residuiert, so ist auch $\alpha'$ residuiert.*

*Beweis:*

*a)* Angenommen, solch ein $\beta'$ existiert und es seien $u_1, u_2 \in \mathbb{U}$ mit $\alpha(u_1) = \alpha(u_2)$. Dann folgt $\gamma(u_1) = \beta'(\alpha(u_1)) = \beta'(\alpha(u_2)) = \gamma(u_2)$.

   Sei umgekehrt $\ker \alpha \subseteq \ker \gamma$ und sei $\beta'$ definiert durch $v \mapsto \gamma(u_v)$, wobei $u_v \in \mathbb{U}$ ein beliebiges Element mit $\alpha(u_v) = v$ ist, das wegen Surjektivität von $\alpha$ existieren muss. Dann ist $\beta'$ wohldefiniert, denn für $v = \alpha(u_{v,1}) = \alpha(u_{v,2})$ folgt nach Voraussetzung sofort $\gamma(u_{v,1}) = \gamma(u_{v,1})$. Außerdem gilt $\beta'(\alpha(u)) = \gamma(u)$ für alle $u \in \mathbb{U}$.

   Ist $\gamma$ surjektiv, dann ist $\beta'$ surjektiv, denn für jedes $w \in \mathbb{W}$ gibt es ein $u \in \mathbb{U}$ mit $\gamma(u) = w$ und damit $\beta'(\alpha(u)) = w$.

   Sind $\alpha$ und $\gamma$ residuiert, dann gilt

$$\beta'\Big(\bigvee_{t\in T} \alpha(u_t)\Big) = \beta'\Big(\alpha\Big(\bigvee_{t\in T} u_t\Big)\Big) = \gamma\Big(\bigvee_{t\in T} u_t\Big) = \bigvee_{t\in T} \gamma(u_t) = \bigvee_{t\in T} \beta'(\alpha(u_t))$$

   für jede Familie $(u_t)_{t\in T}$ in $\mathbb{U}$. Wegen Surjektivität von $\alpha$ folgt damit, dass $\beta'$ residuiert ist.

*b)* Angenommen, solch ein $\alpha'$ existiert und es seien $w \in \operatorname{im} \gamma$ und $u \in \mathbb{U}$ mit $w = \gamma(u)$. Dann ist $w$ das Bild von $\alpha'(u)$ unter $\beta$, also $w \in \operatorname{im} \beta$.

   Sei umgekehrt $\operatorname{im} \gamma \subseteq \operatorname{im} \beta$ und sei $\alpha'$ definiert durch $u \mapsto \beta^{-1}(\gamma(u))$. Dann ist $\alpha'$ wohldefiniert, denn das Element $\gamma(u) \in \mathbb{W}$ hat wegen $\operatorname{im} \gamma \subseteq \operatorname{im} \beta$ und Injektivität von $\beta$ genau ein Urbild unter $\beta$. Außerdem gilt $\beta(\alpha'(u)) = \gamma(u)$ für alle $u \in \mathbb{U}$.

   Ist $\gamma$ injektiv, dann ist $\alpha'$ injektiv, denn aus $\alpha'(u_1) = \alpha'(u_2)$ folgt $\gamma(u_1) = \gamma(u_2)$ und daraus $u_1 = u_2$.

   Sind $\beta$ und $\gamma$ residuiert, so ist auch $\beta^{-1}$ residuiert und damit auch $\alpha'$ als Komposition von $\gamma$ und $\beta^{-1}$. □

## 2.2 Formale Begriffsanalyse

Die formale Begriffsanalyse beschäftigt sich mit der abstrakten Modellierung von Daten. Ihr zentrales Studienobjekt, der formale Kontext, stellt eine Beziehung zwischen verschiedenen Grundmengen her. Formale Kontexte können auf verschiedene Weise interpretiert und kombiniert werden. Die Grundlagen der formalen Begriffsanalyse sind in [GW96] zu finden. Die Kenntnis der Grundbegriffe wie formaler Kontext, Inhalt, Umfang, Begriffsverband, etc. wird im Folgenden vorausgesetzt.

Bildet man zu einem Kontext $\mathbb{K} = (G, M, I)$ den *dualen Kontext* $\mathbb{K}^* = (M, G, I^{-1})$, so erkennt man leicht anhand der Definitionen, dass $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}^*) = \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})^*$ gilt, da die Funktion von Gegenständen und Merkmalen vertauscht wurde. Dies ist ein einfaches Beispiel für eine Konstruktion auf formalen Kontexten, die eine eindeutige Beschreibung durch die Begriffsverbände erlaubt. Es können noch viele weitere solche Beziehungen hergestellt werden.

Jede geordnete Menge lässt sich über die folgende Konstruktion, die Dedekind-MacNeille-Vervollständigung, zu einen vollständigen Verband erweitern.

**Satz 2.9** *Sei $\mathbb{P}$ eine geordnete Menge. Der Kontext $\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{P}) := (P, P, \leq_{\mathbb{P}})$ heißt* vollständiger Kontext zu $\mathbb{P}$. *Der vollständige Verband $\underline{\mathfrak{B}}(\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{P}))$ heißt* Vervollständigung von $\mathbb{P}$ *und die Abbildung $\iota : \mathbb{P} \to \underline{\mathfrak{B}}(\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{P})) : p \mapsto (p^{\downarrow}, p^{\uparrow})$ ist eine Ordnungseinbettung.*

*Falls $\mathbb{P}$ bereits ein vollständiger Verband ist, so ist $\iota$ ein Isomorphismus mit der Inversen $\iota^{-1} : (A, B) \mapsto \bigvee A = \bigwedge B$.*

*Beweis:* [GW96, Satz 4] □

Als nächstes soll die Frage geklärt werden, durch welche Strukturen Abbildungen zwischen Begriffsverbänden auf der Ebene der formalen Kontexte beschrieben werden können. Es wird sich später herausstellen, dass *Bindungen* zwischen Kontexten den $\vee$-Morphismen zwischen ihren Begriffsverbänden entsprechen.

**Definition 2.10** Seien $\mathbb{K}_i = (G_i, M_i, I_i)$ $(i = 1, 2)$ Kontexte. $R \subseteq G_1 \times M_2$ heißt *Bindung (von $\mathbb{K}_1$ nach $\mathbb{K}_2$)*, falls

- $g^R$ für alle $g \in G_1$ ein Begriffsinhalt von $\mathbb{K}_2$ ist und
- $m^R$ für alle $m \in M_2$ ein Begriffsumfang von $\mathbb{K}_1$ ist.

**Bind**$(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2)$ bezeichne die Menge aller Bindungen von $\mathbb{K}_1$ nach $\mathbb{K}_2$ und **Bind**$(\mathbb{K}_1)$ die Menge aller Bindungen von $\mathbb{K}_1$ nach $\mathbb{K}_1$.

Bindungen von $\mathbb{K}_1$ nach $\mathbb{K}_2^*$ heißen auch *duale Bindungen von $\mathbb{K}_1$ nach $\mathbb{K}_2$*. ◊

Es folgen einige Hilfsaussagen für den Umgang mit formalen Kontexten und Bindungen.

**Hilfssatz 2.11** *Seien $\mathbb{K}_i = (G_i, M_i, I_i)$ $(i = 1, 2)$ Kontexte und $R \subseteq G_1 \times M_2$ eine Bindung von $\mathbb{K}_1$ nach $\mathbb{K}_2$. Dann gilt für alle $A \subseteq G_1$ und $B \subseteq M_2$:*

$$A^{I_1 I_1 R} = A^R \text{ und } B^{I_2 I_2 R} = B^R$$

*Beweis:* Es gilt $A \subseteq A^{I_1 I_1} \subseteq A^{RR}$, da $A^{RR}$ ein Umfang in $\mathbb{K}_1$ ist, der $A$ enthält. Damit ergibt sich $A^R = A^{RRR} \subseteq A^{I_1 I_1 R} \subseteq A^R$, also die erste Gleichung. Die zweite ergibt sich aus dem dualen Argument. □

**Hilfssatz 2.12** *Seien $\mathbb{K}_i = (G_i, M_i, I_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ Kontexte und $R_1$ eine Bindung von $\mathbb{K}_1$ nach $\mathbb{K}_2$ sowie $R_2$ eine Bindung von $\mathbb{K}_2$ nach $\mathbb{K}_3$. Dann gilt für alle $g \in G_1$, $m \in M_3$:*

$$m \in g^{R_1 I_2 R_2} \Leftrightarrow g^{R_1 I_2} \subseteq m^{R_2} \Leftrightarrow m^{R_2 I_2} \subseteq g^{R_1} \Leftrightarrow g \in m^{R_2 I_2 R_1}$$

*Beweis:* (vgl. [GW96, Hilfssatz 83])

Die erste Äquivalenz ergibt sich folgendermaßen:

- $m \in g^{R_1 I_2 R_2} \Rightarrow g^{R_1 I_2} \subseteq g^{R_1 I_2 R_2 R_2} \subseteq m^{R_2}$
- $g^{R_1 I_2} \subseteq m^{R_2} \Rightarrow m \in m^{R_2 R_2} \subseteq g^{R_1 I_2 R_2}$

Die letzte Äquivalenz folgt aus der dualen Argumentation. Die mittlere ergibt sich aus der Tatsache, dass $m^{R_2}$ ein Umfang von $\mathbb{K}_2$ ist und $g^{R_1}$ ein Inhalt von $\mathbb{K}_2$ ist. □

Ähnlich wie die residuierten Abbildungen zwischen vollständigen Verbänden, können auch die Bindungen zwischen Kontexten in einem vollständigen Verband angeordnet werden.

**Hilfssatz 2.13** *Seien $\mathbb{K}_i := (G_i, M_i, I_i)$ $(i = 1, 2)$ Kontexte. Die Menge* $\mathbf{Bind}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2)$*, geordnet durch Inklusion, bildet einen vollständigen Verband,* $\underline{\mathbf{Bind}}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2)$*.*

*Beweis:* Man erkennt leicht an der Definition, dass die Menge $\mathbf{Bind}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2)$ unter Durchschnitt abgeschlossen ist, wodurch das Infimum einer beliebigen Menge von Bindungen bestimmt ist. Daraus ergibt sich sofort ein vollständiger Verband mit der Inklusionsordnung. Allerdings ist dieser kein vollständiger Unterverband von $\mathcal{P}(G_1 \times M_2)$, denn die Vereinigung von Bindungen muss nicht notwendig wieder eine Bindung sein. □

## 2.3 Kategorientheorie

Um die Beziehungen zwischen Kontexten und Bindungen näher zu untersuchen, bietet sich die Kategorientheorie an. Sie beschäftigt sich mit einer allgemeinen Modellierung von Objekten und Beziehungen. Der Inhalt dieses Abschnitts ist in vielen Abhandlungen über die Grundlagen der Kategorientheorie wiederzufinden (z. B. [Bor94]).

Die einer Kategorie zugrunde liegende Struktur ist ein (gerichteter) Graph.

**Definition 2.14** Ein *Klassengraph* ist ein Tupel $(E, K, \sigma, \tau)$, bestehend aus einer Klasse $E$ von *Ecken*, einer Klasse $K$ von *Kanten*, einer *Anfangsknoten-Abbildung* $\sigma : K \to E$ und einer *Endknoten-Abbildung* $\tau : K \to E$. ♢

**Definition 2.15** Eine *Kategorie* $\mathcal{K}$ ist ein Tupel $(E, K, \sigma, \tau, 1^{\mathcal{K}}, \mu^{\mathcal{K}})$ mit den Eigenschaften:

- $(E, K, \sigma, \tau)$ ist ein Klassengraph.
- Die Ecken heißen *Objekte*. Die Klasse $E$ wird mit $\mathfrak{Ob}(\mathcal{K})$ bezeichnet.
- Die Kanten heißen *Morphismen*. Die Klasse $K$ wird mit $\mathfrak{Mor}(\mathcal{K})$ bezeichnet.
- Seien $A$ und $B$ zwei Objekte. Die Klasse aller Morphismen $f$ mit $\sigma(f) = A$ und $\tau(f) = B$ ist eine Menge und wird mit $\mathcal{K}(A, B)$ bezeichnet.
- Für jedes Objekt $A \in \mathfrak{Ob}(\mathcal{K})$ ist ein Morphismus $1_A^{\mathcal{K}} := 1^{\mathcal{K}}(A) \in \mathcal{K}(A, A)$ ausgezeichnet. Dieser wird *identischer Morphismus* oder *1-Morphismus* genannt.
- Für drei Objekte $A$, $B$ und $C$ sowie Morphismen $f \in \mathcal{K}(A, B)$, $g \in \mathcal{K}(B, C)$ wird $\mu^{\mathcal{K}}(f, g) \in \mathcal{K}(A, C)$ die *Komposition von $f$ und $g$* genannt.
- Für Objekte $A$ und $B$ sowie einen Morphismus $f \in \mathcal{K}(A, B)$ gilt

$$\mu^{\mathcal{K}}(1_A^{\mathcal{K}}, f) = f = \mu^{\mathcal{K}}(f, 1_B^{\mathcal{K}}). \qquad \text{(Neutrales Element)}$$

- Für Objekte $A$, $B$, $C$ und $D$ sowie Morphismen $f \in \mathcal{K}(A,B)$, $g \in \mathcal{K}(B,C)$ und $h \in \mathcal{K}(C,D)$ gilt
$$\mu^{\mathcal{K}}(f, \mu^{\mathcal{K}}(g,h)) = \mu^{\mathcal{K}}(\mu^{\mathcal{K}}(f,g), h). \qquad \text{(Assoziativität)}$$

$\mathcal{K}$ heißt *kleine Kategorie*, falls $\mathfrak{Ob}(\mathcal{K})$ eine Menge ist. $\diamondsuit$

**Bemerkungen**

- Um eine Kategorie zu definieren, reicht es aus, die Morphismenmengen $\mathcal{K}(A,B)$ für jedes Paar $(A,B)$ von Objekten festzulegen, anstatt $\sigma$ und $\tau$ explizit anzugeben.
- Für $f \in \mathcal{K}(A,B)$ wird auch die Notation $A \xrightarrow{f} B$ bzw. $f : A \to B$ genutzt, wenn klar ist, welche Kategorie gemeint ist.
- Analog zur Komposition von Abbildungen wird häufig auch $f *_{\mathcal{K}} g$ oder $g \circ_{\mathcal{K}} f$ anstelle von $\mu^{\mathcal{K}}(f,g)$ geschrieben. Falls $\mathcal{K}$ aus dem Zusammenhang erkennbar ist, wird auch einfach $f * g$, $g \circ f$ oder $\mu(f,g)$ geschrieben.
- Ebenso wird häufig $1_A$ anstatt $1_A^{\mathcal{K}}$ geschrieben.
- Man schreibt auch $A \in \mathcal{K}$ für $A \in \mathfrak{Ob}(\mathcal{K})$. $\triangleleft$

**Beispiel 2.16** Die Kategorie **Set** setzt sich wie folgt zusammen:

| | |
|---|---|
| **Objekte** | alle Mengen |
| **Morphismen** | $\mathbf{Set}(A,B) := \{f : A \to B\}$ |
| **Komposition** | normale Komposition von Abbildungen |
| **1-Morphismen** | $1_A := \mathrm{id}_A$ |

Man kann auch Kategorien für viele algebraische Strukturen definieren, wobei die Morphismen die entsprechenden Homomorphismen sind. Es ergibt sich z. B. die Kategorie **Group**:

| | |
|---|---|
| **Objekte** | alle Gruppen $\underline{G} = (G, \cdot, \cdot^{-1}, e)$ |
| **Morphismen** | $\mathbf{Group}(\underline{G}_1, \underline{G}_2) := \{f : \underline{G}_1 \to \underline{G}_2 \mid f \text{ Gruppenhomomorphismus}\}$ |
| **Komposition** | normale Komposition von Abbildungen |
| **1-Morphismen** | $1_{\underline{G}} := \mathrm{id}_G$ |

Die *triviale Kategorie* $\star$ ist die Kategorie mit einem Objekt $\star$ und einem Morphismus $1_\star$. $\triangleleft$

Die Objekte und Morphismen einer Kategorie werden oft grafisch als beschriftete Punkte und Pfeile dargestellt. Insbesondere kann man mit solchen *Diagrammen* sogenannte Kommutativitätsbedingungen gut ausdrücken. So werden Identitäten genannt, die zwischen Morphismen bestehen. Die Identität $f * g = h * k$ kann z. B. durch das folgende Diagramm veranschaulicht werden. Wenn sie in der Kategorie erfüllt ist, sagt man auch „das Diagramm *kommutiert*“ und markiert dies im Diagramm mit dem Symbol $///$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dd, "f"'] \arrow[ddrr, phantom, "///"] & & B \arrow[dd, "k"] \\ & & \\ C \arrow[rr, "g"] & & D \end{tikzcd}$$

**Definition 2.17** Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Kategorien.

Die zu $\mathcal{A}$ *duale Kategorie* $\mathcal{A}^{\text{op}}$ ist eine Kategorie mit:

| | |
|---|---|
| **Objekte** | $\mathfrak{Ob}(\mathcal{A}^{\text{op}}) := \mathfrak{Ob}(\mathcal{A})$ |
| **Morphismen** | $\mathcal{A}^{\text{op}}(A, B) := \mathcal{A}(B, A)$ |
| **Komposition** | $f *_{\mathcal{A}^{\text{op}}} f' := f' *_{\mathcal{A}} f$ |
| **1-Morphismen** | $1_A^{\mathcal{A}^{\text{op}}} := 1_A^{\mathcal{A}}$ |

Die *Produktkategorie* $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ist folgendermaßen definiert:

| | |
|---|---|
| **Objekte** | $\mathfrak{Ob}(\mathcal{A}) \times \mathfrak{Ob}(\mathcal{B})$ |
| **Morphismen** | $\mathfrak{Mor}((A, B), (A', B')) := \{(f, g) \mid A \xrightarrow{f} A', B \xrightarrow{g} B'\}$ |
| **Komposition** | $(f, g) * (f', g') := (f * f', g * g')$ |
| **1-Morphismen** | $1_{(A,B)} := (1_A, 1_B)$ |

$\mathcal{B}$ ist eine *Unterkategorie* von $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$), falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

| | |
|---|---|
| **Objekte** | $\mathfrak{Ob}(\mathcal{B}) \subseteq \mathfrak{Ob}(\mathcal{A})$ |
| **Morphismen** | $\mathcal{B}(A, B) \subseteq \mathcal{A}(A, B)$ |
| **Komposition** | $f *_{\mathcal{B}} g = f *_{\mathcal{A}} g$ |
| **1-Morphismen** | $1_A^{\mathcal{B}} = 1_A^{\mathcal{A}}$ |

◇

Die Dualität ist ein zentraler Begriff der Kategorientheorie und hängt eng mit der Konstruktion dualer Kategorien zusammen. Alle Definitionen und Aussagen, die Objekte und Morphismen einer Kategorie beinhalten, führen zu dualen Definitionen bzw. Aussagen, wenn sie für die duale Kategorie formuliert werden. So ist z. B. in der nächsten Definition der Begriff des Epimorphismus dual zu dem des Monomorphismus.

**Definition 2.18** Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie und $f \in \mathcal{A}(B, C)$.

$f$ heißt *Monomorphismus*, falls für alle $A \in \mathcal{A}$ und $g, g' \in \mathcal{A}(A, B)$ gilt, dass aus $g * f = g' * f$ bereits $g = g'$ folgt.

$f$ heißt *Epimorphismus*, falls für alle $D \in \mathcal{A}$ und $h, h' \in \mathcal{A}(C, D)$ gilt, dass aus $f*h = f*h'$ bereits $h = h'$ folgt.

$f$ heißt *Isomorphismus*, falls es einen Morphismus $f' \in \mathcal{A}(C, B)$ gibt mit $f * f' = 1_B$ und $f' * f = 1_C$. In diesem Fall heißen $B$ und $C$ *isomorphe Objekte*. ◇

Im Fall der Kategorie **Set** sind die Monomorphismen genau die injektiven Abbildungen, die Epimorphismen surjektive Abbildungen und die Isomorphismen bijektive Abbildungen. In Diagrammen werden Monomorphismen durch $\hookrightarrow$, Epimorphismen durch $\twoheadrightarrow$ und Isomorphismen durch $\xrightarrow{\sim}$ gekennzeichnet.

**Definition 2.19** Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie. Die *Unterobjekte* eines Objekts $X \in \mathcal{A}$ sind Äquivalenzklassen von Monomorphismen $U \xrightarrow{u} X$. Zwei solche Monomorphismen $U_1 \xrightarrow{u_1} X$, $U_2 \xrightarrow{u_2} X$ heißen in diesem Zusammenhang *äquivalent*, wenn es einen Isomorphismus $U_1 \xrightarrow{i} U_2$ gibt mit $i * u_2 = u_1$.

Analog sind die *Faktorobjekte* eines Objekts $X \in \mathcal{A}$ als Äquivalenzklassen von Epimorphismen $X \xrightarrow{b} B$ definiert, wobei die Äquivalenz dual definiert ist. ◇

Beziehungen zwischen verschiedenen Kategorien werden durch Funktoren beschrieben, eine Art verallgemeinerter Abbildungen, die Objekte und Morphismen der Kategorien zueinander in Beziehung setzen.

**Definition 2.20** Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Kategorien. Ein *(kovarianter) Funktor* $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ besteht aus zwei Abbildungen

- $F_{\mathfrak{Ob}} : \mathfrak{Ob}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{Ob}(\mathcal{B})$ und
- $F_{\mathfrak{Mor}} : \mathfrak{Mor}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{Mor}(\mathcal{B})$.

Dabei muss für einen Morphismus $f \in \mathcal{A}(A, B)$ immer $F_{\mathfrak{Mor}}(f) \in \mathcal{B}(F_{\mathfrak{Ob}}(A), F_{\mathfrak{Ob}}(B))$ gelten. Außerdem werden die Verträglichkeitsbedingungen $F_{\mathfrak{Mor}}(f * g) = F_{\mathfrak{Mor}}(f) * F_{\mathfrak{Mor}}(g)$ für je zwei Morphismen $f \in \mathcal{A}(A, B)$ und $g \in \mathcal{A}(B, C)$ sowie $F_{\mathfrak{Mor}}(1_A) = 1_{F_{\mathfrak{Ob}}(A)}$ für alle $A \in \mathcal{A}$ gefordert.

Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt *voll*, wenn für alle $A, B \in \mathfrak{Ob}(\mathcal{A})$ die Abbildung

$$F_{(A,B)} := F_{\mathfrak{Mor}}|_{\mathcal{A}(A,B)} : \mathcal{A}(A, B) \to \mathcal{B}(F_{\mathfrak{Ob}}(A), F_{\mathfrak{Ob}}(B))$$

surjektiv ist. Er heißt *treu*, wenn alle $F_{(A,B)}$ injektiv sind, und *Isomorphismus*, falls er voll und treu sowie $F_{\mathfrak{Ob}}$ bijektiv ist. Im letzten Fall heißen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ *isomorph* und man schreibt $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. ♢

Im Folgenden wird oft nicht zwischen den beiden Abbildungen $F_{\mathfrak{Ob}}$ und $F_{\mathfrak{Mor}}$ unterschieden und stattdessen einfach $F$ geschrieben.

**Beispiel 2.21**

a) Die Abbildungen $\mathrm{Id}_{\mathcal{A},\mathfrak{Ob}} := \mathrm{id}_{\mathfrak{Ob}(\mathcal{A})}$ und $\mathrm{Id}_{\mathcal{A},\mathfrak{Mor}} := \mathrm{id}_{\mathfrak{Mor}(\mathcal{A})}$ definieren den *Identitätsfunktor* $\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$ für eine Kategorie $\mathcal{A}$.

b) Der *Dualitätsfunktor* $\cdot^{\mathrm{op}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{\mathrm{op}}$, definiert durch $\cdot^{\mathrm{op}}_{\mathfrak{Ob}} := \mathrm{id}_{\mathfrak{Ob}(\mathcal{A})}$ und $\cdot^{\mathrm{op}}_{\mathfrak{Mor}} := \mathrm{id}_{\mathfrak{Mor}(\mathcal{A})}$, ist ein *kontravarianter Funktor*, d. h. es gelten $f^{\mathrm{op}} \in \mathcal{A}^{\mathrm{op}}(B, A)$ und $(f *_{\mathcal{A}} g)^{\mathrm{op}} = g^{\mathrm{op}} *_{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}} f^{\mathrm{op}}$ für $f \in \mathcal{A}(A, B)$, $g \in \mathcal{A}(B, C)$ sowie $1_A^{\mathrm{op}} = 1_{A^{\mathrm{op}}}$. Dieser Funktor ist sogar ein Isomorphismus, d. h. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ sind *dual isomorph*.

c) Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie und $A \in \mathcal{A}$. Dann definieren $\mathcal{A}(A, \cdot)_{\mathfrak{Ob}} : B \mapsto \mathcal{A}(A, B)$ und

$$\mathcal{A}(A, \cdot)_{\mathfrak{Mor}} : \left(B \xrightarrow{f} C\right) \mapsto \left(g \mapsto g * f\right)$$

den *(kovarianten) Hom-Funktor* $\mathcal{A}(A, \cdot) : \mathcal{A} \to \mathbf{Set}$.

