Kombination freier Strukturen

Diplomarbeit
im Fach Informatik
am
Lehr- und Forschungsgebiet Theoretische Informatik
der
Rheinisch–Westfählischen Technischen Hochschule
Aachen
Prof. Dr.-Ing. F. Baader

vorgelegt von Kamel Ben-Khalifa
157280

betreut durch
Universitätsprofessor Dr.–Ing. Franz Baader

Aachen, im November 1996

Inhaltsverzeichnis

Abstract

Bei dem Kombinationsproblem in der Unifikationstheorie geht es darum, Unifikationsalgorithmen für Gleichungstheorien über disjunkten Signaturen zu einem Unifikationsalgorithmus zu kombinieren, der Unifikationsprobleme über der gemischten Signatur, dh. Unifikationsprobleme in denen Symbole aus verschiedenen Gleichungstheorien vorkommen können, behandeln kann (siehe dazu [BS 92]).

Eine Erweiterung dieses Problems besteht darin, Termrelationen zu betrachten, die allgemeiner sind, als die Gleichheit modulo einer Gleichungstheorie . Die Klasse der Knuth-Bendix Reduktionsordnungen, die z.B bei der Vervollständigung von Termersetzungssystemen Verwendung findet, ist ein wichtiges Beispiel solcher Termrelationen.
Dazu muß man aber zuerst festlegen, dh. definieren, wie diese Relationen auf den gemischten Termen zu interpretieren sind. In [BS 94] und in [KR 94] wurden dafür zwei Definitionen angegeben.
Die Definition wie in [BS 94] ist eine algebraische Definition, die auf einer geeigneten Kombination von freien Strukturen basiert. Die Definition wie in [KR 94] ist hingegen syntaktisch. Sie verwendet Termreduktion und Termabstraktion.

In dieser Arbeit wird im wesentlichen gezeigt, daß beide Definitionen äquivalent sind.
Anschließend wird gezeigt, wie man ausgehend von einer modifikation der syntaktischen Definition, wie in [KR 94], Entscheidungsverfahren für die Gültigkeit von reinen atomaren Formeln zu einem Entscheidungsverfahren für die Gültigkeit von atomaren Formeln über der gemischten Signatur kombinieren kann.

Einleitung

Mit einem Entscheidungsverfahren für die Unifikation modulo einer Gleichungstheorie kann man effektiv feststellen, ob ein beliebiges Unifikationsproblem mindestens einen Unifikator (dh. eine Lösung) modulo der Gleichungstheorie hat. Ist die Unifikation modulo der Gleichungstheorie entscheidbar und zusätzlich finitär, dh. es gibt zu jedem Unifikationsproblem eine endliche vollständige Menge von Unifikatoren, so interessiert man sich für Unifikationsalgorithmen, die eine solche Menge effektiv berechnen können.
Unifikationsalgorithmen und Entscheidungsverfahren für die Unifikation modulo einer Gleichungstheorie sind für automatisches Beweisen [Plo72, Stl85] und Termersetzung [KB70, Huet80, Bach91, KK89] von zentraler Bedeutung.

Der Bedarf, Unifikationsalgorithmen und Entscheidungsverfahren für verschiedene Gleichungstheorien zu kombinieren, ergibt sich, wenn für bestimmte Klassen von interpretierten Symbolen (z.B. kommutative, assoziative oder idempotente) spezielle Unifikationsalgorithmen (Entscheidungsverfahren) verwenden werden und diese Algorithmen (Verfahren) dann integriert werden müssen, um Terme behandeln zu können, in denen diese Symbole gemischt vorkommen.

Die Frage, wie Unifikationsalogrithmen (Entscheidungsverfahren) für mehrere Gleichungstheorien über disjunkten Signaturen kombiniert werden sollen, um einen Unifikationsalgorithmus (Entscheidungsverfahren) für Unifikationsprobleme über der gemischten Signatur (Vereinigung aller Signaturen) herzuleiten, wird in der Unifikationstheorie mit dem Kombinationsproblem bezeichnet. Es kann formal wie folgt beschrieben werden :

Gegeben : Unifikationsalgorithmen (Entscheidungsverfahren) für die Unifikation modulo der Gleichungstheorien $E_1, E_2, \ldots, E_n$ über paarweise disjunkte Signaturen $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$.
Gesucht : ein Unifikationsalgorithmus (ein Entscheidungsverfahren) für die Unifikation in der kombinierten Gleichungstheorie $E := E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$.

Die Lösung des Kombinationsproblems basiert auf einem Dekompositionsalgorithmus, der die Unifikation (Entscheidbarkeit) in der kombinierten Gleichungstheorie E auf die Unifikation (Entscheidbarkeit) in den einzelnen Gleichungstheorien E_i zurückführt.
Dabei können die Lösungen der vom Dekompositionsalgorithmus erzeugten Unifikationsprobleme in den einzelnen Theorien zu einer Gesamtlösung des urprünglichen E–Unifikationsproblems kombiniert werden (Korrektheit). Zusätzlich ist sicher gestellt, daß diese

Kombination bei Unifikationsalgorithmen alle Lösungen des E–Unifikationsproblems liefert (Vollständigkeit).
Der Kombinationsalgorithmus in [BS92] erzeugt endlich viele Tupel $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n)$, wobei Γ_i jeweils ein E_i–Unifikationsproblem ist. Das Tupel ist dabei um eine lineare Ordnung auf den im Tupel vorkommenden Variablen und Konstanten erweitert.
Jede Komponente i eines Tupels definiert dann mit der linearen Ordnung des Tupels ein sogenanntes *E_i– Unifikationsproblem mit linearer Konstantenrestriktion.*
Ist die Unifikation mit linearer Konstantenrestriktion in den einzelnen Gleichungstheorien entscheidbar, so ist die Unifikation in der kombinierten Gleichungstheorie entscheidbar. Die Lösungen der vom Dekompositionsalgorithmus erzeugten Unifikationsprobleme können dann bei Unifikationsalgorithmen induktiv über die jeweilige lineare Ordnung zu einer Lösung des urprünglichen E–Unifikationsproblems kombiniert werden.

Der Korrektheitsbeweis des Kombinationsalgorithmus in [BS92] verwendet einen syntaktischen Ansatz, der auf Termersetzung und Termabstraktion basiert. Er verwendet zum einen ein Reduktionssystem R, das durch Anwendung der Vervollständigung ohne Abbruch (*eng. unfailing completion*) auf E entsteht und das dazu verwendet werden kann, um einen Term t in eine Normalform $t{\downarrow_R}$ überzuführen. Zum anderen benötigt er für jede Gleichungstheorie E_i Funktion π_i, die jeden Σ_i–Term, dh. ein Σ–Term t der Form $f(f_1, t_2, \ldots, t_n)$ mit $f \in \Sigma_i$, in einem reinen Σ_i–Term tranformiert, in dem nur Variablen oder Funktionssymbole aus Σ_i vorkommen.

Eine abstrakte Beweismethode ergibt sich aus einer algebraischen Formulierung des Kombinationsproblems, die durch die Interpretation der Unifikation mit linearen Konstanrestriktion motiviert wird.

In [BS93] wurde gezeigt, daß die Unifikation mit linearer Konstantenrestriktion für eine Gleichungstheorie E genau dann entscheidbar ist, wenn die positive Theorie von E entscheidbar ist. Da die positive Theorie von E mit der positiven Theorie der E–freien Quotiententermalgebra $\mathcal{T}(\Sigma, X)/_E$ für eine abzählbar unendliche Menge X übereinstimmt, ist die positive Theorie von $\mathcal{T}(\Sigma, X)/_E$ genau dann entscheidbar, wenn die positiven Theorien der Algebren $\mathcal{T}(\Sigma_i, X)/_{E_i}$ entscheidbar sind.

Die algebraische Formulierung des Kombinationsproblems kombiniert beliebige E_i–freie Σ_i–Algebren $\mathcal{A}_i$ (äquivalent dazu die E_i–freien Σ_i–Algebren $\mathcal{T}(\Sigma_i, X)/_{E_i}$) zu einer Σ–Algebra, die zu $\mathcal{T}(\Sigma, X)/_E$ isomorph ist, so daß die Erfüllbarkeit von positiven Formeln in der kombinierten Algebra (mit einem Dekompositionsalgorithmen) auf die Erfüllbarkeit von positiven Formeln in den freien Algebren $\mathcal{A}_i$ zurückgeführt werden kann.

Eine natürliche Erweiterung des Kombinationsproblems ist die Kombination von allgemeinen Constraint–Lösungsverfahren bzw. –Entscheidungsverfahren.
Constraints der Form $s \leq t$, welche allgemeiner sind als einfache Termgleichungen $s \doteq t$, kommen z.B. in der Termersetzung als Reduktionsordnungen (Knuth–Bendix–Ordnungen)

vor. Eine Lösung des erweiterten Kombinationsproblems für allgemeine Constraints muß zuerst den Begriff der Gültigkeit von atomaren Constraints über der gemischten Signatur definieren.

In [KR94] wurde die Gültigkeit eines Constraints $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ für ein Σ_i–Prädikat P und Σ–Terme t_1, t_2, ..., t_n durch die Gültigkeit von $P((t_1{\downarrow_R})^{\pi_i}, (t_2{\downarrow_R})^{\pi_i}, \ldots, (t_n{\downarrow_R})^{\pi_i})$ in der Struktur $\mathcal{A}_i$ definiert. Dabei ist $t{\downarrow_R}$ die R–Normalform von t bezüglich des Termersetzungssystems R und $(t{\downarrow_R})^{\pi_i}$ der reine Σ_i–Term, der aus $t{\downarrow_R}$ durch Termabstraktion entsteht, für die gleichen Termersetzungssystem R und Termabstraktion π_i wie in [BS92].

Eine natürlichere Interpretation der Prädikate liefert die Erweiterung des algebraischen Ansatzes in [BS94], die die Kombination von freien Algebren auf freie Strukturen erweitert. Für E_i–freie Σ_i–Strukturen über einer abzählbar unendlichen Menge X konstruiert die erweiterte Kombination in [BS94] eine $(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$–Struktur $\mathcal{A}_1 \odot \mathcal{A}_2$, die $(E_1 \cup E_2)$–frei über der gleichen Menge X ist.
Mit einer leichten Modifikation des Dekompositionsalgorithmus in [BS92] konnte die Erfüllbarkeit von $\exists$–quantifizierten positiven Formeln (Constraints) in der kombinierten Struktur $\mathcal{A}_1 \odot \mathcal{A}_2$ auf die Erfüllbarkeit von positiven Formeln in den Strukturen $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ zurückgeführt werden.

Nun stellt sich zuerst die Frage, ob die Definition in [KR94] der Gültigkeit von Contraints über der $(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$–Terme die gleiche Relation auf der $(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$–Termen erzeugt, wie die Interpretation der Prädikatensymbole der entprechenden Strukturen $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ in der kombinierten Struktur $\mathcal{A}_1 \odot \mathcal{A}_2$ von [BS94].

Andererseits liefert weder die Definition von [KR94] noch die Kombination der freien Strukturen von [BS94] ein effektives Verfahren, um die Gültigkeit von atomaren Constraints über Σ–Termen zu entscheiden, da das Reduktionssystem R für E in der Definition von [KR94] im allgemeinen unendlich ist, und der Dekompositionsalgorithmus in [BS94] stärkere Voraussetzungen braucht, als die Entscheidbarkeit der Gültigkeit von atomaren Constraints in den einzelnen Strukturen.

Im ersten Teil dieser Arbeit wird der Dekompositionsalgorithmus wie in [BS 92] als allgemeine Lösung des Kombinationsproblems vorgestellt und ein Korrektheitsbeweis dafür diskutiert, der wie in [BS 92] auf einem syntaktischen Ansatz basiert. Andererseits wird ein Korrektheitsbeweis betrachtet, der wie in [BS 94] auf einem algebraischen Ansatz basiert. Im zweiten Teil wird das Kombinationsproblem auf allgemeinere Constraints als die E–Gleichheit nach dem syntaktischen Ansatz wie in [KR 94] und nach dem algebraischen Ansatz wie in [BS 94] erweitert und anschließend gezeigt, daß beide Ansätze äquivalent sind. Schließlich wird eine ausreichende Bedingung für die Entscheidbarkeit einer äquivalenten Definition formuliert und gezeigt, daß die Entscheidbarkeit des Wortproblems für die einzelnen Gleichungstheorien dafür eine notwendige und hinreichende Bedingung ist.

Die Äquivalenz beider Anzätze liefert einerseits eine logische Interpretation für die Definition von [KR94] und andererseits mit der äquivalenten Definition aus dem zweiten Teil ein effektives Verfahren, um die Gültigkeit von atomaren Constraints in der kombinierten Struktur von [BS94] zu entscheiden.
Zudem ist der Beweis für die Unabhängigkeit der Definition von [KR94] vom Reduktionssystem R und der Termabstraktionsfunktion π_i eine einfache Folgerung aus dem Äquivalenzbeweis.

Kapitel 1

Grundbegriffe und Definitionen

I. Algebren

Eine Algebra besteht aus einer nicht leeren Menge A von beliebigen Objekten und einer endlichen Menge von *Operationen*, die jeweils auf eine konstante Anzahl n von *Argumenten* (Objekten) operieren. Die Menge A wird *Trägermenge* der Algebra genannt.

I.1 Grundbegriffe und Definitionen

Um die Operationen einer Algebra syntaktisch zu beschreiben wird jeder Operation eindeutig ein *Funktionssymbol* aus einer Menge von *Funktionssymbolen* zugeordnet. Zusätzlich wird dem Funktionssymbol die *Stelligkeit* der entsprechenden Operation, dh. die nach Voraussetzung konstante Anzahl von Argumenten, zugeordnet.

Definition 1.1 (Signatur)
Eine *Signatur* ist ein Paar (Σ, ar) bestehend aus einer nicht leeren Menge Σ von Funktionssymbolen und einer Abbildung $ar : \Sigma \to IN$, die jedem Funktionssymbol eine *Stelligkeit* zuordnet.

Die Menge der Funktionssymbole der Stelligkeit n wird mit $\Sigma^{(n)}$ bezeichnet.
Die Funktionssymbole der Stelligkeit 0 können mit dem Wert der entsprechenden Funktion identifiziert werden. Sie werden daher auch Konstanten genannt.

Eine *Realisierung* der Funktionssymbole einer Signatur Σ auf einer Menge A ist eine Zuordnung von Σ zu einem Modell mit Trägermenge A.
Diese Zuordnung bildet dann mit Σ und A eine Σ–*Algebra*.

Definition 1.2 (Σ–Algebra)
Eine Σ–*Algebra* $\mathcal{A}$ ist ein Tupel (Σ, A, I) bestehend aus einer Signatur Σ, einer nichtleeren Menge A und eine *Interpretation* I, die jedem Funktionssymbol f der Stelligkeit n eine Funktion $f_{\mathcal{A}} : A^n \to A$ zuordnet.

Ist $\mathcal{A}$ eine Σ–Algebra mit Trägermenge A und gibt es eine Untermenge B von A, die abgeschlossen bezüglich den Operationen von $\mathcal{A}$ ist, dh. $f_{\mathcal{A}}(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in B$ für alle $f \in \Sigma$ und alle b_1, b_2, …, $b_n \in B$, so definiert die Einschränkung der Operationen auf B eine Σ–Algebra $\mathcal{B}$ mit Trägermenge B. $\mathcal{B}$ heißt dann Σ–*Unteralgebra* von $\mathcal{A}$.

Definition 1.3 (Erzeugermengen)
Seien $\mathcal{A}$ eine Σ–Algebra mit einer Trägermenge A und X eine Teilmenge von A.
Die von X erzeugte Σ–Algebra ist die Σ–Unteralgebra von $\mathcal{A}$ mit der kleinsten Trägermenge bezüglich der Mengeninklusion, die X enthält.
Sie wird mit $< X >_\Sigma$ bezeichnet.

Als Platzhalter für die Elemente einer beliebigen Menge dienen wie üblich *Variablen*.
Variablen können Elemente einer beliebigen Menge sein. Wir können uns jedoch im allgemeinen auf eine abzählbar unendliche Menge von Variablen beschränken. Eine *Variablenmenge* bezeichnet daher im folgenden eine beliebige Teilmenge einer festgelegten abzählbar unendlichen Menge V.

Definition 1.4 (Terme)
Seien Σ eine Signatur und X eine Variablenmenge mit $X \cap \Sigma = \emptyset$.

Die Menge $T(\Sigma, X)$ der Σ–*Terme* über X wird induktiv über den syntaktischen Aufbau ihrer Elemente wie folgt definiert :

a) X ist eine Teilmenge von $T(\Sigma, X)$ und
b) sind t_1, t_2, …, $t_n \in T(\Sigma, X)$ und $f \in \Sigma_F^{(n)}$, so ist $f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in T(\Sigma, X)$.

Jeden Term kann man als Baum darstellen. Mit einer Numerierung der Knoten des Baumes kann man dann den Term durch eine *endliche* Menge von *Zuordnungen* von *Stellen* (*eng. occurences*) in t zu Variablen und Funktionssymbolen darstellen.

Die Menge aller Σ–Term über einer Variablenmenge X kann somit durch die Menge aller partiellen Abbildungen $t : N^* \to \Sigma \cup X$ mit :

- $\epsilon \in Dom(t)$,
- $Dom(t)$ ist endlich und
- $u.i \in Dom(t) \iff u \in Dom(t)$ und $i \in [1..ar(t(u))]$

dargestellt werden, wobei $Dom(t)$ den Definitionsbereich von t, N^* die Menge aller Wörter über dem Alphabet N aller natürlichen Zahlen und ϵ das leere Wort sind.

Die Menge aller Stellen in t wird als $Dom(t)$ definiert und im folgenden mit $O(t)$ bezeichnet. Man kann dann über die Stellen alle Unterterme von t ansprechen.

Definition 1.5 (Standardbezeichnungen für Terme)
Seien t ein Term aus $T(\Sigma, X)$, $O(t)$ die Menge der Stellen in t und $w \in O(t)$.

a) Mit $Var(t)$ bezeichnen wir die Menge aller Variablen, die in t vorkommen.

b) Mit $t_{|_w}$ bezeichnen wir den Unterterm von t an der Stelle w.
c) Mit $t[w \leftarrow s]$ bezeichnen wir den Term, der aus t entsteht, indem man den Unterterm von t an der Stelle w durch s ersetzt.

Durch Gleichsetzen von Syntax und Semantik, dh. durch Interpretation der Terme durch sich selbst, kann auf jeder Menge $T(\Sigma, X)$ (Definition 1.4) eine Σ–Algebra erklärt werden.

Definition 1.6 (Termalgebren)
Die Σ–*Termalgebra* $\mathcal{T}(\Sigma, X)$ ist die Σ–Algebra mit :

- $T(\Sigma, X)$ als Trägermenge und
- $f_{\mathcal{T}(\Sigma,X)}(t_1, t_2, \ldots, t_n) := f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ für jedes Funktionssymbol f der Stelligkeit n und alle t_1, t_2, …, $t_n \in T(\Sigma, X)$.

Aus der Definition von $T(\Sigma, X)$ folgt, daß $\mathcal{T}(\Sigma, X)$ die Σ–Termalgebra mit der kleinsten Trägermenge ist, die X enthält, dh., daß $\mathcal{T}(\Sigma, X)$ durch X erzeugt ist.

Die auf der Trägermenge einer Termalgebra vordefinierte Gleichheit ist die syntaktische Gleichheit von Termen.

Eine Verbindung zwischen beliebigen Variablenmengen und beliebigen Algebren stellen *Wertzuweisungen* her.

Definition 1.7 (Wertzuweisung, Substitution, Variablenumbenennung)
Es sei X eine beliebige Variablenmenge und $\mathcal{A}$ eine beliebige Algebra mit Trägermenge A.