Ebenso kann man den *(kontravarianten) Hom-Funktor* $\mathcal{A}(\cdot, A) : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ definieren. Beide zusammen ergeben den *(äußeren) Hom-Funktor* $\mathcal{A}(\cdot, \cdot) : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathbf{Set}$.

d) Sind $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ zwei Funktoren, so lässt sich ein Funktor $F * G : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ über die Komposition ihrer Objekt- und Morphismenabbildungen definieren. ◁

Mit Hilfe von Funktoren lassen sich Beziehungen zwischen Kategorien und ihren Strukturen herstellen. Oft beschreiben verschiedene Funktoren „im Prinzip“ die gleiche Korrespondenz zwischen zwei Kategorien. Solche Beziehungen zwischen Funktoren werden durch natürliche Transformationen ausgedrückt.

**Definition 2.22** Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Kategorien sowie $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwei Funktoren. Eine *natürliche Transformation* $\nu : F \Rightarrow G$ ist eine Familie von Morphismen $(\nu_A)_{A \in \mathcal{A}}$, wobei $\nu_A \in \mathcal{B}(FA, GA)$ für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt. Außerdem muss für alle $A, B \in \mathcal{A}$ und $f \in \mathcal{A}(A, B)$ die folgende Kommutativitätsbedingung erfüllt sein:

$$Ff * \nu_B = \nu_A * Gf$$

Der *Typ* der natürlichen Transformation $\nu$ ist der Ausdruck $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Man schreibt für $\nu$ auch $\nu : FA \Rightarrow GA$ für $A \in \mathcal{A}$.

$\nu$ heißt *natürliche Äquivalenz*, falls alle $\nu_A$ Isomorphismen sind. In diesem Fall schreibt man $\nu : F \overset{\sim}{\Rightarrow} G$ oder $\nu : FA \overset{\sim}{\Rightarrow} GA$ für $A \in \mathcal{A}$. ♢

Falls $\mathcal{A}$ eine Produktkategorie ist, z. B. $\mathcal{A} = \mathcal{C} \times \mathcal{D}$, so schreibt man auch $\nu_{CD}$ statt $\nu_{(C,D)}$ für die Komponenten der natürlichen Transformation $\nu$.

Natürliche Äquivalenzen können als eine Art allgemeingültiger Isomorphien in der Zielkategorie angesehen werden. Zum Beispiel ließe sich die Isomorphie zwischen den Gruppen $\underline{G}_1 \times \underline{G}_2$ und $\underline{G}_2 \times \underline{G}_1$ durch eine natürliche Äquivalenz in **Group** darstellen, denn die Isomorphismen sind dort gerade die Gruppenisomorphismen.

**Hilfssatz 2.23** *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ Kategorien, $\nu : F \Rightarrow G$ eine natürliche Transformation des Typs $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $H : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ ein Funktor. Dann ist durch die Familie*

$$(H\nu)_A := H(\nu_A) : HFA \to HGA$$

*eine weitere natürliche Transformation $H\nu : F * H \Rightarrow G * H$ des Typs $\mathcal{A} \to \mathcal{C}$ gegeben. $H\nu$ wird als die* Wirkung *von $H$ auf $\nu$ bezeichnet.*

*Beweis:* $F * H$ und $G * H$ sind passende Funktoren von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{C}$. Die gesuchte Kommutativitätsbedingung ergibt sich leicht aus denen von $\nu$ und $H$. □

Über natürliche Äquivalenzen kann man eine schwächere Form der Isomorphie zwischen zwei Kategorien wie folgt definieren.

**Definition 2.24** Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Funktor. $F$ heißt *Äquivalenz*, falls es einen Funktor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ gibt mit $F * G \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$ und $G * F \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$. Die Kategorien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen dann *äquivalent (vermöge $F$ und $G$)*. ♢

Zum Abschluss der grundlegenden Einführung in die Kategorientheorie wird nun ein weiterer zentraler Begriff eingeführt.

**Definition 2.25** Sei $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ ein Funktor. Ein *Limes* von $F$ in $\mathcal{A}$ ist ein Objekt $L \in \mathcal{A}$ zusammen mit einer Familie von Morphismen $(L \xrightarrow{l_B} FB)_{B \in \mathcal{B}}$, für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

*a)* Für jeden Morphismus $f \in \mathcal{B}(A, B)$ gilt $l_A * Ff = l_B$.

*b)* Für jedes Objekt $K \in \mathcal{A}$ und jede Familie $(K \xrightarrow{k_B} FB)_{B \in \mathcal{B}}$, die auch die Bedingung a) erfüllen, gibt es genau einen Morphismus $K \xrightarrow{h} L$, der $h * l_B = k_B$ für alle $B \in \mathcal{B}$ erfüllt.

Falls ein Limes von $F$ in $\mathcal{A}$ existiert, so ist dieser durch die obige *Universalitätsbedingung* b) bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und wird mit $\mathrm{Lim}\, F$ bezeichnet. ♢

Der dazu duale Begriff ist der des Kolimes von $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ in $\mathcal{A}$, welcher aus einem Objekt $C \in \mathcal{A}$ und einer Famile von Morphismen $(FB \xrightarrow{c_B} C)_{B \in \mathcal{B}}$ besteht, die duale Verträglichkeits- und Universalitätsbedingungen erfüllen müssen. Notiert wird dieser mit $\operatorname{coLim} F$.

**Beispiel 2.26**

- Sei $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ ein Funktor und $\mathcal{B}$ eine Kategorie ohne nichttriviale Morphismen. Dann bezeichnet man $\prod_{B \in \mathcal{B}} FB := \prod F := \operatorname{Lim} F$ als das *Produkt* von $F$ bzw. ein *Produkt* der Elemente von $F_{\mathfrak{Ob}}(\mathfrak{Ob}(\mathcal{B}))$. Die zugehörigen Morphismen $(\pi_B)_{B \in \mathcal{B}}$ nennt man *Projektionen*. Produkte in der dualen Kategorie heißen *Koprodukte* und werden mit dem Symbol $\coprod$ notiert.
- Sei $\mathcal{B}$ eine Kategorie bestehend aus zwei Objekten $A$ und $B$ sowie zwei nichttrivialen Morphismen $f, g \in \mathcal{B}(A, B)$. Ein Limes von $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ wird dann als *Differenzkern* von $Ff$ und $Fg$ bezeichnet. Bezeichnet man diesen Limes mit $K$ und die geforderten Morphismen mit $k_A$, $k_B$, so gilt $k_A * Ff = k_B = k_A * Fg$. Der duale Begriff ist der des *Differenzkokerns*.
- Ein Limes des leeren Funktors $F : \emptyset \to \mathcal{A}$ heißt *terminales Objekt*, d. h. zu diesem existiert genau ein Morphismus von jedem Objekt in $\mathcal{A}$. Der entsprechende Kolimes heißt *initiales Objekt*. Ein Objekt, dass sowohl initial als auch terminal ist, wird *Nullobjekt* genannt. $\lhd$

**Definition 2.27** Eine Kategorie $\mathcal{A}$ heißt *vollständig*, falls alle Funktoren $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ mit kleiner Kategorie $\mathcal{B}$ einen Limes in $\mathcal{A}$ besitzen. $\mathcal{A}$ heißt *kovollständig*, falls $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ vollständig ist. $\diamondsuit$

**Hilfssatz 2.28** *Eine Kategorie $\mathcal{A}$ ist genau dann vollständig, wenn in ihr Produkte beliebiger Familien von Objekten und alle Differenzkerne existieren.*

*Beweis:* Siehe [Bor94]. $\square$

### 2.3.1 *-autonome Kategorien

Sogenannte *-autonome Kategorien besitzen bestimmte natürliche Transformationen, die die Beziehungen zwischen den Objekten bereichern. In dieser Arbeit werden Kategorien auf diese zusätzliche Strukturen hin untersucht.

Warum aber beschäftigt sich diese Arbeit mit *-autonomen Kategorien? Die ursprüngliche Relevanz dieser Strukturen liegt in einer Konstruktion von Po-Hsiang Chu (siehe [Chu79]), die aus einer Kategorie mit wenig Zusatzstruktur eine *-autonome Kategorie erzeugt. Wendet man diese im Folgenden beschriebene Konstruktion auf **Set** an, so erhält man eine Kategorie, die formale Kontexte als Objekte hat und sogenannte *Chu-Abbildungen* als Morphismen.

**Set** ist eine sogenannte *autonome Kategorie*,[1] weshalb die Chu-Konstruktion darauf angewendet werden kann. Dazu muss ein beliebiges Objekt aus der Kategorie gewählt werden. Wählt man dafür die Menge $\{0, 1\}$, so ist das Ergebnis der Konstruktion eine Kategorie, deren Objekte Tripel $(A, B, f)$ sind. Dabei sind $A$ und $B$ beliebige Mengen und

[1] siehe Definition 2.34 mit $\mathbf{Set}_0 = \mathrm{Id}$, $\underline{\mathbf{Set}} = \mathbf{Set}$, $\otimes = \times$ und $I = \{\emptyset\}$

$f : A \times B \to \{0,1\}$ ist eine beliebige Abbildung. Man erkennt leicht, dass dies genau die formalen Kontexte $(A, B, I_f)$ mit $aI_f b \Leftrightarrow f(a,b) = 1$ sind.

Die Morphismen dieser Kategorie sind Paare $(\alpha, \beta) : (A, B, f) \to (A', B', f')$ von Abbildungen $\alpha : A \to A'$ und $\beta : B' \to B$ mit $\alpha(a) I_{f'} b' \Leftrightarrow a I_f \beta(b')$ für alle $a \in A$ und $b' \in B'$. Diese Morphismen werden auch Chu-Abbildungen genannt.

Das Ergebnis der Chu-Konstruktion ist immer eine *-autonome Kategorie. Später wird sich herausstellen, dass auch die Kategorie der formalen Kontexte mit Bindungen als Morphismen eine *-autonome Struktur hat. In [Mor08] wurde dies bereits für sogenannte Chu-Korrespondenzen diskutiert, welche in bijektiver Beziehung zu Bindungen stehen.

### Außergewöhnliche natürliche Transformationen

Um die Definition *-autonomer Kategorien im Detail auszuführen, benötigt man zunächst eine verallgemeinerte Definition von natürlichen Transformationen (vgl. [EK66b]), die es ermöglicht, natürliche Transformationen der Art $\nu_A : F(A, A) \Rightarrow F'(A, A)$ zu formalisieren. Das Problem ist hier, dass die verschiedenen Argumente von $F$ nicht unabhängig sind.

Mit der obigen Definition 2.22 ist dies zwar für die Typen $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sowie $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{B}$ möglich. Für Funktoren $F, F' : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ist dies aber nicht der Fall, denn die Definition von Morphismen $F(f, f) : F(A, A) \to F(B, B)$ ist problematisch. $f$ müsste in diesem Fall nämlich sowohl aus $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}(A, B)$, als auch aus $\mathcal{A}(A, B)$ stammen, was im Allgemeinen nicht möglich ist.

In der folgenden Definition wird dieses Problem umgangen, indem die Argumente der Funktoren zunächst als unabhängig angesehen werden, aber zusätzliche Kommutativitätsbedingungen dafür sorgen, dass sie sich dennoch unter der natürlichen Transformation so verhalten, als ob sie gleich wären.

**Definition 2.29** Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ Kategorien und

$$F : \mathcal{A} \times \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{B} \to \mathcal{D},$$

$$G : \mathcal{A} \times \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$

Funktoren. Seien weiterhin Morphismen

$$\nu_{ABC} : F(A, B, B) \to G(A, C, C)$$

für alle $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{C}$ gegeben. Die Familie $(\nu_{ABC})_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}}$ heißt *(außergewöhnliche) natürliche Transformation*, falls die folgenden drei Kommutativitätsbedingungen für alle $f \in \mathcal{A}(A, A')$, $g \in \mathcal{B}(B, B')$ und $h \in \mathcal{C}(C, C')$ erfüllt sind:

1) $F(f, 1_B, 1_B) * \nu_{A'BC} = \nu_{ABC} * G(f, 1_C, 1_C)$
2) $F(1_A, 1_{B'}, g) * \nu_{AB'C} = F(1_A, g, 1_B) * \nu_{ABC}$
3) $\nu_{ABC} * G(1_A, 1_C, h) = \nu_{ABC'} * G(1_A, h, 1_{C'})$

Man schreibt auch $\nu : F(A, B, B) \Rightarrow G(A, C, C)$, wie im Fall der normalen natürlichen Transformation. Falls alle $\nu_{ABC}$ Isomorphismen sind, so spricht man auch von einer *(außergewöhnlichen) natürlichen Äquivalenz* und notiert dies mit $\nu : F(A, B, B) \overset{\sim}{\Rightarrow} G(A, C, C)$.$\diamondsuit$

Wählt man in dieser Definition $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ oder $\mathcal{C}$ als die triviale Kategorie $\star$, so sind die Bedingungen 1), 2) bzw. 3) sofort erfüllt. Insbesondere bleibt für den Fall $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \star$ nur noch die Bedingung 1) zurück, welche dann äquivalent zur Kommutativitätsbedingung für gewöhnliche natürliche Transformationen ist.

### Monoidale und abgeschlossene Kategorien

Jetzt ist es möglich, *-autonome Kategorien zu definieren als symmetrische monoidale abgeschlossene Kategorien mit Dualisierung. Für eine Kategorie $\mathcal{A}$ werden dafür die folgenden Daten gebraucht, mit deren Hilfe schrittweise die *-autonome Struktur definiert wird:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}_0 : \mathcal{A} \to \mathbf{Set} && \text{(Basisfunktor)}\\
&I \in \mathcal{A} && \text{(Einsobjekt)}\\
&\underline{\mathcal{A}} : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A} && \text{(Innerer Hom-Funktor)}\\
&\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A} && \text{(Tensorprodukt)}\\
&\cdot^* : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A} && \text{(Dualisierungsfunktor)}\\
&\top \in \mathcal{A} && \text{(Dualisierendes Objekt)}
\end{aligned}$$

Die einzelnen Komponenten werden nun aufeinander aufbauend eingeführt.

**Definition 2.30** Eine *abgeschlossene Kategorie* $\mathcal{A}$ ist eine Kategorie mit einem treuen Basisfunktor $\mathcal{A}_0$, einem inneren Hom-Funktor $\underline{\mathcal{A}}$, einem Einsobjekt $I \in \mathcal{A}$, einer natürlichen Äquivalenz

- $i_A : A \to \underline{\mathcal{A}}(I, A)$

sowie (außergewöhnlichen) natürlichen Transformationen

- $j_A : I \to \underline{\mathcal{A}}(A, A)$ und
- $d_{ABC} : \underline{\mathcal{A}}(B, C) \to \underline{\mathcal{A}}\big(\underline{\mathcal{A}}(A, B), \underline{\mathcal{A}}(A, C)\big)$.

Außerdem müssen folgende Bedingungen für alle $A, B \in \mathcal{A}$ erfüllt sein:

**(AK1)** $\mathcal{A}_0(\underline{\mathcal{A}}(A, B)) = \mathcal{A}(A, B)$

**(AK2)** $j_B * d_{ABB} = j_{\underline{\mathcal{A}}(A,B)}$

**(AK3)** $\mathcal{A}_0(i_{\underline{\mathcal{A}}(A,A)})(1_A) = j_A$ ♢

Die obige Definition entspricht nicht den gängigen Definitionen abgeschlossener Kategorien, sondern einer vereinfachten Version, in der $\mathcal{A}_0$ treu ist (siehe [EK66a, I.2.10]).

Wenn von verschiedenen abgeschlossenen Kategorien die Rede ist, wird zur Unterscheidung der Name der Kategorie an das Einsobjekt und die natürlichen Transformationen angehängt (z. B. $I^{\mathcal{A}}$, $i^{\mathcal{A}}$, usw.).

**Definition 2.31** Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei abgeschlossene Kategorien. Ein *abgeschlossener Funktor* $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ist ein Funktor mit einer natürlichen Transformation

- $\widehat{F}_{AB} : F\underline{\mathcal{A}}(A, B) \to \underline{\mathcal{B}}(FA, FB)$

und einem Morphismus

- $F_I : I^{\mathcal{B}} \to FI^{\mathcal{A}}$.

Dabei müssen folgende Bedingungen für alle $A, B, C \in \mathcal{A}$ erfüllt sein:

**(AF1)** $(Fi^{\mathcal{A}}_A) * \widehat{F}_{I^{\mathcal{A}},A} * \underline{\mathcal{B}}(F_I, 1_{FA}) = i^{\mathcal{B}}_{FA}$

**(AF2)** $F_I * (Fj^{\mathcal{A}}_A) * \widehat{F}_{AA} = j^{\mathcal{B}}_{FA}$

**(AF3)** $(Fd^{\mathcal{A}}_{ABC}) * \widehat{F}_{\underline{\mathcal{A}}(A,B),\underline{\mathcal{A}}(A,C)} * \underline{\mathcal{B}}(1_{F\underline{\mathcal{A}}(A,B)}, \widehat{F}_{AC}) * \underline{\mathcal{B}}(\widehat{F}_{AB}, 1_{\underline{\mathcal{B}}(FA,FC)})$
$= \widehat{F}_{BC} * d^{\mathcal{B}}_{FA,FB,FC}$ ◊

**Definition 2.32** Eine *monoidale Kategorie* $\mathcal{A}$ ist eine Kategorie mit einem Tensorprodukt $\otimes$, einem Einsobjekt $I \in \mathcal{A}$ und natürlichen Äquivalenzen

- $r_A : A \otimes I \to A$,
- $l_A : I \otimes A \to A$ und
- $a_{ABC} : (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C)$.

Außerdem müssen folgende Bedingungen für alle $A, B, C, D \in \mathcal{A}$ erfüllt sein:

**(MK1)** $a_{AIB} * (1_A \otimes l_B) = r_A \otimes 1_B$

**(MK2)** $a_{A\otimes B,C,D} * a_{A,B,C\otimes D} = (a_{ABC} \otimes 1_D) * a_{A,B\otimes C,D} * (1_A \otimes a_{BCD})$ ◊

**Definition 2.33** Eine *monoidale abgeschlossene Kategorie* $\mathcal{A}$ ist eine monoidale und abgeschlossene Kategorie[2] mit einer natürlichen Äquivalenz

- $p_{ABC} : \underline{\mathcal{A}}(A \otimes B, C) \to \underline{\mathcal{A}}(A, \underline{\mathcal{A}}(B, C))$.

Dabei müssen folgende Bedingungen für alle $A, B, C, D \in \mathcal{A}$ erfüllt sein:

**(MAK1)** $\underline{\mathcal{A}}(l_A, 1_B) * p_{IAB} = i_{\underline{\mathcal{A}}(A,B)}$

**(MAK2)** $p_{A\otimes B,C,D} * p_{A,B,\underline{\mathcal{A}}(C,D)} = \underline{\mathcal{A}}(a_{ABC}, 1_D) * p_{A,B\otimes C,D} * \underline{\mathcal{A}}(1_A, p_{BCD})$ ◊

### Symmetrie und Dualisierung

**Definition 2.34** Eine *autonome Kategorie* (*symmetrische monoidale abgeschlossene Kategorie*) $\mathcal{A}$ ist eine monoidale abgeschlossene Kategorie mit einer natürlichen Äquivalenz

- $c_{AB} : A \otimes B \to B \otimes A$.

Diese muss folgende Bedingungen für alle $A, B, C \in \mathcal{A}$ erfüllen:

**(SK1)** $c_{AB} * c_{BA} = 1$

**(SK2)** $a_{ABC} * c_{A,B\otimes C} * a_{BCA} = (c_{AB} \otimes 1_C) * a_{BAC} * (1_B \otimes c_{AC})$ ◊

Die Symmetrie lässt sich äquivalent über den inneren Hom-Funktor definieren. Sie hat dann die Form einer natürlichen Äquivalenz

$$\underline{\mathcal{A}}(A, \underline{\mathcal{A}}(B, C)) \overset{\sim}{\Rightarrow} \underline{\mathcal{A}}(B, \underline{\mathcal{A}}(A, C))$$

mit der Kommutativitätsbedingung, dass diese Äquivalenz durch wiederholte Anwendung des Basisfunktors $\mathcal{A}_0$ in die kanonische natürliche Äquivalenz

$$\mathbf{Set}(\mathcal{A}_0(A), \mathbf{Set}(\mathcal{A}_0(B), \mathcal{A}_0(C))) \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathbf{Set}(\mathcal{A}_0(B), \mathbf{Set}(\mathcal{A}_0(A), \mathcal{A}_0(C)))$$

[2]Dabei muss das Einsobjekt $I \in \mathcal{A}$ für die monoidale und die abgeschlossene Struktur dasselbe sein.

übergeht (siehe [Lin65, Proposition (2.4) und Axiom (A5)]).

Wie bereits erwähnt ist z. B. **Set** eine autonome Kategorie mit trivialem Basisfunktor, innerem Hom-Funktor $\mathbf{Set} : \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$, Tensorprodukt $\times : \mathbf{Set} \times \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ und einer beliebigen einelementigen Menge als Einsobjekt.

**Definition 2.35** Eine **-autonome Kategorie* $\mathcal{A}$ ist eine autonome Kategorie mit einem abgeschlossenen Dualisierungsfunktor $\cdot^*$ und einer natürlichen Äquivalenz

- $b_A : A \to A^{**}$.

Es muss folgende Bedingung für alle $A \in \mathcal{A}$ erfüllt sein:

**(SAK1)** $b_{\underline{\mathcal{A}}(A,B)} * \left(\widehat{\cdot^*}_{BA}\right)^* * \left(\widehat{\cdot^*}_{A^*B^*}\right) = \underline{\mathcal{A}}(b_A^{-1}, b_B)$ ◇

Diese Definition setzt implizit voraus, dass nicht nur $\mathcal{A}$, sondern auch $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ abgeschlossen ist, damit ein abgeschlossener Funktor $\cdot^*$ definiert werden kann.

**Bemerkung** Alternativ kann die *-autonome Struktur auch über ein dualisierendes Objekt $\top \in \mathcal{A}$ festgelegt werden. In jeder wie oben definierten *-autonomen Kategorie kann man durch $\top := I^*$ ein Objekt definieren, das die natürliche Äquivalenz $\underline{\mathcal{A}}(A, \top) \overset{\sim}{\Rrightarrow} A^*$ erfüllt. Umgekehrt lässt sich in einer autonomen Kategorie, die ein Objekt $\top$ mit dieser Eigenschaft besitzt, unter bestimmten Umständen ein Dualisierungsfunktor $\cdot^*$ via $A^* := \underline{\mathcal{A}}(A, \top)$ und $f^* := \underline{\mathcal{A}}(f, 1_\top)$ definieren (für Details siehe [Bar79, Bar91]). ◁

Es soll hier keine umfassende Diskussion *-autonomer Kategorien ausgeführt werden. Wichtig für diese Arbeit ist nur der folgende Zusammenhang aus [Bar79].

**Satz 2.36 (vgl. [Bar79, I.4.4])** *Sei $\mathcal{A}$ eine symmetrische abgeschlossene Kategorie mit innerem Hom-Funktor $\underline{\mathcal{A}} : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ und Einsobjekt $I \in \mathcal{A}$. Sei weiterhin $\cdot^* : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}$ ein voller und treuer Funktor mit einer (außergewöhnlichen) natürlichen Äquivalenz*

$$\mathcal{A}(A, \underline{\mathcal{A}}(B, C^*)) \overset{\sim}{\Rrightarrow} \mathcal{A}(C, \underline{\mathcal{A}}(B, A^*)) \quad (\text{in } \mathbf{Set}).$$

*Dann ist $\mathcal{A}$ eine *-autonome Kategorie mit dem Tensorprodukt*

$$A \otimes B := \underline{\mathcal{A}}(B, A^*)^*.$$ □

# 3 Kontextkategorie

Verschiedene Kategorien, die Kontexte als Objekte besitzen, wurden bereits untersucht. Als Morphismen sind dabei Chu-Abbildungen ([Mor07]) bzw. Infomorphismen ([BS97]), approximierbare Abbildungen ([KHZ05]) und viele andere Arten von Abbildungspaaren zwischen Gegenstands- und Merkmalsmengen ([Ern05]) betrachtet worden.

Insbesondere in [Ern05] steht dabei die Äquivalenz zu entsprechenden Kategorien vollständiger Verbände im Vordergrund. Die Rolle des Äquivalenzfunktors spielt dabei immer eine passende Erweiterung der Abbildung $\underline{\mathfrak{B}}$ auf die jeweiligen Morphismen.

In diesem Kapitel werden anstelle von Abbildungspaaren die in Abschnitt 2.2 eingeführten Bindungen als Kontext-Morphismen betrachtet. Es wird die Äquivalenz zu residuierten Abbildungen ([GW96]) ausgenutzt, um eine äquivalente Kategorie vollständiger Verbände anzugeben. Danach folgt eine Betrachtung der *-autonomen Struktur beider Kategorien, welche in ähnlicher Form bei [Mor08] für Chu-Korrespondenzen zu finden ist.[3] Zum Abschluss werden verschiedene Beschreibungen des Tensorprodukts miteinander in Beziehung gesetzt und Vergleiche mit anderen Morphismen angestellt.

## 3.1 Grundlagen

Zunächst betrachten wir die bereits angedeutete Kategorie aller formalen Kontexte mit Bindungen als Morphismen.

**Definition 3.1** Wir definieren die Kategorie **Bind** der Kontexte und Bindungen:

| | |
|---|---|
| **Objekte** | alle Kontexte |
| **Morphismen** | $\mathbf{Bind}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2)$ für Kontexte $\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_2$ (siehe Definition 2.10) |
| **Komposition** | $R_1 \circ R_2 := \{(g,m) \in G_1 \times M_3 \mid g^{R_1 I_2} \subseteq m^{R_2}\} \in \mathbf{Bind}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_3)$ für Kontexte $\mathbb{K}_i = (G_1, M_i, I_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ und Bindungen $R_1 \in \mathbf{Bind}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2)$, $R_2 \in \mathbf{Bind}(\mathbb{K}_2, \mathbb{K}_3)$ (siehe Abbildung 3.1) |
| **1-Morphismen** | $1_{\mathbb{K}} := I$ für jeden Kontext $\mathbb{K} = (G, M, I)$ $\Diamond$ |

**Hilfssatz 3.2** **Bind** *ist eine Kategorie.*

*Beweis:* Es sind vier Aussagen zu zeigen:

- $R_1 \circ R_2 \in \mathbf{Bind}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_3)$: Siehe [GW96, Satz 53].
- $I \in \mathbf{Bind}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_1)$: Folgt sofort aus Definition 2.10.

[3] Die Betrachtung *-autonomer Kategorien erfolgt meist für Chu-Räume und Chu-Abbildungen ([Pra99, Mor07]). Solche Kategorien stehen in engem Zusammengang zu linearen Logiken ([See89, Bar91]).

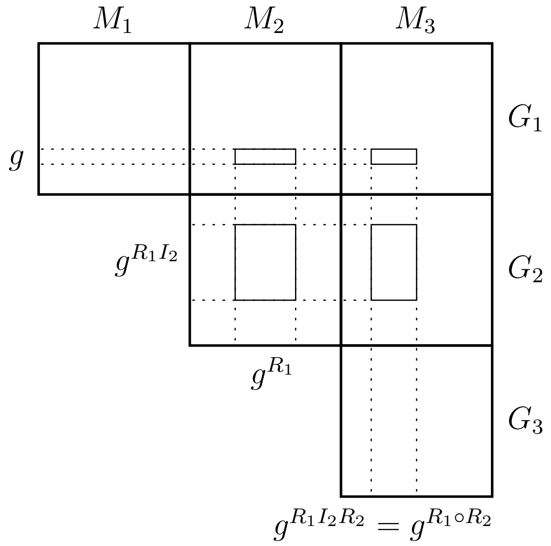


Abbildung 3.1: Komposition von Bindungen

- Assoziativität: Es seien $\mathbb{K}_i = (G_i, M_i, I_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ Kontexte und $R_i$ Bindungen von $\mathbb{K}_i$ nach $\mathbb{K}_{i+1}$ $(i = 1, 2, 3)$. Für $g \in G_1$ gilt nach Hilfssatz 2.12: $g^{R_1 \circ R_2} = g^{R_1 I_2 R_2}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}(g, m) \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3 \quad &\Leftrightarrow \quad m \in g^{(R_1 \circ R_2) I_3 R_3} \\ &\Leftrightarrow \quad m \in g^{(R_1 I_2 R_2) I_3 R_3} \\ &\Leftrightarrow \quad m \in g^{R_1 I_2 (R_2 I_3 R_3)} \\ &\Leftrightarrow \quad m \in g^{R_1 I_2 (R_2 \circ R_3)} \\ &\Leftrightarrow \quad (g, m) \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3),\end{aligned}$$

  also $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$.

- Neutrales Element: Seien $\mathbb{K}_i = (G_i, M_i, I_i)$ $(i = 1, 2)$ Kontexte und $R$ eine Bindung von $\mathbb{K}_1$ nach $\mathbb{K}_2$. Dann gilt, wegen Hilfssatz 2.11 und Hilfssatz 2.12, dass

$$(g, m) \in I_1 \circ R \Leftrightarrow m \in g^{I_1 I_1 R} = g^R = g^{R I_2 I_2} \Leftrightarrow (g, m) \in R \circ I_2,$$

  also $1_{\mathbb{K}_1} \circ R = R = R \circ 1_{\mathbb{K}_2}$. □

**Bind** ist äquivalent zur folgenden Kategorie aller vollständigen Verbände und residuierten Abbildungen.

**Definition 3.3** Wir definieren die Kategorie **Res** der vollständigen Verbände und residuierten Abbildungen wie folgt:

| | |
|---|---|
| **Objekte** | alle vollständigen Verbände |
| **Morphismen** | $\mathbf{Res}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)$ für vollständige Verbände $\mathbb{V}_1$, $\mathbb{V}_2$ (siehe Definition 2.1) |
| **Komposition** | $\varphi_1 * \varphi_2$ als kovariante Abbildungskomposition für vollständige Verbände $\mathbb{V}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ und residuierte Abbildungen $\varphi_1 \in \mathbf{Res}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)$, $\varphi_2 \in \mathbf{Res}(\mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3)$ |
| **1-Morphismen** | $1_{\mathbb{V}} := \mathrm{id}_V$ für alle vollständigen Verbände $\mathbb{V} = (V, \leq)$ ◊ |

**Bemerkung** **Res** ist eine Kategorie wegen der Tatsache, dass die Abbildungskomposition assoziativ ist und sich für die Identitäten $\mathrm{id}_V$ neutral verhält. $\triangleleft$

Um die Äquivalenz der beiden Kategorien zu zeigen, wird zunächst ein Zusammenhang zwischen Bindungen und residuierten Abbildungen hergestellt, welcher bereits in [GW96] zu finden ist.

**Satz 3.4** *Seien $\mathbb{K}_i = (G_i, M_i, I_i)$ $(i = 1, 2)$ Kontexte.*

*Zu jeder Bindung $R$ von $\mathbb{K}_1$ nach $\mathbb{K}_2$ ist $(\varphi_R, \varphi_R^*)$ eine Adjunktion zwischen den Begriffsverbänden, wobei*

$$\varphi_R : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2) : (A, B) \mapsto (A^{RI_2}, A^R)$$

*und*

$$\varphi_R^* : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1) : (C, D) \mapsto (D^R, D^{RI_1}).$$

*Umgekehrt ist für jede Adjunktion $(\varphi, \psi)$ zwischen $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1)$ und $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2)$ die Relation*

$$R_\varphi := \{(g, m) \in G_1 \times M_2 \mid \varphi\gamma g \leq \mu m\} = \{(g, m) \in G_1 \times M_2 \mid \gamma g \leq \psi\mu m\} =: R^\psi$$

*eine Bindung von $\mathbb{K}_1$ nach $\mathbb{K}_2$.*

*Es gelten $\varphi = \varphi_{R_\varphi}$, $\psi = \varphi^*_{R^\psi}$ sowie $R = R_{\varphi_R} = R^{\varphi_R^*}$.*

*Beweis:* [GW96, Satz 53 und Korollar 112] $\square$

**Bemerkung** Bereinigt und reduziert man die Kontexte $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$ zu $\mathbb{K}_1'$ bzw. $\mathbb{K}_2'$ und streicht man in $R$ die entsprechenden Zeilen bzw. Spalten, so sind die Begriffsverbände $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_1'$ bzw. $\mathbb{K}_2$ und $\mathbb{K}_2'$ isomorph ([GW96, Abschnitt 1.2]) und die residuierten Abbildungen äquivalent hinsichtlich dieser Isomorphien. Dies lässt sich leicht anhand der Definitionen überprüfen. $\triangleleft$

Obwohl in dieser Arbeit hauptsächlich der obige Satz Anwendung finden wird, gibt es eine andere Möglichkeit, eine Beziehung zwischen residuierten Abbildungen und Bindungen herzustellen, indem man nicht von Kontexten, sondern von vollständigen Verbänden ausgeht.

**Satz 3.5** *Seien $\mathbb{V}_1$ und $\mathbb{V}_2$ vollständige Verbände.*

*Zu jeder Adjunktion $(\varphi, \psi)$ von $\mathbb{V}_1$ nach $\mathbb{V}_2$ ist die Relation*

$$\widetilde{R}_\varphi := \{(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2 \mid \varphi(v_1) \leq v_2\} = \{(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2 \mid v_1 \leq \psi(v_2)\} =: \widetilde{R}^\psi$$

*eine Bindung von $\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V}_1)$ nach $\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V}_2)$.*

*Umgekehrt definiert jede Bindung $R$ von $\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V}_1)$ nach $\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V}_2)$ eine Adjunktion $(\widetilde{\varphi}_R, \widetilde{\varphi}_R^*)$ von $\mathbb{V}_1$ nach $\mathbb{V}_2$ durch*

$$\widetilde{\varphi}_R : \mathbb{V}_1 \to \mathbb{V}_2 : v_1 \mapsto \bigwedge v_1^R$$

*und*

$$\widetilde{\varphi}_R^* : \mathbb{V}_2 \to \mathbb{V}_1 : v_2 \mapsto \bigvee v_2^R.$$

*Es gelten $\varphi = \widetilde{\varphi}_{\widetilde{R}_\varphi}$, $\psi = \widetilde{\varphi}^*_{\widetilde{R}^\psi}$ sowie $R = \widetilde{R}_{\widetilde{\varphi}_R} = R^{\widetilde{\varphi}_R^*}$.*

*Beweis:* Setzt man in Satz 3.4 $\mathbb{K}_i := \underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V}_i)$, so erhält man unter Beachtung des Isomorphismus $\iota$ zwischen $\mathbb{V}_i$ und $\underline{\mathfrak{B}}(\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V}_i))$ (Satz 2.9) die Abbildung $\widetilde{\varphi}_R : v_1 \mapsto \bigwedge v_1^{\downarrow R}$. Wegen Hilfssatz 2.11 entspricht dies der obigen Definition von $\widetilde{\varphi}_R$, denn $v_1^R = v_1^{\uparrow\downarrow R} = v_1^{\downarrow R}$. Gleiches gilt für $\widetilde{\varphi}_R^*$ und auch $R_\varphi$ und $\widetilde{R}_\varphi$ unterscheiden sich nur durch $\iota$. $\square$

Die Sätze 3.4 und 3.5 beschreiben also bis auf die Isomorphie zwischen $\mathbb{V}$ und $\underline{\mathfrak{B}}(\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V}))$ den gleichen Sachverhalt. Im Folgenden sollen aus den beschriebenen Abbildungen Funktoren zwischen den Kategorien **Bind** und **Res** konstruiert werden.

**Hilfssatz 3.6** *Die folgenden Abbildungen definieren einen Funktor* $\underline{\mathfrak{B}} : \mathbf{Bind} \to \mathbf{Res}$*:*

- $\underline{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{Ob}} : \mathbb{K} \mapsto \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$
- $\underline{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{Mor}} : R \mapsto \varphi_R$

*Beweis:* Seien $\mathbb{K}_i = (G_i, M_i, I_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ Kontexte und $R_1 \in \mathbf{Bind}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2)$ sowie $R_2 \in \mathbf{Bind}(\mathbb{K}_2, \mathbb{K}_3)$. Es ist zu zeigen, dass $\varphi_{R_1 \circ R_2} = \varphi_{R_1} * \varphi_{R_2}$ gilt.

Wegen Satz 3.4 reicht es, zu zeigen, dass $R_{\varphi_{R_1} * \varphi_{R_2}} = R_1 \circ R_2$ gilt. Dies ergibt sich folgendermaßen (vgl. [GW96, Hilfssatz 113]):

$$\begin{aligned}
(g,m) \in R_{\varphi_{R_1} * \varphi_{R_2}} \quad &\Leftrightarrow \quad \Big(\varphi_{R_1} * \varphi_{R_2}\Big)(\gamma g) \leq \mu m \\
&\Leftrightarrow \quad (g^{I_1 I_1 R_1 I_2 R_2 I_3}, g^{I_1 I_1 R_1 I_2 R_2}) \leq \mu m \\
&\Leftrightarrow \quad m \in g^{I_1 I_1 R_1 I_2 R_2} \\
&\overset{\text{Hilfssatz 2.11}}{\Leftrightarrow} \quad m \in g^{R_1 I_2 R_2} \\
&\Leftrightarrow \quad (g,m) \in R_1 \circ R_2
\end{aligned}$$

Außerdem gilt für einen Kontext $\mathbb{K} = (G, M, I)$ immer $\varphi_{1_\mathbb{K}} = \varphi_I = 1_{\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})}$. $\square$

**Hilfssatz 3.7** *Auch* $\underline{\mathfrak{C}} : \mathbf{Res} \to \mathbf{Bind}$ *mit*

- $\underline{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{Ob}} : \mathbb{V} \mapsto \underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V})$
- $\underline{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{Mor}} : \varphi \mapsto \widetilde{R}_\varphi$

*ist ein Funktor.*

*Beweis:* Für beliebige $\varphi_1 \in \mathbf{Res}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)$, $\varphi_2 \in \mathbf{Res}(\mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3)$. $v_1 \in \mathbb{V}_1$ und $v_3 \in \mathbb{V}_3$ gilt

$$\begin{aligned}
(v_1, v_3) \in \widetilde{R}_{\varphi_1} \circ \widetilde{R}_{\varphi_2} \quad &\Leftrightarrow \quad v_3 \in v_1^{\widetilde{R}_{\varphi_1} \downarrow \widetilde{R}_{\varphi_2}} \\
&\Leftrightarrow \quad v_3 \in \{v_2 \in \mathbb{V}_2 \mid \varphi_1 v_1 \leq v_2\}^{\downarrow \widetilde{R}_{\varphi_2}} \\
&\Leftrightarrow \quad v_3 \in \{v_2 \in \mathbb{V}_2 \mid v_2 \leq \varphi_1 v_1\}^{\widetilde{R}_{\varphi_2}} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall v_2 \in \mathbb{V}_2 : (v_2 \leq \varphi_1 v_1 \Rightarrow \varphi_2 v_2 \leq v_3) \\
&\Leftrightarrow \quad \varphi_2(\varphi_1 v_1) \leq v_3 \\
&\Leftrightarrow \quad (v_1, v_3) \in \widetilde{R}_{\varphi_1 * \varphi_2}.
\end{aligned}$$

Das ist genau die Kommutativitätsbedingung $\underline{\mathfrak{C}}(\varphi_1) \circ \underline{\mathfrak{C}}(\varphi_2) = \underline{\mathfrak{C}}(\varphi_1 * \varphi_2)$.

Außerdem gilt für einen vollständigen Verband $\mathbb{V} = (V, \leq_\mathbb{V})$ immer $\widetilde{R}_{1_\mathbb{V}} = \leq_\mathbb{V} = 1_{\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V})}$. $\square$

**Bemerkung** Die obige Definition von $\underline{\mathfrak{C}}$ lässt sich auf beliebige geordnete Mengen erweitern. Jeder geordneten Menge $\mathbb{P}$ wird dabei der vollständige Kontext $\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{P})$ zugeordnet und jeder residuierten Abbildung $\varphi : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ die Bindung $\underline{\mathfrak{C}}(\varphi) = \widetilde{R}_\varphi$ wie oben. Dabei ist dann $\underline{\mathfrak{B}}(\underline{\mathfrak{C}}(\varphi))$ die eindeutige Fortsetzung von $\varphi$ zu einer residuierten Abbildung zwischen den Vervollständigungen $\underline{\mathfrak{B}}(\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{P}))$ und $\underline{\mathfrak{B}}(\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{Q}))$. So erhält man einen treuen Funktor von der Kategorie aller geordneten Mengen und residuierten Abbildungen nach **Res**. $\lhd$

Zum Abschluss dieses Abschnitts wird nun die lange erwartete Äquivalenz von **Bind** und **Res** gezeigt.

**Satz 3.8** *Die Kategorien* **Bind** *und* **Res** *sind äquivalent vermöge* $\underline{\mathfrak{B}}$ *und* $\underline{\mathfrak{C}}$*.*

*Beweis:* Man betrachte die Familien von Bindungen

$$\left((\underline{\mathfrak{B}} * \underline{\mathfrak{C}})(\mathbb{K}) \xrightarrow{R_\mathbb{K}} \mathbb{K}\right)_{\mathbb{K}\in\mathfrak{Ob}(\mathbf{Bind})}$$

$$\begin{aligned} &\text{mit } R_\mathbb{K} := \{((A,B),m) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}) \times M \mid m \in B\} \\ &\text{und } R_\mathbb{K}^{-1} := \{(g,(A,B)) \in G \times \mathfrak{B}(\mathbb{K}) \mid g \in A\} \qquad \text{für alle Kontexte } \mathbb{K} = (G,M,I). \end{aligned}$$

Dass es sich bei $R_\mathbb{K}$ sowie $R_\mathbb{K}^{-1}$ tatsächlich um Bindungen handelt, ist leicht nachzuprüfen. Außerdem ist die Familie $(R_\mathbb{K})_{\mathbb{K}\in\mathfrak{Ob}(\mathbf{Bind})}$ eine natürliche Transformation, denn für Bindungen $\mathbb{K}_1 \xrightarrow{R} \mathbb{K}_2$ mit $\mathbb{K}_i = (G_i, M_i, I_i)$ $(i = 1,2)$ gilt wegen

$$((A,B),(C,D)) \in (\underline{\mathfrak{B}} * \underline{\mathfrak{C}})(R) \Leftrightarrow (A^{RI_2}, A^R) \leq (C,D) \tag{3.1}$$

die Kommutativitätsbedingung $(\underline{\mathfrak{B}} * \underline{\mathfrak{C}})(R) \circ R_{\mathbb{K}_2} = R_{\mathbb{K}_1} \circ R$. Für alle $((A,B),m) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}_1) \times M_2$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} ((A,B),m) \in (\underline{\mathfrak{B}} * \underline{\mathfrak{C}})(R) \circ R_{\mathbb{K}_2} \quad &\Leftrightarrow \quad m \in \left((A,B)^{(\underline{\mathfrak{B}} * \underline{\mathfrak{C}})(R)}\right)^{\downarrow R_{\mathbb{K}_2}} \\ &\overset{(3.1)}{\Leftrightarrow} \quad m \in (A^{RI_2}, A^R)^{\uparrow\downarrow R_{\mathbb{K}_2}} \\ &\Leftrightarrow \quad m \in A^R \\ &\Leftrightarrow \quad m \in (A,B)^{R_{\mathbb{K}_1} I_1 R} \\ &\Leftrightarrow \quad ((A,B),m) \in R_{\mathbb{K}_1} \circ R. \end{aligned}$$

Genauso lässt sich überprüfen, dass $(R_\mathbb{K}^{-1})_{\mathbb{K}\in\mathfrak{Ob}(\mathbf{Bind})}$ eine natürliche Transformation ist. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \big((A,B),(C,D)\big) \in R_\mathbb{K} \circ R_\mathbb{K}^{-1} \quad &\Leftrightarrow \quad (A,B)^{R_\mathbb{K} I} \subseteq (C,D)^{R_\mathbb{K}^{-1}} \\ &\Leftrightarrow \quad B^I \subseteq C \\ &\Leftrightarrow \quad (A,B) \leq (C,D) \end{aligned}$$

für alle $(A,B),(C,D) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K})$ und

$$\begin{aligned} (g,m) \in R_\mathbb{K}^{-1} \circ R_\mathbb{K} \quad &\Leftrightarrow \quad g^{R_\mathbb{K}^{-1}\downarrow} \subseteq m^{R_\mathbb{K}} \\ &\Leftrightarrow \quad (\gamma g)^{\uparrow\downarrow} \subseteq (\mu m)^{\downarrow} \\ &\Leftrightarrow \quad \gamma g \leq \mu m \\ &\Leftrightarrow \quad gIm \end{aligned}$$

für alle $(g, m) \in G \times M$. Damit ist $R_{\mathbb{K}} \circ R_{\mathbb{K}}^{-1} = 1_{\underline{\mathfrak{C}}(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}))}$ und $R_{\mathbb{K}}^{-1} \circ R_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}}$, also ist $(R_{\mathbb{K}})_{\mathbb{K} \in \mathfrak{Ob}(\mathbf{Bind})}$ eine natürliche Äquivalenz und $\underline{\mathfrak{B}} * \underline{\mathfrak{C}} \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Id}_{\mathbf{Bind}}$.

Weiterhin ist auch

$$\Big( (\underline{\mathfrak{C}} * \underline{\mathfrak{B}})(\mathbb{V}) \xrightarrow{\varphi_{\mathbb{V}}} \mathbb{V} \Big)_{\mathbb{V} \in \mathfrak{Ob}(\mathbf{Res})}$$

mit $\varphi_{\mathbb{V}} := \iota^{-1}$ aus Satz 2.9 eine natürliche Äquivalenz, denn es gilt

$$\begin{aligned} \Big( (\underline{\mathfrak{C}} * \underline{\mathfrak{B}})(\varphi) * \varphi_{\mathbb{W}} \Big)(v^{\downarrow}, v^{\uparrow}) &= \varphi_{\mathbb{W}}\big(\varphi(v)^{\downarrow}, \varphi(v)^{\uparrow}\big) \\ &= \bigvee \varphi(v)^{\downarrow} = \varphi(v) = \varphi\Big(\bigvee v^{\downarrow}\Big) \\ &= (\varphi_{\mathbb{V}} * \varphi)(v^{\downarrow}, v^{\uparrow}) \end{aligned}$$

für alle $(v^{\downarrow}, v^{\uparrow}) \in \underline{\mathfrak{B}}(\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V}))$. □

## 3.2 Die Struktur von Res

Im Licht der eben bewiesenen Äquivalenz von **Res** und **Bind** sind strukturelle Aussagen über eine Kategorie auch immer in der anderen gültig. Zunächst wird auf die Struktur von **Res** eingegangen und diese im Anschluss auf **Bind** übertragen.