Eine *Wertzuweisung* von X in $\mathcal{A}$ ist eine beliebige Abbildung $\alpha : X \to A$.

Eine *Substitution* ist eine Wertzuweisung von X in der Termalgebra $\mathcal{T}(\Sigma, X)$, dh. eine Abbildung $\sigma : X \to T(\Sigma, X)$.

Eine *Variablenumbenennung* ist eine Bijektion $\sigma : X \to X$.

Wir bezeichnen mit $ASS_X^{\mathcal{A}}$ die Menge aller Wertzuweisungen von X in $\mathcal{A}$ und mit SUB_X die Menge aller Substitution von X in $\mathcal{T}(\Sigma, X)$.
Die Menge aller Substitutionen wird mit SUB bezeichnet.
Man beachte, daß eine Variablenumbenennung auch eine Substitution ist.

Um mit Substitutionen effektiv arbeiten zu können, werden sie auf solche eingeschränkt mit einer endlichen Mengen $Dom(\alpha) := \{\ x \in X \quad : \quad \alpha(x) \neq x\ \}$.

Jede Substitution σ ist somit durch die Menge $\{\ x \mapsto \sigma(x) \quad : \quad \sigma(x) \neq x\ \}$ eindeutig bestimmt. Daher werden Substitutionen auch in der Form :

$$\sigma := \{\ x \mapsto \sigma(x) \quad : \quad \sigma(x) \neq x\ \}$$

angegeben.

Jede Wertzuweisung von einer Variablenmenge X in einer Σ–Algebra $\mathcal{A}$ kann auf alle Σ–Terme über X erweitert werden, in dem man für jedes Vorkommen einer Variable x in einem Term t den Wert von α einsetzt und dann den so entstandenen Σ–Term (über eine Teilmenge von A) in $\mathcal{A}$ auswertet.

Definition 1.8 (Homomorphismus, Isomorphismus)
Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Σ–Algebren und A, B resp. deren Trägermengen.
Ein Σ–Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist eine Abbildung $h : A \to B$ mit :

$$h(f_{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f_{\mathcal{B}}(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n))$$

für alle Funktionssymbole f aus $\Sigma^{(n)}$ und alle a_1, a_2, $\ldots$, $a_n \in A$.

Ein Σ–Isomorphismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist ein bijektiver Σ–Homomorphismus.

Satz 1.9 (homomorphe Erweiterung)
Seien $\mathcal{A}$ eine Σ–Algebra mit Trägermenge A, X eine Variablenmenge und $\alpha : X \to A$ eine beliebige Wertzuweisung.

Dann gibt es zu α genau eine Σ–homomorphe Erweiterung $\hat{\alpha} : \mathcal{T}(\Sigma, X) \to \mathcal{A}$ definiert durch :

$$\hat{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{falls } t \in X \\ f_{\mathcal{A}}(\hat{\alpha}(t_1), \hat{\alpha}(t_2), \ldots, \hat{\alpha}(t_n)) & \text{falls } t = f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \text{ ist.} \end{cases}$$

Beweis :
Nach Definition ist $\hat{\alpha}$ ein Σ–Homomorphismus von $\mathcal{T}(\Sigma, X)$ nach $\mathcal{A}$.
Es bleibt zu zeigen, daß $\hat{\alpha}$ die einzige Σ–homomorphe Erweiterung von α auf $\mathcal{T}(\Sigma, X)$ ist, dh. für jede weitere Σ–homomorphe Erweiterung $\hat{\beta}$ von α auf $\mathcal{T}(\Sigma, X)$ gilt : $\hat{\beta}(t) = \hat{\alpha}(t)$, für alle $t \in T(\Sigma, X)$. Dies zeigen wir durch Induktion über den syntaktischen Aufbau der Terme aus $T(\Sigma, X)$.

- Da $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ Erweiterungen von α sind, gilt $\hat{\beta}(x) = \alpha(x)$ und $\hat{\alpha}(x) = \alpha(x)$ für alle Variablen $x \in X$. Damit ist $\hat{\beta}(x) = \hat{\alpha}(x)$ für alle $x \in X$.

- Angenommen, für ein n mit $\Sigma^{(n)} \neq \emptyset$ und beliebige Terme t_1, t_2, $\ldots$, $t_n \in T(\Sigma, X)$, stimmen $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ überein und sei $t := f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ für ein $f \in \Sigma^{(n)}$. Dann gilt :

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(t) &\overset{\text{Def}}{=} \hat{\beta}(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) \\ &\overset{\text{Hom}}{=} f_{\mathcal{A}}(\hat{\beta}(t_1), \hat{\beta}(t_2), \ldots, \hat{\beta}(t_n)) \\ &\overset{\text{Vor.}}{=} f_{\mathcal{A}}(\hat{\alpha}(t_1), \hat{\alpha}(t_2), \ldots, \hat{\alpha}(t_n)) \\ &\overset{\text{Hom}}{=} \hat{\alpha}(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) \\ &\overset{\text{Def}}{=} \hat{\alpha}(t) \end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt dann $\hat{\beta}(t) = \hat{\alpha}(t)$, für alle $t \in T(\Sigma, X)$.

Bemerkung 1.10

Wir werden zwischen einer Substitution σ und deren homomorphe Erweiterung $\hat{\sigma}$ nicht unterscheiden und beide mit σ bezeichnen.

Ist α eine beliebige Wertzuweisung von einer beliebigen Variablenmenge X in einer beliebigen Σ–Algebra $\mathcal{A}$ und $\hat{\alpha}$ deren Σ–homomorphe Erweiterung auf $\mathcal{T}(\Sigma, X)$, so definiert der *Kern* von $\hat{\alpha}$, dh. die Menge der Paare $(s, t) \in T(\Sigma, X) \times T(\Sigma, X)$ mit $\hat{\alpha}(s) = \hat{\alpha}(t)$ eine *Äquivalenzrelation* auf $T(\Sigma, X)$, die *kompatibel* mit den Operationen von $\mathcal{T}(\Sigma, X)$ ist, dh. eine *Kongruenzrelation* auf $\mathcal{T}(\Sigma, X)$.

Definition 1.11 (Relation, Äquivalenzrelation, Kongruenzrelation)
Sei A eine nicht leere Menge.

Das kartesische Produkt von A der Ordnung n ist die Menge
$$A^n := \{ \ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad : \quad a_1, a_2, \ldots, a_n \in A \ \}.$$
und eine n–stellige Relation auf A ist eine Teilmenge von A^n

Eine *binäre* Relation auf A ist eine 2–stellige Relation auf A.
Für eine binäre Relation R auf A schreiben wir aRb, wenn $(a, b) \in R$ ist.

Eine binäre Relation auf A heißt

- *reflexiv*, wenn für alle $x \in A : xRx$ gilt,
- *symmetrisch*, wenn für alle $x,\ y \in A : yRx$ aus xRy folgt, und
- *transitiv*, wenn für alle $x,\ y,\ z \in A : xRz$ aus xRy und yRz folgt.

Eine *Äquivalenzrelation* auf A ist eine reflexive, symmetrische und transitive Relation auf A.

Ist A die Trägermenge einer Σ–Algebra $\mathcal{A}$ und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A, so heißt $\sim$ *kompatibel* mit den Operationen von $\mathcal{A}$, wenn für alle $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n \in A$, alle $n \geq 0$ und alle n–stelligen Funktionssymbole $f \in \Sigma$:

$$a_1 \sim b_1, a_2 \sim b_2, \ldots, a_n \sim b_n \quad \Rightarrow \quad f_{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \sim f_{\mathcal{A}}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

Eine *Kongruenzrelation* oder einfach *Kongruenz* auf einer Σ–Algebra $\mathcal{A}$ mit Trägermenge A ist eine Äquivalenzrelation auf A, die kompatibel mit den Operationen von $\mathcal{A}$ ist.

Ist eine Σ–Algebra $\mathcal{A}$ *termerzeugt*, dh., das Σ–homomorphe Bild einer Σ–Termalgebra $\mathcal{T}(\Sigma, X)$ für einen beliebigen Σ–Homomorphismus $h : \mathcal{T}(\Sigma, X) \rightarrow \mathcal{A}$, so folgt mit dem Isomorphiesatz, daß $\mathcal{A}$ isomorph zu der *Quotientenalgebra* von $\mathcal{T}(\Sigma, X)$ nach dem Kern von h ist.

Definition 1.12 (Äquivalenzklassen)
Seien A eine beliebige nicht leere Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A und a ein beliebiges Element aus A.

Die *Äquivalenzklasse* von a nach $\sim$ ist die Menge $[a]_\sim := \{\ b \in A \quad : \quad a \sim b\ \}$.
Die Menge $A_{/\sim} := \{\ [a]_\sim \quad : \quad a \in A\ \}$ aller *Äquivalenzklassen* von A nach $\sim$ heißt die *Quotientenmenge* von A nach $\sim$ und wird mit $A_{/\sim}$ bezeichnet.

Für jede Kongruenzrelation $\equiv$ auf der Trägermenge A einer Σ–Algebra $\mathcal{A}$ kann die Quotientenmenge $A_{/\equiv}$ durch Interpretation der Funktionssymbole von Σ auf $A_{/\equiv}$ zu einer Σ–Algebra erklärt werden.

Definition 1.13 (Quotientenalgebra)
Seien $\mathcal{A}$ eine Σ–Algebra mit einer Trägermenge A und $\equiv$ eine Kongruenz auf A.

Die Quotientenalgebra von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{A}_{/\equiv}$ ist die Σ–Algebra mit :

- Trägermenge $A_{/\equiv}$
- die jedes Funktionssymbol $f \in \Sigma^{(n)}$ auf $A_{/\equiv}$ durch :

$$f_{\mathcal{A}_{/\equiv}}([a_1]_\equiv, [a_2]_\equiv, \ldots, [a_n]_\equiv) := [f(a_1, a_2, \ldots, a_n)]_\equiv$$

  für alle $[a_1]_\equiv$, $[a_2]_\equiv$, $\ldots$, $[a_n]_\equiv \in A_{/\equiv}$ interpretiert.

Die Kongruenz–Eigenschaft von $\equiv$ garantiert, daß die Interpretation der Funktionssymbole in der Quotientenmenge wohldefinierte Funktionen liefert.

Als Folgerung aus dem Homomorphiesatz induziert jede Σ–Algebra $\mathcal{A}$ auf der Trägermenge $T(\Sigma, X)$ einer beliebigen Σ–Termalgebra $\mathcal{T}(\Sigma, X)$ *in kanonischer Weise* eine *$\mathcal{A}$–Gleichheit.*

I.2. Die durch eine Algebra induzierte Gleichungstheorie

Definition 1.14 (Identität, Gültigkeit, $\mathcal{A}$–Identität, Modell)
Seien $\mathcal{A}$ eine Σ–Algebra und X eine beliebige Variablenmenge.

Eine *Identität* ist ein beliebiges Paar $(s, t) \in T(\Sigma, X) \times T(\Sigma, X)$.
Für eine Identität (s, t) schreiben wir $s = t$.

Eine Identität $s = t$ *gilt* oder ist *gültig* in $\mathcal{A}$, wenn $\hat{\alpha}(s) = \hat{\alpha}(t)$ für alle $\alpha \in ASS_X^{\mathcal{A}}$.

Wenn eine Identität in $\mathcal{A}$ gilt, sagen wir, daß $s = t$ eine $\mathcal{A}$–Identität oder, daß $\mathcal{A}$ ein *Modell* für $s = t$ ist.

Für eine $\mathcal{A}$–Identität $s = t$ schreiben wir $s =_{\mathcal{A}} t$.
Für ein Modell $\mathcal{A}$ für $s = t$ schreiben wir $\mathcal{A} \models s = t$.

Beispiel 1.15

Mit der Identität $f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)$ aus einer Menge $T(\Sigma, X) \times T(\Sigma, X)$ wird bekanntlich die Assoziativität der Interpretation des Funktionssymbols f in einer Σ–Algebra beschrieben.
Ist $\mathcal{A}$ eine Σ–Algebra, die das Funktionssymbol f durch eine assoziative Operation auf der Trägermenge von $\mathcal{A}$ interpretiert, so ist :

$$\hat{\alpha}(f(x, f(y, z))) = \hat{\alpha}(f(f(x, y), z)), \qquad \forall\ \alpha \in ASS_X^{\mathcal{A}},$$

Die Identität $f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)$ ist damit eine $\mathcal{A}$–Identität und $\mathcal{A}$ ist ein Modell für die Identität $f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)$.

Für jede Σ–Algebra $\mathcal{A}$ und jede Variablenmenge X induziert die Relation $=_{\mathcal{A},X}$ definiert auf $T(\Sigma, X)$ durch :

$$s =_{\mathcal{A},X} t \quad \text{g.d.w.} \quad (s, t) \text{ eine } \mathcal{A}\text{–Identität ist}$$

eine Äquivalenzrelation auf $T(\Sigma, X)$, deren Äquivalenzklassen genau aus den Termen aus $T(\Sigma, X)$ bestehen, deren Auswertung bezüglich jeder Wertzuweisung aus $ASS_X^{\mathcal{A}}$ identisch ist.

Aus der Definition von $=_{\mathcal{A},X}$ und der definierenden Eigenschaft eines Homomorphismus kann man leicht überprüfen, daß $=_{\mathcal{A},X}$ kompatibel mit den Operationen von $\mathcal{T}(\Sigma, X)$ und damit eine Kongruenzrelation auf $\mathcal{T}(\Sigma, X)$ ist.

Die Kongruenzrelation $=_{\mathcal{A},X}$ ist zusätzlich *substitutionsabgeschlossen*, dh.

$$\forall\ s, t \in T(\Sigma, X)\ \wedge\ \forall\ \sigma \in SUB_X \quad : \quad s =_{\mathcal{A},X} t \quad \Rightarrow \quad \sigma(s) =_{\mathcal{A},X} \sigma(t)$$

Lemma 1.16 (Substitutionsabgeschlossenheit von $=_{\mathcal{A},X}$)
Es sei Σ eine Signatur, X eine beliebige Variablenmenge und $\mathcal{A}$ eine beliebige Σ–Algebra.

Dann ist $=_{\mathcal{A},X}$ abgeschlossen bezüglich Substitutionen.

Beweis
Seien $\mathcal{A}$ eine beliebige Σ–Algebra mit Trägermenge A, X eine beliebige Variablenmenge, s, $t \in T(\Sigma, X)$ mit $s =_{\mathcal{A},X} t$ und σ eine beliebige Substitution aus SUB_X.

Nach Definition von $=_{\mathcal{A},X}$ gilt dann $\sigma(s) =_{\mathcal{A},X} \sigma(t)$ genau dann, wenn $\hat{\alpha}(\sigma(s)) = \hat{\alpha}(\sigma(t))$, für jede Wertzuweisung $\alpha \in ASS_X^{\mathcal{A}}$, gilt.

Für jede Wertzuweisung $\alpha \in ASS_X^{\mathcal{A}}$ und jede Substitution $\sigma \in ASS_X$ definiert das Paar (α, σ) eine Wertzuweisung $\tau : X \to A$ definiert durch :

$$\tau(x) := \hat{\alpha}(\sigma(x)) \quad \text{für alle } x \in X$$

Da die Σ–homomorphe Erweiterung $\hat{\tau}$ von τ mit $\hat{\alpha} \circ \sigma$ auf $T(\Sigma, X)$ übereinstimmt, ist $\hat{\alpha}(\sigma(s)) = \hat{\alpha}(\sigma(t))$ genau dann, wenn $\hat{\tau}(s) = \hat{\tau}(t)$ ist.

Da aber nach Voraussetzung $s =_{\mathcal{A},X} t$ ist, gilt nach Definition von $=_{\mathcal{A},X}$ stets $\hat{\tau}(s) = \hat{\tau}(t)$.

Damit ist auch $\hat{\alpha}(\sigma(s)) = \hat{\alpha}(\sigma(t))$, für jede Wertzuweisung $\alpha \in ASS_X^{\mathcal{A}}$ und jede Substitution $\sigma \in SUB_X$, dh. $\sigma(s) =_{\mathcal{A},X} \sigma(t)$. Damit ist $=_{\mathcal{A},X}$ substitutionsabgeschlossen.

Bemerkung 1.17

Für beliebige Mengen X und Y gleicher Kardinalität, dh. mit einer Bijektion $\varphi : X \to Y$, sind die Kongruenzrelationen $=_{\mathcal{A},X}$ und $=_{\mathcal{A},Y}$ bis auf Variablenumbenennung identisch, dh. für alle Terme s, t aus $T(\Sigma, X)$ ist $s =_{\mathcal{A},X} t$ genau dann, wenn $\varphi(s) =_{\mathcal{A},Y} \varphi(t)$ ist.

Insbesondere sind die Kongruenzen $=_{\mathcal{A},X}$ für alle abzählbar unendliche Mengen X bis auf Variablenumbenennung identisch.

Vereinbarung 1.18

Wir identifizieren alle Kongruenzen $=_{\mathcal{A},X}$ über einer beliebigen abzählbar unendlichen Menge X mit der Kongruenz $=_{\mathcal{A},V}$ für die Menge V aller Variablen und bezeichnen $=_{\mathcal{A},V}$ einfach mit $=_{\mathcal{A}}$.

Definition 1.19 (Gleichungstheorie $=_{\mathcal{A}}$)
Die Kongruenz $=_{\mathcal{A}}$ heißt die durch $\mathcal{A}$ induzierte *Gleichungstheorie*.

I.3 Freie Algebren

Definition 1.20 (freie Algebren)
Seien Σ eine Signatur, $\mathcal{K}$ eine Klasse von Σ–Algebren und X eine beliebige Menge.
Eine Σ–Algebra $\mathcal{A}$ mit Trägermenge A heißt frei für $\mathcal{K}$ über X, wenn

a) $\mathcal{A} \in K$,
b) $X \subseteq A$, und
c) es für jede Algebra $\mathcal{B} \in K$ und jede Abbildung $\alpha : X \to B$ genau eine Σ–homomorphe Erweiterung $\hat{\alpha} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ gibt.

Nach der Definition von Termalgebren (Definition 1.6) und Satz 1.9 ist jede Σ–Termalgebra $\mathcal{T}(\Sigma, X)$ frei für die Klasse aller Σ–Algebren über X.

Interpretation

Ist eine Algebra $\mathcal{A}$ frei für eine Klasse $\mathcal{K}$ von Σ–Algebren über einer Menge X, so gibt es zu jeder Algebra $\mathcal{B}$ aus $\mathcal{K}$ und jeder Abbildung von X in die Trägermenge B von $\mathcal{B}$ genau eine Σ–homomorphe Erweiterung (Definition einer freien Algebra).

Nach der Definition eines Homomorphismus ist somit jede $\mathcal{A}$–Identität auch eine $\mathcal{B}$–Identität für jede Algebra $\mathcal{B}$ aus $\mathcal{K}$.

Damit liegt die Menge $=_{\mathcal{A},X}$ aller $\mathcal{A}$–Identitäten (aus $T(\Sigma, X) \times T(\Sigma, X)$) in der Schnittmenge aller Mengen $=_{\mathcal{B},X}$ über $\mathcal{K}$. Da nach Definition $\mathcal{A}$ selbst aus $\mathcal{K}$ ist, liegt umgekehrt diese Schnittmenge in $=_{\mathcal{A},X}$.

Damit gilt für jede freie Algebra $\mathcal{A}$ für eine beliebige Klasse $\mathcal{K}$ über einer beliebigen Menge X :

$$=_{\mathcal{A},X} \;=\; \bigcap_{\mathcal{B}\in\mathcal{K}} =_{\mathcal{B},X}$$

Eine Identität $s = t$ gilt somit in einer freien Algebra für eine Klasse $\mathcal{K}$ genau dann, wenn $s = t$ in jeder Algebra aus $\mathcal{K}$ gilt.