### Unter-$\vee$-Halbverbände

$$\begin{tikzcd} \mathbb{U} \arrow[r, hook, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi\,\wr"'] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & \mathbb{V} \\ (\mathrm{im}\,\varphi, \leq_{\mathbb{V}}|_{\mathrm{im}\,\varphi \times \mathrm{im}\,\varphi}) \arrow[ur, hook, "\mathrm{id}_{\,\mathrm{im}\,\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Abbildung 3.2: Kanonische Darstellung eines Unterobjekts von $\mathbb{V}$ durch $\mathrm{im}\,\varphi$

In der Kategorie **Res** sind Unterobjekte eines vollständigen Verbandes $\mathbb{V}$ Äquivalenzklassen von Monomorphismen $\mathbb{U} \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{V}$ (vgl. Definition 2.19). Diese Äquivalenzklassen sind kanonisch darstellbar durch die Bilder der Monomorphismen in $\mathbb{V}$ (siehe Abbildung 3.2). Da es sich bei den Monomorphismen in **Res** um injektive $\vee$-erhaltende Einbettungen handelt, sind diese Bilder $\vee$-abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{V}$. Diese sind natürlich wieder vollständige Verbände, besitzen aber nicht notwendig die gleiche $\wedge$-Struktur wie $\mathbb{V}$.

**Beispiel 3.9** Abbildung 3.3 zeigt einen Verband und einen seiner Unter-$\vee$-Halbverbände. Man erkennt, dass die Einbettung $\vee$-erhaltend, aber nicht $\wedge$-erhaltend ist, denn $\epsilon(b \wedge c) = \epsilon d = 0 \neq 4 = 2 \wedge 3 = \epsilon b \wedge \epsilon c$. ◁

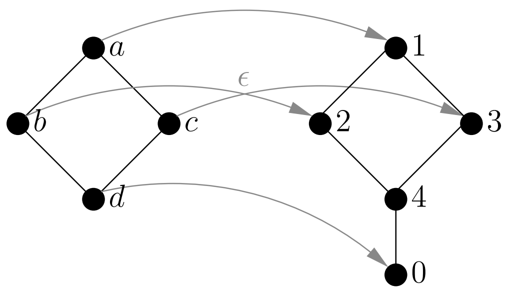


Abbildung 3.3: Unter-$\vee$-Halbverband mit Einbettung

### Faktor-$\vee$-Halbverbände

Dual zu Unter-$\vee$-Halbverbänden sind die Faktorobjekte eines vollständigen Verbandes $\mathbb{V}$ in **Res** charakterisiert durch Epimorphismen $\mathbb{V} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{W}$. Diese entsprechen genau den $\vee$-Kongruenzrelationen von $\mathbb{V}$ (siehe Abbildung 3.4). Wieder muss die $\wedge$-Struktur von $\mathbb{V}$ nicht erhalten bleiben.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{V} \arrow[rr, two heads, "\sigma"] \arrow[d, "{[\cdot]_{\ker \sigma}}"'] \arrow[drr, phantom, "\equiv"] & & \mathbb{W} \\
\mathbb{V}/_{\ker \sigma} \arrow[urr, "\sim", "\sigma"'] & &
\end{tikzcd}$$

Abbildung 3.4: Kanonische Darstellung eines Faktorobjekts von $\mathbb{V}$ durch $\ker \varphi$

**Beispiel 3.10** In Abbildung 3.5 ist ein vollständiger Verband mit einem homomorphen Bild abgebildet. Die Surjektion ist nicht $\wedge$-erhaltend, denn $\sigma(b \wedge c) = \sigma d = 0 \neq 2 = 1 \wedge 2 = \sigma b \wedge \sigma c$. $\triangleleft$

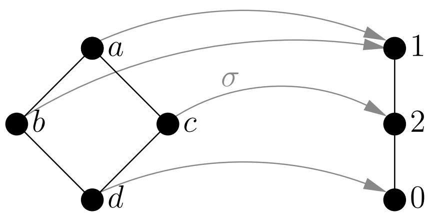


Abbildung 3.5: Homomorphes Bild eines vollständigen Verbandes

### Limites

**Satz 3.11** **Res** *ist eine vollständige Kategorie.*

*Beweis:* Wegen Hilfssatz 2.28 ist nur zu zeigen, dass **Res** Produkte und Differenzkerne hat.

- Das direkte Produkt $\mathbb{V} = \times_{t\in T} \mathbb{V}_t$ einer Familie $(V_t)_{t\in T}$ vollständiger Verbände entspricht genau dem kategorientheoretischen Begriff des Produkts. Die geforderten Projektionen sind die kanonischen Projektionen $\pi_t : \mathbb{V} \to \mathbb{V}_t : (v_s)_{s\in T} \mapsto v_t$.

  Es bleibt zu zeigen, dass $\mathbb{V}$ und $(\pi_t)_{t\in T}$ die Universalität erfüllen. Sei deshalb $\mathbb{W}$ ein vollständiger Verband und $\left(\mathbb{W} \xrightarrow{\pi'_t} \mathbb{V}_t\right)_{t\in T}$ eine Familie von $\vee$-Morphismen. Dann ist $\kappa : \mathbb{W} \to \mathbb{V} : w \mapsto (\pi'_t(w))_{t\in T}$ der geforderte $\vee$-Morphismus, für den die Kommutativitätsbedingungen $\kappa * \pi_t = \pi'_t$ für alle $t \in T$ erfüllt sind. Man erkennt leicht, dass $\kappa$ durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt ist.

- Seien $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ vollständige Verbände und $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{Res}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ parallele $\vee$-Morphismen. Die Menge $U := \{v \in V \mid \varphi_1(v) = \varphi_2(v)\}$ ist unter Suprema abgeschlossen, denn

  $$\varphi_1\left(\bigvee_{t\in T} v_t\right) = \bigvee_{t\in T} \varphi_1 v_t = \bigvee_{t\in T} \varphi_2 v_t = \varphi_2\left(\bigvee_{t\in T} v_t\right) \text{ für alle } (v_t)_{t\in T} \in U^T.$$

  $\mathbb{U} = (U, \leq_{\mathbb{V}} |_{U\times U})$ ist also ein vollständiger $\vee$-Unterhalbverband von $\mathbb{V}$. Außerdem gilt die Kommutativitätsbedingung $\epsilon * \varphi_1 = \epsilon * \varphi_2$ mit der kanonischen Einbettung $\epsilon : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$.

  Sei nun $\mathbb{X}$ ein vollständiger Verband und $\chi : \mathbb{X} \to \mathbb{V}$ ein $\vee$-Morphismus mit $\chi * \varphi_1 = \chi * \varphi_2$. Die Abbildung $\lambda : \mathbb{X} \to \mathbb{U} : x \mapsto \chi x$ ist wohldefiniert, denn $\varphi_1(\chi x) = \varphi_2(\chi x)$, also $\chi x \in U$. Es folgt $\epsilon(\lambda x) = \epsilon(\chi x) = \chi x$ für alle $x \in X$. Da $\lambda$ eindeutig durch diese Eigenschaft bestimmt wird, ist $(\mathbb{U}, \epsilon)$ ein Differenzkern von $\varphi_1$ und $\varphi_2$. ☐

**Hilfssatz 3.12** *Die Abbildungen $\cdot^*$ aus Definitionen 2.1 und 2.3 definieren einen Isomorphismus $\cdot^* : \mathbf{Res}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Res}$.*

*Beweis:* Seien $\mathbb{V}, \mathbb{W} \in \mathbf{Res}$ und $\varphi \in \mathbf{Res}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Wegen Hilfssatz 2.2 ist $\varphi^*$ eine residuierte Abbildung von $\mathbb{W}^*$ nach $\mathbb{V}^*$ und nach Hilfssatz 2.4 ist $\cdot^*$ ein kovarianter Funktor. Da $\varphi$ und $\varphi^*$ einander eindeutig bestimmen und $\cdot^*_{\mathfrak{Ob}}$ eine bijektive Abbildung auf den vollständigen Verbänden ist, ist $\cdot^*$ sogar ein Isomorphismus. ☐

Damit ist **Res** also nicht nur vollständig, sondern auch kovollständig.

### Abgeschlossene Struktur

Die Kategorie **Res** besitzt zu je zwei Objekten $\mathbb{V}$ und $\mathbb{W}$ ein Objekt $\underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$, nämlich den Verband aller residuierten Abbildungen von $\mathbb{V}$ nach $\mathbb{W}$ (Hilfssatz 2.5). Dieses erfüllt die Voraussetzungen eines Inneren Hom-Objekts für **Res**.

**Hilfssatz 3.13** *Die folgenden Daten bestimmen eine abgeschlossene Struktur auf* **Res***:*

- *Basisfunktor* $\mathbf{Res}_0 : \mathbf{Res} \to \mathbf{Set}$ *mit* $\mathbf{Res}_0(\mathbb{V}) = V$ *für jeden vollständigen Verband* $\mathbb{V} = (V, \leq)$ *und* $\mathbf{Res}_0(\varphi)(v) := \varphi(v)$ *für alle* $\varphi \in \mathbf{Res}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ *und* $v \in \mathbb{V}$

- *Innerer Hom-Funktor* $\underline{\mathbf{Res}} : \mathbf{Res}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Res} \to \mathbf{Res}$ *mit*

  $$\underline{\mathbf{Res}}(\varphi_1, \varphi_2) : \left(\mathbb{V}_1 \xrightarrow{\psi} \mathbb{V}_2\right) \mapsto \varphi_1 * \psi * \varphi_2 \text{ für } \varphi_1 \in \mathbf{Res}^{\mathrm{op}}(\mathbb{V}_1, \mathbb{W}_1), \varphi_2 \in \mathbf{Res}(\mathbb{V}_2, \mathbb{W}_2)$$

  *(siehe Abbildung 3.6)*

- *Einsobjekt* $\mathbb{C}_2 := (\{0,1\}, \leq)$
- $i_{\mathbb{V}} : \mathbb{V} \to \underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{C}_2, \mathbb{V}) : v \mapsto \big(i_{\mathbb{V}}(v) : \mathbb{C}_2 \to \mathbb{V} : 1 \mapsto v\big)$
- $j_{\mathbb{V}} : \mathbb{C}_2 \to \underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{V}, \mathbb{V}) : 1 \mapsto 1_{\mathbb{V}}$.
- $d_{\mathbb{U}\mathbb{V}\mathbb{W}} :\ \underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \to \underline{\mathbf{Res}}(\underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{U}, \mathbb{V}), \underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{U}, \mathbb{W})) :$
  $\varphi \mapsto \Big(d_{\mathbb{U}\mathbb{V}\mathbb{W}}(\varphi) : \underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{U}, \mathbb{V}) \to \underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{U}, \mathbb{W}) : \psi \mapsto \psi * \varphi\Big)$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{V}_1 \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{V}_2 \arrow[d, "\varphi_2"] \\
\mathbb{W}_1 \arrow[u, "\varphi_1"] \arrow[r, "\underline{\mathbf{Res}}(\varphi_1, \varphi_2)(\psi)"] \arrow[ur, phantom, "///"] & \mathbb{W}_2
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 3.6: Der Innere Hom-Funktor auf den Morphismen aus $\mathbf{Res}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Res}$

*Beweis:* Es ist leicht nachzuprüfen, dass $\mathbf{Res}_0$ ein treuer Funktor und $\underline{\mathbf{Res}}$ ein Funktor ist.

Außerdem ist $i$ eine natürliche Transformation, denn für alle vollständigen Verbände $\mathbb{V}, \mathbb{W}$, $\varphi \in \mathbf{Res}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ und $v \in \mathbb{V}$ gilt

$$
\begin{aligned}
\big(\varphi * i_{\mathbb{W}}\big)(v)(1) &= i_{\mathbb{W}}\big(\varphi(v)\big)(1) \\
&= \varphi(v) \\
&= \varphi\big(i_{\mathbb{V}}(v)(1)\big) \\
&= \big(i_{\mathbb{V}}(v) * \varphi\big)(1) \\
&= \underline{\mathbf{Res}}(1_{\mathbb{C}_2}, \varphi)\big(i_{\mathbb{V}}(v)\big)(1) \\
&= \big(i_{\mathbb{V}} * \underline{\mathbf{Res}}(1_{\mathbb{C}_2}, \varphi)\big)(v)(1),
\end{aligned}
$$

also $\varphi * i_{\mathbb{W}} = i_{\mathbb{V}} * \underline{\mathbf{Res}}(1_{\mathbb{C}_2}, \varphi)$. Weiterhin ist durch $i_{\mathbb{V}}^{-1} : \underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{C}_2, \mathbb{V}) \to \mathbb{V} : \varphi \mapsto \varphi(1)$ eine natürliche Transformation bestimmt, welche invers zu $i$ ist.

Damit $j$ eine außergewöhnliche natürliche Transformation sein kann, müssen drei Kommutativitätsbedingungen erfüllt sein (siehe Definition 2.29 für $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \star$, $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \mathbf{Res}$, $F(\star, \star, \star) = \mathbb{C}_2$ und $G = \underline{\mathbf{Res}}$). Die Bedingungen 1) und 2) sind in diesem Fall trivial erfüllt, für 3) ist zu zeigen, dass $j_{\mathbb{V}} * \underline{\mathbf{Res}}(1_{\mathbb{V}}, \varphi) = j_{\mathbb{W}} * \underline{\mathbf{Res}}(\varphi, 1_{\mathbb{W}})$ für alle $\mathbb{V}, \mathbb{W} \in \mathbf{Res}$ und $\varphi \in \mathbf{Res}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ gilt. Dies ist leicht nachzurechnen.

$d$ ist ebenfalls eine außergewöhnliche natürliche Transformation. Setzt man in Definition 2.29 $\mathcal{A} = \mathbf{Res}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Res}$, $\mathcal{B} = \star$, $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \mathbf{Res}$, $F((\mathbb{V}, \mathbb{W}), \star, \star) = \underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ und $G((\mathbb{V}, \mathbb{W}), \mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2) = \underline{\mathbf{Res}}(\underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{U}_2, \mathbb{V}), \underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{U}_1, \mathbb{W}))$, so ist die Bedingung 2) trivial und 1) und 3) ergeben sich zu

1) $\underline{\mathbf{Res}}(\varphi, \psi) * d_{\mathbb{U}\mathbb{V}'\mathbb{W}'} = d_{\mathbb{U}\mathbb{V}\mathbb{W}} * \underline{\mathbf{Res}}(\underline{\mathbf{Res}}(1_{\mathbb{U}}, \varphi), \underline{\mathbf{Res}}(1_{\mathbb{U}}, \psi))$
   für alle $\mathbb{U}, \mathbb{V}, \mathbb{W}, \mathbb{V}', \mathbb{W}' \in \mathbf{Res}$, $\varphi \in \mathbf{Res}(\mathbb{V}', \mathbb{V})$ und $\psi \in \mathbf{Res}(\mathbb{W}, \mathbb{W}')$
3) $d_{\mathbb{U}\mathbb{V}\mathbb{W}} * \underline{\mathbf{Res}}(\underline{\mathbf{Res}}(\varphi, 1_{\mathbb{V}}), \underline{\mathbf{Res}}(1_{\mathbb{U}}, 1_{\mathbb{W}})) = d_{\mathbb{U}'\mathbb{V}\mathbb{W}} * \underline{\mathbf{Res}}(\underline{\mathbf{Res}}(1_{\mathbb{U}}, 1_{\mathbb{V}}), \underline{\mathbf{Res}}(\varphi, 1_{\mathbb{W}}))$
   für alle $\mathbb{U}, \mathbb{U}', \mathbb{V}, \mathbb{W} \in \mathbf{Res}$, $\varphi \in \mathbf{Res}(\mathbb{U}, \mathbb{U}')$

Bedingung 2.29.1) ist erfüllt, denn für alle $\alpha \in \mathbf{Res}(\mathbb{V},\mathbb{W})$, $\beta \in \mathbf{Res}(\mathbb{U},\mathbb{V}')$ gilt

$$\begin{aligned}
\big(\underline{\mathbf{Res}}(\varphi,\psi) * d_{\mathbb{U}\mathbb{V}'\mathbb{W}'}\big)(\alpha)(\beta) &= d_{\mathbb{U}\mathbb{V}'\mathbb{W}'}\big(\varphi * \alpha * \psi\big)(\beta) \\
&= \beta * \varphi * \alpha * \psi \\
&= \big(\underline{\mathbf{Res}}(1_{\mathbb{U}},\varphi) * d_{\mathbb{U}\mathbb{V}\mathbb{W}}(\alpha) * \underline{\mathbf{Res}}(1_{\mathbb{U}},\psi)\big)(\beta) \\
&= \big(d_{\mathbb{U}\mathbb{V}\mathbb{W}} * \underline{\mathbf{Res}}(\underline{\mathbf{Res}}(1_{\mathbb{U}},\varphi),\underline{\mathbf{Res}}(1_{\mathbb{U}},\psi))\big)(\alpha)(\beta).
\end{aligned}$$

Ebenso gilt

$$\begin{aligned}
&\big(d_{\mathbb{U}\mathbb{V}\mathbb{W}} * \underline{\mathbf{Res}}(\underline{\mathbf{Res}}(\varphi,1_{\mathbb{V}}),\underline{\mathbf{Res}}(1_{\mathbb{U}},1_{\mathbb{W}}))\big)(\alpha)(\beta) \\
&\quad= \big(\underline{\mathbf{Res}}(\varphi,1_{\mathbb{V}}) * d_{\mathbb{U}\mathbb{V}\mathbb{W}}(\alpha) * \underline{\mathbf{Res}}(1_{\mathbb{U}},1_{\mathbb{V}})\big)(\beta) \\
&\quad= \varphi * \beta * \alpha \\
&\quad= \big(\underline{\mathbf{Res}}(1_{\mathbb{U}},1_{\mathbb{V}}) * d_{\mathbb{U}'\mathbb{V}\mathbb{W}}(\alpha) * \underline{\mathbf{Res}}(\varphi,1_{\mathbb{W}})\big)(\beta) \\
&\quad= \big(d_{\mathbb{U}'\mathbb{V}\mathbb{W}} * \underline{\mathbf{Res}}(\underline{\mathbf{Res}}(1_{\mathbb{U}},1_{\mathbb{V}}),\underline{\mathbf{Res}}(\varphi,1_{\mathbb{W}}))\big)(\alpha)(\beta)
\end{aligned}$$

für alle $\alpha \in \mathbf{Res}(\mathbb{V},\mathbb{W})$, $\beta \in \mathbf{Res}(\mathbb{U}',\mathbb{V})$, also ist 2.29.3) auch erfüllt.

Es bleiben drei Bedingungen zu überprüfen:

**(AK1)** $\mathbf{Res}_0(\underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{V},\mathbb{W})) = \mathbf{Res}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ ist für alle $\mathbb{V},\mathbb{W} \in \mathbf{Res}$ nach Definition von $\mathbf{Res}_0$ erfüllt.

**(AK2)** Es gilt $(j_{\mathbb{W}} * d_{\mathbb{V}\mathbb{W}\mathbb{W}})(1) = d_{\mathbb{V}\mathbb{W}\mathbb{W}}(1_{\mathbb{W}}) = 1_{\underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{V},\mathbb{W})} = j_{\underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{V},\mathbb{W})}(1)$ für alle $\mathbb{V},\mathbb{W} \in \mathbf{Res}$.

**(AK3)** Es gilt $\mathbf{Res}_0(i_{\underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{V},\mathbb{V})})(1_{\mathbb{V}})(1) = 1_{\mathbb{V}} = j_{\mathbb{V}}(1)$ für alle $\mathbb{V} \in \mathbf{Res}$. □

## *-autonome Struktur

Es wird nun Satz 2.36 benutzt, um den Rest der *-autonomen Struktur von **Res** zu bestimmen.

**Satz 3.14** **Res** *ist eine *-autonome Kategorie.*

*Beweis:* Wegen Satz 2.36 ist nur Folgendes zu zeigen:

- **Res** ist abgeschlossen:
  siehe Hilfssatz 3.13.
- **Res** ist symmetrisch:
  Dazu ist die natürliche Äquivalenz von $\underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{U},\underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{V},\mathbb{W}))$ und $\underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{V},\underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{U},\mathbb{W}))$ nachzuweisen. Mit der Definition $t_{\mathbb{U}\mathbb{V}\mathbb{W}}(\varphi)(v)(u) := \varphi(u)(v)$ ergibt sich die Kommutativitätsbedingung

$$\begin{aligned}
\Big(t_{\mathbb{U}\mathbb{V}\mathbb{W}} * \underline{\mathbf{Res}}\big(\psi,\underline{\mathbf{Res}}(\varphi,\chi)\big)\Big)(\alpha)(v)(u) &= \Big(\psi * t_{\mathbb{U}\mathbb{V}\mathbb{W}}(\alpha) * \underline{\mathbf{Res}}(\varphi,\chi)\Big)(v)(u) \\
&= \Big(\varphi * t_{\mathbb{U}\mathbb{V}\mathbb{W}}(\alpha)\big(\psi(v)\big) * \chi\Big)(u) \\
&= \chi\Big(\alpha\big(\varphi(u)\big)\big(\psi(v)\big)\Big) \\
&= \Big(\psi * \alpha\big(\varphi(u)\big) * \chi\Big)(v) \\
&= \Big(\varphi * \alpha * \underline{\mathbf{Res}}(\psi,\chi)\Big)(u)(v) \\
&= \Big(\underline{\mathbf{Res}}\big(\varphi,\underline{\mathbf{Res}}(\psi,\chi)\big) * t_{\mathbb{U}'\mathbb{V}'\mathbb{W}'}\Big)(\alpha)(v)(u)
\end{aligned}$$

für alle $\mathbb{U},\mathbb{U}',\mathbb{V},\mathbb{V}',\mathbb{W},\mathbb{W}' \in \mathbf{Res}$, $\varphi \in \mathbf{Res}(\mathbb{U}',\mathbb{U})$, $\psi \in \mathbf{Res}(\mathbb{V}',\mathbb{V})$, $\chi \in \mathbf{Res}(\mathbb{W},\mathbb{W}')$, $\alpha \in \mathbf{Res}(\mathbb{U},\underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{V},\mathbb{W}))$, $v \in \mathbb{V}'$ und $u \in \mathbb{U}'$.

Man erkennt leicht, dass sich die inverse natürliche Transformation durch $t^{-1}_{\mathbb{U}\mathbb{V}\mathbb{W}} = t_{\mathbb{V}\mathbb{U}\mathbb{W}}$ ergibt.

- $\cdot^*$ ist voll und treu:

  siehe Hilfssatz 3.12.

- $\mathbf{Res}(\mathbb{U},\underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{V},\mathbb{W}^*)) \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathbf{Res}(\mathbb{W},\underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{V},\mathbb{U}^*))$:

  Die durch den Dualisierungsfunktor $\cdot^*$ bestimmten Morphismen

$$\widehat{\cdot^*}_{\mathbb{V}\mathbb{W}} : \underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{V},\mathbb{W}) \to \underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{W}^*,\mathbb{V}^*) : \varphi \mapsto \varphi^* \quad \text{(vgl.Definition 2.31)}$$

  definieren eine natürliche Äquivalenz, denn sie erfüllen die Kommutativitätsbedingung

$$\begin{aligned}\big(\widehat{\cdot^*}_{\mathbb{V}\mathbb{W}} * \underline{\mathbf{Res}}(\psi,\varphi^*)\big)(\alpha) &= \psi * \alpha^* * \varphi^* \\ &= \big(\varphi * \alpha * \psi^*\big)^* \\ &= \big(\underline{\mathbf{Res}}(\varphi,\psi^*) * \widehat{\cdot^*}_{\mathbb{V}'\mathbb{W}'}\big)(\alpha)\end{aligned}$$

  für alle $\mathbb{V},\mathbb{V}',\mathbb{W},\mathbb{W}' \in \mathbf{Res}$, $\varphi \in \mathbf{Res}(\mathbb{V}',\mathbb{V})$, $\psi \in \mathbf{Res}(\mathbb{W}',\mathbb{W})$ und $\alpha \in \mathbf{Res}(\mathbb{V},\mathbb{W}^*)$.

  Die gesuchte natürliche Äquivalenz ergibt sich nun als Wirkung von $\mathbf{Res}_0$ auf die folgende Komposition natürlicher Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{U},\underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{V},\mathbb{W}^*)) &\xrightarrow{t_{\mathbb{U}\mathbb{V}\mathbb{W}^*}} \underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{V},\underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{U},\mathbb{W}^*)) \\ &\xrightarrow{\underline{\mathbf{Res}}(1_{\mathbb{V}},\widehat{\cdot^*}_{\mathbb{U}\mathbb{W}})} \underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{V},\underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{W},\mathbb{U}^*)) \\ &\xrightarrow{t_{\mathbb{V}\mathbb{W}\mathbb{U}^*}} \underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{W},\underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{V},\mathbb{U}^*))\end{aligned}$$

  □

Das Tensorprodukt auf **Res** lässt sich nun als $\mathbb{V}\otimes\mathbb{W} := \underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{V},\mathbb{W}^*)^*$ für alle $\mathbb{V},\mathbb{W} \in \mathbf{Res}$ definieren. Die Elemente von $\mathbf{Res}_0(\mathbb{V}\otimes\mathbb{W})$ sind also genau die Abbildungen $\varphi : V \to W$, die Teil einer Galois-Verbindung von $\mathbb{V}$ nach $\mathbb{W}$ sind.