Freie Algebren brauchen nicht in jeder Klasse zu existieren. Wenn aber eine Klasse freie Algebren enthält, dann sind sie für aller Mengen gleicher Kardinalität bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.
Diese Eigenschaft für freie Algebren wird in den nächsten Kapiteln oft verwendet und wird deswegen im folgenden Satz gezeigt.

Satz 1.21
Es sei Σ eine Signatur, $\mathcal{K}$ eine Klasse von Σ–Algebren und X, Y beliebige Mengen gleicher Kardinalität.

Ist $\mathcal{A}$ frei für $\mathcal{K}$ über X und $\mathcal{B}$ frei für $\mathcal{K}$ über Y, so sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ isomorph.

Beweis

Da X und Y nach Voraussetzung die gleiche Kardinalität haben, gibt es nach Definition eine Bijektion $f : X \to Y$ und eine Bijektion $g : Y \to X$ mit $f = g^{-1}$.

Da $\mathcal{A}$ frei für $\mathcal{K}$ über X ist, gibt es zu f genau eine Σ–homomorphe Erweiterung $\hat{f} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Entsprechend gibt es zu g genau eine Σ–homomorphe Erweiterung $\hat{g} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$.

Zu zeigen : $\hat{f}$ und $\hat{g}$ sind zueinander inverse Isomorphismen.

Bekanntlich ist die Komposition von zwei Σ–Homomorphismen (sofern definiert) einen Σ–Homomorphismus. Damit sind $\hat{f} \circ \hat{g}$ und $\hat{g} \circ \hat{f}$ wohldefinierte Σ–Homomorphismen.
Es bleibt zu zeigen, daß sie invers zueinander sind.

Da $\hat{f}$ (respektiv $\hat{g}$) eine Erweiterung von f (respektiv g) ist und da f und g zueinander invers sind, gilt :

$$(\hat{f} \circ \hat{g})_{|Y} = id_{|Y} \quad \text{und} \quad (\hat{g} \circ \hat{f})_{|X} = id_{|X}$$

Nach Definition einer freien Algebra gibt es aber zu f und g jeweils genau eine Σ–Erweiterung. Damit stimmt sogar $\hat{f} \circ \hat{g}$ (respektiv $\hat{g} \circ \hat{f}$) mit der Identität auf A (respektiv B) überein. Damit sind $\hat{f}$ und $\hat{g}$ zueinander inverse Isomorphismen.

II. Unifikation von Termen

Definition 1.22 (Termgleichung)
Es sei Σ eine Signatur und X eine beliebige Variablenmenge.

Eine Termgleichung ist ein beliebiges Paar (s, t) aus $T(\Sigma, X) \times T(\Sigma, X)$.
Für eine Termgleichung über X schreiben wir auch $s \doteq t$.

Bemerkung 1.23 (Identitäten, Termgleichungen)

Mit einer Identität $s = t$ schränkt man die möglichen Interpretationen der Funktionssymbole von s und t auf solche ein, die ein Modell für $s = t$ liefern.

Bei einer Termgleichung $s \doteq t$ ist man hingegen an einer Substitution der Variablen von s und t durch Terme interessiert, die s und t syntaktisch oder eventuell modulo einer Gleichungstheorie gleich macht.

Termgleichungen entsprechen daher dem üblichen Begriff der Gleichung in einer Algebra, wobei die Algebra in Betracht eine Quotiententermalgebra, dh. eine Quotientenalgebra einer Termalgebra, ist.

Die Unifikationstheorie beschäftigt sich mit der *effektiven* Berechnung von Lösungen für Termgleichungen in einer Quotiententermalgebra.

Definition 1.24 (Unifikationsproblem)
Es sei Σ eine Signatur.

Ein *Unifikationsproblem* über Σ ist eine endliche Menge

$$\Gamma := \{\ s_1 \doteq t_1,\ s_2 \doteq t_2,\ \ldots,\ s_n \doteq t_n\ \}$$

von Termgleichungen.

II.1 Syntaktische Unifikation

Definition 1.25 (Unifikator)
Es sei Σ eine Signatur, X eine Variablenmenge und Γ ein Unifikationsproblem.

Ein *Unifikator* für Γ ist eine Substitution σ aus SUB_X mit :

$$\sigma(s_1) = \sigma(t_1),\ \ \sigma(s_2) = \sigma(t_2),\ \ \ldots,\ \ \sigma(s_n) = \sigma(t_n).$$

Mit $U(\Gamma)$ bezeichnet man die Menge aller Unifikatoren des Unifikationsproblems Γ.
Man schreibt auch $U(s, t)$ für $U(\Gamma)$, wenn Γ nur aus der Termgleichung $s \doteq t$ besteht.

Bei der syntaktischen Unifikation geht es um folgende Fragestellung :

- gegeben : ein Unifikationsproblem Γ
- gesucht : einen Unifikator für Γ

Die syntaktische Unifikation ist somit äquivalent zu dem Lösen von Termgleichungen in einer Termalgebra (jede Termalgebra $\mathcal{T}(\Sigma, X)$ ist identisch mit der Quotiententermalgebra von $\mathcal{T}(\Sigma, X)$ nach der trivialen Kongruenz, die durch die syntaktische Gleichheit von Termen auf $\mathcal{T}(\Sigma, X)$ induziert wird).

Definition 1.26 (Instanz, allgemeiner)
Seien X eine beliebige Variablenmenge, Y eine Teilmenge von X und σ_1 und σ_2 beliebige Substitutionen aus SUB_X.

- σ_2 ist eine *Instanz* von σ_1 auf Y, wenn es eine Substitution $\tau \in SUB_X$ gibt, mit $\sigma_2(y) = \tau(\sigma_1(y))$, für alle $y \in Y$.
- σ_1 ist *allgemeiner* als σ_2 auf Y, wenn σ_2 eine Instanz von σ_1 auf Y ist.

Zu jedem Unifikationsproblem Γ kann man eine Quasi–Ordnung auf der Menge $U(\Gamma)$ aller Unifikatoren von Γ durch :

$$\sigma \leq^Y \tau \quad \text{g.d.w.} \quad \sigma \text{ allgemeiner als } \tau \text{ auf } Y \text{ ist,}$$

definieren, wobei Y die Menge $Var(\Gamma)$ aller Variablen bezeichnet, die in Γ vorkommen.

Ein *allgemeinster Unifikator* eines Unifikationsproblems Γ ist ein Unifikator σ aus $U(\Gamma)$ mit $\sigma \leq^{Var(\Gamma)} \tau$ für alle $\tau \in U(\Gamma)$.

Da jede Instanz eines Unifikators für das Unifikationsproblem Γ auch ein Unifikator für Γ ist, ermöglicht die effektive Bestimmung eines allgemeinsten Unifikators σ, alle weiteren Unifikatoren durch Instanzierung aus σ abzuleiten.

Für die syntaktische Unifikation fassen wir folgende bekannte Ergebnisse [Robinson, 1965] zusammen :

1) die syntaktische Unifikation ist *entscheidbar*, dh. man kann zu jedem Unifikationsproblem Γ effektiv entscheiden, ob Γ mindestens einen Unifikator hat,
2) zu jedem Unifikationsproblem mit mindestens einem Unifikator gibts stets einen allgemeisten Unifikator, der bis auf Variablenumbenennung eindeutig bestimmt ist und
3) hat ein Unifikationsproblem einen Unifikator, so kann man stets einen allgemeinsten Unifikator effektiv bestimmen.

II.2 Motivation für die E–Unifikation

Seien $s := f(x, a)$ und $t := f(x, b)$ beliebige Terme, wobei x eine Variable und a, b Konstantensymbole sind. Das Unifikationsproblem $\Gamma := \{ s \doteq t \}$ hat dann offensichtlich keinen Unifikator.

Ist das Funktionssymbol f kommutativ, dh. schränken wir die möglichen Interpretationen für f nur auf solche ein, die ein Modell für die Identität $f(x, y) = f(y, x)$ liefern, so ist die Substitution $\sigma := \{ x \mapsto b \}$ eine Lösung der Termgleichung $s \doteq t$ in einer geeigneten Quotiententermalgebra, dh. für eine geeignete Termalgebra und eine Kongruenz $\equiv$ auf dieser Termalgebra, die durch die Identität $f(x, y) = f(y, x)$ induziert wird. Die syntaktische Unifikation kann diese Lösung nicht liefern.

Wir sind daher an Unifikationsalgorithmen interessiert, die auch solche Lösungen (für eine festgelegte Menge E von Identitäten) berechnen können.

Dazu müssen wir zuerst die Relation auf einer Termalgebra $T(\Sigma, X)$ charakterisieren, die durch eine Menge E von Identitäten aus $T(\Sigma, X) \times T(\Sigma, X)$ induziert wird.

II.3 Charakterisierung von Identitäten durch eine Kongruenz

Definition 1.27 (Varietät)
Es sei Σ eine Signatur, X eine Variablenmenge, $\mathcal{A}$ eine Σ–Algebra und E eine Menge von Identitäten aus $T(\Sigma, X) \times T(\Sigma, X)$.

Die Klasse aller Modelle für E heißt die durch E definierte *Varietät* und wird mit $\mathcal{V}(E)$ bezeichnet. Dabei ist $\mathcal{A}$ ein Modell für E genau dann, wenn $\mathcal{A}$ ein Modell für alle Identitäten aus E ist.

Jede Identität aus E gilt somit nach Definition in jedem Modell für E, dh. in jeder Σ–Algebra aus $\mathcal{V}(E)$.

Die durch eine Menge E von Identitäten induzierte Relation auf $T(\Sigma, X)$ wird durch die Menge von Identitäten charakteresiert, die aus E *semantisch folgen*, dh. durch die Identitäten $s = t$ aus $T(\Sigma, X) \times T(\Sigma, X)$, die in jedem Modell für E gelten.

Nach Definition von $\mathcal{V}(E)$ sind dies genau die Identitäten $s = t$ aus $T(\Sigma, X) \times T(\Sigma, X)$, die in jeder Σ–Algebra aus $\mathcal{V}(E)$ gelten.

Definition 1.28 (Semantische Folgerung, Gleichungstheorie)
Seien E eine Menge von Identitäten aus $T(\Sigma, X) \times T(\Sigma, X)$ und $s = t$ eine beliebige Identität aus $T(\Sigma, X) \times T(\Sigma, X)$.

Die Identität $s = t$ *folgt semantisch* aus E, wenn $s = t$ in jedem Modell von E gilt.

Die Menge aller Identitäten, die aus E semantisch folgen, heißt die durch E definierte *Gleichungstheorie* und wird mit $=_{E,X}$ bezeichnet.

Offensichtlich gilt für die Gleichungstheorie $=_{E,X}$ und jede Variablenmenge X :

$$=_{E,X} \;=\; \bigcap_{\mathcal{B}\in\mathcal{V}(E)} =_{\mathcal{B},X}$$

Da alle Relationen $=_{\mathcal{B},X}$ Kongruenzrelationen auf $\mathcal{T}(\Sigma, X)$ sind, die abgeschlossen bezüglich Substitutionen sind, ist $=_{E,X}$ auch eine Kongruenzrelation auf $\mathcal{T}(\Sigma, X)$, die abgeschlossen bezüglich Substitutionen ist.

Eine andere Möglichkeit, die Gleichungstheorie $=_{E,X}$ syntaktisch zu charakterisieren, liefert folgende Definition.

Definition 1.29 (die Reduktionsrelation $\rightarrow_E$)
Seien Σ eine Signatur, X eine Variablenmenge und E eine Menge von Identitäten aus $T(\Sigma, X) \times T(\Sigma, X)$.

Die durch E induzierte Reduktionsrelation $\rightarrow_E$ auf $T(\Sigma, X)$ ist definiert durch

$$s \rightarrow_E t \quad \text{g.d.w.} \quad \exists (l, r) \in E, \exists u \in O(s), \exists \sigma : X \rightarrow T(\Sigma, X) \;:\; s_{|_u} = \sigma(l) \wedge t = s[u \leftarrow \sigma(r)]$$

Der folgende Satz von Birkhoff garantiert die Korrektheit der obigen Definition.

Satz 1.30 (Birkhoff)
Für jede Menge E von Identitäten aus $T(\Sigma, X) \times T(\Sigma, X)$ ist $=_{E,X}$ identisch mit dem reflexiven, transitiven und symmetrischen Abschluß $\overset{*}{\leftrightarrow}_E$ von $\rightarrow_E$.

Der folgende Satz besagt, daß jede Varietät freie Algebren über beliebigen Variablenmengen enthält.

Satz 1.31
Es sei E eine Menge von Identitäten aus $T(\Sigma, X) \times T(\Sigma, X)$, $=_{E,X}$ die durch E induzierte Gleichungstheorie und $X_E := \{ \, [x]_{=_{E,X}} \quad : \quad x \in X \, \}$.

Dann ist $\mathcal{T}(\Sigma, X)_{/=_{E,X}}$ frei für $\mathcal{V}(E)$ über X_E.

Der Beweis dieses Satzes kann man z.B. in [W. Wechler] finden.

Eine Identität $s = t$ ist somit eine Folgerung aus einer Menge E von Identitäten genau dann, wenn $s = t$ in $\mathcal{T}(\Sigma, X)_{/=_{E,X}}$ gilt, dh., wenn $\mathcal{T}(\Sigma, X)_{/=_{E,X}} \models s = t$ ist.

Bemerkung 1.32

- Nach Satz 1.31 gilt $s =_{E,X} t$ genau dann, wenn $\mathcal{T}(\Sigma, X)_{/=_{E,X}}$ ein Modell für die Identität $s = t$ ist und nach Satz 1.21 sind die Quotiententermalgebren $\mathcal{T}(\Sigma, X)_{/=_{E,X}}$ für alle Mengen X gleicher Kardinalität isomorph. Damit können wir diese Gleichungstheorien identifizieren.
  Im folgenden werden wir alle Gleichungstheorien $=_{E,X}$ über einer abzählbar unendlichen Variablenmengen X mit der Gleichunstheorie $=_{E,V}$ identifizieren und einfach mit $=_E$ bezeichnet. Jeder Menge E von Identitäten wird dann durch die Gleichungstheorie $=_E$ charakterisieren.

- Da wir für die automatische Behandlung (effektive Handhabung) von Gleichungstheorien interessiert sind, gehen wir im folgenden stets davon aus, daß die (vorgegebene) Menge E von Identitäten endlich ist.

Bemerkung 1.34 (die Gleichungstheorie $=_\emptyset$)

Falls $E = \emptyset$ ist, besteht die Gleichungstheorie $=_\emptyset$ genau aus den trivialen Identitäten $s = s$ für alle $s \in T(\Sigma, V)$.

II.4 Das Wortproblem für E

Definition1.35 (Das Wortproblem für eine Gleichungstheorie)

- **Gegeben :** eine endliche Menge E von Identitäten und beliebige Terme s, t.
- **Gesucht :** ein Entscheidungsverfahren für $s \stackrel{?}{=}_E t$, das mit
  - „ja" antwortet, falls $s =_E t$ gilt und mit
  - „nein" antwortet, falls $s =_E t$ nicht gilt.

Das Wortproblem ist im allgemeinen unentscheidbar, dh. es kann kein Verfahren geben, das bei Vorgabe einer endlichen Menge von Identitäten und beliebiger Terme s, t stets korrekt entscheidet, ob $s =_E t$ gilt oder nicht.

Dies schließt jedoch nicht aus, daß das Wortproblem im Einzelfall entscheidbar sein kann, dh., daß es für eine bestimmte (endliche) Menge E von Identitäten ein Verfahren geben kann, das für beliebige Terme s, t korrekt entscheidet, ob $s =_E t$ gilt oder nicht.

Das Wortproblem kann in Einzelfällen mit Hilfe von *Termersetzungssystemen* entschieden werden.

II.5 Termersetzungssysteme

Definition 1.36 (Termersetzungssystem)
Es sei Σ eine Signatur, X eine beliebige Variablenmenge und E eine Menge von Identitäten.

Ein *Termersetzungssystem* R ist eine beliebige Teilmenge von $T(\Sigma, X) \times T(\Sigma, X)$.
Die Termpaare aus R heißen *Reduktionsregeln.*

Ein Termersetzungssystem R ist *äquivalent* zu E, wenn die durch E und R induzierten Relationen $\overset{*}{\leftrightarrow}_E$ und $\overset{*}{\leftrightarrow}_R$ identisch sind.

Eine Reduktionskette mit R ist eine endliche Folge $s_1 \to s_2 \to \ldots s_n$ oder eine unendliche Folge $(s_i)_{i \in IN}$ von Termen mit $s_i \to_R s_{i+1}$, für alle $i \in IN$.

Ein Termersetzungssystem R ist terminierend, wenn es keine unendliche Reduktionskette mit R gibt.

Ein Term s heißt *R–reduzibel*, wenn es einen Term t gibt mit $s \to_R t$.

Ein Term s heißt *R–irreduzibel*, wenn es keinen Term t gibt mit $s \to_R t$.

Ein Termersetzungssystem R heißt *konfluent*, wenn für alle Terme s gilt :

$$s \overset{*}{\to}_R s_1 \quad \text{und} \quad s \overset{*}{\to}_R s_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \exists\, t \;:\; s_1 \overset{*}{\to}_R t \quad \text{und} \quad s_2 \overset{*}{\to}_R t$$

Ein Termersetzungssystem R besitzt die *Church-Rosser–Eigenschaft*, wenn für alle Terme s_1 und s_2 gilt :

$$s_1 \overset{*}{\leftrightarrow}_R s_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \exists\, t \;:\; s_1 \overset{*}{\to}_R t \quad \text{und} \quad s_2 \overset{*}{\to}_R t$$

Bei der Reduktionsrelation $\to_R$, die durch ein Termersetzungssystem R induziert wird, ist man an $\overset{*}{\to}_R$, dh. an den Reduktionsketten mit R, interessiert.

Bemerkung 1.37 (Interpretation der Eigenschaften eines TES)

1. Ist das Termersetzungssystem R terminierend, so gibt es zu jedem Term *mindestens* einen R–irreduziblen Term.

2. Ist R zusätzlich konfluent, so gibt es zu jedem Term t *genau* einen R–irreduziblen Term. Dieser Term heißt die *R–Normalform* von t und wird mit $t{\downarrow}_R$ bezeichnet.
   Da die Church–Rosser–Eigenschaft äquivalent zur Konfluenz ist, sind zwei beliebige Terme s und t genau dann R–äquivalent, dh. $s \overset{*}{\leftrightarrow}_R t$, wenn s und t den (syntaktisch) gleichen R–irreduziblen Term haben.

3. Ist R zusätzlich *endlich*, so kann man für jeden Term t effektiv entscheiden, ob t R–reduzibel ist, indem man testet, ob es eine orientierte Identität $(l, r) \in R$, eine Substitution σ und eine Stelle u in $O(t)$ gibt, mit $t_{|_u} = \sigma(l)$ (Definition von $\to_R$).

Da R endlich und die syntaktische Unifikation entscheidbar ist, ist dies stets effektiv möglich.

Ist t R–reduzibel, so ist $t[u \leftarrow \sigma(r)]$ nach Definition von $\rightarrow_R$ ein R–Nachfolger von t, dh. es gilt $t \rightarrow_R t[u \leftarrow \sigma(r)]$, wobei σ ein sogenannter *Matcher* von $t_{|_u}$ und l für die passende Stelle $u \in O(t)$ und das passende Paar $(l, r) \in R$ ist, dh. eine Substitution der Variablen in l durch Terme, die $\sigma(l)$ und t identisch macht.

4. Bei einem endlichen, konfluenten und terminierenden Termersetzungssystem R kann man für jeden Term t die R–Normalform $t{\downarrow_R}$ effektiv bestimmen.

Folgerung 1.38

Gibt es zu E ein äquivalentes Termersetzungssystem R , das endlich, konfluent und terminierend ist, so kann man das Wortproblem für E entscheiden, indem man für das Paar (s, t) (zu einem Problem $s \stackrel{?}{=}_E t$) die R–Normalformen $s{\downarrow_R}$ und $t{\downarrow_R}$ berechnet und sie dann auf syntaktische Gleichheit testet.

Wie findet man zu einer Menge E von Identitäten ein äquivalentes Termersetzungssystem, das die gewünschten Eigenschaften besitzt ?

Wegen der Unentscheidbarkeit des Wortproblems wissen wir, daß dies nicht immer möglich sein kann.

Die allgemeine Idee ist es, die Identitäten aus E sowie einige Folgerungen aus E, sogenannte *kritische Paare*, mit Hilfe einer totalen *Reduktionsordnung* auf den *Grundtermen* so zu orientieren, daß dadurch ein Reduktionssystem R, dh. eine Menge von Identitäten, entsteht, das äquivalent zu E und konfluent und terminierend auf *Grundtermen* ist.
Das Verfahren ist als Vervollständigung ohne Abbruch (*eng. unfailing completion*) bekannt [DJ 87].

Definition 1.39 (Reduktionsordnung)
Es sei Σ eine Signatur und X eine Variablenmenge.

Eine *Reduktionsordnung* $>$ ist eine strikte partielle Ordnung auf $T(\Sigma, X)$ mit :

a) $>$ ist *Noethersch*, dh. es gibt keine unendliche Reduktionskette mit $>$,
b) $\forall\ s_1,\ s_2,\ s \in T(\Sigma, X),\ \forall\ u \in O(t):\quad s_1 > s_2 \quad\Longrightarrow\quad s[u \leftarrow s_1] > s[u \leftarrow s_2]$
c) $\forall\ s_1,\ s_2 \in T(\Sigma, X),\ \forall\ \sigma \in SUB:\quad s_1 > s_2 \quad\Longrightarrow\quad \sigma(s_1) > \sigma(s_2)$.

Die Anwendung der Vervollständgung ohne Abbruch auf E mit einer *totalen Reduktionsordnung $>$ auf Grundtermen* liefert ein (eventuell unendliches) Reduktionssystem R, das äquivalent zu E und konvergent, dh. terminierend und konfluent, auf *Grundtermen* ist.

Mit der totalen Reduktionsordnung $>$ kann dann jede *Grundinstanz* einer Identität aus R orientiert werden. Damit ist das durch R und $>$ induzierte Reduktionssystem :

$$R^{>} := \{\ \theta(g) \rightarrow \theta(d) \quad : \quad (g,d) \in R \ \text{ und } \theta \ \text{ eine Grundsubstitution mit } \ \theta(g) > \theta(d)\ \}$$

stets konfluent und terminierend.

Ein Grundterm t ist dann mit der Reduktionsregel $g = d$ aus R genau dann reduzierbar, wenn es eine Stelle u in t, dh. $u \in O(t)$, und eine Grundsubstitution τ gibt, so daß $t_{|_u} = \tau(g)$ (bzw. $t_{|_u} = \tau(d)$) ist und $\tau(g) > \tau(d)$ (bzw. $\tau(d) > \tau(g)$) gilt.
Der Term t kann dann mit $g = d$ zu dem Term $t[u \leftarrow \tau(d)]$ (bzw. $t[u \leftarrow \tau(g)]$) reduziert werden.

Das Wortproblem für E kann dann mit R wie folgt entschieden werden, wenn R endlich und die Reduktionsordnung $>$ entscheidbar sind :

Um $s \stackrel{?}{=} t$ für beliebige Terme s und t zu entscheiden, betrachtet man $\theta(s) \stackrel{?}{=} \theta(t)$, wobei θ eine Grundsubstitution ist, die jede Variable aus $Var(s) \cup Var(t)$ durch eine neue Konstante ersetzt, die in Σ nicht vorkommt.
Zudem wird die totale Ordnung $>$ auf den Grundtermen aus $T(\Sigma, X)$ geignet zu einer totalen Ordnung $\gg$ auf den Grundtermen aus $T(\hat{\Sigma}, X)$ erweitert, wobei $\hat{\Sigma}$ die Erweiterung von Σ um die neu eingeführten Konstanten darstellt.
Man kann dann zeigen, daß $s =_E t$ genau dann gilt, wenn $\theta(s) =_E \theta(t)$ gilt.

Da das Vervollständigungsverfahren im allgemeinen nicht terminiert, kann es ein unendliches Reduktionssystem R entstehen. Der Vervollständigungsverfahren liefert damit im allgemeinen kein Entscheidungsverfahren für das Wortproblem.

Ist das Wortproblem für E entscheidbar, so ist es sinnvoll die E–Unifikation, dh. die Unifikation modulo der Gleichungstheorie $=_E$, zu definieren.

II.6 E–Unifikation

Ähnlich wie bei der syntaktischen Unifikation ist man bei der E–Unifikation im allgemeinen für die effektive Bestimmung von *E–Unifikatoren* interessiert.

Definition 1.40 (E–Unifikator)
Es sei Σ eine Signatur, X eine Variablenmenge, E eine Menge von Identitäten und Γ ein *beliebiges* Unifikationsproblem über Σ.

Ein *E–Unifikator* für Γ ist eine Substitution σ mit $\sigma(s) =_E \sigma(t)$ für alle Termgleichungen $s \doteq t$ aus Γ.

Die Menge aller E–Unifikatoren für Γ wird mit $U_E(\Gamma)$ bezeichnet.
Falls Γ nur aus der Termgleichung $s \doteq t$ besteht, schreiben man für $U_E(\Gamma)$ auch $U_E(s,t)$.

Bemerkung 1.41 (Signatur von E)

Mit der Signatur von E bezeichnet man die Menge aller Funktionssymbole, die in E vorkommen.

Wir gehen zuerst davon aus, daß die Unifikationsprobleme ausschließlich über der Signatur von E (und einer Variablenmenge X) gebildet sind.

Um E–Unifikatoren für ein Unifikationsproblem effektiv bestimmen zu können, muß die E–Unifikation *entscheidbar* sein, dh. es muß ein Verfahren geben können, mit dem für jedes Unifikationsproblem effektiv festgestellt werden kann, ob das Unifikationsproblem lösbar ist (dh. mindestens einen E–Unifikator hat) oder nicht.

Ähnlich zum Wortproblem für E ist diese Frage im allgemeinen unentscheidbar.
Für eine bestimmte Menge E von Identitäten, kann sie im Einzelfall entscheidbar sein.

Verfahren, mit denen (für eine bestimmte Menge E von Identitäten) effektiv festgestellt werden kann, ob ein beliebiges Unifikationsproblem mindestens einen E–Unifikator hat, heißen *Entscheidungsverfahren* für die E–Unifikation.

Ist die E–Unifikation entscheidbar, so interessiert man sich für *Unifikationsalgorithmen*, mit denen man E–Unifikatoren effektiv bestimmen kann.

Da die Menge $U_E(\Gamma)$ aller E–Unifikatoren eines Unifikationsproblems (mit mindestens einem E–Unifikator) im allgemeinen unendlich ist, interessiert man sich für eine Teilmenge von $U_E(\Gamma)$, aus der die weiteren E–Unifikatoren abgeleitet werden können.

Um diese Menge zu beschreiben, führen wir zunächst die Relationen *E–Instanz* und *E–allgemeiner* auf Substitutionen ein.

Definition 1.42 (E–Instanz, E–allgemeiner)
Seien X eine Variablenmenge, Y eine Teilmenge von X und σ_1, σ_2 Substitutionen aus SUB_X.

σ_2 heißt *E–Instanz* von σ_1 auf Y, wenn es eine Substitution τ gibt, mit $\sigma_2(y) = \tau(\sigma_1(y))$, für alle $y \in Y$.

σ_1 heißt *E–allgemeiner* als σ_2 auf Y, wenn σ_2 eine E–Instanz von σ_1 auf Y ist.

Ähnlich zur allgemeiner–Relation definiert die E–allgemeiner Relation eine Quasi–Ordnung $\leq_E^Y$ auf der Menge aller Substitutionen SUB_X.

Da die Menge $U_E(\Gamma)$ nach Definition der E–Instanz abgeschlossen bezüglich der E–Instanzierung ist, genügt es, für $U_E(\Gamma)$ eine *vollständige Menge* von E–Unifikatoren zu bestimmen.

Definition 1.43 (vollständige Menge)
Es sei E eine endliche Menge von Identitäten, Γ eine Unifikationsproblem und bezeichne Y die Menge aller Variablen, die in Γ vorkommen.

Eine Menge $cU_E(\Gamma)$ heißt *vollständige Menge* von E–Unifikatoren für Γ, wenn

- $cU_E(\Gamma) \subseteq U_E(\Gamma)$ und
- $\forall\, \theta \in U_E(\Gamma),\ \exists\, \sigma \in cU_E(\Gamma)\ :\ \sigma \leq_E^Y \theta.$

Eine vollständige Menge $mU_E(\Gamma)$, die zusätzlich die Bedingung :

- $\forall\, \sigma, \theta \in mU_E(\Gamma) : \quad \sigma \leq_E^Y \theta \quad \Longrightarrow \sigma = \theta$

heißt *minimale vollständige Menge* von E–Unifikatoren für Γ.

Eine minimale vollständige Menge existiert nicht immer, dh. für jede Gleichungstheorie und jedes Unifikationsproblem. Wenn sie aber existiert, dann ist sie bis auf $\equiv$–Äquivalenz eindeutig bestimmt [Fage und Huet, 1986], wobei $\equiv$ die Äquivalenzrelation auf Substitutionen definiert ist, die definiert wird durch : $\sigma \equiv \theta \quad$ g.d.w. $\quad \sigma \leq_E \theta$ und $\theta \leq_E \sigma$.

Damit kann der *Typ* einer E–Unifikation definiert werden [Siekmann, 1978]

Definition 1.44 (der Typ einer E–Unifikation)
Eine E–Unifikation heißt

- *unitär*, wenn es für jedes Unifikationsproblem Γ eine Menge $mU_E(\Gamma)$ mit einer Kardinalität $k \leq 0$ gibt,
- *finitär*, wenn es für jedes Unifikationsproblem Γ eine Menge $mU_E(\Gamma)$ mit einer endlichen Kardinalität k gibt,
- *infinitär*, wenn es zu jedem Unifikationsproblem eine Menge $mU_E(\Gamma)$ gibt, wobei $mU_E(\Gamma)$ für mindestens ein Unifikationsproblem Γ unendlich ist.
- *vom Typ 0*, wenn es zu einem Unifikationsproblem Γ keine minimale vollständige Menge von E–Unifikatoren gibt.

Wir sind bisher davon ausgegangen, daß die Unifikationsprobleme ausschließlich über der Signatur von E gebildet sind.

In den Anwendungsgebieten der Unifikationstheorie kommen auch Unifikationsprobleme vor, in denen weitere Funktionssymbole auftreten. Dies ist z.B. der Fall, wenn ein atomatischer Beweiser neue Funktionssymbole bei der Skolemesierung einer Formel einführt.

Daher braucht man Entscheidungsverfahren und Unifikationsalgorithmen, die Unifikationsprobleme behandeln können, in denen weitere Funktionssymbole vorkommen können.

Definition 1.45 (elementare Unifikation, allgemeine Unifikation)
Es sei E eine endliche Menge von Identitäten.

- Ein *elementares Unifikationsproblem* ist ein Unifikationsproblem über der Signatur von E.

- Ein *Unifikationsproblem mit Konstanten* ist ein Unifikationsproblem über einer Erweiterung der Signatur von E um weitere Konstantensymbole.

- Ein *allgemeines Unifikationsproblem* ist ein beliebiges Unifikationsproblem über Σ, die die Signatur von E enthält.

- Die elementare E–Unifikation, E–Unifikation mit Konstanten und allgemeine E–Unifikation werden als das Lösen der entsprechenden Unifikationsprobleme definiert.

Bemerkung 1.46

E–Unifikatoren sind nach Definition auch für beliebige Unifikationsprobleme definiert. Alle bereits eingeführten Begriffe für die elementare E–Unifikation können daher auf die allgemeine E–Unifikation übertragen werden.

In der obigen Definition wurden die eingeführten Unifikationen über das Lösen von bestimmten Klassen von Unifikationsproblemen definiert.

Die Frage ist, welcche algebraische Interpretation die elementare Unifikation, die Unifikation mit Konstanten und die allgemeine Unifikation haben.

Als Motivation kann die algebraische Interpretation des Wortproblems für E dienen.

Das Wortproblem für E ist äquivalent zu der Frage nach der Gültigkeit von Identitäten in einer beliebigen E–freien Termalgebra (z.B. $\mathcal{T}(\Sigma, X)_{/=_E}$) über einer abzählbar unendlichen Menge X.

Damit ist das Wortproblem für E genau dann entscheidbar, wenn die Gültigkeit von Identitäten in der E–freien Quotiententermalgebra $\mathcal{T}(\Sigma, X)_{/=_E}$ über einer abzählbar unendlichen Menge X entscheidbar ist.

Um diese Interpretation auf die E–Unifikation zu erweitern, führen wir zuerst *die identitätendefinierten positiven Formeln* ein.

Definition 1.47 (identitätendefinierte positive Formeln)
Seien Σ eine Signatur und X eine beliebige Variablenmenge.

- Eine identitätendefinierte Matrix wird induktiv über den syntaktischen Aufbau wie folgt definiert :

1) eine Identität $s = t$ ist eine identitätendefinierte positive Matrix,
2) sind F_1 und F_2 identitätendefinierte positive Matrizen, so sind $(F_1 \wedge F_2)$ und $(F_1 \vee F_2)$ auch identitätendefinierte positive Matrizen,

- Eine identitätendefinierte Formel ist ein Paar (Q, M) bestehend aus :
  1) einer positiven Matrix M und
  2) einer Folge $Q := Q_1 x_1, Q_2 x_2, \ldots, Q_n x_n$, wobei $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ und $x_i \in X$ sind.

  Für eine Identitätendefinierte positive Formel (Q, M), mit $Q := Q_1 x_1, Q_2 x_2, \ldots, Q_n x_n$, schreiben wir : $Q_1 x_1 \; Q_2 x_2 \; \ldots \; Q_n x_n \quad M$.

Jede Identität kann als identitätendefinierte positive Formel angesehen werden, die genau aus dieser Identität und einer $\forall$–quantifizierung der Variablen dieser Identität besteht.

Analog kann jede Gleichung $s \doteq t$ als identitätendefinierte positive Formel angesehen werden, die genau aus der Identität $s = t$ und eine $\exists$–quantifizierung der Variablen dieser Identität besteht.

Die Gültigkeit von Identitäten in einer Algebra wird auf die Gültigkeit von identitätendefinierten positiven Formeln wie üblich übertragen.
Im Folgenden werden werden positive Formeln abkürzend für identitentendefinierte positive Formeln verwendet.

II.7 Algebraische Interpretation der E–Unifikation

Jedem elementaren Unifikationsproblem

$$\Gamma := \{ \; s_1 \doteq t_1, \; s_2 \doteq t_2, \ldots, \; s_n \doteq t_n \; \}$$

kann man die $\exists$–quantifizierte positive Σ–Formel

$$F := \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i=1}^{n} (s_i = t_i)$$

zuordnen, bei der x_1, x_2, ..., x_n (in beliebiger Reihenfolge) für die Variablen von Γ stehen.

Umgekehrt kann jede $\exists$–quantifizierte Σ–Formel F der obigen Form in das elementare Unifikationsproblem Γ transformiert werden.

F ist offensichtlich genau dann gültig in $\mathcal{T}(\Sigma, X)_{/=_E}$, wenn Γ mindestens einen E–Unifiaktor hat.

Die elementare E–Unifiaktion ist somit genau dann entscheidbar, wenn die Gültigkeit von $\exists$–quantifizierten Formeln in der E–freien Quotiententermalgebra $\mathcal{T}(\Sigma, X)_{/=_E}$ über einer abzählbar unendlichen Menge X entscheidbar ist.

Die allgemeine E–Unifikation ist genau dann entscheidbar, wenn die Gültigkeit von Identitätendefinierte positive Formeln in der E–freien Quotiententermalgebra $\mathcal{T}(\Sigma, X)_{/=_E}$ über einer abzählbar unendlichen Menge X entscheidbar ist [BS93].

Bemerkung 1.48

Wenn die Gültigkeit von positiven Formeln in einer Algebra $\mathcal{A}$ entscheidbar ist, sagen wir, daß die positive Theorie von $\mathcal{A}$ entscheidbar ist.

II.8 Motivation für das Kombinationsproblem

Die elementare E–Unifikation, E–Unifikation mit Konstanten und allgemeine E–Unifikation sind im allgemeinen nicht äquivalent bezüglich der Entscheidbarkeit [Bückert, 1986] und dem Typ der Unifikation [Baader, 1989].

Zudem kann die Erweiterung von Unifikationsalgorithmen und Entscheidungsverfahren von der elementaren E–Unifiaktion auf die allgemeine E–Unifikation kompliziert werden (erster Unifikationsalgorithmus für die elementare AC–Unifikation [Siekmann, 1977], erster Algorithmus für die allgemeine AC–Unifikation [Fages, 1984])

Man ist daher an allgemeinen Verfahren interessiert, mit denen man von der elementaren E–Unifikation auf die allgemeine E–Unifikation schließen kann. Dies ist besonders dann nützlich, wenn für die elementare E–Unifiaktion bereits Entscheidungsverfahren und/oder Unifikationsalgorithmen vorhanden sind.

Eine Erweiterung dieses Problems besteht darin, in den allgemeinen Unifikationsproblemen nicht nur *freie*, dh uninterpretierte, sondern auch interpretierte Funktionssymbole zuzulassen. Dies führt zu dem allgemeinen *Kombinationsproblem* der Unifikationstheorie.

Bei dem allgemeinen Kombinationsproblem handelt es sich um folgende Fragestellung :

Wie kann man das Lösen von Unifikationsproblemen modulo der Gleichungstheorie $E := E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$ auf das Lösen von Unifikationsproblemen modulo der einzelnen Gleichungstheorien (über disjunkten Signaturen) E_1, E_2, ..., E_n zurückführen.

Die Lösung des Kombinationsproblems wie in [BS 92] bildet das Thema des nächsten Kapitels.

Kapitel 2

Die Lösung des Kombinationsproblems

1. Definition des Kombinationsproblems

Definition 2.1 (kombinierte Gleichungstheorie)
Seien E_1, E_2, ..., E_n Mengen von Identitäten über disjunkten Signaturen.

Die *kombinierte Gleichungstheorie* von E_1, E_2, ..., E_n ist die durch der Menge $E := E_1 \cup E_2 \cup \ldots E_n$ induzierte Gleichungstheorie.

Bei dem Kombinationsproblem (siehe Motivation am Ende des ersten Kapitels) handelt es sich im allgemeinen um folgendes Problem :

Wie kann man das Lösen von Unifikationsproblemen in der kombinierten Gleichungstheorie auf das Lösen von Unifikationsproblemen in den einzelnen Gleichungstheorien zurückführen ?

Diese Frage ist besonders dann interessant, wenn die Unifikation in den einzelnen Gleichungstheorien entscheidbar (bzw. finitär) ist, dh. wenn es in den einzelnen Gleichungstheorien Entscheidungsverfahren (bzw. Unifikationsalgorithmen) für die entsprechende E_i–Unifikation gibt.