Die Wirkung von $\otimes$ auf den Morphismen ist kanonisch gegeben durch $f\otimes g := \underline{\mathbf{Res}}(f,g^*)^*$ für $f \in \mathbf{Res}(\mathbb{V}_1,\mathbb{V}_2)$ und $g \in \mathbf{Res}(\mathbb{W}_1,\mathbb{W}_2)$. Genauer ist $f\otimes g$ als residuierte Abbildung von $\mathbb{V}_1\otimes\mathbb{W}_1$ nach $\mathbb{V}_2\otimes\mathbb{W}_2$ bestimmt durch die Gleichung $(f\otimes g)(\varphi) = f * \varphi * g^*$ für alle $\varphi \in \mathbb{V}_1\otimes\mathbb{W}_1 = \underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{V}_1,\mathbb{W}_1^*)^*$.

## 3.3 Die Struktur von Bind

Die Struktur von **Res** kann nun mit Hilfe der Funktoren $\underline{\mathfrak{B}}$ und $\underline{\mathfrak{C}}$ auf **Bind** übertragen werden.

### Unterkontexte

Sei $\mathbb{K} = (G,M,I)$ ein Kontext. Die Unterobjekte von $\mathbb{K}$ in **Bind** sind Äquivalenzklassen von Monomorphismen $\mathbb{K}_U \xrightarrow{R} \mathbb{K}$. Diese Monomorphismen entsprechen genau den injektiven residuierten Abbildungen $\varphi_R$ in den Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$. Die Äquivalenzklassen lassen sich kanonisch darstellen, indem man die Domäne der Monomorphismen auf Teilkontexte des kanonischen Kontextes $\underline{\mathfrak{C}}(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}))$ beschränkt.

**Hilfssatz 3.15** *Seien $\mathbb{K} = (G, M, I)$, $\mathbb{K}_U = (H, N, J)$ Kontexte sowie $R \in \mathbf{Bind}(\mathbb{K}_U, \mathbb{K})$ ein Monomorphismus. Das durch $R$ repräsentierte Unterobjekt von $\mathbb{K}$ lässt sich auch auf der Domäne $\mathbb{K}_c = (\operatorname{im}\varphi_R, \operatorname{im}\varphi_R, \leq_{\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})}|_{\operatorname{im}\varphi_R \times \operatorname{im}\varphi_R})$ durch die Bindung $E \in \mathbf{Bind}(\mathbb{K}_c, \mathbb{K})$ mit $(A, B)^E := B$ für alle $(A, B) \in \operatorname{im}\varphi_R$ darstellen.*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}_U \arrow[r, hook, "R"] & \mathbb{K} \\
\underline{\mathfrak{C}}(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_U)) \arrow[u, "R_{\mathbb{K}_U}\wr"] \arrow[r, hook, "\underline{\mathfrak{C}}(\varphi_R)"] \arrow[d, "\underline{\mathfrak{C}}(\varphi_R)\wr"'] & \underline{\mathfrak{C}}(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})) \arrow[u, "\wr R_{\mathbb{K}}"'] \\
\mathbb{K}_c \arrow[ur, hook, "\underline{\mathfrak{C}}(\mathrm{id}_{\operatorname{im}\varphi_R})"'] &
\end{tikzcd}$$

Abbildung 3.7: Kanonische Darstellung von Unterobjekten in **Bind**

*Beweis:* Wendet man den Funktor $\underline{\mathfrak{C}}$ auf das Diagramm aus Abbildung 3.2 an und beachtet die natürliche Äquivalenz $R_{\mathbb{K}} : (\underline{\mathfrak{B}} * \underline{\mathfrak{C}})(\mathbb{K}) \Rightarrow \mathbb{K}$ aus Satz 3.8, so erhält man das Diagramm in Abbildung 3.7.

Dies bedeutet, dass der Monomorphismus $\underline{\mathfrak{C}}(\mathrm{id}_{\operatorname{im}\varphi_R}) \circ R_{\mathbb{K}} : \mathbb{K}_c \hookrightarrow \mathbb{K}$ eine äquivalente Darstellung des Unterobjekts ist, dass durch $R$ repräsentiert wird. Es ergibt sich für alle $(A, B) \in \operatorname{im}\varphi_R$ die Gleichung

$$\begin{aligned}
(A, B)^{\underline{\mathfrak{C}}(\mathrm{id}_{\operatorname{im}\varphi_R}) \circ R_{\mathbb{K}}} &= (A, B)^{\underline{\mathfrak{C}}(\mathrm{id}_{\operatorname{im}\varphi_R}) \leq_{\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})} R_{\mathbb{K}}} \\
&= (A, B)^{\downarrow_{\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})} R_{\mathbb{K}}} \\
&= \{m \in M \mid \forall (C, D) \leq_{\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})} (A, B) : m \in D\} \\
&= B \\
&= (A, B)^E,
\end{aligned}$$

also $E = \underline{\mathfrak{C}}(\mathrm{id}_{\operatorname{im}\varphi}) \circ R_{\mathbb{K}}$. □

Zu beachten ist aber, dass nicht jeder beliebig gewählte Teilkontext von $\underline{\mathfrak{C}}(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}))$ auch ein Repräsentant einer solchen Äquivalenzklasse ist, sondern nur dann, wenn die kanonische Einbettung wirklich ein $\vee$-Morphismus ist. Die Menge der Unterkontexte von $\mathbb{K}$ ist also isomorph zur Menge aller $\vee$-abgeschlossenen Teilmengen von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$.

## Faktorkontexte

Die Faktorobjekte eines Kontextes $\mathbb{K} = (G, M, I)$ sind bestimmt durch Epimorphismen $\mathbb{K} \xrightarrow{R} \mathbb{K}_B$. Man kann analog zum Fall der Unterobjekte eine kanonische Darstellung durch den Faktorverband $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})/_{\ker\varphi_R}$ angeben.

**Hilfssatz 3.16** *Seien $\mathbb{K} = (G, M, I)$, $\mathbb{K}_B = (H, N, J)$ Kontexte sowie $R \in$* **Bind**$(\mathbb{K}, \mathbb{K}_B)$ *ein Epimorphismus. Die Kodomäne $\mathbb{K}_c = (\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})/_{\ker\varphi_R}, \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})/_{\ker\varphi_R}, \leq)$ erlaubt eine Beschreibung des repräsentierten Faktorobjekts durch den Epimorphismus $E \in$* **Bind**$(\mathbb{K}, \mathbb{K}_c)$ *mit $\alpha^E := A$ für alle $\alpha \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})/_{\ker\varphi_R}$, wobei $(A, B) := \bigvee \alpha$.*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[rr, two heads, "R"] \arrow[d, "R_{\mathbb{K}}^{-1}\,\wr"'] \arrow[drr, phantom, "///"] & & \mathbb{K}_B \arrow[d, "\wr\, R_{\mathbb{K}_B}^{-1}"] \\
\underline{\mathfrak{C}}(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})) \arrow[rr, two heads, "\underline{\mathfrak{C}}(\varphi_R)"] \arrow[d, two heads, "\underline{\mathfrak{C}}([\cdot]_{\ker\varphi_R})"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & & \underline{\mathfrak{C}}(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_B)) \\
\underline{\mathfrak{C}}(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})/_{\ker\varphi_R}) \arrow[urr, "\wr"', "\underline{\mathfrak{C}}(\varphi_R)"] & &
\end{tikzcd}$$

Abbildung 3.8: Kanonische Darstellung von Faktorobjekten in **Bind**

*Beweis:* Aus Abbildung 3.4 und der natürlichen Äquivalenz $R_{\mathbb{K}}^{-1} : \mathbb{K} \overset{\sim}{\Rightarrow} (\underline{\mathfrak{B}} * \underline{\mathfrak{C}})(\mathbb{K})$ aus Satz 3.8 ergibt sich der Zusammenhang in Abbildung 3.8.

Sei nun $\alpha \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})/_{\ker\varphi_R}$ mit $(A, B) := \bigvee \alpha$. Es gilt $(A, B) \in \alpha$, denn $\alpha$ ist $\vee$-abgeschlossen, da $\varphi_R$ ein $\vee$-Morphismus ist. Es folgt

$$\begin{aligned}
\alpha^{R_{\mathbb{K}}^{-1} \circ \underline{\mathfrak{C}}([\cdot]_{\ker\varphi_R})} &= \alpha^{\underline{\mathfrak{C}}([\cdot]_{\ker\varphi_R}) \leq_{\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})} R_{\mathbb{K}}^{-1}} \\
&= (A, B)^{\downarrow_{\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})} \leq_{\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})} R_{\mathbb{K}}^{-1}} \\
&= (A, B)^{\uparrow_{\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})} R_{\mathbb{K}}^{-1}} \\
&= A \\
&= \alpha^E,
\end{aligned}$$

also $E = R_{\mathbb{K}}^{-1} \circ \underline{\mathfrak{C}}([\cdot]_{\ker\varphi_R})$. □

Die Menge der Faktorkontexte von $\mathbb{K}$ ist also isomorph zur Menge aller vollständigen $\vee$-Kongruenzrelationen auf $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$.

## Limites

Da **Bind** und **Res** äquivalent sind, ist natürlich auch **Bind** eine vollständige Kategorie. Das Produkt von Kontexten $(\mathbb{K}_t)_{t \in T}$ kann zwar durch $\underline{\mathfrak{C}}(\times_{t \in T} \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t))$ dargestellt werden, es gibt aber eine viel einfachere Beschreibung durch die *Kontextsumme* $\mathbb{K} := (G, M, I)$ mit[4]

$$G := \bigcup_{t\in T} G_t, \quad M := \bigcup_{t\in T} M_t, \quad I := \bigcup_{t\in T} \Big( I_t \cup \bigcup_{s\in T\setminus\{t\}} G_s \times M_t \Big).$$

Offensichtlich sind $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ und $\times_{t\in T} \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ isomorph, weshalb $\underline{\mathfrak{C}}(\times_{t\in T} \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t))$ und $\mathbb{K}$ äquivalente Darstellungen des Produktes in **Bind** sind. Die Projektionen sind die Bindungen $\mathbb{K} \xrightarrow{R_t} \mathbb{K}_t$ mit $R_t := I_t \cup \bigcup_{s\in T\setminus\{t\}} G_s \times M_t$.

### Inneres Hom-Objekt

Auch die abgeschlossene Struktur überträgt sich von **Res** auf **Bind**. Zur Vereinfachung stellt man fest, dass die vollständigen Verbände $\underline{\mathbf{Bind}}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2)$ und $\underline{\mathbf{Res}}(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1), \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2))$ dual isomorph sind.

**Hilfssatz 3.17** *Seien $\mathbb{K}_i = (G_i, M_i, I_i)$ $(i = 1, 2)$ Kontexte und $R_1, R_2 \in$ **Bind**$(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2)$. Dann gilt $R_1 \subseteq R_2$ genau dann, wenn $\varphi_{R_2} \leq \varphi_{R_1}$. Dies gilt auch für vollständige Kontexte und für $\widetilde{\varphi}_\bullet$ statt $\varphi_\bullet$.*

*Ebenso gilt für zwei vollständige Verbände $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ und $\varphi_1, \varphi_2 \in$ **Res**$(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)$, dass $\varphi_1 \leq \varphi_2$ genau dann der Fall ist, wenn $\widetilde{R}_{\varphi_2} \subseteq \widetilde{R}_{\varphi_1}$. Diese Aussage gilt insbesondere für Begriffsverbände und für $R_\bullet$ statt $\widetilde{R}_\bullet$.*

*Beweis:* Wenn $R_1 \subseteq R_2$ gilt, dann folgt $A^{R_1} \subseteq A^{R_2}$, also

$$\varphi_{R_2}(A, B) = (A^{R_2 I_2}, A^{R_2}) \leq (A^{R_1 I_2}, A^{R_1}) = \varphi_{R_1}(A, B)$$

für alle $(A, B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1)$.

Umgekehrt gilt im Fall $\varphi_{R_2} \leq \varphi_{R_1}$ für alle $g \in G_1$, dass

$$(g^{R_2 I_2}, g^{R_2}) = \varphi_{R_2}(g^{I_1 I_1}, g^{I_1}) \leq \varphi_{R_1}(g^{I_1 I_1}, g^{I_1}) = (g^{R_1 I_2}, g^{R_1}).$$

Also gilt $g^{R_1} \subseteq g^{R_2}$ für alle $g \in G_1$ und damit $R_1 \subseteq R_2$.

Die zweite Behauptung ergibt sich ebenso durch einfaches Nachrechnen. $\square$

Damit ist $\underline{\mathfrak{C}}(\underline{\mathbf{Res}}(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1), \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2))) \cong \underline{\mathfrak{C}}(\underline{\mathbf{Bind}}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2))$ ein geeigneter Kandidat für einen inneren Hom-Funktor.

Die geforderten natürlichen Transformationen für eine abgeschlossene Kategorie ergeben sich nun aus denen von **Res**, indem diese geeignet durch die Funktoren $\underline{\mathfrak{B}}$ und $\underline{\mathfrak{C}}$ „übersetzt“ werden. Dies ist im nächsten Abschnitt beispielhaft für das Tensorprodukt ausgeführt, beinhaltet aber keine komplizierten Konstruktionen.

Interessant ist die Kontext-Repräsentation des vollständigen Verbandes $\underline{\mathbf{Bind}}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2)$, welche vielleicht genauso gut durch einen kleineren Kontext als $\underline{\mathfrak{C}}(\underline{\mathbf{Bind}}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2))$ geschehen könnte. Dieser Kontext enthält alle Bindungen als Gegenstände und Merkmale und deren Ordnung als Inzidenzrelation. Wie kann man aber alle Bindungen in einem einfacheren Kontext darstellen? Diese Frage ist bisher ungeklärt, aber in Abschnitt 4.3 wird eine Kontextdarstellung von sogenannten regulären Bindungen vorgestellt.

[4] Die Gegenstands- bzw. Merkmalsmengen der Teilkontexte müssen dazu paarweise disjunkt sein.

### Tensorprodukt und *-autonome Struktur

Es soll hier nun am Beispiel der monoidalen Struktur die oben angesprochene Übersetzung der geforderten natürlichen Transformationen und Kommutativitätsbedingungen von **Res** nach **Bind** genauer betrachtet werden.

Man definiert dazu $\mathbb{K}_1 \otimes \mathbb{K}_2 := \underline{\mathfrak{C}}(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1) \otimes \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2))$ als Tensorprodukt auf **Bind**. Der resultierende Kontext ist $\mathbb{K}_1 \otimes \mathbb{K}_2 = (\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1) \otimes \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2), \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1) \otimes \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2), \leq)$.

Das neutrale Element dieses Tensorprodukts ist $\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{C}_2) = (\{0,1\}, \{0,1\}, \leq)$. Alternativ dazu wird hier der reduzierte Kontext $\perp := (\{1\}, \{0,1\}, \leq)$ verwendet, dessen Begriffsverband auch isomorph zu $\mathbb{C}_2$ ist. Im Folgenden wird die Isomorphie $\underline{\mathfrak{B}}(\perp) \cong \mathbb{C}_2$ als Identität angesehen, um die Schreibweise zu vereinfachen.

Um nun beispielsweise die Bindung $l_\mathbb{K} : \perp \otimes \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ zu definieren, betrachtet man die residuierte Abbildung $l_{\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})} : \mathbb{C}_2 \otimes \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ aus der Definition des Tensorprodukts. Diese wird mittels des Funktors $\underline{\mathfrak{C}}$ abgebildet auf die Bindung $\underline{\mathfrak{C}}(l_{\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})}) : \underline{\mathfrak{C}}(\underline{\mathfrak{B}}(\perp) \otimes \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})) \to \underline{\mathfrak{C}}(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}))$. Jetzt muss nur noch die Kodomäne mittels eines passenden Isomorphismus angepasst werden, sodass sich $l_\mathbb{K}$ als die folgende Komposition ergibt:

$$\underline{\mathfrak{C}}(\underline{\mathfrak{B}}(\perp) \otimes \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})) \xrightarrow{\underline{\mathfrak{C}}(l_{\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})})} \underline{\mathfrak{C}}(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})) \xrightarrow{R_\mathbb{K}} \mathbb{K}$$

Dabei bezeichnet $R_\mathbb{K}$ den Isomorphismus aus Satz 3.8.

Analog definiert man $r_\mathbb{K}$. $a_{\mathbb{K}_1\mathbb{K}_2\mathbb{K}_3}$ wird über die folgende Komposition definiert:

$$\begin{aligned} &\underline{\mathfrak{C}}(\underline{\mathfrak{B}}(\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2)) \otimes \mathbb{V}_3) \xrightarrow{\underline{\mathfrak{C}}(\varphi_{\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2} \otimes 1_{\mathbb{V}_3})} \underline{\mathfrak{C}}((\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2) \otimes \mathbb{V}_3) \\ &\xrightarrow{\underline{\mathfrak{C}}(a_{\mathbb{V}_1\mathbb{V}_2\mathbb{V}_3})} \underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V}_1 \otimes (\mathbb{V}_2 \otimes \mathbb{V}_3)) \xrightarrow{\underline{\mathfrak{C}}(1_{\mathbb{V}_1} \otimes \varphi^{-1}_{\mathbb{V}_2 \otimes \mathbb{V}_3})} \underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V}_1 \otimes \underline{\mathfrak{B}}(\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V}_2 \otimes \mathbb{V}_3))) \end{aligned}$$

Dabei sind $\varphi$, $\varphi^{-1}$, $a$ wie in Hilfssatz 3.8 und der Definition des Tensorprodukts sowie $\mathbb{V}_i := \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_i)$ $(i = 1, 2, 3)$.

Die Kommutativitätsbedingungen ergeben sich auf ähnliche Weise aus denen für das Tensorprodukt in **Res**. Für die Bedingung **(MK1)** aus Definition 2.32 erhält man z. B. das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathfrak{C}}(\underline{\mathfrak{B}}(\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{C}_2)) \otimes \mathbb{V}_2) \arrow[rrrr, "a_{\mathbb{K}_1\perp\mathbb{K}_2}"] \arrow[dr, "\underline{\mathfrak{C}}(\varphi_{\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{C}_2} \otimes 1_{\mathbb{V}_2})"] \arrow[dd, "\underline{\mathfrak{C}}(\underline{\mathfrak{B}}(\underline{\mathfrak{C}}(r_{\mathbb{V}_1})) \otimes 1_{\mathbb{V}_2})"'] & & & & \underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V}_1 \otimes \underline{\mathfrak{B}}(\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{C}_2 \otimes \mathbb{V}_2))) \arrow[dd, "\underline{\mathfrak{C}}(1_{\mathbb{V}_1} \otimes \underline{\mathfrak{B}}(\underline{\mathfrak{C}}(l_{\mathbb{V}_2})))"] \\
& \underline{\mathfrak{C}}((\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{C}_2) \otimes \mathbb{V}_2) \arrow[rr, "\underline{\mathfrak{C}}(a_{\mathbb{V}_1\mathbb{C}_2\mathbb{V}_2})"] \arrow[dr, "\underline{\mathfrak{C}}(r_{\mathbb{V}_1} \otimes 1_{\mathbb{V}_2})"'] & & \underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V}_1 \otimes (\mathbb{C}_2 \otimes \mathbb{V}_2)) \arrow[ur, "\underline{\mathfrak{C}}(1_{\mathbb{V}_1} \otimes \varphi^{-1}_{\mathbb{C}_2 \otimes \mathbb{V}_2})"'] \arrow[dl, "\underline{\mathfrak{C}}(1_{\mathbb{V}_1} \otimes l_{\mathbb{V}_2})"] & \\
\underline{\mathfrak{C}}(\underline{\mathfrak{B}}(\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V}_1)) \otimes \mathbb{V}_2) \arrow[rr, "{\underline{\mathfrak{C}}(\varphi_{\mathbb{V}_1} \otimes 1_{\mathbb{V}_2}) = \underline{\mathfrak{C}}(\underline{\mathfrak{B}}(R_{\mathbb{K}_1}) \otimes 1_{\mathbb{V}_2})}"'] & & \underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2) & & \underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V}_1 \otimes \underline{\mathfrak{B}}(\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V}_2))) \arrow[ll, "{\underline{\mathfrak{C}}(1_{\mathbb{V}_1} \otimes \varphi_{\mathbb{V}_2}) = \underline{\mathfrak{C}}(1_{\mathbb{V}_1} \otimes \underline{\mathfrak{B}}(R_{\mathbb{K}_2}))}"]
\end{tikzcd}$$

Hierbei sind $\mathbb{V}_i := \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_i)$ $(i = 1, 2)$ und $\varphi$, $R$, $a$, $l$, $r$ wie oben. Die Kommutativität des oberen Vierecks ergibt sich aus der oben stehenden Definition von $a_{\mathbb{K}_1\mathbb{K}_2\mathbb{K}_3}$. Die des Dreiecks kommt von der Bedingung **(MK1)** in **Res**, die natürlich unter dem Funktor $\underline{\mathfrak{C}}$ weiterhin gilt. Die übrigen beiden Vierecke kommutieren, da $\varphi$, und damit auch $\underline{\mathfrak{C}}(1_{\mathbb{V}_1} \otimes \varphi)$ bzw. $\underline{\mathfrak{C}}(\varphi \otimes 1_{\mathbb{V}_2})$, eine natürliche Transformation ist.

Die beiden äußeren Bindungen links unten ergeben zusammen $\underline{\mathfrak{C}}(\underline{\mathfrak{B}}(r_{\mathbb{K}_1}) \otimes 1_{\mathbb{V}_2}) = r_{\mathbb{K}_1} \otimes 1_{\mathbb{K}_2}$ und die auf der anderen Seite $\underline{\mathfrak{C}}(1_{\mathbb{V}_1} \otimes \underline{\mathfrak{B}}(l_{\mathbb{K}_2})) = 1_{\mathbb{K}_1} \otimes l_{\mathbb{K}_2}$. Damit ergibt sich die gesuchte Bedingung **(MK1)** für **Bind**.

**Bemerkung** Aufgrund von Satz 3.14 und Hilfssatz 3.17 kann man das Tensorprodukt in **Bind** genauso gut als

$$\mathbb{K}_1 \otimes \mathbb{K}_2 := \underline{\mathfrak{C}}(\underline{\mathbf{Bind}}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2^*)^*) \cong \underline{\mathfrak{C}}(\underline{\mathbf{Res}}(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1), \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2^*))^*) \cong \underline{\mathfrak{C}}(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1) \otimes \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2))$$

definieren, also als vollständigen Kontext aller dualen Bindungen zwischen $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$. In einem gewissen Sinn ist das Tensorprodukt also nichts anderes als ein spezielles inneres Hom-Objekt. Dies unterstreicht die enge Beziehung zwischen Tensorprodukt und innerem Hom-Funktor, die auch schon in **Res** zu beobachten war. $\triangleleft$

Auch die restlichen Konstruktionen wie Symmetrie und Dualisierungsfunktor lassen sich durch $\underline{\mathfrak{B}}$ und $\underline{\mathfrak{C}}$ auf **Bind** übertragen. Der Dualisierungsfunktor bildet dabei jeden Kontext $\mathbb{K}$ auf $\mathbb{K}^*$ ab und jede Bindung $R \in \mathbf{Bind}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2)$ auf die Bindung $R^* := R^{-1}$ von $\mathbb{K}_2^*$ nach $\mathbb{K}_1^*$. Das dualisierende Objekt in **Bind** ist $\perp^* = (\{0, 1\}, \{1\}, \geq)$.

Die Dualisierungsstruktur auf den Kategorien wird offenbar von $\underline{\mathfrak{B}}$ und $\underline{\mathfrak{C}}$ erhalten. Da $\underline{\mathfrak{B}}$ und $\underline{\mathfrak{C}}$ sogar die komplette *-autonome Struktur erhalten, werden sie auch als **-autonome Funktoren* bezeichnet ([Mor08]).