Für solche Gleichungstheorien stellt sich dann die Frage, wie man diese einzelnen Unifikationsalgorithmen (Entscheidungsverfahren) kombinieren kann, um einen Unifikationsalgorithmus (ein Entscheidungsverfahren) für die Unifikation in der kombinierten Gleichungstheorie zu gewinnen.

Definition 2.2 (Kombinationsproblem)

Gegeben : Unifikationsalgorithmen (bzw. Entscheidungsverfahren) für die Unifikation modulo der Gleichungstheorien E_1, E_2, ..., E_n über den disjunkten Signaturen Σ_1, Σ_2, ..., Σ_n.

Gesucht : ein Unifikationsalgorithmus (bzw. Entscheidungsverfahren) für die Unifikation modulo der kombinierten Gleichungstheorie $E := E_1\cup\, E_2\cup \ldots \cup E_n$ über der Signatur $\Sigma := \Sigma_1\cup\, \Sigma_2\cup\, \ldots\, \Sigma_n$.

Bemerkung 2.3

Die Voraussetzung, daß die Signaturen der einzelnen Mengen von Identitäten disjunkt sind, ist wesentlich, um allgemeine Kombinationsverfahren zu ermöglichen.

Die Lösung des Kombinationsproblems wie in [BS92] basiert auf einem *Dekompositionsalgorithmus*, der ein beliebiges Unifikationsproblem über der gemischten Signatur Σ in endlich viele Unifikationsprobleme über den einzelnen Signaturen so transformiert, daß die Lösbarkeit (Lösungen) des ursprünglichen Unifikationsproblems auf die Lösbarkeit (Lösungen) der generierten Unifikationsprobleme zurückgeführt werden kann.

2. Die Lösung des Kombinationsproblems für zwei Gleichungstheorien

Die Lösung des Kombinationsproblems wird, wie in [BS92], zunächst für zwei beliebige Gleichungstheorien über disjunkten Signaturen diskutiert und dann auf beliebig endlich viele Gleichungstheorien (über disjunkten Signaturen) erweitert.

Bevor wir aber die einzelnen Schritte des Kombinationsalgorithmus diskutieren, führen wir zunächst folgende Begriffe ein.

Definition 2.6 (i–Symbol, i–Term, i–reiner Term, Fremdterm)
Seien Σ_1, Σ_2 disjunkte Signaturen, $\Sigma := \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ und X eine beliebige Variablenmenge.

- Ein *i–Symbol* ist ein beliebiges Element aus Σ_i, für $i = 1$ und 2.
- Ein *i–Term* ist ein Term t aus $T(\Sigma, X)$ mit $t = f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, für ein i–Symbol f.
- Ein *reiner i–Term* ist ein Term t aus $T(\Sigma_i, X)$, der keine Variable ist.
- Eine *reine i–Gleichung* ist eine Gleichung $s \doteq t$, wobei s und t reine i–Terme oder Variablen sind.
- Ein *reines Unifikationsproblem* ist eine endliche Menge von reinen i–Gleichungen, für ein festgelegtes $i \in \{ 1, 2 \}$.
- Ein Unterterm s eines 1–Terms t ist ein *Fremdterm* von t, wenn s ein 2–Term ist, dessen echten Oberterme in t alle 1–Terme sind. Entsprechend werden die Fremdterme eines 2–Terms definiert.
  Die Menge aller Fremdterme von t wird mit $FremdTerm(t)$ bezeichnet.
- Eine *Fremdstelle* in einem i–Term t ist eine Stelle w aus $O(t)$ mit einem Fremdterm von t an der Stelle w. Die Menge aller Fremdstellen von t wird mit $FremdStellen(t)$ bezeichnet.

2.1 Die Grundidee des Kombinationsalgorithmus

Mit einem *Dekompositionsalgorithmus* wird ein E–Unifikationsproblem Γ_0 in endlich viele Paare $(\Gamma_k^{(1)}, \Gamma_k^{(2)})$ transformiert, wobei jede Komponente ein sogenanntes *Unifikationsproblem mit linearer Konstantenrestriktion* in der entsprechenden Gleichungstheorie ist, wobei die Gleichungstheorie E_i dem Unifikationsproblem Γ_k^i entspricht.

Definition 2.7 (Unifikationsproblem mit linearer Konstantenrestriktion)
Sei E eine Menge von Identitäten.

1) *Ein Unifikationsproblem mit linearer Konstantenrestriktion* ist ein Paar $(\Gamma, <)$ bestehend aus :
   - einem Unifikationsproblem mit Konstanten Γ und
   - einer *linearen Ordnung* auf der Menge aller in Γ vorkommenden Variablen und Konstanten.
2) Eine Lösung von $(\Gamma, <)$ modulo E ist ein E–Unifikator σ für Γ, der zusätzlich die Bedingung
$$x < c \quad \Longrightarrow \quad c \text{ kommt in } \sigma(x) \text{ nicht vor}$$
erfüllt.

Die Lösbarkeit von elementaren E–Unifikationsproblemen wird dann auf die Lösbarkeit von *Unifikationsproblemen mit linearer Konstantenrestriktion* in den *einzelnen Gleichungstheorien* in dem Sinne zurückgeführt, daß ein elementares E–Unifikationsproblem Γ_0 genau dann lösbar ist, wenn es mindestens ein Ausgabepaar $(\Gamma_k^{(1)}, \Gamma_k^{(2)})$ des Dekompositionsalgorithmus gibt, dessen Komponenten (jeweils in der entsprechenden Gleichungstheorie) lösbar sind.

Das obige Resultat wird dann auf die allgemeine E–Unifikation und die E–Unifikation mit linearer Konstantenrestriktion übertragen.

Die intendierte Semantik der Unifikation mit linearer Konstantenrestriktion ist im Zusammenhang mit dem Dekompositionsalgorithmus zu verstehen.

2.2 Der Dekompositionsalgorithmus

Die Eingabe des Dekompositionsalgorithmus ist ein elementares E–Unifikationsproblem (Γ_0).

Mit den ersten beiden Schritten des Dekompositionsagorithmus wird ein elementares E–Unifikationsproblem Γ_0 in ein äquivalentes E–Unifikationsproblem Γ tranformiert, das nur aus reinen i–Gleichungen besteht, für $i \in \{\ 1,\ 2\ \}$.

Schritt 1 : Bereinigung von Termen (Termabstraktion)

Ist $s \doteq t$ oder $t \doteq s$ eine Gleichung aus Γ_0 und s_1 ein fremder Unterterm von s an einer Stelle $w \in O(s)$, so wird $s \doteq t$ aus Γ_0 entfernt und durch die Gleichungen $x \doteq s_1$ und $s' \doteq t$ ersetzt. Dabei ist x stets eine neue Variable und s' der Term, der aus s entsteht, in dem der fremde Unterterm von s an der Stelle w durch die Variable x abstrahiert (ersetzt) wird, dh. $s' := s[w \leftarrow x]$.

Diese Vorgehensweise wird dann so oft iteriert, bis kein Term in Γ_0 mehr Fremdterme enthält.

Das Ergebnis der Anwendung dieses Schrittes auf Γ_0 ist eine endliche Menge von Gleichungen $s \doteq t$, wobei s, t Variablen oder reine Terme sind.

Schritt 2 : Bereinigung von Gleichungen

Um reine i–Gleichungen zu erzeugen, wird dann jede Gleichung $s \doteq t$, bei der s ein reiner i–Term und t ein reiner j–Term sind und $i \neq j$ ist, durch die Gleichungen $x \doteq s$ und $x \doteq t$ ersetzt, wobei x eine neue Variable ist.

Anschließend wird jede Gleichung $x \doteq y$ zwischen zwei Variablen aus dem transformierten Unifikationsproblem entfernt und jedes Vorkommen einer der beiden Variablen in diesem Unifikationsproblem durch einen festgelegten Repräsentanten, dh. x oder y, ersetzt.

Das Ergebnis der Anwendung dieses Schrittes ist eine endliche Menge Γ von Gleichungen, wobei jede Gleichung entweder eine reine 1–Gleichung oder eine reine 2–Gleichung ist, dh. keine Gleichung zwischen Variablen ist.

Offensichtlich ist das ursprüngliche Unifikationsproblem Γ_0 genau dann Lösbar, wenn das generierte Unifikationsproblem Γ lösbar ist.

Das generierte Unifikationsproblem Γ kann dann *eindeutig* in zwei disjunkten Unifikationsproblemen Γ_1 und Γ_2 zerlegt werden, wobei in Γ_1 genau die 1–Gleichungen und in Γ_2 genau die 2–Gleichungen aus Γ vorkommen.

Jedes dieser Unifikationsprbleme ist dann ein reines E_i–Unifikationsproblem oder genauer, ein elementares E_i–Unifikationsproblem, für ein $i \in \{ 1, \ 2 \}$.

Man kann dann versuchen, zunächst die generierten reinen Unifikationsprobleme in den entsprechenden Theorien zu lösen und dann die einzelnen Lösungen (gegebenfalls) zu einer Gesamtlösung des ursprünglichen Unifikationsproblems zu kombinieren.

Beispiel 2.7

Betrachte folgende Mengen von Identitäten

$$E_1 := \{\ f(x, f(y,z)) = f(f(x,y),z)\ \}$$
$$E_2 := \{\ h(x,y) = g(x)\ \}$$

und das elementare Unifikationsproblem

$$\Gamma_0 := \{\ f(x, h(x,y)) \doteq f(g(y),z)\}$$

über der gemischten Signatur.

Die Bereinigung der Terme liefert die folgende Menge von Gleichungen :

$$\Gamma_0' := \{\ x_1 \doteq h(x,y),\ \ f(x,x_1) \doteq f(x_2,z),\ \ x_2 \doteq g(y)\ \}$$

Da es in Γ_0' keine Gleichungen zwischen 1–Termen und 2–Termen vorkommen, ist Γ_0 bereits in bereinigter Form und $\Gamma = \Gamma_0'$.

Das Unifikationsproblem Γ kann dann in die folgenden reinen Unifikationsproblemen zerlegt werden :

$$\Gamma_1 := \{\ f(x,x_1) \doteq f(x_2,z)\ \}$$
$$\Gamma_2 := \{\ x_1 \doteq h(x,y),\ \ x_2 \doteq g(y)\ \}$$

Offensichtlich sind die Substitutionen σ_i (für $i = 1, 2$) definiert durch

$$\sigma_1 := \{\ x \mapsto x_2,\ \ z \mapsto x_1\ \}$$
$$\sigma_2 := \{\ x_1 \mapsto h(x,y),\ \ x_2 \mapsto g(y)\ \}$$

Lösungen des entsprechenden reinen Unifikationsproblems Γ_i.

Die Lösungen σ_1 und σ_2 können dann zu der Substitution $\sigma := \{\ x \mapsto g(y),\ \ z \mapsto h(x,y)\ \}$ kombiniert werden, die offensichtlich eine Lösung des ursprünglichen Unifikationsproblems Γ_0 ist.

Frage : funktioniert die Vorgehensweise im Beispiel 2.7 allgemein für alle elementaren E–Unifikationsprobleme ?

Im Folgenden werden (die) drei Probleme diskutiert, an denen die einfache Vorgehensweise im Beispiel 2.7 scheitern kann.

Definition 2.8 (i–Variablen, gemeinsame Variablen)
Es sei Γ_0 ein elementares E–Unifikationsproblem und Γ das reine E–Unifikationsproblem, das nach der Anwendung der beiden ersten Schritte des Dekompositionsalgorithmus entstanden ist und bezeichne $Var(\Gamma)$ die Menge aller Variablen, die in Γ vorkommen.

- Eine Variable $x \in Var(\Gamma)$ heißt *i–Variable*, wenn x nur in reinen i–Gleichungen aus Γ vorkommt, für ein $i = 1$ oder 2.
- Eine Variable $y \in Var(\Gamma)$ heißt *gemeinsame* Variable, wenn y mindestens in einer 1–Gleichung und in einer 2–Gleichung aus Γ vorkommt.

Problem 1 : unvereinbare Zuweisungen

Das Problem der unvereinbaren Zuweisungen tritt auf, wenn die Lösungen der erzeugten reinen Unifikationsprobleme der gleichen Variablen verschiedene Terme zuweisen. Solche Lösungen müssen keine Lösung des ursprünglichen Unifikationsproblems liefern.

Offensichtlich kann dieses Problem nur für die *gemeinsamen* Variablen auftreten. Um das Problem zu vermeiden, genügt es daher zu verhindern, daß die gemeinsamen Variablen in beiden Theorien Termen zugewiesen werden können.

Maßnahme 1 : Einführung von Indices für die gemeinsamen Variablen

Durch die Definition einer Indexfunktion *Ind* von der Menge aller im transformierten Unifikationsproblem vorkommenden Variablen in die Menge der Theorienindices { 1, 2 } wird, wie in [BS 92], jeder Variablen ein sogenannter *Theorieindex* zugewiesen.

Variable mit dem Theorieindex 1 werden dann in Γ_1 weiterhin als Variablen, aber in Γ_2 als Konstanten behandelt. Entsprechend werden die gemeinsamen Variablen mit dem Theorieindex 2 als Variablen in Γ_2, aber als Konstanten in Γ_1 behandelt.

Die mögliche Einschränkung der Indexfunktion auf die gemeinsamen Variablen kann als Optimierung des Dekompositionsalgorithmus angesehen werden und wird wie in [BS 92] nicht weiter betrachtet, da man sich zunächst einfach für eine korrekte Lösung des Dekompositionsalgorithmus interessiert.

Für einen Kombinationsalgorithmus brauchen wir daher in den einzelnen Gleichungstheorien Unifikationsalgorithmen, die (mindesten) Unifikationsprobleme mit Konstanten behandeln können.

Bemerkung 2.9

Da die richtige Indexfunktion für die Variablen eines transformierten E–Unifikationsproblems Γ durch die Lösung der reinen Unifikationsprobleme Γ_1 und Γ_2 bestimmt ist, kann sie im allgemeinen nicht im voraus bestimmt werden.

Man muß daher im allgemeinen alle möglichen Zuordnungen der Theorienindices 1 und 2 zu den gemeinsamen Variablen untersuchen.

Problem 2 : Unvollständigkeit der Zuordnung von Indices

Die Zuordnung von Indices zu den Variablen des transformierten Unifikationsproblems kann dazu führen, daß mögliche Lösungen des ursprünglichen Unifikationsproblems nicht mehr gefunden werden können.

Beispiel 2.10

Seien E_1 und E_2 die Mengen von Identitäten aus Beispiel 2.7 und s_1, s_2 Terme über der Signatur von E_1, die gleich modulo E_1 sind. Betrachte das Unifikationsproblem :

$$\Gamma_0 := \{\ h(x, s_1) \doteq h(x, s_2)\ \}$$

über der gemischten Signatur. Dann ist Γ_0 offensichtlich lösbar.

Im ersten Schritt führt der Dekompositionsalgorithmus verschiedene Variablen x_1 und x_2 für die Terme s_1 und s_2 ein. Es entstehen somit die reinen Unifikationsprobleme :

$$\Gamma_1 = \{\ x_1 \doteq s_1,\ x_2 \doteq s_2\ \} \quad \text{und} \quad \Gamma_2 = \{\ h(x, x_1) \doteq h(x, x_2)\ \}$$

Damit eine Lösung für Γ_1 gefunden werden kann, müssen x_1 und x_2 als Variablen in Γ_1 interpretiert werden, dh. es muß für die Indexzuordnung $Ind(x_1) = Ind(x_2) = 1$ gelten. Mit $Ind(x_1) = Ind(x_2) = 1$ werden aber x_1 und x_2 in Γ_2 als Konstanten behandelt und Γ_2 hat somit keine Lösung.

Maßnahme 2 : Variablenidentifikation

Das Problem aus Beispiel 2.10 kann gelöst werden, in dem man *vor* der Zuordnung von Indices die Variablen x_1 und x_2 identifiziert.

Bemerkung 2.11

Beschränkt man sich bei der Einführung von Indices auf die gemeinsamen Variablen, so kann das Problem aus Beispiel 2.10 für die nicht–gemeinsamen Variablen offensichtlich nicht auftreten. Man kann sich daher auch bei der Variablenidentifikation auf die gemeinsamen Variablen beschränken.

Problem 3 : Das Problem der zyklischen Zuweisungen

Das Problem der zyklischen Zuweisungen tritt auf, wenn die reinen Unifikationsprobleme Γ_1 und Γ_2, die durch Aufspalten des transformierten Unifikationsproblems Γ entstehen, lösbar sind und die Kombination dieser Lösungen zu einer zyklischen Abhängigkeit zwischen den Variablen führt.

Maßnahme 3 : Unifikation mit linearer Konstantenrestriktion

Um die zyklischen Zuweisungen zu verhindern, wird jeder Variablen y die Menge V_y der Variablen zugeordnet, in deren Substitutionsteil *y nicht vorkommen darf*, dh. mit $y \notin Var(\sigma(x))$ für alle $x \in V_y$ und alle Lösungen σ des reinen Unifikationsproblems in dem x als Variable vorkommt.

Dazu wird wie in [BS92] für jedes transformierte Unifikationsproblem, das nach der Variablenidentifiaktion aus Γ entstanden ist, eine lineare Ordnung $<$ auf der Menge aller in ihm vorkommenden Variablen definiert, mit der intendierten Semantik :

$$x < y \text{ und } \sigma \text{ ist eine Lösung für } \Gamma \quad \Longrightarrow \quad y \text{ kommt in } \sigma(x) \text{ nicht vor}$$

Diese lineare Ordnung ordnet implizit jeder Variablen y die Variablenmenge V_y zu, mit $V_y = \{\ x \quad : \quad x < y\ \}$.

Bemerkung 2.12

Ähnlich wie bei der Variablenidentifikation kann man sich hier auf die gemeinsamen Variablen beschränken.

Der Dekompositionsalgorithmus wird daher, wie in [BS 92], insgesamt um die folgenden *nicht–deterministischen* Schritte erweitert.

Schritt 3 (Variablenidentifikation)

Betrachte jede mögliche Partition auf der Menge aller Variablen in Γ und erzeuge jeweils ein Unifikationsproblem $\Gamma_{3,k}$. Dabei entsteht $\Gamma_{3,k}$ aus dem Unifikationsproblem Γ, das nach der Anwendung des zweiten Schrittes des Dekompositionsverfahren entstanden ist, in dem man jede gemeinsame Variable durch einen festgelegten Repräsentanten für ihre Äquivalenzklasse in der betrachteten Partition ersetzt.

Schritt 4 : (Indexfunktion)

Erzeuge zu jedem durch Variablenidentifikation aus Γ entstandene Unifikationsproblem $\Gamma_{3,k}$ und jeder Abbildung Ind von der Menge aller Variablen aus $\Gamma_{3,k}$ in die Menge der Theorienindices ein Paar $(\Gamma_{3,k}, Ind)$.

Schritt 5 : (lineare Ordnung)

Erzeuge für jedes Paar $(\Gamma_{3,k}, Ind)$, das nach dem vierten Schritt des Dekompositionsalgorithmus entstanden ist und jede lineare Ordnung $<$ auf der Menge aller Variablen aus $\Gamma_{3,k}$ ein Tupel $(\Gamma_{3,k}, Ind, <)$.

Schritt 6 : (Aufspalten der erzeugten Tupeln)

Spalte jedes nach dem fünften Schritt erzeugte Tupel $(\Gamma_{3,k}, Ind, <)$ in zwei Tupeln

$$(\Gamma^{(1)}_{3,k}, Ind, <) \quad , \quad (\Gamma^{(2)}_{3,k}, Ind, <)$$

auf, so daß $\Gamma^{(1)}_{3,k}$ genau die 1–Gleichungen und $\Gamma^{(2)}_{3,k}$ genau die 2–Gleichungen aus $\Gamma_{3,k}$ enthält.

Das Ergebnis der Anwendung des Dekompositionsalgorithmus auf ein E–Unifikationsproblem ist somit eine endliche Menge von Paaren, deren Komponenten jeweils ein Unifikationsproblem mit linearer Konstantenrestriktion in der entsprechenden Gleichungstheorie ist, wobei die Komponente i eines Paares der Gleichungstheorie E_i entspricht.

Die *Korrektheit* und *Vollständigkeit* des Dekompositionsalgorithmus für *die Kombination von Entscheidungsverfahren* bedeutet, daß ein *elementares* E–Unifikationsproblem genau dann lösbar ist, wenn das Dekompositionsalgorithmus mindestens ein Ausgabepaar erzeugt, dessen Komponenten jeweils in der entsprechenden Gleichungstheorie lösbar sind.

Für *die Kombination von Unifikationsalgorithmen*, die in den einzelnen Gleichungstheorien eine vollständige Menge von Unifikatoren berechnen können, bedeutet die Korrektheit des Dekompositionsalgorithmus, daß man eine Vollständige Menge von Unifikatoren für das urprüngliche Unifikationsproblem berechnen kann, wenn man vollständige Mengen von Unifikatoren für die generierten reinen Unifikationsprobleme berechnen kann.

Der Nachweis der Korrektheit und Vollständigkeit des Dekompositionsalgorithmus garantiert, daß das Dekompositionsalgorithmus eine Lösung des Kombinationsproblems für *zwei* beliebige Gleichungstheorien über disjunkten Signaturen ist.

Im Folgenden werden wir uns auf die Korrektheit des Dekompositionsalgoriothmus für die Kombination von Entscheidungsverfahren beschränken. Der Dekompositionsalgorithmus kann aber auch verwendet werden, um Unifikationsalgorithmen zu kombinieren, die eine vollständige Menge von Unifikatoren berechnen (siehe [BS 92]).

Setzt man die Korrektheit des Dekompositionsalgorithmus voraus, so ergeben sich daraus eine Reihe wichtiger Folgerungen.

Aussage 1

Die allgemeine E–Unifikation in einer Gleichungstheorie E ist entscheidbar, wenn die Unifikation mit linearer Konstantenrestriktion in E entscheidbar ist.

Begründung

Zu jedem allgemeinen E–Unifikationsproblem Γ kann man die *freie Theorie* bilden.

Definition (freie Theorie)

Es sei E eine Menge von Identitäten und Γ ein allgemeines E–Unifikationsproblem.

- Ein *freies* Symbol aus Γ ist ein Funktionssymbol, das in Γ, aber nicht in der Signatur von E vorkommt. Die Menge aller freien Symbole aus Γ wird mit Σ_Γ bezeichnet.
- Die *freie Theorie* für Γ ist die Gleichungstheorie, die durch die Menge

$$\{\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad : \quad f \in \Sigma_\Gamma\ \}$$

  induzierte wird, wobei x_1, x_2, …, x_n Variablen sind.
  Die freie Theorie von Σ wird mit F_Σ bezeichnet.

Jedes *allgemeine* E–Unifikationsproblem Γ ist somit stets ein *elementares* $(E \cup F_\Gamma)$–Unifikationsproblem, dessen Lösbarkeit mit dem Dekompositionsalgorithmus auf die Lösbarkeit von endlich vielen Unifikationsproblemen mit linearer Konstantenrestriktion in den Gleichungstheorien E und F_Γ zurückgeführt werden kann.

Die Unifikation modulo einer freien Theorie stimmt offensichtlich mit der syntaktischen Unifikation überein. Zudem kann man leicht zeigen, daß die syntaktische Unifikation mit linearer Konstantenrestriktion entscheidbar ist.

Damit ist die Lösbarkeit von allgemeinen E–Unifikationsproblemen entscheidbar, wenn die E–Unifikation mit linearer Konstantenrestriktion entscheidbar ist.

Aussage 2

Die Unifikation mit linearer Konstantenrestriktion in der kombinierten Gleichungstheorie ist entscheidbar, wenn die Unifikation mit linearer Konstantenrestriktion in den einzelnen Gleichungstheorien E_1 und E_2 entscheidbar ist.

Begründung

1. Nach [BS 93] ist die allgemeine E–Unifikation genau dann entscheidbar, wenn die E–Unifikation mit linearer Konstantenrestriktion entscheidbar ist.

2. Nach [Sc 89] ist die allgemeine E–Unifikation in der kombinierten Gleichungstheorie entscheidbar, wenn die allgemeine Unifikation in den einzelnen Gleichungstheorien entscheidbar ist.

Aussage 3

Die allgemeine E–Unifikation in der kombinierten Gleichungstheorie von E_1, E_2, ..., E_n ist entscheidbar, wenn die Unifikation mit Konstanterrestriktion in E_1, E_2, ..., E_n entscheidbar ist.

Nach der Aussage 2 ist die Unifikation mit linearer Konstantenrestriktion in der kombinierten Gleichungstheorie entscheidbar. Damit kann das Hauptergebnis, nämmlich, daß die elementare Unifikation in der kombinierten Gleichungstheorie entscheidbar ist, wenn die Unifikation mit linearer Konstantrestriktion in den einzelnen Gleichungstheorien entscheidbar sind, iterativ mit Hilfe der Aussage 2 von $n = 2$ auf beliebiges $n > 2$ übertragen werden.
Damit ist nach der Aussage 2 auch die E–Unifikation mit linearer Konstantenrestriktion entscheidbar. Nach der Begründung 1. zur zweiten Aussage ist somit auch die allgemeine E–Unifikation entscheidbar.

Da die allgemeine E–Unifikation genau dann entscheidbar ist, wenn die Gültigkeit von positiven Formeln in einer E–freien Algebra über einer abzählbar unendlichen Menge entscheidbar ist (siehe Kapitel 1), gilt nach den obigen Aussagen :
Aussage 4

Die positive Theorie einer E–freien Algebra über einer abzählbar unendlichen Menge X ist genau dann entscheidbar, wenn die positiven Theorien der E_i–freien Algebren über der Menge X entscheidbar sind.

Die letzte Aussage kann wie folgt in Zusammenhang mit dem Dekompositionsalgorithmus gebracht werden :

Um die Korrektheit des Dekompositionsalgorithmus für die Kombination von Entscheidungsverfahren für Unifikationsprobleme mit linearer Konstantenrestriktion in den einzelnen Gleichungstheorien E_1 und E_2 zu einem Entscheidungsverfahren für die elementare Unifikation in der kombinierten Gleichungstheorie E zu zeigen, genügt es beliebige E_i–freie Algebren $\mathcal{A}_i$, für $i = 1, 2$, über einer abzählbar unendlichen Menge X zu einer $(E_1 \cup E_2)$–freien Algebra $\mathcal{A}_1 \odot \mathcal{A}_2$ so zu kombinieren, daß die Gültigkeit von $\exists$–quantifizierten positiven Formeln in der kombinierten Algebra $\mathcal{A}_1 \odot \mathcal{A}_2$ auf die Gültigkeit von positiven Formeln in den Algebren $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ mit dem Dekompositionsalgorithmus zurückgeführt werden kann.

Man beachte dabei, daß die elementare E–Unifikation genau dann entscheidbar ist, wenn die Gültigkeit von $\exists$–quantifizierten Formeln entscheidbar ist (siehe Kapitel 1) und, daß man den Dekompositionsalgorithmus nur leicht zu modifizieren braucht, um eine beliebige $\exists$–quantifizierte positive Formel über der gemischten Signatur in eine endliche Menge von Paaren zu transformieren, deren Komponenten positive Formeln über den einzelnen Signaturen sind (siehe [BS 94]).

Es bestehen somit zwei Möglichkeit, die Korrektheit des Dekompositionsalgorithmus zu zeigen :

1. man zeigt, daß der Dekompositionsalgorithmus genau dann ein lösbares Paar von Unifikationsproblemen mit Konstantenrestriktion für ein elementares E–Unifikationsproblem Γ erzeugt, wenn Γ lösbar ist.

   Dieser Ansatz wird in dem nächsten Kapitel beschrieben. Er verwendet Verfahren aus der Termersetzung und wird daher im Folgenden mit dem *syntaktischen Ansatz* bezeichnet.

2. Man kombiniert beliebige freie Algebren $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ für die Varietäten $\mathcal{V}(E_1)$ und $\mathcal{V}(E_2)$ über einer abzählbar unendlichen Menge X zu einer freien Algebra $\mathcal{A}_1 \odot \mathcal{A}_2$ für die Varietät $\mathcal{V}(E_1 \cup E_2)$ über X und zeigt dann, daß der angepaßte Dekompositionsalgorithmus für eine beliebige $\exists$–quantifizierte positive Formel F genau dann ein Ausgabepaar (F_1, F_2) generiert, dessen Komponenten F_i *gültige* positive Formeln in $\mathcal{A}_i$ sind, wenn die Formel F in $\mathcal{A}_1 \odot \mathcal{A}_2$ *gültig* ist.

   Dieser Ansatz wird mit dem *algebraischen Ansatz* bezeichnet und im vierten Kapitel beschrieben.

Kapitel 3

Der Syntaktische Ansatz

In diesem Kapitel wird der Korrektheitsbeweis zu dem Dekompositionsalgorithmus vorgestellt, der einen syntaktischen Ansatz verwendet.

Lemma 3.1

Ein elementares E–Unifikationsproblem Γ_0 ist genau dann lösbar, wenn der Dekompositionsalgorithmus mindestens ein Ausgabepaar (Γ_1, Γ_2) für Γ_0 erzeugt, dessen Komponenten Γ_i jeweils in in der entsprechenden Gleichungstheorie E_i lösbar sind.

Folgerung 3.2

Die elementare Unifikation in der kombinierten Gleichungstheorie $E := E_1 \cup E_2$ ist genau dann entscheidbar, wenn die Unifikation mit linearer Konstantenrestriktion in den einzelnen Gleichungstheorien E_1 und E_2 entscheidbar sind.

Zuerst wird wie in [BS 92] die *kombinierte Lösung* für ein lösbares Ausgabepaar des Dekompositionsalgorithmus definiert.

Definition 3.3 (die kombinierte Lösung)

Es seien E_1 und E_2 Mengen von Identitäten über disjunkten Signaturen, $E := E_1 \cup E_2$, Γ ein elementares E–Unifikationsproblem und (Γ_1, Γ_2) ein Ausgabepaar des Dekompositionsalgorithmus für Γ, dessen Komponenten lösbar sind.
Ferner bezeichne σ_1 einen E_1–Unifikator für Γ_1 und σ_2 einen E_2–Unifikator für Γ_2.

Wir nehmen für die Unifikatoren σ_1 und σ_2 o.E. an, daß der Unifikator σ_i, für $i = 1$ und 2, den i–Variablen Terme zuweist, die entweder gemeinsame Variablen mit einem Index $j \neq i$ oder neue Variablen sind, die in keinem der Unifikationsprobleme Γ_1 oder Γ_2 vorkommen. Diese Voraussetzung kann stets durch Umbenennung der Variablen in σ_1 und σ_2 erfüllt werden.

Die *kombinierte* Lösung von σ_1 und σ_2 ist eine Substitution σ, die induktiv über der linearen Ordnung des Tupels (Γ_1, Γ_2) wie folgt definiert ist :

Sei V die Menge aller Variablen, die nach dem Variablenidentifikationsschritt des Dekompositionsalgorithmus bei Eingabe von Γ entstanden sind und sei $<$ die lineare Ordnung des Tupels (Γ_1, Γ_2). Dann ist $<$ eine lineare, dh. totale, Ordnung auf V.

- Sei x die kleinste Variable aus V bezüglich der linearen Ordnung $<$, dh. mit $x < y$ für alle $y \in V$ und sei $Ind(x) = i$, wobei $i \in \{ 1, 2\}$ und Ind die Indexfunktion des Tupels (Ausgabepaar) (Γ_1, Γ_2) ist.
  Da x kleiner als alle Variablen und Konstanten ist und σ_i die durch der linearen Ordnung $<$ induzierten Restriktionen erfüllt, kommt in $\sigma_i(x)$ keine Variable mit einem Index $j \neq i$ vor.
  Die kombinierte Lösung wird dann für x durch : $\sigma(x) := \sigma_i(x)$ definiert.

- Sei nun x eine beliebige Variable aus V und sei $i := Ind(x)$.
  Da σ_i die lineare Konstantenrestriktion erfüllt, können in $\sigma_i(x)$ nur Elemente y aus V mit $y < x$ vorkommen. Nach Konstruktion von σ (Induktion entlang der linearen Ordnung) ist σ für alle diese Variablen bereits definiert.
  Da nach Voraussetzung alle Variablen, die in $\sigma_i(x)$ vorkommen, einen Index $j \neq i$ oder neue Variablen sind, kann die kombinierte Lösung für x durch : $\sigma(x) := \sigma(\sigma_i(x))$ sinnvoll definiert werden, dh. $\sigma(x)$ entsteht aus $\sigma_i(x)$, indem man in $\sigma_i(x)$ jede Variable y durch $\sigma(y)$ ersetzt.

- Für jede Variable x aus dem ursprünglichen Unifikationsproblem Γ, die im Variablenidentifikationsschritt durch eine Variable y ersetzt wurde, wird σ durch : $\sigma(x) := \sigma(y)$ definiert (man beachte, daß V nach Definition alle Variablen enthält, die nach dem Variablenidentifikationsschritt noch vorhanden sind).

- Für die neuen Variablen z, die weder in Γ noch in dem Ausgabepaar (Γ_1, Γ_2) vorkommen, wird σ durch $\sigma(z) := z$ definiert.

3.1 Korrektheit des Dekompositionsalgorithmus

Die Korrektheit des Dekompositionsalgorithmus bedeutet, daß das ursprüngliche Unifikationsproblem Γ tatsächlich lösbar ist, wenn der Dekompositionsalgorithmus ein Ausgabepaar (Γ_1, Γ_2) erzeugt, dessen Komponenten lösbar sind.

Die Behauptung wie in [BS 92] ist es, daß die kombinierte Lösung zu jedem Paar (σ_1, σ_2) von Lösungen eines Ausgabepaares (Γ_1, Γ_2) eine Lösung für Γ ist.

Der Beweis dieser Aussage (siehe [BS 92]) folgt aus der Definition der kombinierten Lösung und daraus, daß ein E_i–Unifikator für eine Termgleichung $s \doteq t$ auch ein E–Unifikator für $s \doteq t$ ist ($E_i \subset E$).

3.2 Vollständigkeit des Dekompositionsalgorithmus

Der Beweis der Vollständigkeit des Dekompositionsalgorithmus verwendet, wie in [BS 92], das Reduktionssystem R, das durch die Anwendung der Vervollständigung ohne Abbruch (unfaling completion) auf $E = E_1 \cup E_2$ entsteht (siehe Kapitel 1) sowie Termfunktionen, die auf den (gemischten) Σ–Termen operieren.

Die Anwendung der Vervollständigung ohne Abbruch auf E mit einer *totalen Reduktionsordnung* $>$ *auf Grundtermen* liefert ein (eventuell unendliches) Reduktionssystem R, das äquivalent zu E und konvergent, dh. terminierend und konfluent, auf *Grundtermen* ist.

Mit der totalen Reduktionsordnung $>$ kann dann jede *Grundinstanz* einer Identität aus R orientiert werden. Damit ist das durch E und $>$ induzierte Reduktionssystem

$$R^{>} := \{\ \theta(g) \to \theta(d) \quad : \quad g = d \text{ aus } R, \ \ \theta \ \text{ eine Grundsubstitution und } \ \theta(g) > \theta(d)\ \}$$

stets konfluent und terminierend.

Insbesondere ist R auf $T(\Sigma, X)$ konfluent und terminierend, wenn man die Variablen aus X als Konstanten betrachtet und die totale Ordnung $>$ auf den Grundtermen aus $T(\Sigma, X)$ zu einer totalen Ordnung auf $T(\Sigma \cup X, \emptyset)$ erweitert, dh. auf alle Terme aus $T(\Sigma, X)$, wobei die Variablen als Konstanten behandelt werden.

Dazu werden die Variablen aus der festgelegten abzählbaren Grundvariablenmenge X als Konstanten behandelt, wenn das Reduktionssystem R auf den gemischten Termen angewendet wird.

Da das Reduktionssystem R somit auf $T(\Sigma \cup X, \emptyset)$ konfluent und terminierend ist, hat jede Grundterm t, dh. in diesem Fall jedes Element t aus $T(\Sigma \cup X, \emptyset)$ genau eine E–äquivalente und R–irreduzible Form $t{\downarrow_R}$. Die Menge aller R–irreduziblen Terme aus $T(\Sigma \cup X, \emptyset)$ wird mit $T{\downarrow_R}$ bezeichnet.

Ist Y eine Variablenmenge geeigneter Kardinalität und $\pi : T{\downarrow_R} \to Y$ eine beliebige Bijektion, so induziert π für jede der einzelnen Gleichungstheorien E_i eine Funktion π_i, die für alle Terme $f \in T(\Sigma \cup Delta, X)$ durch :

$$\pi_i(t) = \begin{cases} \pi(t) & \text{falls } t = x \in X \\ \pi(t{\downarrow_R}) & \text{falls } t \text{ ein } j\text{–Term mit } j \neq i \\ f(\pi_i(t_1), \pi_i(t_2), \ldots, \pi_i(t_n)) & \text{falls } t = f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \text{ und } f \text{ ein } i\text{–Symbol} \end{cases}$$

definiert ist.

Um die Funktionen π_i von den Substitutionen zu unterscheiden, schreibt man oft t^{π_i} statt $\pi_i(t)$.

Die Vollständigkeit für den Dekompositionsalgorithmus bedeutet, daß der Dekompositionsalgorithmus immer dann ein Ausgabepaar (Γ_1, Γ_2) mit lösbaren Komponenten Γ_1 und Γ_2 erzeugt, wenn das ursprüngliche Unifikationsproblem Γ lösbar ist.

Die Beweisidee, wie in [BS 92], besteht darin, bei Vorgabe einer Lösung, dh. eines E–Unifikators für das ursprüngliche Unifikationsproblem Γ, diese Lösung zu verwenden, um eine Variablenidentifikation, eine Indexfunktion und eine linearen Ordnung auf den Variablen des reinen Unifikationsproblems zu bestimmen, das nach dem zweiten Schritt des Dekompositionsalgorithmus entstanden ist, so daß das entsprechende Ausgabepaar des Dekompositionsalgorithmus lösbar ist, dh. man verwendet diese Lösung um die nicht–deterministischen Schritte des Dekompositionsalgorithmus deterministisch zu machen.

Eine Lösung σ des ursprünglichen E–Unifikationsproblems wird, wie in [BS 92] wie folgt, verwendet, um die nicht deterministischen Schritte des Dekompositionsalgorithmus zu steuern.

1. *Variablenidentifikationsschritt*

   Definiere eine Partition auf den Variablen des Unifikationsproblems Γ, das nach dem zweiten Schritt des Dekompositionsalgorithmus entstanden ist, durch :

   Zwei Variablen x und y sind in der selben Klasse g.d.w $\sigma(x) = \sigma(y)$ gilt.

   Wähle dann eine beliebige Variablenidentifikation, die durch diese Partition auf den Variablen induziert wird und wende sie auf Γ an.

2. *Zuordnung von Indices (Theorien) zu Variablen*
   Ordne jeder Variablen x den Index i zu, falls $\sigma(x)$ ein i–Term ist, für $i = 1$ oder 2, und beliebig den Index 1 oder 2, falls $\sigma(x)$ selbst eine Variable ist.