## 3.4 Tensorprodukt

In der Literatur gibt es für das Tensorprodukt $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ zweier vollständiger Verbände $\mathbb{V}, \mathbb{W} \in \mathbf{Res}$ unterschiedliche Definitionen. Es wird sich aber herausstellen, dass durch diese Definitionen isomorphe (oder dual isomorphe) vollständige Verbände beschrieben werden.

a) Die in dieser Arbeit gewählte Herangehensweise ist die, das Tensorprodukt als einen zu $\underline{\mathbf{Res}}$ adjungierten Funktor zu definieren.

   Genauer muss für jedes Objekt $\mathbb{V} \in \mathbf{Res}$ der Funktor $\cdot \otimes \mathbb{V} : \mathbf{Res} \to \mathbf{Res}$ stark adjungiert sein zum Funktor $\underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{V}, \cdot) : \mathbf{Res} \to \mathbf{Res}$, d. h. es muss eine natürliche Äquivalenz $p'_{\mathbb{U}\mathbb{W}} : \underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{U} \otimes \mathbb{V}, \mathbb{W}) \stackrel{\sim}{\Rightarrow} \underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{U}, \underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{V}, \mathbb{W}))$ geben (vgl. Definition 2.33). Diese Art der Definition des Tensorprodukts wird vor allem in kategorientheoretischen Arbeiten verwendet ([BN76, Lin65, Bar79]).

b) Wie bereits festgestellt, kann man das Tensorprodukt $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ genauso als den vollständigen Verband aller Galois-Verbindungen von $\mathbb{V}$ nach $\mathbb{W}$ definieren (vgl. Abschnitt 3.2). Diese Beschreibung ist bereits in frühen Abhandlungen über Galois-Verbindungen zu finden ([Shm74, Ban80]).

c) Der vollständige Verband aller Bi-Ideale von $\mathbb{V}$ und $\mathbb{W}$ ist eine weitere Möglichkeit, das Tensorprodukt auszudrücken (siehe [Mor08, Shm74]). Ein Bi-Ideal $T$ ist eine Teilmenge des direkten Produkts $V \times W$ mit folgenden Eigenschaften:

- $(a,b) \leq (v,w) \in T \Rightarrow (a,b) \in T$ für alle $a, v \in V$, $b, w \in W$
- $A \times \{w\} \subseteq T \Rightarrow (\bigvee_{v\in A} v, w) \in T$ für alle $A \subseteq V$, $w \in W$
- $\{v\} \times B \subseteq T \Rightarrow (v, \bigvee_{w\in B} w) \in T$ für alle $v \in V$, $B \subseteq W$

d) Die letzte Beschreibungsmöglichkeit, die hier vorgestellt werden soll, verwendet sogenannte *Bimorphismen* $\varphi : \mathbb{V} \times \mathbb{W} \to \mathbb{X}$. Das sind Abbildungen $\varphi : V \times W \to X$, für die die Abbildungen

$$\begin{aligned}\varphi(\cdot, w) &: V \to X : v \mapsto \varphi(v,w) \text{ und}\\ \varphi(v, \cdot) &: W \to X : w \mapsto \varphi(v,w)\end{aligned}$$

Morphismen in **Res** sind, also residuiert sind.

Das Tensorprodukt $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ wird nun definiert als Kodomäne eines Bimorphismus' $\sigma : \mathbb{V} \times \mathbb{W} \to \mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ mit folgender Eigenschaft. Es muss für alle Bimorphismen $\varphi : \mathbb{V} \times \mathbb{W} \to \mathbb{X}$ einen eindeutig bestimmten Morphismus $\psi : \mathbb{V} \otimes \mathbb{W} \to \mathbb{X}$ geben mit $\varphi = \sigma * \psi$ (siehe [Fra76, GLQ81] für (nicht-vollständige) $\vee$-Halbverbände).

Schaut man sich die Definition von Bi-Idealen genauer an, so erkennt man, dass diese nichts anderes sind als duale Bindungen von $\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V})$ nach $\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{W})$.

**Hilfssatz 3.18** *Seien $\mathbb{V}$ und $\mathbb{W}$ vollständige Verbände. Eine Relation $T \subseteq V \times W$ ist genau dann ein Bi-Ideal, wenn es eine Bindung in* $\mathbf{Bind}(\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V}), \underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{W})^*)$ *ist.*

*Beweis:* Sei $T$ ein Bi-Ideal und $v \in V$. Dann ist $v^T = \left(\bigvee v^T\right)^{\downarrow}$, denn:

- Für alle $w' \in v^T$ gilt $w' \leq \bigvee v^T$.
- Für $w' \leq \bigvee v^T$ gilt wegen $(v, \bigvee v^T) \in T$ auch $(v, w') \in T$, also $w' \in v^T$.

Damit ist $v^T$ ein Inhalt von $\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{W})^*$. Analog ist $w^T$ für jedes $w \in W$ ein Umfang von $\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V})$.

Sei nun $T \in \mathbf{Bind}(\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V}), \underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{W})^*)$ und $(a,b) \leq (v,w) \in T$. Dann gilt $v^T = w'^{\downarrow}$ für ein $w' \in W$ und damit folgt aus $w \in v^T$ sofort $b \in v^T$, also $(v,b) \in T$. Da genauso $b^T = v'^{\downarrow}$ für ein $v' \in V$ gilt, folgt analog $(a,b) \in T$.

Für jedes $w \in T$ gibt es ein $v' \in V$ mit $w^T = v'^{\downarrow}$, also folgt aus $v \in w^T$ für alle $v \in A \subseteq V$ sofort $\bigvee_{v\in A} v \in w^T$. Analog ergibt sich die fehlende Aussage, weshalb $T$ ein Bi-Ideal ist. □

Nun stellt man fest, dass alle oben angegebenen Definitionen des Tensorprodukts äquivalent sind.

**Satz 3.19** *Die oben aufgezählten Varianten, das Tensorprodukt $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ zweier vollständiger Verbände $\mathbb{V}, \mathbb{W} \in$* **Res** *zu definieren, ergeben (dual) isomorphe vollständige Verbände.*

*Beweis:* Wie in Satz 3.14 festgestellt, sind die Ansätze a) und b) gleichbedeutend. Es muss lediglich die Ordnung der Elemente von $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ dualisiert werden.

Die Äquivalenz von b) und c) wurde erstmals in [Shm74, Theorem 1.3] bewiesen, wobei dort Bi-Ideale als $G$-Ideale bezeichnet wurden. Unter Beachtung von Hilfssatz 3.18 ist diese aber nichts anderes als die bereits in Satz 3.5 und Hilfssatz 3.17 festgestellte Äquivalenz von Galois-Verbindungen und dualen Bindungen.

In [BN76, Proposition 3, 4.(3)] wurde bewiesen, dass die Ansätze a) und d) äquivalent sind. □

## 3.5 Andere Morphismen

Anstelle von Bindungen können auch andere mathematische Objekte als Morphismen zwischen Kontexten aufgefasst werden. Ein paar davon werden nun näher betrachtet.

### 3.5.1 Chu-Abbildungen und Chu-Korrespondenzen

In [Mor07] wurden die aus der Chu-Konstruktion ([Chu79]) hervorgehenden sogenannten *Chu-Abbildungen* („Chu maps") betrachtet. Eine Chu-Abbildung $(\alpha, \beta)$ zwischen Kontexten $\mathbb{K}_1 = (G, M, I)$ und $\mathbb{K}_2 = (H, N, J)$ besteht aus zwei Abbildungen $\alpha : G \to H$ und $\beta : N \to M$, wobei $\alpha(g) J n \Leftrightarrow g I \beta(n)$ für alle $g \in G$ und $n \in N$ gelten muss. Diese Kategorie ist schon wegen ihrer Konstruktion *-autonom.

Chu-Abbildungen beschreiben aber nur einen Teil der gesamten Kategorie **Bind**. In [Mor08] wurde eine Verallgemeinerung der Chu-Abbildungen auf *Chu-Korrespondenzen* („Chu correspondences") untersucht. Diese werden beschrieben durch ein Paar $(\alpha, \beta)$ von Abbildungen $\alpha : G \to \mathcal{P}(H)$ und $\beta : N \to \mathcal{P}(M)$ mit der Eigenschaft, dass für alle $g \in G$ und $n \in N$ die Äquivalenz $\alpha(g) J n \Leftrightarrow g I \beta(n)$ sowie $\alpha(g) \in \operatorname{Ext}(\mathbb{K}_2)$ und $\beta(n) \in \operatorname{Int}(\mathbb{K}_1)$ erfüllt sein müssen.

Für eine Bindung $R \subseteq G \times N$ bilden die beiden Abbildungen $g \mapsto g^R$ und $n \mapsto n^R$ offensichtlich eine Chu-Korrespondenz. Umgekehrt lässt sich durch jede Chu-Korrespondenz $(\alpha, \beta)$ eine Bindung $\{(g, n) \mid \alpha(g) J n\}$ definieren. Es ist leicht zu bestätigen, dass die Menge $\mathbf{Bind}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2)$ und die Menge aller Chu-Korrespondenzen zwischen $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$ mittels dieser Beziehungen isomorph sind. Außerdem sind sie ordnungsisomorph, wenn man die Bindungen durch Mengeninklusion und die Chu-Korrespondenzen durch die punktweise Ordnung ihrer Abbildungen ordnet. In [Mor08] wurde bereits dargestellt, dass dabei eine *-autonome Kategorie entsteht, welche natürlich zu **Bind** isomorph ist.

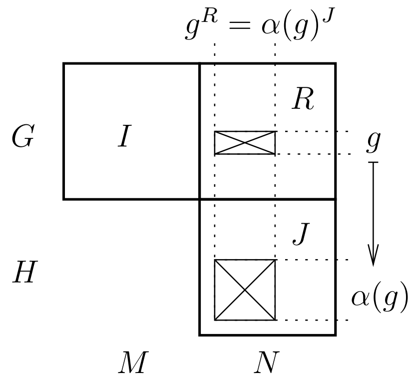


Abbildung 3.9: Eine Bindung $R$ und die dazugehörige Chu-Korrespondenz $(\alpha, \beta)$

### 3.5.2 Relationale Adjunktionen

Eine weitere äquivalente Beschreibung von Bindungen sind die sogenannten *relationalen Adjunktionen*. In [Gan07] wurde diese Äquivalenz für *relationale Galois-Verbindungen* und duale Bindungen festgestellt. Eine relationale Adjunktion zwischen $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$ ist ein Paar $(\Phi, \Psi)$ von Relationen $\Phi \subseteq G \times H$ und $\Psi \subseteq M \times N$ mit der Eigenschaft, dass $gIn^\Psi \Leftrightarrow g^\Phi Jn$ sowie $g^\Phi \in \operatorname{Ext}(\mathbb{K}_2)$ und $n^\Psi \in \operatorname{Int}(\mathbb{K}_1)$ für alle $g \in G$ und $n \in N$ gelten.

In [Gan07] wurde bewiesen, dass relationale Adjunktionen in eindeutiger Weise Adjunktionen zwischen den Begriffsverbänden $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1)$ und $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2)$ und damit Bindungen zwischen den Kontexten bestimmen. Für die Ordnungsisomorphie zu $\underline{\mathbf{Bind}}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2)$ muss dabei die Mengeninklusion zwischen den entsprechenden Relationen als Ordnung auf der Menge der relationalen Adjunktionen gewählt werden.

### 3.5.3 Vollhomomorphismen

Für vollständige Verbände ist es eigentlich natürlich, Vollhomomorphismen als Morphismen zu wählen. Damit eine residuierte Abbildung $\varphi$ zu einem Vollhomomorphismus wird, fehlt noch die Eigenschaft, vollständig $\wedge$-erhaltend zu sein. $\varphi$ muss also zusätzlich eine residuale Abbildung von $\mathbb{V}_1$ nach $\mathbb{V}_2$ sein.

In der Sprache der Bindungen lassen sich Vollhomomorphismen deshalb am besten durch *Doppelbindungen* $(R, S)$ beschreiben. Diese bestehen aus Bindungen $R \in \mathbf{Bind}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2)$ und $S \in \mathbf{Bind}(\mathbb{K}_2, \mathbb{K}_1)$, für die die Abbildungen $\varphi_R$ und $\varphi_S^*$ übereinstimmen. Dies lässt sich äquivalent ausdrücken als die Eigenschaft, dass $A^R = B^{SJ}$ bzw. $B^S = A^{RJ}$ für alle $(A, B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1)$ gelten müssen. Diese kann leicht aus den Definitionen von $\varphi_R$ und $\varphi_S^*$ abgeleitet werden (siehe [GW96, Korollar 114]). Zu beachten ist dabei, dass $\varphi_R^*$ und $\varphi_S$ keineswegs übereinstimmen müssen.

**Voll** sei nun die folgende Kategorie:

| | |
|---|---|
| **Objekte** | alle vollständigen Verbände |
| **Morphismen** | $\mathbf{Voll}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2) := \{\varphi : V_1 \to V_2 \mid \varphi \text{ Vollhomomorphismus}\}$ |
| **Komposition** | kovariante Abbildungskomposition $*$ |
| **1-Morphismen** | $1_\mathbb{V} := \mathrm{id}_V$ für alle vollständigen Verbände $\mathbb{V} = (V, \leq)$ |

Diese Kategorie ist äquivalent zur oben angedeuteten Kategorie **DBind**:

| | |
|---|---|
| **Objekte** | alle Kontexte |
| **Morphismen** | $\mathbf{DBind}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2) := \{(R, S) \mid (R, S) \text{ Doppelbindung}\}$ |
| **Komposition** | $(R_1, S_1) * (R_2, S_2) := (R_1 \circ R_2, S_2 \circ S_1)$ |
| **1-Morphismen** | $1_\mathbb{K} := (I, I)$ für alle Kontexte $\mathbb{K} = (G, M, I)$ |

Es lässt sich leicht nachrechnen, dass dadurch wirklich zwei Kategorien definiert sind. Die Äquivalenz der beiden Kategorien ergibt sich analog zur Äquivalenz von **Res** und **Bind** (siehe Satz 3.8). Die zugehörigen Funktoren sollen ebenso $\underline{\mathfrak{B}}$ und $\underline{\mathfrak{C}}$ heißen und sind folgendermaßen definiert:

- $\underline{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{Ob}} : \mathbb{K} \mapsto \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$
- $\underline{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{Mor}} : (R, S) \mapsto \varphi_{(R,S)} := \varphi_R = \varphi_S^*$ (vgl. Satz 3.4)
- $\underline{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{Ob}} : \mathbb{V} \mapsto \underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V})$
- $\underline{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{Mor}} : \varphi \mapsto (\widetilde{R}_\varphi, \widetilde{R}^\varphi)$ (vgl. Satz 3.5)

**Hilfssatz 3.20** *Seien $\mathbb{V}$ und $\mathbb{W}$ vollständige Verbände sowie $\varphi \in$ **Voll**$(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ ein Isomorphismus. Dann gilt $\varphi^* = \varphi_* = \varphi^{-1}$.*

*Beweis:* Sei $w = \varphi(x) \in \mathbb{W}$ beliebig. Dann gelten $\varphi^*(w) = \bigvee\{v \in V \mid \varphi v \leq w\} = x$ und $\varphi_*(w) = \bigwedge\{v \in V \mid w \leq \varphi v\} = x$ sowie $\varphi^{-1}(w) = x$. □

Dies bedeutet wegen der Äquivalenz von **Voll** und **DBind** insbesondere, dass die inverse Doppelbindung zu $(R, S) \in \mathfrak{Mor}(\textbf{DBind})$, falls sie existiert, immer $(S, R)$ ist.

Die Struktur der beiden neuen Kategorien soll nun weiter untersucht werden.

## Unterobjekte

Unterobjekte eines vollständigen Verbandes $\mathbb{V}$ in **Voll** sind, analog zu **Res**, genau die vollständig $\vee$- und $\wedge$-abgeschlossenen Teilmengen, also die vollständigen Unterverbände. In [GW96, Satz 13] wurde bereits festgestellt, dass sich diese für Begriffsverbände $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ durch spezielle Bindungen $J \in$ **Bind**$(\mathbb{K}, \mathbb{K})$, genannt abgeschlossene Relationen, darstellen lassen.

**Definition 3.21 (vgl. [GW96, Definition 50])** Eine Relation $J \subseteq G \times M$ heißt *abgeschlossene Relation (von $\mathbb{K}$)*, falls

- $J \subseteq I$ und
- jeder Begriff des Kontextes $(G, M, J)$ auch ein Begriff von $\mathbb{K}$ ist. ◇

Das folgende Lemma setzt die beiden Begriffe der Unterobjekte in **DBind** und der abgeschlossenen Relationen in Zusammenhang.

**Hilfssatz 3.22** *Es seien $\mathbb{K} = (G, M, I)$ und $\mathbb{K}_U = (H, N, U)$ Kontexte sowie $(R, S) \in$ **DBind**$(\mathbb{K}_U, \mathbb{K})$ ein Monomorphismus. Das durch $(R, S)$ repräsentierte Unterobjekt von $\mathbb{K}$ lässt sich auch auf der Domäne $\mathbb{K}_J = (G, M, J)$ durch die Doppelbindung $(J, J) \in$ **DBind**$(\mathbb{K}_J, \mathbb{K})$ mit*

$$J := \bigcup_{(A,B) \in \operatorname{im} \varphi_{(R,S)}} A \times B$$

*darstellen. $J$ ist dabei eine abgeschlossene Relation von $\mathbb{K}$.*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}_U \arrow[r, hook, "{(R,S)}"] \arrow[d, "{(R,S)}"', "\wr"] & \mathbb{K} \\
\mathbb{K}_J \arrow[ur, hook, "{(J,J)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Abbildung 3.10: Kanonische Darstellung eines Unterobjekts in **DBind**

*Beweis:* Dass $J$ eine abgeschlossene Relation von $\mathbb{K}$ ist, folgt aus [GW96, Satz 13] mit der Beobachtung, dass $\operatorname{im}\varphi_{(R,S)}$ ein vollständiger Unterverband von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ ist. Leicht zu bestätigen ist außerdem, dass $(J,J)$ eine Doppelbindung und sogar ein Monomorphismus ist und $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_J) = \operatorname{im}\varphi_{(R,S)} = \operatorname{im}\varphi_{(J,J)}$ gilt. Da $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_J) \xhookrightarrow{\varphi_{(J,J)}} \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ die identische Einbettung ist, gilt $\varphi_{(R,S)} * \varphi_{(J,J)} = \varphi_{(R,S)}$. Weiterhin ist $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_U) \xrightarrow{\varphi_{(R,S)}} \operatorname{im}\varphi_{(R,S)} = \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_J)$ ein Isomorphismus, woraus die Behauptung durch Anwendung des Funktors $\underline{\mathfrak{C}}$ folgt (siehe Abbildung 3.10). □

Jedes Unterobjekt eines Kontextes $\mathbb{K}$ wird also durch eine abgeschlossene Relation dargestellt. Es gilt sogar die Umkehrung, denn für eine abgeschlossene Relation $J$ ist $(J,J)$ immer ein Monomorphismus von $\mathbb{K}_J$ nach $\mathbb{K}$ in **Voll**. Diese beiden Konstruktionen sind invers zueinander ([GW96, Satz 13]). Während die vollständigen Unterverbände von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ mit der natürlichen Ordnung allerdings einen vollständigen Verband bilden, ist dies bei den abgeschlossenen Relationen von $\mathbb{K}$ nicht der Fall.

### Faktorobjekte

Eine ähnliche Charakterisierung lässt sich auch für Faktorobjekte in **DBind** angeben. Faktoren in **Voll** sind eindeutig bestimmt durch die vollständigen Kongruenzrelationen $\ker\varphi$ von Vollhomomorphismen $\varphi$. Auf der Ebene der Kontexte lässt sich wieder eine kanonische Darstellung der Faktorobjekte von $\mathbb{K} = (G,M,I)$ durch eine Relation $J \subseteq G \times M$ finden.

**Definition 3.23 (vgl. [GW96, Definition 54])** Sei $J \subseteq G \times M$. Diese Relation heißt *Blockrelation (von $\mathbb{K}$)*, falls

- $I \subseteq J$,
- $g^J$ für alle $g \in G$ ein Begriffsinhalt von $\mathbb{K}$ ist und
- $m^J$ für alle $m \in M$ ein Begriffsumfang von $\mathbb{K}$ ist. ◇

Blockrelationen $J$ sind also Bindungen mit der zusätzlichen Eigenschaft $I \subseteq J$. Sie sind eindeutig durch Toleranzrelationen auf dem Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ bestimmt ([GW96, Satz 15]). Das bedeutet, dass die Kongruenzrelationen $\ker\varphi$ durch spezielle Blockrelationen darstellbar sind.

**Hilfssatz 3.24** *Es seien $\mathbb{K} = (G,M,I)$ und $\mathbb{K}_B = (H,N,B)$ Kontexte sowie $(R,S) \in$ **DBind**$(\mathbb{K},\mathbb{K}_B)$ ein Epimorphismus. Die Kodomäne $\mathbb{K}_J = (G,M,J)$ erlaubt eine Beschreibung des repräsentierten Faktorobjekts durch den Epimorphismus $(J,J) \in$ **DBind**$(\mathbb{K},\mathbb{K}_J)$ mit*

$$gJm :\Longleftrightarrow \bigwedge[\gamma g]_{\ker\varphi_{(R,S)}} \leq \mu m.$$

*Dabei ist $J$ eine Blockrelation mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass $B = B^{IJ}$ für alle $B \in \operatorname{Int}(\mathbb{K}_J)$ gilt.*

*Beweis:* Da $\Theta := \ker\varphi_{(R,S)}$ eine vollständige Kongruenzrelation ist, ist die Abbildung $\varphi : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}) : \alpha \mapsto \bigwedge[\alpha]_\Theta$ ein (idempotenter) $\vee$-Morphismus ([GW96, Hilfssatz 56]). $J$ ist eine Blockrelation, da $J = R_\varphi$ und $I \subseteq J$ gelten. Außerdem erfüllt $J$ die geforderte

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[r, two heads, "{(R,S)}"] \arrow[d, "{(J,J)}"'] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & \mathbb{K}_B \\
\mathbb{K}_J \arrow[ur, "\sim", "{(R,S)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Abbildung 3.11: Kanonische Darstellung eines Faktorobjekts in **DBind**

Eigenschaft, denn für alle $B \in \mathrm{Int}(\mathbb{K})$ gilt

$$\begin{aligned}
m \in B^{IJ} \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi(\gamma g) \leq \mu m \text{ für alle } g \in B^I \\
&\Leftrightarrow \quad \varphi(\gamma g) \leq \mu m \text{ für alle } g \in G \text{ mit } \gamma g \leq (B^I, B) \\
&\Leftrightarrow \quad \varphi(B^I, B) \leq \mu m \\
&\Leftrightarrow \quad \varphi(\gamma g) \leq \mu m \text{ für alle } g \in G \text{ mit } \varphi(\gamma g) \leq (B^I, B) \\
&\Leftrightarrow \quad \varphi(\gamma g) \leq \mu m \text{ für alle } g \in B^J \\
&\Leftrightarrow \quad m \in B^{JJ}.
\end{aligned}$$

Damit folgt für alle $B \in \mathrm{Int}(\mathbb{K}_J)$, dass $B^{IJ} = B^{JJ} = B$ ist.

Weiterhin ist $(J, J)$ eine Doppelbindung, denn für alle $(A, B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ gilt

$$\varphi_J(A, B) = (B^{IJJ}, B^{IJ}) = (B^J, B^{JJ}) = \varphi_J^*(A, B).$$

Außerdem ist $\varphi_{(J,J)}$ surjektiv, also ist $(J, J)$ ein Epimorphismus. Der Isomorphismus zwischen $\mathbb{K}_J$ und $\mathbb{K}_B$ ist durch $(R, S)$ gegeben. Es ergibt sich ein ähnliches Diagramm wie im Fall der Unterobjekte (siehe Abbildung 3.11). □

Jedes Faktorobjekt von $\mathbb{K}$ bestimmt also eindeutig eine Blockrelation auf $\mathbb{K}$. Wieder gilt auch die Umkehrung, denn jede Blockrelation $J$ von $\mathbb{K}$ mit obiger Eigenschaft erzeugt einen idempotenten $\vee$-Morphismus $\varphi_J$ (siehe Hilfssatz 4.1) und damit einen Epimorphismus $(J, J) \in \mathbf{DBind}(\mathbb{K}, \mathbb{K}_J)$. Es lässt sich leicht nachrechnen, dass diese Konstruktionen auch invers zueinander sind.

Im Gegensatz zum Fall der Unterobjekte bilden die vollständigen Kongruenzrelationen auf $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ mit der natürlichen Ordnung einen vollständigen Verband, der isomorph ist zum vollständigen Verband der Blockrelationen von $\mathbb{K}$ mit obiger Zusatzeigenschaft.

### *-autonome Struktur

Die Kategorie **Voll** ist nicht abgeschlossen und auch nicht isomorph zu ihrer dualen Kategorie und deshalb keine *-autonome Kategorie. Dies ist sofort an den Definitionen ersichtlich. Auch ein Tensorprodukt auf **Voll** konnte nicht gefunden werden.

# 4 Andere begriffsanalytische Konstruktionen

In [GW96] wurden viele Objekte und Konstruktionen behandelt, die mit formalen Kontexten in Beziehung stehen. Einige davon lassen sich gut in die hier vorgestellte kategorientheoretische Sichtweise einordnen, andere weniger. In diesem Abschnitt werden beispielhaft ein paar davon näher beleuchtet.

## 4.1 Selbstbindungen

*Selbstbindungen* sind Bindungen zwischen einem Kontext $\mathbb{K} = (G, M, I)$ und sich selbst. Offenbar sind sowohl abgeschlossene Relationen (Definition 3.21) als auch Blockrelationen (Definition 3.23) immer Selbstbindungen. In Abschnitt 3.5.3 wurde eine Beziehung zwischen abgeschlossenen Relationen und vollständigen Unterverbänden sowie zwischen speziellen Blockrelationen und vollständigen Faktorverbänden beschrieben.

Diese Selbstbindungen lassen sich aber nicht nur durch Vollhomomorphismen ausdrücken, es gibt sogar eine elegante Charakterisierung über die zugehörigen residuierten Abbildungen.

**Hilfssatz 4.1** *Sei $J \in \mathbf{Bind}(\mathbb{K})$.*

a) *$\varphi_J$ ist monoton.*

b) *$\varphi_J$ ist genau dann extensiv, wenn $J \subseteq I$ gilt.*

c) *$\varphi_J$ ist genau dann intensiv, wenn $I \subseteq J$ gilt.*

d) *$\varphi_J$ ist genau dann idempotent, wenn $B = B^{IJ}$ für alle $B \in \mathrm{Int}(G, M, J)$ gilt.*

e) *$\varphi_J$ ist genau dann ein Hüllenoperator, wenn $J$ eine abgeschlossene Relation ist.*

*Beweis:*

*a)* $\varphi_J$ ist ein $\vee$-Morphismus, also monoton.

*b)* $\varphi_J$ ist genau dann extensiv, wenn $\varphi_J \geq \mathrm{id}_{\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})} = \varphi_I$ gilt. Der Rest folgt aus Hilfssatz 3.17.

*c)* Dies folgt analog zu b) aus Hilfssatz 3.17.

*d)* Sei $\varphi_J$ idempotent und $B \in \mathrm{Int}(G, M, J)$. Dann ist $(B^J, B^{JI})$ ein Begriff von $\mathbb{K}$. Nun gilt

$$(B^I, B) = \varphi_J(B^J, B^{JI}) = \varphi_J\big(\varphi_J(B^J, B^{JI})\big) = (B^{IJI}, B^{IJ})$$

und damit $B = B^{IJ}$.

Für die andere Richtung sei $(A,B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$. Dann ist $A^J \in \mathrm{Int}(G,M,J)$, also $A^J = A^{JIJ}$. Nun ergibt sich

$$\varphi_J(A,B) = (A^{JI}, A^J) = (A^{JIJI}, A^{JIJ}) = \varphi_J\big(\varphi_J(A,B)\big),$$

also ist $\varphi_J$ idempotent.

*e)* Sei $\varphi_J$ ein Hüllenoperator. Um zu zeigen, dass $\mathfrak{B}(G,M,J) \subseteq \mathfrak{B}(G,M,I)$ gilt, nehme man einen Begriff $(B^J, B)$ von $(G,M,J)$. $(B^I, B)$ ist ein Begriff von $\mathbb{K}$ mit dem gleichen Inhalt, also ist zu zeigen, dass $B^J = B^I$ gilt. Da $\varphi_J$ idempotent ist, folgt mit d), dass $B^{IJ} = B$ und damit $B^I \subseteq B^{IJJ} = B^J$. Mit b) ergibt sich nun $J \subseteq I$ und $B^J \subseteq B^I$, also ist $J$ eine abgeschlossene Relation.

Sei nun umgekehrt $J$ eine abgeschlossene Relation und $B \in \mathrm{Int}(G,M,J)$. Nach Voraussetzung gilt dann $B^I = B^J$, also $B = B^{JJ} = B^{IJ}$. Wegen d) ist $\varphi_J$ also idempotent und wegen a) und b) sogar ein Hüllenoperator. □

Zusammen mit den Ergebnissen aus Abschnitt 3.5.3 ergeben sich also eindeutige Beziehungen zwischen den vollständigen Unterverbänden eines vollständigen Verbandes $\mathbb{V}$ und $\vee$-erhaltenden Hüllenoperatoren auf $\mathbb{V}$ sowie vollständigen Faktorverbänden und $\vee$-erhaltenden Kernoperatoren.

**Korollar 4.2** *Sei $\mathbb{V}$ ein vollständiger Verband. Für einen vollständigen Unterverband $\mathbb{U}$ von $\mathbb{V}$ ist die Abbildung $\varphi_{\mathbb{U}} : \mathbb{V} \to \mathbb{V} : v \mapsto \bigwedge\{u \in U \mid v \leq u\}$ ein residuierter Hüllenoperator auf $\mathbb{V}$. Umgekehrt bildet für jeden residuierten Hüllenoperator $\varphi$ auf $\mathbb{V}$ die Menge $\varphi V$ einen vollständigen Unterverband von $\mathbb{V}$. Die beiden Konstruktionen sind invers zueinander.*

*Beweis:* Für einen vollständigen Unterverband $\mathbb{U} \leq \mathbb{V}$ ist die kanonische Einbettung $\epsilon : \mathbb{U} \to \mathbb{V} : u \mapsto u$ ein Vollhomomorphismus. Die Relation $J := \bigcup_{u \in U} u^{\downarrow} \times u^{\uparrow}$ ist also eine abgeschlossene Relation von $\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V})$ (siehe Hilfssatz 3.22 mit $(R,S) = \underline{\mathfrak{C}}(\epsilon)$). Nach Hilfssatz 4.1 ist also $\varphi_J$ und dazu äquivalent auch $\widetilde{\varphi}_J$ ein Hüllenoperator. $\widetilde{\varphi}_J$ ist aber genau $\varphi_{\mathbb{U}}$.

Ist umgekehrt $\varphi$ ein residuierter Hüllenoperator, so ist $J := \widetilde{R}_{\varphi}$ eine abgeschlossene Relation von $\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V})$, also ist $\varphi_{(J,J)} = \varphi_J$ ein Vollhomomorphismus von $\underline{\mathfrak{B}}(V,V,J)$ nach $\underline{\mathfrak{B}}(\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V}))$ (vgl. Diskussion nach Hilfssatz 3.22). Dabei ist $\varphi_J(\mathfrak{B}(V,V,J)) = \{(\varphi(v)^{\downarrow}, \varphi(v)^{\uparrow}) \mid v \in V\}$. Wegen der Isomorphie zwischen $\underline{\mathfrak{B}}(\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V}))$ und $\mathbb{V}$ ist somit $\varphi V$ eine $\vee$- und $\wedge$-abgeschlossene Teilmenge von $V$. □

**Korollar 4.3** *Sei $\mathbb{V}$ ein vollständiger Verband. Für eine vollständige Kongruenzrelation $\Theta$ auf $\mathbb{V}$ ist die Abbildung $\varphi_\Theta : \mathbb{V} \to \mathbb{V} : v \mapsto \bigwedge[v]_\Theta$ ein residuierter Kernoperator auf $\mathbb{V}$. Umgekehrt bildet für jeden residuierten Kernoperator $\varphi$ auf $\mathbb{V}$ die Relation $\ker\varphi$ eine vollständige Kongruenzrelation auf $\mathbb{V}$. Die beiden Konstruktionen sind invers zueinander.*

*Beweis:* Die Abbildung $\sigma : \mathbb{V} \to \mathbb{V}/_\Theta : v \mapsto [v]_\Theta$ ist ein Vollhomomorphismus. Nach Hilfssatz 3.24 ist die Relation $J := \{(v,w) \in V \times V \mid \bigwedge[v]_\Theta \leq w\}$ eine Blockrelation von $\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V})$ mit der Zusatzeigenschaft d) aus Hilfssatz 4.1 (setze dazu $(R,S) = \underline{\mathfrak{C}}(\sigma)$). Daher ist $\varphi_J$ und auch $\widetilde{\varphi}_J$ ein Kernoperator und es gilt $\widetilde{\varphi}_J = \varphi_\Theta$.

Ist nun $\varphi$ ein residuierter Kernoperator, so ist $J := \widetilde{R}_{\varphi}$ eine Blockrelation von $\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V})$ mit besagter Zusatzeigenschaft. Damit ist $\varphi_{(J,J)} = \varphi_J$ ein Vollhomomorphismus von $\underline{\mathfrak{B}}(\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V}))$ nach $\underline{\mathfrak{B}}(V,V,J)$ (vgl. Diskussion nach Hilfssatz 3.24). Für $v,w \in V$ gilt

$$\varphi_J(v^{\downarrow}, v^{\uparrow}) = \varphi_J(w^{\downarrow}, w^{\uparrow}) \iff v^{\downarrow J} = w^{\downarrow J} \iff \varphi(v)^{\uparrow} = \varphi(w)^{\uparrow} \iff \varphi(v) = \varphi(w).$$

Somit unterscheidet sich $\ker \varphi_J$ von $\ker \varphi$ nur durch die Isomorphie $\underline{\mathfrak{B}}(\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V})) \cong \mathbb{V}$, also ist $\ker \varphi$ eine vollständige Kongruenzrelation auf $\mathbb{V}$. □

## 4.2 Skalenmaße

Ein weiteres begriffsanalytisches Objekt, das eng mit Bindungen verwandt ist, ist das Skalenmaß.

**Definition 4.4 (vgl. [GW96, Definition 91])** Seien $\mathbb{K} = (G, M, I)$, $\mathbb{S} = (G_\mathbb{S}, M_\mathbb{S}, I_\mathbb{S})$ Kontexte sowie $\sigma : G \to G_\mathbb{S}$ eine Abbildung. Dann heißt $\sigma$ *Skalenmaß*, wenn das Urbild $\sigma^{-1}(A)$ jedes Begriffsumfangs $A$ von $\mathbb{S}$ ein Begriffsumfang von $\mathbb{K}$ ist. Weiterhin heißt $\sigma$ *voll*, falls jeder Begriffsumfang von $\mathbb{K}$ auch Urbild eines Begriffsumfangs von $\mathbb{S}$ ist. ◊

In der Terminologie von [KHZ05] heißt $\sigma$ auch *extensional stetig*. Ähnliche Aussagen lassen sich auch für intensional stetige Abbildungen treffen. Das sind Abbildungen zwischen den Merkmalsmengen, bei denen Urbilder von Begriffsinhalten wieder Begriffsinhalte sind.

Das folgende Resultat stellt eine Beziehung zwischen Skalenmaßen und Bindungen her. Dieser Zusammenhang wurde bereits in [GW96, Hilfssatz 119] für die zugehörigen residuierten Abbildungen beschrieben.

**Hilfssatz 4.5** *Seien $\mathbb{K} = (G, M, I)$ und $\mathbb{S} = (G_\mathbb{S}, M_\mathbb{S}, I_\mathbb{S})$ Kontexte sowie $\sigma : G \to G_\mathbb{S}$ eine Abbildung. Man definiere die Relation $R_\sigma := \{(g, m) \in G \times M_\mathbb{S} \mid \sigma(g) I_\mathbb{S} m\}$.*

*Dann ist $\sigma$ genau dann ein Skalenmaß, wenn $R_\sigma$ eine Bindung von $\mathbb{K}$ nach $\mathbb{S}$ ist. Falls $\sigma$ ein Skalenmaß ist, so hat die zu $R_\sigma$ gehörige Adjunktion die Form $(\varphi, \psi)$ mit*

$$\varphi(A, B) = (\sigma(A)^{I_\mathbb{S} I_\mathbb{S}}, \sigma(A)^{I_\mathbb{S}}),$$

$$\psi(C, D) = (\sigma^{-1}(C), \sigma^{-1}(C)^I)$$

*und $\sigma$ ist genau dann voll, wenn $\psi$ surjektiv bzw. $\varphi$ injektiv ist.*

*Beweis:* Für jedes $\sigma$ und jedes $g \in G$ ist $g^{R_\sigma} = \sigma(g)^{I_\mathbb{S}}$ ein Inhalt von $\mathbb{S}$. Falls $\sigma$ ein Skalenmaß ist, so ist außerdem $m^{R_\sigma} = \sigma^{-1}(m^{I_\mathbb{S}})$ für jedes $m \in M_\mathbb{S}$ ein Umfang von $\mathbb{K}$.

Sei nun $R_\sigma$ eine Bindung von $\mathbb{K}$ nach $\mathbb{S}$ und $A \in \operatorname{Ext}(\mathbb{S})$. Dann ist

$$\sigma^{-1}(A) = \sigma^{-1}(A^{I_\mathbb{S} I_\mathbb{S}}) = \bigcap_{m \in A^{I_\mathbb{S}}} \sigma^{-1}(m^{I_\mathbb{S}}) = \bigcap_{m \in A^{I_\mathbb{S}}} m^{R_\sigma}$$

ein Umfang von $\mathbb{K}$.

Wenn $\sigma$ ein Skalenmaß ist, so gilt für einen Umfang $A \in \operatorname{Ext}(\mathbb{K})$, dass

$$A^{R_\sigma} = \bigcap_{g \in A} g^{R_\sigma} = \bigcap_{g \in A} \sigma(g)^{I_\mathbb{S}} = \sigma(A)^{I_\mathbb{S}},$$

also $\varphi_{R_\sigma} = \varphi$. Es ist leicht nachzuprüfen, dass $\psi$ die residuale Abbildung zu $\varphi$ ist. Außerdem ist Surjektivität von $\psi$ offenbar gleichbedeutend damit, dass $\sigma$ voll ist. Wegen Hilfssatz 2.2 ist die Injektivität von $\varphi$ eine äquivalente Bedingung. □

In [GW96, Hilfssatz 119] wurde außerdem bewiesen, dass jede Bindung zwischen $\mathbb{K}$ und $\mathbb{S}$ auf diese Weise aus einem Skalenmaß hervorgeht, wenn es in $\mathbb{S}$ keine doppelten Zeilen gibt, d. h. für $g \neq h$ immer $g^{I_\mathbb{S}} \neq h^{I_\mathbb{S}}$ gilt.

## 4.3 Tensorprodukt

In [GW96] wurde ein Tensorprodukt von vollständigen Verbänden eingeführt, das auf einer Beschreibung durch formale Kontexte beruht und nicht äquivalent zu den in Abschnitt 3.4 eingeführten Tensorprodukten ist. Es gibt aber auch für diesen Begriff eine Beschreibung durch geeignete residuierte Abbildungen.

Das *Produkt* zweier Kontexte $\mathbb{K}_1 = (G, M, I)$ und $\mathbb{K}_2 = (H, N, J)$ ist definiert als der Kontext $\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2 = (G \times H, M \times N, \nabla)$, wobei $(g, h)\nabla(m, n) :\Leftrightarrow gIm \vee hJn$. Darauf aufbauend ist das (begriffsanalytische) Tensorprodukt zweier vollständiger Verbände $\mathbb{V}$ und $\mathbb{W}$ definiert als $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W} := \underline{\mathfrak{B}}(\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V}) \times \underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{W}))$. Dabei ist die Struktur des Tensorprodukts unabhängig von der Wahl der Kontexte, die $\mathbb{V}$ und $\mathbb{W}$ darstellen ([GW96, Satz 26]).

Es ist leicht nachzuprüfen, dass es sich bei den Umfängen des Kontextprodukts $\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V}) \times \underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{W})$ um Bi-Ideale, also um duale Bindungen $R \subseteq V \times W$ handelt. Während das bisher behandelte Tensorprodukt aber alle dualen Bindungen von $\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V})$ nach $\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{W})$ und damit alle Galois-Verbindungen von $\mathbb{V}$ nach $\mathbb{W}$ repräsentiert (Satz 3.19), sind es hier nur bestimmte. Duale Bindungen, die als Umfänge des Kontextprodukts auftreten bzw. deren zugehörige Galois-Verbindungen werden *regulär* genannt.

**Beispiel 4.6** Für $\mathbb{K}$ wie in Abbildung 4.1 ist die triviale Galois-Verbindung $(\mathrm{id}_{\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})}, \mathrm{id}_{\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})})$ von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ nach $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})^*$ nicht regulär. Der vollständige Verband $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ ist nicht distributiv.

Dies lässt die Vermutung zu, dass ein Zusammenhang besteht zwischen der Distributivität der vollständigen Verbände und der Regularität der Galois-Verbindungen. In der Tat ist $\mathbb{V}$ genau dann vollständig distributiv, wenn es nur reguläre Galois-Verbindungen von $\mathbb{V}$ in alle vollständigen Verbände $\mathbb{W}$ gibt (siehe z. B. [Ran60, Theorem 2, 4] oder [KM06, Theorem 4, Corollary 4]). $\lhd$

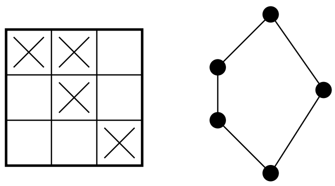

Abbildung 4.1: Ein Kontext und sein Begriffsverband

In [KM06] wurde die folgende Charakterisierung regulärer Galois-Verbindungen entdeckt.

**Hilfssatz 4.7 ([KM06, Theorem 3])** *Seien $\mathbb{V}$ und $\mathbb{W}$ zwei vollständige Verbände und $\varphi : V \to W$ eine Abbildung. $\varphi$ ist genau dann Teil einer regulären Galois-Verbindung $(\varphi, \psi)$ von $\mathbb{V}$ nach $\mathbb{W}$, wenn $\varphi(v) = \bigwedge_{m \not\geq v} \bigvee_{m \not\geq g} \varphi(g)$ für alle $v \in V$ gilt.* $\square$

Um die Charakterisierung dieser Galois-Verbindungen zu vereinfachen, kann man sich Ergebnisse zu Nutze machen, die sogenannte *enge Galois-Verbindungen* (bzw. enge duale Bindungen) betreffen. Diese wurden erstmals in [Ran60] eingeführt und unter dem Aspekt untersucht, ob alle Galois-Verbindungen zwischen zwei vollständigen Verbänden eng sind.

**Definition 4.8** Seien $\mathbb{V}$ und $\mathbb{W}$ zwei vollständige Verbände und $R \subseteq V \times W$. Dann ist $R^+ \subseteq V \times W$ definiert als

$$R^+ := \{(v, w) \in V \times W \mid \forall(a, b) \in R : v \leq a \vee w \leq b\}.$$

Relationen der Form $R^+$ sind duale Bindungen und werden *eng* genannt. Eine *enge Galois-Verbindung* $(\varphi, \psi)$ von $\mathbb{V}$ nach $\mathbb{W}$ ist eine Galois-Verbindung, für die $\widetilde{R}_\varphi$ eng ist. $\diamondsuit$

Es ist leicht zu überprüfen, dass $R^+$ immer ein Bi-Ideal ist und damit wegen Hilfssatz 3.18 auch eine duale Bindung.

Schaut man sich die Definition von $R^+$ an, so erkennt man leicht, dass es sich bei diesen Relationen genau um die Umfänge des Tensorprodukts $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W} = \underline{\mathfrak{B}}(\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V}) \times \underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{W}))$ handelt. Daher überrascht es nicht, dass die Charakterisierung regulärer Galois-Verbindungen aus Hilfssatz 4.7 auch für enge Galois-Verbindungen gilt ([Ran60, Theorem 2]). Es gilt also der folgende Zusammenhang:

**Hilfssatz 4.9** *Seien $\mathbb{K}_i = (G_i, M_i, I_i)$ $(i = 1, 2)$ formale Kontexte. Für eine Galois-Verbindung $(\varphi, \psi)$ von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1)$ nach $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2)$ sind äquivalent:*

- *$\widetilde{R}_\varphi$ ist in der Form $R^+$ darstellbar, d. h. $(\varphi, \psi)$ ist eng.*
- *$R_\varphi$ ist in der Form $S^\nabla$ darstellbar, d. h. $(\varphi, \psi)$ ist regulär.*

Im Folgenden soll nun ein Resultat für enge Galois-Verbindungen vorgestellt werden, das im Prinzip eine Charakterisierung des begriffsanalytischen Tensorprodukts liefert.

**Satz 4.10 (vgl. [Shm74, S. 221])** *Seien $\mathbb{V}$ und $\mathbb{W}$ vollständige Verbände und für alle $(a, b) \in V \times W$ seien Abbildungen $\epsilon_b^a \in \mathbf{Res}(\mathbb{V}, \mathbb{W}^*)$ wie folgt definiert:*

$$\epsilon_b^a(v) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } v \leq a \\ b & \text{, sonst} \end{cases}$$

*Alle $\epsilon_b^a$ gehören zu engen Galois-Verbindungen. Außerdem gehört $\varphi \in \mathbf{Res}(\mathbb{V}, \mathbb{W}^*)$ genau dann zu einer engen Galois-Verbindung, wenn es eine Relation $R \subseteq V \times W$ gibt mit $\varphi = \bigwedge_{(a,b)\in R} \epsilon_b^a$.*

*Beweis:* Wie man leicht nachprüft, sind die Abbildungen $\epsilon_b^a$ residuiert. Außerdem gehören sie zu engen Galois-Verbindungen, denn

$$\widetilde{R}_{\epsilon_b^a} = \{(v, w) \in V \times W \mid \epsilon_b^a(v) \geq w\} = \{(v, w) \in V \times W \mid v \leq a \vee w \leq b\} = \{(a, b)\}^+$$

ist offenbar eng.

Sei nun $\varphi \in \mathbf{Res}(\mathbb{V}, \mathbb{W}^*)$. Für eine beliebige Relation $R \subseteq V \times W$ gilt wegen Hilfssatz 3.17

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_\varphi &= \bigcap_{(a,b)\in R} \{(v, w) \in V \times W \mid v \leq a \vee w \leq b\} \\ &= \bigcap_{(a,b)\in R} \widetilde{R}_{\epsilon_b^a} \\ &= \widetilde{R}_{\bigwedge_{(a,b)\in R} \epsilon_b^a} \end{aligned}$$

Wegen Satz 3.5 ist dies äquivalent zu $\varphi = \bigwedge_{(a,b)\in R} \epsilon_b^a$. $\square$

Die Menge aller elementaren residuierten Abbildungen $\epsilon_b^a \in \mathbf{Res}(\mathbb{V}, \mathbb{W}^*)$ ist also $\wedge$-dicht im vollständigen Verband aller regulären Galois-Verbindungen von $\mathbb{V}$ nach $\mathbb{W}$.

**Bemerkung** Wenn $\mathbb{V}$ ein vollständig distributiver Verband ist, sind alle Galois-Verbindungen regulär, also lassen sich alle Galois-Verbindungen als Infimum von elementaren Galois-Verbindungen darstellen.