3. *Wahl einer linearen Ordnung auf den Variablen*
   Definiere eine partielle Ordnung $<$ auf der Menge aller Variablen eines Unifikationsproblems, das nach dem Variablenidentifikation entstanden ist, durch :

   $$x < y \qquad \text{g.d.w} \qquad \sigma(x) \text{ ein } \textit{echter} \text{ Unterterm von } \sigma(y) \text{ ist}$$

   und erweitere dann diese partielle Ordnung beliebig zu einer totalen Ordnung auf der Menge dieser Variablen.

Diese Festlegung der nicht–deterministischen Schritte definiert dann genau ein Ausgabepaar (Γ_1, Γ_2) des Dekompositionsalgorithmus .

Definition 3.4 (R–normierte Substitution)
Sei X die Grundvariablenmenge und Y eine beliebige Teilmenge von X.

Eine Substitution σ heißt *R–normiert* auf Y, wenn $\sigma(y) \in T{\downarrow_R}$ ist, für alle $y \in Y$.

Da das Reduktionssystem auf $T(\Sigma \cup X, \emptyset)$ konvergent ist, hat jeder Term aus $T(\Sigma, X)$ genau eine R–Normalform $t{\downarrow_R}$. Damit gibt es zu jeder Substitution σ genau eine R–normierte Substitution $\sigma_{\downarrow_R}$ auf X. Man kann sich daher ohne Einschränkung auf R–normierte E–Unifikatoren beschränken.

Die Behauptung ist, daß für *jeden* R–normierten E–Unifikator für Γ und jeweils *eine geeignete* Termabstraktion $\pi : T{\downarrow_R} \to Y$, die Substitutionen σ^{π_i} definiert, für $i = 1$ und 2, durch :

$$\sigma^{\pi_i}(x) := (\sigma(x))^{\pi_i}$$

Lösungen der entsprechenden Komponenten im Ausgabepaar (Γ_1, Γ_2) des Dekompositionsalgorithmus sind, dh. σ_1 ist eine Lösung für Γ_1 und σ_2 ist eine Lösung für Γ_2.

Definition 3.5 (geeignete Bijektion)
Es sei Γ ein E–Unifikationsproblem, σ ein R–normierte E–Unifiaktor für Γ und bezeichne Γ_3, die transformierte Form von Γ, die nach der Variablenidentifikation entstanden ist, die durch σ definiert wird.

Eine Bijektion $\pi : T{\downarrow_R} \to Y$ heißt *geeignet* für Γ und σ, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt :

1) π ist auf alle Variablen definiert, die in Γ_3 vorkommen, dh. $Var(\Gamma_3) \subseteq Y$ und

2) $\forall\, y \in Var(\Gamma_3) \quad : \quad \pi(t{\downarrow_R}) = y \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma(y) = t{\downarrow_R}$

Damit bildet eine Bijektion π, die zu einem R–normierten E–Unifikator σ für Γ geeignet ist, einen R–irreduziblen Term $t{\downarrow_R} \in T{\downarrow_R}$ auf einer Variable $y \in Var(\Gamma_3)$ genau dann, wenn σ der Variablen y den Term $t{\downarrow_R}$ zuweist.

Eine Einfache Folgerung aus der zweiten Eigenschaft einer geeigneten Bijektion π für ein E–Unifikationsproblem Γ und einen R–normierten E–Unifikator für Γ ist es, daß π die Bedingung $\pi(\sigma(y)) = y$ für alle Variablen y aus Γ_3 erfüllen muß.

Damit es *stets* eine geeignete Bijektion zu jedem R–normierten E–Unifikator für Γ gibt, ist der Variablenidentifikationsschritt *notwendig*.

Denn sei σ ein R–normierte E–Unifiaktor für Γ und π eine geeignete Bijektion für σ und Γ und angenommen es gäbe *noch* zwei *verschiedene* Variablen x und y aus $Var(\Gamma_3)$ mit $\sigma(x) = \sigma(y)$. Dann ist auch $\pi(\sigma(x) = \pi(\sigma(y))$.
Da π nach Voraussetzung für σ und Γ geeignet ist, gilt somit : $\pi(\sigma(x)) = x$ und $\pi(\sigma(y)) = y$. Damit ist auch $x = y$, im Widerspruch zu der Annahme, daß x und y verschieden sind Es kann somit keine zu σ und Γ geeignete Bijektion geben, wenn nach der Variablenidentifikation noch verschiedene Variablen vorkommen, denen σ den gleichen Term zuweist.

Der vollständige Beweis ist in [BS 92] zu finden.

Kapitel 4

Der algebraische Ansatz

Der Ausgangspunkt für den algebraischen Ansatz als Beweismethode für die Korrektheit des Dekompositionsalgorithmus war die algebraische Interpretation der Unifikation mit linearer Konstantenrestriktion (siehe Kapitel 2).

Danach ist die E–Unifikation mit linearer Konstantenrestriktion genau dann entscheidbar, wenn die volle positive Theorie einer beliebigen E–freien Algebra über einer abzählbar unendlichen Menge X entscheidbar ist.
Andererseits ist die elementare E–Unifikation genau dann entscheidbar, wenn die Gültigkeit von $\exists$–quantifizierten Formeln in einer E–freien Algebra über einer abzählbar unendlichen Menge entscheidbar ist.

Zum Nachweis der Korrektheit des Dekompositionsalgorithmus mit dem algebraischen Ansatz genügt es daher, beliebige, E_i–freie Σ_i–Algebren $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ über einer abzählbar unendlichen Menge X zu einer $(E_1 \cup E_2)$–freien Algebra $\mathcal{A}_1 \odot \mathcal{A}_2$ zu kombinieren, so daß die Gültigkeit von $\exists$–quantifizierten Formeln über der gemischten Signatur in der kombinierten Algebra $\mathcal{A}_1 \odot \mathcal{A}_2$ *mit dem Dekompositionsalgorithmus* auf die Gültigkeit von positiven Formeln in den Algebren $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ zurückgeführt werden kann.

Die folgende Konstruktion kombiniert beliebige freie Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ über disjunkten Signaturen Σ und Δ zu einer $(\Sigma \cup \Delta)$–Algebra $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$, die frei für die Varietät $\mathcal{V}(E \cup F)$ über der gleichen Menge X ist.

1. Das amalgamierte Produkt freier Algebren

Seien Σ und Δ disjunkte Signaturen, E und F beliebige Mengen von Identitäten, $\mathcal{A}$ eine freie Algebra für die Σ–Varietät $\mathcal{V}(E)$ über einer abzählbar unendlichen Menge X und $\mathcal{B}$ eine freie Algebra für die Δ–Varietät $\mathcal{V}(F)$ über der gleichen Menge X.

Ferner sei X_∞ eine abzählbar unendliche Menge mit $X \subset X_\infty$, so daß $X_\infty \backslash X$ noch abzählbar unendlich ist und sei $\mathcal{A}_\infty$ eine freie Algebra für $\mathcal{V}(E)$ über X_∞, die die Interpretation der Funktionssymbole aus Σ von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{A}_\infty$ erweitert.

Entsprechend seien Y_∞ eine abzählbar unendliche Menge mit $Y \subset Y_\infty$, so daß $Y_\infty \backslash Y$ noch abzählbar unendlich ist und $\mathcal{B}_\infty$ eine freie Algebra für $\mathcal{V}(F)$ über Y_∞, die die Interpretation der Funktionssymbole aus Δ von $\mathcal{B}$ auf $\mathcal{B}_\infty$ erweitert.

Man beachte, daß die Trägermenge einer beliebigen Σ–Algebra $\mathcal{A}$, die durch eine Menge X erzeugt ist, identisch mit der Menge $A := \{\ t_\mathcal{A} \quad : \quad t \in T(\Sigma, X)\ \}$ ist, wobei $t_\mathcal{A}$ die Interpretation von t in $\mathcal{A}$, für alle Σ–Termen t über X, bezeichnet.

Da $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_\infty$ frei für die gleiche Varietät über Mengen mit der gleichen Kardinalität sind, sind sie nach Satz 1.21 (siehe Kapitel 1) Σ–isomorph. Analog sind $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}_\infty$ Δ–isomorph.

Die folgende Konstruktion definiert eine Folge $(\mathcal{A}_n)_{n\in IN}$ von Σ_i–Algebren und eine Folge $(\mathcal{B}_n)_{n\in IN}$ von Δ–Algebren, so daß $A_i \subset A_{i+1}$ und $B_i \subset B_{i+1}$, für alle $i \geq 0$, gilt. Dabei bezeichnen A_i und B_i respektiv die Trägermengen der Algebren $\mathcal{A}_i$ und $\mathcal{B}_i$.

Die neuen Elemente aus $\mathcal{A}_{i+1}$, dh. die Elemente aus $A_{i+1}\backslash(A_i \cup X_{i+1})$, werden dann als Erzeuger in $\mathcal{B}_{i+2}$ interpretiert. Entsprechend werden die neuen Elemente aus $B_{i+1}\backslash(B_i \cup Y_{i+1})$ als Erzeuger in $\mathcal{A}_{i+2}$ interpretiert.

Diese Interpretation der neuen Elemente induziert zwei Folgen von Bijektionen $(g_n)_{n\in IN}$ und $(h_n)_{n\in IN}$. Dabei ist g_n eine Bijektion zwischen A_n und einer Erweiterung von B_{n-1} um eine geeignete Menge von Erzeugern aus Y_∞ und h_n eine Bijektion zwischen B_n und einer Erweiterung von A_{n-1} um eine geeignete Menge von Erzeugern aus X_∞.

Die Bijektionen g_n und h_n werden so definiert, daß die Grenzwerte g_∞ und h_∞ der Folgen $(g_n)_{n\in IN}$ und $(h_n)_{n\in IN}$ $(\Sigma \cup \Delta)$–Isomorphismen zwischen den Grenwerten der Folgen $(\mathcal{A}_n)_{n\in IN}$ und $(\mathcal{A}_n)_{n\in IN}$ definieren, die invers zu einander sind.

Setzt man (ohne Einschränkung) voraus, daß die obige Konstruktion alle Erzeuger aus $X_\infty \cup Y_\infty$ verbraucht, dh. $X_\infty = \cup_{i=0}^\infty X_i$ und $Y_\infty = \cup_{i=0}^\infty Y_i$, so ist auch $A_\infty = \cup_{i=0}^\infty A_i$ und $B_\infty = \cup_{i=0}^\infty B_i$, wobei A_∞ und B_∞ die Grenzwerte der Folgen $(A_n)_{n\in IN}$ und $(B_n)_{n\in IN}$ bezeichnen, dh.

$$h_\infty : B_\infty \to A_\infty \quad , \quad g_\infty : A_\infty \to B_\infty$$

Mit der Bijektion h_∞ wird die Δ–Struktur von $\mathcal{B}_\infty$ auf $\mathcal{A}_\infty$ und entsprechend mit g_∞ die Σ–Struktur von $\mathcal{A}_\infty$ auf $\mathcal{B}_\infty$ übertragen.
Die Algebren $\mathcal{A}_\infty$ und $\mathcal{B}_\infty$ können dann respektiv auch als $(\Sigma \cup \Delta)$–Algebren $\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}$ (mit Trägermenge A_∞) und $\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}$ (mit Trägermenge B_∞) aufgefaßt werden.
Die Bijektionen g_∞ und h_∞ sind $(\Sigma \cup \Delta)$–Isomorphismen zwischen $\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}$ und $\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}$.

Das *amalgamierte Produkt* von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ wird dann als die $(\Sigma \cup \Delta)$–Algebra $\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}$ oder $\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}$ definiert. Da $\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}$ und $\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}$ isomorph sind, ist das amalgamierte Produkt wohldefiniert.

Definition des amalgamierten Produktes

Zuerst werden die Folgen $(\mathcal{A}_n)_{n\in N}$ und $(\mathcal{B}_n)_{n\in N}$ induktiv über n definiert.

- $n = 0$
  Seien $X_0 := X$ und $Y_0 := Y$.

  1. Sei $\mathcal{A}_0 := < X_0 >_\Sigma$, dh. $\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}$.
     Die *neuen* Elemente aus $A_0 \backslash X_0$ werden als Erzeuger aus Y_∞ interpretiert.
     Sei dazu Y_1 eine Teilmenge von Y_∞ mit $Y_0 \cap Y_1 = \emptyset$ und $|B_0 \backslash Y_0| = |X_1|$, so daß $Y_\infty \backslash (Y_1 \cup Y_0)$ noch unendlich ist sowie eine *beliebige* Bijektion $h_0 : Y_0 \cup Y_1 \to A_0$ mit $h_0|_{Y_0} = id_{Y_0}$.
  2. Sei $\mathcal{B}_0 := < Y_0 >_\Delta$, dh. $\mathcal{B}_0 := \mathcal{B}$.
     Analog werden die neuen Elemente aus $B_0 \backslash Y_0$ als Erzeuger aus X_∞ interpretiert. Dazu wird eine Teilmenge X_1 von X_∞, mit $X_0 \cap X_1 = \emptyset$ und $|A_0 \backslash X_0| = |Y_1|$, gewählt, so daß $X_\infty \backslash (X_1 \cup X_0)$ noch unendlich ist sowie eine *beliebige* Bijektion $g_0 : X_0 \cup X_1 \to B_0$ mit $g_0|_{X_0} = id_{X_0}$ festgelegt.

- $n \to n + 1$
  Angenommen $\mathcal{A}_n := < \cup_{i=0}^n X_i >_\Sigma$ und $\mathcal{B}_n := < \cup_{i=0}^n Y_i >_\Sigma$ seien bereits definiert. Ferner nehmen wir an, daß Mengen X_{n+1} und Y_{n+1} gegeben sind, wobei $X_{n+1} \subset X_\infty$, $Y_{n+1} \subset Y_\infty$ sowie $X_\infty \backslash \cup_{i=0}^{n+1} X_i$ und $Y_\infty \backslash \cup_{i=0}^{n+1} Y_i$ abzählbar unendliche Mengen sind. Zusätzlich nehmen wir an, daß alle Mengen X_i und alle Mengen Y_i, für $i = 1, 2, \ldots, n+1$, paarweise verschieden sind und, daß es Bijektionen

  $$h_n : B_{n-1} \cup Y_n \cup Y_{n+1} \to A_n$$

  $$g_n : A_{n-1} \cup X_n \cup X_{n+1} \to B_n$$

  mit den folgenden Eigenschaften (I) und (II), bereits definiert sind.

  $$(I) \begin{cases} g_n(h_n(b)) = b & \forall\, b \in (B_{n-1} \cup Y_n) \\ h_n(g_n(a)) = a & \forall\, a \in (A_{n-1} \cup X_n) \end{cases}$$

  $$(II) \begin{cases} h_n(Y_{n+1}) = A_n \backslash (A_{n-1} \cup X_n) \\ g_n(X_{n+1}) = B_n \backslash (B_{n-1} \cup Y_n) \end{cases}$$

  Wir definieren dann $\mathcal{A}_{n+1} := <\cup_{i=1}^{n+1} X_i>_\Sigma$ und $\mathcal{A}_{n+1} := <\cup_{i=1}^{n+1} Y_i>_\Delta$.
  Zudem wählen wir zwei Erzeugermengen $X_{n+2} \subset X_\infty$ und $Y_{n+2} \subset Y_\infty$ mit folgenden Eigenschaften :

$$(1)\begin{cases} |X_{n+2}| = |B_{n+1}\backslash(B_n \cup Y_{n+1}) \\ |Y_{n+2}| = |A_{n+1}\backslash(A_n \cup X_{n+1}) \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} X_{n+2} \cap \left(\cup_{i=0}^{n+1} X_i\right) = \emptyset \\ Y_{n+2} \cap \left(\cup_{i=0}^{n+1} Y_i\right) = \emptyset \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} X_{n+2} \subset X_\infty \\ Y_{n+2} \subset Y_\infty \end{cases}$$

und der zusätzlischen Eigenschaft, daß die Mengen :

$$X_\infty \backslash \left(\cup_{i=0}^{n+2} X_i\right), \quad Y_\infty \backslash \left(\cup_{i=0}^{n+2} Y_i\right)$$

noch abzählbar unendlich sind.

Wir wählen dann beliebige Bijektionen :

$$\nu_{n+1} : Y_{n+2} \to A_{n+1}\backslash(A_n \cup X_{n+1})$$

$$\xi_{n+1} : X_{n+2} \to B_{n+1}\backslash(B_n \cup Y_{n+1})$$

und definieren dann :

$$h_{n+1} := \nu_{n+1} \cup g_n^{-1} \cup h_n$$

$$g_{n+1} := \xi_{n+1} \cup h_n^{-1} \cup g_n$$

Man beachte dabei, daß die Mengen A_{n+1} und $\mathcal{B}_{n+1}$ als disjunkte Vereinigung in der Form :

$$A_{n+1} = A_{n+1}\backslash(A_n \cup X_{n+1}) \cup A_n\backslash(A_{n-1} \cup X_n) \cup A_{n-1} \cup X_n \cup X_{n+1}$$

$$B_{n+1} = B_{n+1}\backslash(B_n \cup Y_{n+1}) \cup B_n\backslash(B_{n-1} \cup Y_n) \cup B_{n-1} \cup Y_n \cup Y_{n+1}$$

darstellbar sind.

Die Bijektionen h_{n+1} und g_{n+1} können explizit, wie folgt, angegeben werden :

$$h_{n+1}(b) = \begin{cases} \nu_{n+1}(b) & \text{falls } b \in Y_{n+2} \\ h_n(b) & \text{falls } b \in B_{n-1} \cup Y_n \cup Y_{n+1} \\ g_n^{-1}(b) & \text{falls } b \in B_n\backslash(B_{n-1} \cup Y_n) \end{cases}$$

$$g_{n+1}(b) = \begin{cases} \xi_{n+1}(a) & \text{falls } a \in X_{n+2} \\ g_n(a) & \text{falls } a \in A_{n-1} \cup X_n \cup X_{n+1} \\ h_n^{-1}(a) & \text{falls } a \in A_n\backslash(A_{n-1} \cup X_n) \end{cases}$$

Die Abbildungen g_{n+1} und h_{n+1} sind dann nach Definition Bijektionen, die die Bedingungen (I) und (II) erfüllen.

Die Grenzwerte der Folgen $(g_n)_{n\in I\!N}$ und $(h_n)_{n\in I\!N}$ sind somit Bijektionen h_∞ und g_∞ zwischen B_∞ und A_∞, dh.

$$h_\infty := \cup_{i=0}^{\infty} h_i \ : \ B_\infty \rightarrow A_\infty$$

$$g_\infty := \cup_{i=0}^{\infty} g_i \ : \ A_\infty \rightarrow B_\infty$$

Da für alle $b \in B_\infty$ ein n gibt, so daß $b \in B_n$ gilt, gilt nach der Eigenschaft (I) auch $g_n(h_n(b)) = b$. Entsprechendes gilt auch für alle $a \in A_n$.
Damit sind die Bijektionen g_∞ und h_∞ invers zu einander.

Als nc̆hstes werden die Bijektionen h_∞ und g_∞ werden, um die Σ–Struktur von $\mathcal{A}_\infty$ auf $\mathcal{B}_\infty$ und die Δ–Struktur von $\mathcal{B}_\infty$ auf $\mathcal{A}_\infty$ zu übertragen.

Dazu wird jedes Funktionssymbol f aus $\Delta^{(n)}$ auf A_∞ durch :

$$f_{\mathcal{A}_\infty}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = h_\infty(f_{\mathcal{B}_\infty}(g_\infty(a_1), g_\infty(a_2), \ldots, g_\infty(a_n)))$$

für alle a_1, a_2, …, a_n aus A_∞ interpretiert.

Entsprechend wird jedes Funktionssymbol f' der Stelligkeit n aus Σ auf B_∞ durch :

$$f'_{\mathcal{B}_\infty}(b_1, b_2, \ldots, b_n) = g_\infty(f'_{\mathcal{A}_\infty}(h_\infty(b_1), h_\infty(b_2), \ldots, h_\infty(b_n)))$$

für alle b_1, b_2, …, b_n aus B_∞ interpretiert.