In diesem Fall sind die kategorientheoretische und die begriffsanalytische Definition des Tensorprodukts $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ dual isomorph zueinander. Der Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V}) \times \underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{W}))$ hat dann nämlich alle dualen Bindungen von $\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V})$ nach $\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{W})$ als Umfänge und ist damit isomorph zu $\underline{\mathbf{Bind}}(\underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{V}), \underline{\mathfrak{C}}(\mathbb{W})^*)$, während der vollständige Verband $\underline{\mathbf{Res}}(\mathbb{V}, \mathbb{W}^*)^*$ aus allen Galois-Verbindungen zwischen $\mathbb{V}$ und $\mathbb{W}$ besteht. Die Isomorphie folgt also aus Satz 3.5 und Hilfssatz 3.17. ◁

Sind $\mathbb{V}$ und $\mathbb{W}$ Begriffsverbände von $\mathbb{K}_1 = (G_1, M_1, I_1)$ bzw. $\mathbb{K}_2 = (G_2, M_2, I_2)$, so kann man wegen Hilfssatz 4.9 die elementaren Abbildungen $\epsilon_b^a$ auch über Relationen auf den Merkmalsmengen beschreiben. Dann aber ist das obige Resultat nicht verwunderlich, denn z. B. die Umfänge $(m_1, m_2)^\nabla$ für $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$ beschreiben eine $\wedge$-dichte Menge von Begriffen im Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2)$. Dies ist ein grundlegendes Ergebnis der formalen Begriffsanalyse ([GW96, Satz 3]).

Auch wenn der Beweis trivial ist, soll dieses Resultat aufgeschrieben werden, um den Zusammenhang zu Satz 4.10 deutlicher zu machen.

**Satz 4.11** *Seien $\mathbb{K}_i = (G_i, M_i, I_i)$ $(i = 1, 2)$ formale Kontexte. Für alle $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$ seien Abbildungen $\epsilon_{m_2}^{m_1} \in \mathbf{Res}(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1), \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2)^*)$ wie folgt definiert:*

$$\epsilon_{m_2}^{m_1}(A, B) := \begin{cases} (G_2, G_2^{I_2}) & \text{, falls } (A, B) \leq \mu m_1 \\ \mu m_2 & \text{, sonst} \end{cases}$$

*Alle $\epsilon_{m_2}^{m_1}$ gehören zu engen Galois-Verbindungen. Außerdem ist $\varphi \in \mathbf{Res}(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1), \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2)^*)$ genau dann Teil einer engen Galois-Verbindung, wenn es eine Relation $S \subseteq M_1 \times M_2$ gibt mit $\varphi = \bigwedge_{(m_1, m_2) \in S} \epsilon_{m_2}^{m_1}$.*

*Beweis:* Wie bereits erwähnt, lässt sich der Beweis auf zwei Arten führen.

Zum einen ist die Menge $\{(m_1, m_2)^\nabla \mid (m_1, m_2) \in M_1 \times M_2\}$ $\wedge$-dicht in $\mathrm{Ext}(\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2)$. Da $\varphi_{(m_1, m_2)^\nabla} = \epsilon_{m_2}^{m_1}$ gilt, liegen also die Abbildungen $\epsilon_{m_2}^{m_1}$ $\wedge$-dicht im vollständigen Verband aller engen bzw. regulären residuierten Abbildungen aus $\mathbf{Res}(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1), \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2)^*)$.

Man kann die Aussage wegen Hilfssatz 4.9 aber auch analog zu Satz 4.10 beweisen. □

**Beispiel 4.12** Für den Kontext $\mathbb{K} = (G, M, I)$ mit $G = \{a, b, c\}$ und $M = \{1, 2, 3\}$ in Abbildung 4.2 gibt es genau 9 elementare Selbstbindungen $\{(m, g)\}^\nabla$.[5] Durch Schneiden dieser elementaren Bindungen entstehen insgesamt 42 Selbstbindungen. Die Inzidenzrelation $I$ ist eine Selbstbindung, die jedoch nicht als Schnitt darstellbar und daher nicht regulär ist (vgl. Beispiel 4.6). ◁

[5]Hier werden nicht duale Bindungen, sondern Bindungen betrachtet.

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $a$ | × | × | |
| $b$ | | × | |
| $c$ | | | × |

| $m \backslash g$ | $a$ | | | $b$ | | | $c$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | × | × | × | × | × | × | × | × | × |
| | × | × | | | × | | | | × |
| | × | × | | | × | | | | × |
| 2 | × | × | × | × | × | × | × | × | × |
| | × | × | × | × | × | × | × | × | × |
| | × | × | | | × | | | | × |
| 3 | × | × | | | × | | | | × |
| | × | × | | | × | | | | × |
| | × | × | × | × | × | × | × | × | × |

Abbildung 4.2: Ein Kontext und die zugehörigen elementaren Selbstbindungen $\{(m,g)\}^{\nabla}$

# 5 Bindungen sind auch Kontexte

Da Bindungen nichts anderes sind als spezielle Relationen zwischen zwei Mengen, liegt die Interpretation von Bindungen als Kontexte nahe.

**Definition 5.1** Seien $\mathbb{K}_i = (G_i, M_i, I_i)$ $(i = 1, 2)$ Kontexte und $R \in \mathbf{Bind}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2)$ eine Bindung. Der *durch $R$ definierte Kontext* ist $\mathbb{K}_R := (G_1, M_2, R)$. $\diamondsuit$

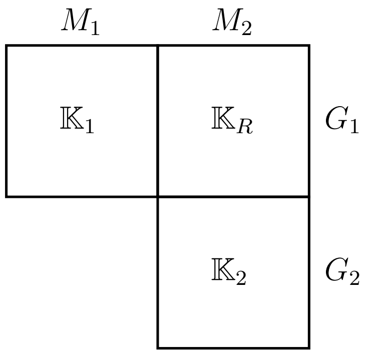


Abbildung 5.1: Interpretation einer Bindung als Kontext

Es stellt sich heraus, dass der zugehörige Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_R)$ eine Darstellung der residuierten Abbildung $\varphi_R$ ermöglicht. Diese lässt sich nämlich wie folgt in zwei residuierte Teilabbildungen zerlegen.

**Satz 5.2** *Seien $\mathbb{K}_i = (G_i, M_i, I_i)$ $(i = 1, 2)$ Kontexte und $R \in \mathbf{Bind}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2)$ eine Bindung.*

*Dann ist*

$$\kappa_R : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_R) : (A, B) \mapsto (A^{RR}, A^R)$$

*eine surjektive residuierte Abbildung,*

$$\lambda_R : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_R) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2) : (C, D) \mapsto (D^{I_2}, D)$$

*eine injektive residuierte Abbildung und es gilt*

$$\varphi_R = \kappa_R * \lambda_R.$$

*Beweis:* Injektivität und Residuiertheit von $\lambda_R$ sind leicht nachzurechnen. Damit ist $\lambda_R$ eine bijektive Abbildung von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_R)$ nach $\operatorname{im}\lambda_R = \operatorname{im}\varphi_R$ und sogar ein Isomorphismus, denn $\lambda_R^{-1}$ ist auch residuiert. Daraus folgt die Residuiertheit von $\kappa_R = \varphi_R * \lambda_R^{-1}$.

Für die Surjektivität von $\kappa_R$ sei nun $(C, D) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_R)$. Dann ist $(C, C^{I_1})$ ein Begriff in $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1)$ und $\kappa_R(C, C^{I_1}) = (C^{RR}, C^R) = (C, D)$.

Die letzte Aussage folgt direkt aus den Definitionen der beteiligten Abbildungen. $\square$

Aufgrund von Satz 3.4 gehören zu $\kappa_R$ und $\lambda_R$ wieder Bindungen. Das sind die beiden trivialen Bindungen $R_{\kappa_R} = R \in \mathbf{Bind}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_R)$ und $R_{\lambda_R} = R \in \mathbf{Bind}(\mathbb{K}_R, \mathbb{K}_2)$. In der Kategorie **Bind** ist die obige Darstellung also nichts anderes als die triviale Zerlegung $R = R \circ R$.

**Korollar 5.3** *Seien $\mathbb{K}_i = (G_i, M_i, I_i)$ $(i = 1, 2)$ Kontexte und $R \in \mathbf{Bind}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2)$. Dann ist*

$$\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_R) \cong \operatorname{im} \varphi_{\mathbb{R}} \cong \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1)/_{\ker \varphi_{\mathbb{R}}}.$$

*Beweis:* Im Beweis von Satz 5.2 wurde $\lambda_{\mathbb{R}}$ als Isomorphismus zwischen $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_R)$ und $\operatorname{im} \varphi_{\mathbb{R}}$ identifiziert. Der Rest folgt mit Satz 2.7. □

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1) \arrow[rr, "\varphi_R"] \arrow[dr, "\kappa_R"'] & & \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2) & \\
& \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_R) \arrow[ur, hook, "\lambda_R"] \arrow[rr, leftrightarrow, "\sim", "\lambda_R"'] & & \operatorname{im} \varphi_R \arrow[ul, hook', "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

Abbildung 5.2: Zerlegung von $\varphi_R$

Im Folgenden soll geklärt werden, inwiefern die Existenz einer surjektiven residuierten Abbildung $\kappa : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_R)$ und einer injektiven residuierten Abbildung $\lambda : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_R) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2)$ bereits ausreicht, um eine Relation $R \subseteq G_1 \times M_2$ zu einer Bindung zu machen. Der nächste Satz versucht, dies für einen Spezialfall zu klären.

**Satz 5.4** *Seien $\mathbb{K}_i = (G_i, M_i, I_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ Kontexte, $R_1 \in \mathbf{Bind}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2)$, $R_2 \in \mathbf{Bind}(\mathbb{K}_3, \mathbb{K}_4)$ und $R \in \mathbf{Bind}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_4)$ (siehe Abbildung 5.3).*

*Dann sind äquivalent:*

1.a) *Für jedes $m \in M_4$ ist $m^R$ ein Umfang von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_{R_1})$.*

1.b) $\ker \varphi_{R_1} \subseteq \ker \varphi_R$.

1.c) *Es gibt eine surjektive residuierte Abbildung $\kappa : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_{R_1}) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_R)$ mit $\kappa_R = \kappa_{R_1} * \kappa$.*

*Analog dazu sind äquivalent:*

2.a) *Für jedes $g \in G_1$ ist $g^R$ ein Inhalt von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_{R_2})$.*

2.b) $\operatorname{im} \varphi_R \subseteq \operatorname{im} \varphi_{R_2}$.

2.c) *Es gibt eine injektive residuierte Abbildung $\lambda : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_R) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_{R_2})$ mit $\lambda_R = \lambda * \lambda_{R_2}$.*

*Beweis:*

**1.b) ⇔ 1.c):** Siehe Hilfssatz 2.8 a).

**2.b) ⇔ 2.c):** Siehe Hilfssatz 2.8 b).

**1.a) ⇒ 1.b):** Sei $\kappa_{R_1}(A, B) = \kappa_{R_1}(C, D)$ für zwei Begriffe $(A, B), (C, D) \in \mathbb{U}(\mathbb{K}_1)$. Dann gilt $A^{R_1 R_1} = C^{R_1 R_1}$. Es ist nun zu zeigen, dass auch $\kappa_R(A, B) = \kappa_R(C, D)$, also $A^R = C^R$ gilt.

Angenommen, es ist $A^R \neq C^R$. Es gibt also o. B. d. A. ein $m \in M_4$ mit $m \in A^R \setminus C^R$. Dann gilt $A \subseteq m^R$ und $C \nsubseteq m^R$. Nach Voraussetzung ist $m^R$ außerdem ein Umfang

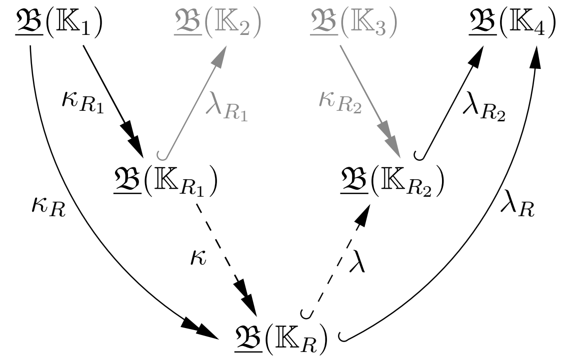


Abbildung 5.3: Wann ist $R \in \mathbf{Bind}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2)$ eine Bindung von $\mathbb{K}_{R_1}$ nach $\mathbb{K}_{R_2}$?

in $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_{R_1})$, also gilt $A^{R_1R_1} \subseteq m^R$. Dagegen ist $C^{R_1R_1} \nsubseteq m^R$, was im Widerspruch zu $A^{R_1R_1} = C^{R_1R_1}$ steht.

**1.b) $\Rightarrow$ 1.a):** Angenommen, es gäbe ein $m \in M_4$, dessen Ableitung $m^R$ kein Umfang in $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_{R_1})$ ist. Dann gibt es einen kleinsten Umfang $A$ mit $n^R \subsetneq A$ und $n^{RR_1R_1} = A$, und damit $n^{RR_1} = A^{R_1}$. Da sowohl $n^R$ als auch $A = A^{R_1R_1}$ Umfänge in $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1)$ sind, folgt $\kappa_{R_1}(n^R, n^{RI_1}) = \kappa_{R_1}(A, A^{I_1})$. Nach Voraussetzung gilt nun $\kappa_R(n^R, n^{RI_1}) = \kappa_R(A, A^{I_1})$, also $n^{RR} = A^R$. Dies ist ein Widerspruch zu $n^R \subsetneq A \subseteq A^{RR}$.

**2.a) $\Rightarrow$ 2.b):** Sei $(C, D) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_4)$ ein Bild von $\lambda_R$, d. h. es existiert ein $(A, B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_R)$ mit $(C, D) = \lambda_R(A, B) = (A^{RI_4}, A^R)$. Nach Voraussetzung ist $D = A^R$ ein Inhalt von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_{R_2})$, also ist $(D^{R_2}, D) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_{R_2})$. Nun ist $\lambda_{R_2}(D^{R_2}, D) = (D^{I_4}, D) = (C, D)$.

**2.b) $\Rightarrow$ 2.a):** Sei $g \in G_1$. Der zugehörige Gegenstandsbegriff $(g^{RR}, g^R) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_R)$ wird von $\lambda_R$ auf $(g^{RI_4}, g^R)$ abgebildet. Nach Voraussetzung ist $(g^{RI_4}, g^R)$ auch Bild von $\lambda_{R_2}$, also gilt $(g^{RI_4}, g^R) = \lambda_{R_2}(C, D) = (D^{I_4}, D)$ für einen Begriff $(C, D) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_{R_2})$. Damit ist $g^R = D$ ein Inhalt von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_{R_2})$. □

**Korollar 5.5** *Unter den Voraussetzungen von Satz 5.4 gilt* $R \in \mathbf{Bind}(\mathbb{K}_{R_1}, \mathbb{K}_{R_2})$ *genau dann, wenn es zwei residuierte Abbildungen* $\kappa$ *und* $\lambda$ *wie in Satz 5.4.1.c) bzw. Satz 5.4.2.c) gibt.* □

Damit kann man also diejenigen Bindungen zwischen $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_4$ charakterisieren, die gleichzeitig Bindungen zwischen $\mathbb{K}_{R_1}$ und $\mathbb{K}_{R_2}$ sind. Eine allgemeinere Aussage dieser Art, die ohne die Voraussetzung $R \in \mathbf{Bind}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_4)$ die Relation $R$ als Bindung charakterisiert, wäre wüschenswert. Leider konnte keine solche Aussage bewiesen werden.

**Korollar 5.6** *Seien* $\mathbb{K}_i = (G_i, M_i, I_i)$ $(i = 1, 2)$ *Kontexte und* $R_1, R_2 \in \mathbf{Bind}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2)$. *Eine Bindung* $R \in \mathbf{Bind}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2)$ *ist genau dann auch eine Bindung von* $\mathbb{K}_{R_1}$ *nach* $\mathbb{K}_{R_2}$, *wenn es zwei residuierte Abbildungen* $\kappa$ *und* $\lambda$ *wie in Korollar 5.5 gibt.* □

Die Menge $\mathbf{Bind}(\mathbb{K}_{R_1}, \mathbb{K}_{R_2})$ ist eine Teilmenge von $\mathbf{Bind}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2)$. Es bleibt die Frage offen, auf welche Weise $\underline{\mathbf{Bind}}(\mathbb{K}_{R_1}, \mathbb{K}_{R_2})$ als Unterstruktur von $\underline{\mathbf{Bind}}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2)$ aufgefasst werden kann. Es ist offenbar ein $\wedge$-Unterhalbverband, da die Bindungen unter $\cap$ abgeschlossen sind, aber es fehlt eine Charakterisierung der $\wedge$-irreduziblen Elemente von $\underline{\mathbf{Bind}}(\mathbb{K}_{R_1}, \mathbb{K}_{R_2})$. Dieses Problem ist ein Spezialfall der Suche nach einer effizienten Kontextrepräsentation von $\underline{\mathbf{Bind}}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2)$ für zwei beliebige Kontexte.

# 6 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde zu Beginn eine kategorientheoretische Grundlage für die Analyse von Kontexten und Bindungen sowie vollständigen Verbänden und $\vee$-Morphismen gelegt. Die Äquivalenz dieser Kategorien ist eine Erweiterung der zentralen Aussage der formalen Begriffsanalyse, der Äquivalenz von Kontexten und vollständigen Verbänden.

Weiterhin wurde gezeigt, dass die beiden Kategorien **Bind** und **Res** eine reiche Struktur besitzen. In diesen Kategorien können unter anderem Hom-Objekte, Limites und duale Objekte ausgedrückt werden. Insbesondere wurde das Tensorprodukt vollständiger Verbände in **Res** genauer untersucht und die Äquivalenz einiger unterschiedlicher Definitionen gezeigt.

Andere Begriffe, wie z. B. abgeschlossene Relationen, Blockrelationen, Skalenmaße, relationale Adjunktionen und Vollhomomorphismen, wurden unter dem Aspekt betrachtet, wie man sie in den Kategorien **Bind** bzw. **Res** wiederfinden kann. Dabei ließen sich einige Zusammenhänge feststellen. Leider besitzen die Kategorien **DBind** bzw. **Voll** keine *-autonome Struktur wie die beiden größeren Kategorien.

Das begriffsanalytische Tensorprodukt ist im Allgemeinen kleiner als das kategorientheoretische, da es ein Unter-$\wedge$-Halbverband ist. Der Unterschied der beiden Begriffe wurde näher betrachtet. Ein grundlegender Nachteil des kategorientheoretischen Tensorprodukts ist die fehlende Darstellung als formaler Kontext mit wenigen Gegenständen und Merkmalen. Ein Ansatz dafür wäre, auf der Kontextsumme aufzubauen und zu versuchen, diesen Kontext schrittweise um nichtreguläre duale Bindungen zu erweitern. Dazu würde ein effizientes Verfahren benötigt, $\wedge$-irreduzible nichtreguläre duale Bindungen zu identifizieren.

Zusätzlich wurde ein neuer Ansatz verfolgt, Bindungen als formale Kontexte mit ihrem eigenen Begriffsverband zu betrachten. Eine grundlegende Darstellung von Bindungen als Komposition zweier $\vee$-Morphismen wurde eingeführt und eine spezielle Form davon als Charakterisierung von Bindungen in einem größeren Bindungsverband gefunden. Auch hier gibt es noch einige offene Fragen, wie z. B. die Darstellung von Konstruktionen wie Tensorprodukt oder Dualisierung in dieser neuen Sichtweise.

Es ist in der Literatur viel Arbeit in die Darstellung verschiedener Arten von Morphismen zwischen Kontexten gesteckt worden ([Ern05, Mor07, Krö05, Gan07]). Die vorangegangenen Kapitel bieten eine Übersicht über eine Art von Morphismen, die Bindungen. Eine vereinheitlichende Darstellung dieser vielen Ansätze ist noch zu entwickeln.

# Stichwortverzeichnis

# Literaturverzeichnis


[Ban80] Hans-Jürgen Bandelt: *The Tensor Product of Continuous Lattices.* Mathematische Zeitschrift, 172(1):89–96, 1980.

[Bar79] Michael Barr: **-Autonomous Categories*, Band 752 der Reihe *Lecture Notes in Mathematics.* Springer, 1979. Mit Anhang [Chu79].

[Bar91] Michael Barr: **-Autonomous Categories and Linear Logic.* Mathematical Structures in Computer Science, 1(2):159–178, 1991.

[BN76] Bernhard Banaschewski und Evelyn Nelson: *Tensor Products and Bimorphisms.* Canadian Mathematical Bulletin, 19(4):385–402, 1976.

[Bor94] Francis Borceux: *Handbook of Categorical Algebra. 1*, Band 50 der Reihe *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, 1994. Basic category theory.

[BS97] Jon Barwise und Jerry Seligman: *Information Flow: The Logic of Distributed Systems.* Cambridge University Press, 1997.

[Chu79] Po-Hsiang Chu: *Constructing *-Autonomous Categories*, Band 752 der Reihe *Lecture Notes in Mathematics.* Springer, 1979. Anhang zu [Bar79].

[EK66a] Samuel Eilenberg und Gregory M. Kelly: *Closed Categories.* In: Samuel Eilenberg, David K. Harrison, Saunders MacLane und Helmut Röhrl (Herausgeber): *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra (La Jolla, 1965)*, Seiten 421–562. Springer, 1966.

[EK66b] Samuel Eilenberg und Gregory M. Kelly: *A generalization of the functorial calculus.* Journal of Algebra, 3(3):366–375, 1966.

[Ern05] Marcel Erné: *Categories of Contexts.* 2005.

[Fra76] Grant A. Fraser: *The Semilattice Tensor Product of Distributive Lattices.* Transactions of the American Mathematical Society, 217:183–194, 1976.

[Gan07] Bernhard Ganter: *Relational Galois Connections.* In: Sergei O. Kuznetsov und Stefan Schmidt (Herausgeber): *ICFCA*, Band 4390 der Reihe *Lecture Notes in Computer Science*, Seiten 1–17. Springer, 2007.

[GLQ81] George Grätzer, Harry Lakser und Robert W. Quackenbush: *The Structure of Tensor Products of Semilattices with Zero.* Transactions of the American Mathematical Society, 267(2):503–515, 1981.

[Grä03] George Grätzer: *General Lattice Theory, Second Edition.* Birkhäuser Verlag, 2003.

[GW96] Bernhard Ganter und Rudolf Wille: *Formale Begriffanalyse: Mathematische Grundlagen.* Springer, 1996.

[KHZ05] MARKUS KRÖTZSCH, PASCAL HITZLER und GUO-QIANG ZHANG: *Morphisms in Context.* In: *Conceptual Structures: Common Semantics for Sharing Knowledge*, Band 3596 der Reihe *Lecture Notes in Computer Science*, Seiten 223–237. Springer, 2005.

[KM06] MARKUS KRÖTZSCH und GRIT MALIK: *The Tensor Product as a Lattice of Regular Galois Connections.* In: *Formal Concept Analysis*, Band 3874 der Reihe *Lecture Notes in Computer Science*, Seiten 89–104. Springer, 2006.

[Krö05] MARKUS KRÖTZSCH: *Morphisms in Logic, Topology, and Formal Concept Analysis.* Master's Thesis, TU Dresden, 2005.

[Lin65] FRED E. J. LINTON: *Autonomous categories and duality of functors.* Journal of Algebra, 2(3):315–349, 1965.

[Mor07] HIDEO MORI: *Functorial Properties of Formal Concept Analysis.* In: *Conceptual Structures: Knowledge Architectures for Smart Applications*, Band 4604 der Reihe *Lecture Notes in Computer Science*, Seiten 505–508. Springer, 2007.

[Mor08] HIDEO MORI: *Chu Correspondences.* Hokkaido Mathematical Journal, 37(1):147–214, 2008.

[Pra99] VAUGHAN R. PRATT: *Chu Spaces*, 1999. Course Notes for the School in Category Theory and Applications.

[Ran60] GEORGE N. RANEY: *Tight Galois Connections and Complete Distributivity.* Transactions of the American Mathematical Society, 97(3):418–426, 1960.

[See89] ROBERT A. G. SEELY: *Linear Logic, *-Autonomous Categories and Cofree Coalgebras.* In: *Categories in Computer Science and Logic*, Seiten 371–382. American Mathematical Society, 1989.

[Shm74] ZAHAVA SHMUELY: *The Structure of Galois Connections.* Pacific Journal of Mathematics, 54(2):209–225, 1974.

# ERKLÄRUNG

Hiermit erkläre ich, dass ich die am heutigen Tag eingereichte Diplomarbeit zum Thema „Bindungen“ unter Betreuung von Prof. Dr. Bernhard Ganter selbstständig erarbeitet, verfasst und Zitate kenntlich gemacht habe. Andere als die angegebenen Hilfsmittel wurden von mir nicht benutzt.

Datum Unterschrift