Mit dieser Interpretation der Funktionssymbole kann leicht gezeigt werden (siehe Lemma 4.1), daß g_∞ und h_∞ $(\Sigma \cup \Delta)$–Homomorphismen sind.
Da h_∞ und g_∞ somit $(\Sigma \cup \Delta)$–Isomorphismen zwischen den $(\Sigma \cup \Delta)$–Algeben $\mathcal{A}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}$ und $\mathcal{B}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}$ sind, können $\mathcal{A}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}$ und $\mathcal{B}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}$ identifiziert und gemeinsam mit $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ bezeichnet werden.
Die so konstruierte $(\Sigma \cup \Delta)$–Algebra $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ heißt das *amalgamierte Produkt* von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Lemma 4.1

Die Bijektionen $g_\infty : A_\infty \rightarrow B_\infty$ und $h_\infty : B_\infty \rightarrow A_\infty$ sind $(\Sigma \cup \Delta)$–Homomorphismen.

Beweis

Wir zeigen die Aussage des Lemmas nur für g_∞, da der Beweis für h_∞ völlig symmetrisch ist.

Seien dazu $f \in (\Sigma \cup \Delta)$ und $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A_\infty$, wobei n die Stelligkeit von f bezeichnet.

- Fall 1 : $f \in \Delta$.
  Dann gilt nach Interpretation der Funktionssymbole in dem amalgamierten Produkt :

$$g_\infty(f_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = g_\infty \circ h_\infty(f_{\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}(g_\infty(a_1), g_\infty(a_2), \ldots, g_\infty(a_n)))$$

  Da h_∞ und g_∞ zu einander Inverse Bijektionen sind, gilt dann :

$$g_\infty(f_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f_{\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}(g_\infty(a_1), g_\infty(a_2), \ldots, g_\infty(a_n)))$$

- Fall 2 : $f \in \Sigma$.
  Dann gilt nach Interpretation der Funktionssymbole in dem amalgamierten Produkt :

$$f_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = h_\infty(f_{\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}(g_\infty(a_1), g_\infty(a_2), \ldots, g_\infty(a_n))$$

  Damit gilt :

$$g_\infty(f_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f_{\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}(g_\infty(a_1), g_\infty(a_2), \ldots, g_\infty(a_n)$$

Lemma 4.2

Ist $\mathcal{A}$ frei für $\mathcal{V}(E)$ und $\mathcal{B}$ frei für $\mathcal{V}(F)$ über einer abzählbar unendlichen Menge X, so ist $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ frei für $\mathcal{V}(E \cup F)$ über X.

Beweis (siehe [BS 94])

Der Korrektheitsbeweis des modifizierten Dekompositionsalgorithmus, wie in [BS 94], verwendet das amalgamierte Produkt $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ einer beliebigen E–freien Algebra $\mathcal{A}$ und einer beliebigen F–freien Algebra $\mathcal{B}$ (über der gleichen Menge X) sowie reine algebraische Verfahren, um die Entscheidbarkeit von $\exists$–quantifizierten Formeln über der gemischten Signatur auf die Entscheidbarkeit von positiven Formeln (über den einzelnen Signaturen) in den Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zuzückzuführen.

KAPITEL 5

Die Erweiterung des Kombinationsproblems

Neben der Gleichheit modulo einer Gleichungstheorie sind für Terme weitere Relationen von praktischer Bedeutung. Bei Termersetzungssystemen werden zum Beispiel Reduktionsrelationen (siehe Kapitel 1) verwendet, um die Identitäten und kritischen Paare zu orientieren (Knuth–Bendix–Vervollständigung, Vervollständigung ohne Abbruch).

Syntaktisch kann eine beliebige Relationen R auf der Trägermenge $T(\Sigma, X)$ einer Termalgebra $\mathcal{T}(\Sigma, X)$ durch die Hinzunahme eines zusätzlichen Symbols P zu der Signatur Σ beschrieben werden. Ähnlich den Funktionssymbolen wird dann das *Prädikatensymbol* P durch die Relation R interpretiert.

1. Die Erweiterung von Algebren auf Strukturen

Allgemein, führt die Erweiterung einer beliebigen Algebra um Relationen, die zwischen den Objekten der Trägermenge bestehen, zu einer *Struktur*.
Die Signatur Σ einer Σ–Struktur ist somit ein Paar $\Sigma = (\Sigma_F, \Sigma_P)$, bestehend aus zwei *disjunkten* Mengen Σ_F (von Funktionssymbolen) und Σ_P (von Prädikatensymbolen).
Ähnlich den Funktionssymbolen wird jedem Prädikatensymbol die Stelligkeit der (syntaktisch) dargestellten Relation (siehe Kapitel 1) zugeordnet.

Eine Interpretation der Symbole einer Signatur mit Prädikatensymbolen ordnet, wie in Kapital 1, jedem Funktionssymbol der Stelligkeit n eine n–stellige Operation auf der Trägermenge und zusätzlich jedem Prädikatensymbol eine Relation auf der Trägermenge zu.

1.1 Der funktionale Teil einer Struktur

Mit dem *funktionalen Teil* einer Σ–Struktur $\mathcal{A}$ bezeichnen wir umgekehrt die Σ_F–Algebra $\mathcal{A}_F$, die durch die Einschränkung von Σ auf Σ_F und die Einschränkung der Interpretation von Σ auf den Funktionssymbolen aus Σ_F (auf der gleichen Trägermenge) entsteht.

Da jede Σ–Struktur die gleiche Trägermenge wie deren funktionale Teil hat, wird eine Struktur $\mathcal{A}$ durch eine Menge X genau dann erzeugt, wenn der funktionaler Teil von $\mathcal{A}_F$ durch X erzeugt ist.

1.2 Formeln und Gültigkeit von Formeln in einer Struktur

Eine atomare Σ–Formel ist entweder eine Σ–Identität $s = t$ oder eine *atomare prädikatenlogische* Σ–Formel $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, wobei P ein Prädikatensymbol aus Σ der Stelligkeit n ist und t_1, t_2, …, t_n beliebige Σ_F–Terme über einer beliebigen Variablenmenge X sind.

Eine Σ–Matrix wird aus atomaren Σ–Formeln durch Konjunktion, Disjunktion und Negation gebildet und eine beliebige Σ–Formel wird aus einer Σ–Matrix durch die Hinzunahme eines beliebigen Präfixes von quantifizierten Variablen gebildet (siehe die Definition der identitätendefinierten positiven Formeln in Kapitel 1).
Eine positive Formel ist eine Formel, deren Matrix keine Negation enthält.

Entsprechend der Gültigkeit von Identitäten in einer Algebra wird die Gültigkeit von atomaren Prädikatenlogischen Formeln in einer Struktur definiert.
Eine atomare Σ–Formel $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ gilt in einer Σ–Struktur $\mathcal{A}$, wenn für jede Wertzuweisung von der Menge aller Variablen, die in t_1, t_2, … oder t_n vorkommen, in die Trägermenge von $\mathcal{A}$: $P_{\mathcal{A}}(\hat{\alpha}(t_1), \hat{\alpha}(t_2), \ldots, \hat{\alpha}(t_n))$ gilt.

Ähnlich wird die Modell–Eigenschaft von Algebren auf Strukturen erweitert. Danach ist eine Σ–Struktur $\mathcal{A}$ ein Modell für die Identität $s = t$ genau dann, wenn der funktionale Teil von $\mathcal{A}$ ein Modell für $s = t$ ist und $\mathcal{A}$ ein Modell für die atomare prädikatenlogische Σ–Formel $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ genau dann, wenn $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ in $\mathcal{A}$ gilt.
Falls eine Struktur $\mathcal{A}$ ein Modell für eine atomate Formel $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ ist, schreiben wir auch für Strukturen : $\mathcal{A} \models \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

1.3 Struktur– Homomorphismen und Isomorphismen

Ein Σ–Homomorphismus von einer Σ–Struktur $\mathcal{A}$ in einer Σ–Struktur $\mathcal{B}$ ist ein Σ–Homomorphismus h von dem funktionalen Teil von $\mathcal{A}$ in dem funktionalen Teil von $\mathcal{B}$ mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß

$$P(a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad \Longrightarrow \qquad P(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n))$$

für alle $f \in \Sigma_F$, $P \in \Sigma_P$ und alle a_1, a_2, …, $a_n \in A$ gilt.
Ein Σ–Isomorhismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist ein bijektive Σ–Homomorphismus, so daß h^{-1} ein Σ–Homomorphismus ist.

Lemma 5.1

Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Σ–Strukturen, $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein *surjektiver* Σ–Homomorphismus, a_1, a_2, …, $a_n \in A$ und $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ eine beliebige positive Σ–Formel. Dann gilt :

$$\mathcal{A} \models \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{B} \models \varphi(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n))$$

Beweis (siehe z.B. [Mal 73])

1.4 Freie Strukturen

Ähnlich, wie für Algebren, werden *freie Strukturen* definiert. Danach ist eine Σ–Struktur $\mathcal{A}$ frei für eine Klasse $\mathcal{K}$ von Σ–Struktuen über einer Menge X genau dann, wenn :

1) $X \subseteq A$,
2) $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ und
3) für jede Struktur $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$ und jede Abbildung $\varphi : X \to B$ eine Σ–homomorphe Erweiterung $\hat{\varphi} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ gibt.

Eine Σ–*Varietät* $\mathcal{V}$ wird als die Klasse aller Σ–Strukturen definiert, die Modelle für eine vorgegebene Menge von atomaren Σ–Formeln sind. Ähnlich zu den gleichungsdefinierten Varietäten kann man zeigen, daß jede Varietät von Strukturen freie Objekte enthält.

1.5 Abgeschlossenheit der Interpretation von Prädikaten bezüglich Substitutionen in freien Strukturen

Offensichtlich ist der funktionale Teil $\mathcal{A}_F$ einer freien Σ–Struktur $\mathcal{A}$ für eine Varietät $\mathcal{V}$ über einer Menge X eine freie Σ_F–Algebra für die gleichungsdefinierte Varietät $\mathcal{V}(E)$ über der gleichen Menge X, für eine geeignete Teilmenge E aller Identitäten, die in $\mathcal{V}$ gelten.
Damit ist $\mathcal{A}_F$ isomorph zu der E–freien Quotiententermalgebra $\mathcal{T}(\Sigma, X)_{/E}$.
Die Trägermenge von $\mathcal{A}$ kann somit mit den Äquivalenzklassen aus $T(\Sigma, X)_{/E}$ identifiziert werden.
Da $\mathcal{A}$ frei für $\mathcal{V}_1$ über X ist, ist jede Abbildung $\varphi : X \to T(\Sigma, X)_{/E}$ zu einem Σ–Endomorphismus, dh. zu einem Σ–Homomorphismus in $\mathcal{A}$, erweiterbar. Daraus folgt zusammen mit der Definition eines Homomorphismus, daß die Interpretation der Prädikatensymbole in einer freien Struktur *bezüglich Substitutionen abgeschlossen sein muß.*

Umgekehrt ist $\mathcal{A}_F$ eine freie Σ_F–Algebra für eine beliebige gleichungsdefiniete Varietät $\mathcal{V}(E)$ und wird Σ_F um eine endliche Menge von Prädikatensymbolen erweitert, die dann auf der Trägermenge von $\mathcal{A}_F$ interpretiert werden, so wird dadurch eine Σ–Struktur $\mathcal{A}$ definiert.

Ist diese Interpretation der Prädikatensymbole abgeschlossen bezüglich Substitutionen, so folgt aus der Definition von freien Strukturen, daß die so definierte Struktur frei für eine Varietät $\mathcal{V}$ ist.

2. Die Erweiterung des Kombinationsproblems

Als Ausgangspunkt für die Erweiterung des Kombinationsproblems, betrachten wir die Erweiterung von Termgleichungen auf *atomare Constraints*.
Ein atomarer Constraint ist eine positive $\exists$–quantifizierte Formel und ein (beliebiger) Constraint ist eine beliebige positive Formel. Ein Constraintproblem ist dann eine endliche Menge von Constraints.

Ähnlich, wie bei einer Termgleichung, ist man bei der Lösung eines atomaren Σ–Constraints $\exists\, x_1\, \exists\, x_2 \ldots \exists\, x_k\ P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ in einer Σ–Struktur $\mathcal{A}$ mit Trägermenge A an einer Ersetzung der Variablen x_1, x_2, ..., x_n in $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ durch Elemente aus A interessiert, so daß die neu entstandene Formel in der Struktur $\mathcal{A}$ gültig ist.

Damit ist jedes Unifikationsproblem ein spezielles Constraintproblem, in dem nur Termgleichungen vorkommen (siehe Kapitel 1 : algebraische Interpretation der elementaren E–Unifikation).

Hat man Constraint–Entscheidungsverfahren für verschiedene Strukturen und werden die Terme in den Constraintproblemen über der gemischten Signatur gebildet, so stellt sich ähnlich zu den Unifikationsproblemen die Frage, wie man ein Constraintproblem über der gemischten Signatur löst.

Um das erweiterte Kombinationsproblem zu betrachten, muß man zuerst *definieren*, wann eine Formel über der gemischten Signatur gilt.

Dazu wurde zum einen, wie in [BS 94], der algebraische Ansatz (zur Lösung des Kombinationsproblems) von freien Algebren auf freie Strukturen erweitert und zum anderen der syntaktische Ansatz, wie in [KR 94], durch die Definition einer Interpretation der Prädikate über der gemischten Signatur erweitert.

2.1 Die algebraische Erweiterung nach [BS 94]

Man kombiniert, wie bei freien Algebren, die funktionalen Teile der einzelnen Σ– und Δ–Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zu dem amalgamierten Produkt $\mathcal{A}_F \odot \mathcal{B}_F$ und erweitert dann, wie folgt, die Interpretation der Prädikatensymbole aus Σ auf B_∞ und die Interpretation der Prädikatensymbole von Δ auf A_∞ :

Ein Prädikatensymbol P (respektiv Q) aus Δ (respektiv Σ) der Stelligkeit n wird in auf beliebige Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aus A_∞ (respektiv $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B_\infty$) durch :

$$P_{\mathcal{A}_\infty}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \;:\Longleftrightarrow\quad P_{\mathcal{B}_\infty}(g_\infty(a_1), g_\infty(a_2), \ldots, g_\infty(a_n))$$

(respektiv)

$$Q_{\mathcal{B}_\infty}(b_1, b_2, \ldots, b_n) \;:\Longleftrightarrow\quad Q_{\mathcal{A}_\infty}(h_\infty(b_1), h_\infty(b_2), \ldots, h_\infty(b_n))$$

interpreriert.

2.2 Die syntaktische Erweiterung nach [KR 94]

Sind Σ und Δ disjunkte Signaturen und $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ respektiv freie Σ (Δ)–Strukturen über der gleichen Menge X_0 , so ist der funktionale Teil $\mathcal{A}_F$ von $\mathcal{A}$ frei für eine Gleichungsdefinierte Σ_F–Varietät $\mathcal{V}(E)$ und der funktionale Teil $\mathcal{B}_F$ von $\mathcal{B}$ frei für eine Gleichungsdefinierte Δ–Varietät $\mathcal{V}(F)$.
Damit ist $\mathcal{A}_F$ isomorph zu $\mathcal{T}(\Sigma, X)/_E$ und $\mathcal{B}_F$ ist isomorph zu $\mathcal{T}(\Delta, X)/_F$, wobei X eine beliebige Variablenmenge mit der gleichen Kardinalität wie X_0 ist.
Die Kombinierte Struktur von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ wird in [KR 94] als die $(\Sigma \cup \Delta)$–Struktur $\mathcal{C}$ definiert, deren funktionalen Teil mit $\mathcal{T}(\Sigma \cup \Delta, X)/_{E\cup F}$ übereinstimmt.
Die Gültikeit von atomaren Formeln über der gemischten Signatur $(\Sigma \cup \Delta)$ in der kombinierten Struktur $\mathcal{C}$ wird dann in [KR 94] durch :

$$\mathcal{C} \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n) :\Longleftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \models P(\ (t_1{\downarrow_R})^{\pi_1},\ (t_2{\downarrow_R})^{\pi_1}, \ldots, (t_n{\downarrow_R})^{\pi_1}\ ) & \text{falls } P \in \Sigma \\ \mathcal{B} \models P(\ (t_1{\downarrow_R})^{\pi_2},\ (t_2{\downarrow_R})^{\pi_2}, \ldots, (t_n{\downarrow_R})^{\pi_2}\ ) & \text{falls } P \in \Delta \end{cases}$$

definiert, wobei $t_1, t_2, \ldots, t_n$ beliebige Terme aus $T(\Sigma \cup \Delta, X)$ sind, R das Reduktionssystem für $(E \cup F)$ und π_1, π_2 die Termfunktion, wie in [BS 92] (siehe Kapitel 3), bezeichnen.

2.3 Die Frage nach der Äquivalenz beider Erweiterungen

Während die algebraische Erweiterung, wie in [BS 94], eine natürliche Erweiterung des algebraischen Ansatzes zur Formulierung und Lösung des Kombinationsproblems darstellt, ist für die syntaktische Erweiterung, wie in [KR 94], nicht klar, welche algebraische Interpretation sie hat. Insbesondere ist nicht klar, ob die beiden Erweiterungen die gleichen atomaren Formeln über der gemischten Signatur in der entsprechenden Struktur gültig machen.
Im nächsten Kapitel werden wir jedoch zeigen, daß beide Definitionen äquivalent sind. Die Äquivalenz beider Definitionen liefert eine algebraische Interpretation der syntaktischen Definition, wie in [KR 94]. Zu dem kann die Unabhängigkeit dieser Definition von verwendeten Reduktionssystem R und Termfunktionen π_1 und π_2 als direkte Folgerung aus dieser Äquivalenz angesehen werden.

KAPITEL 6

Der Äquivalenzbeweis

1. Voraussetzung

Seien Σ und Δ disjunkte Signaturen , $\mathcal{A}$ eine freie Struktur für eine Σ–Varietät $\mathcal{V}_1$ und $\mathcal{B}$ eine freie Struktur für eine Δ–Varietät $\mathcal{V}_2$ über der gleichen abzählbar unendlichen Menge X_0. Ferner bezeichne $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ das amalgamierte Produkt von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Bemerkung 6.1

Da $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sowie deren amalgamiertes Produkt $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ freie Strukturen sind, ist die Interpretation der Prädikatensymbole in jeder dieser Strukturen abgeschlossen bezüglich Substitutionen (siehe Kapitel 5).
Die Voraussetzung dieses Kapitels impliziert somit die Abgeschlossenheit der Interpretation der Prädikatensymbole aus Σ und Δ bezüglich Substitutionen in jeder der freien Strukturen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$.

2. Die Beweisidee

Seien $\mathcal{A}_F$ und $\mathcal{B}_F$ respektiv die funktionalen Teile (siehe Kapitel 5) der Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Dann sind $\mathcal{A}_F$ und $\mathcal{B}_F$ freie Algebren für die *gleichungsdefinierten Varietäten* $\mathcal{V}(E)$ und $\mathcal{V}(F)$ über X_0, wobei E eine geeignete Menge von gültigen Identitäten in $\mathcal{A}$ und F eine geeignete Menge von gültigen Identitäten in $\mathcal{B}$ bezeichnen.
Die freien Algebren $\mathcal{A}_F$ und $\mathcal{B}_F$ sind damit zu dem amalgamierten Produkt $\mathcal{A}_F \odot \mathcal{B}_F$ kombinierbar, das nach Satz 4.2 frei für die Varietät $\mathcal{V}(E \cup F)$ über X_0 ist. Damit ist $\mathcal{A}_F \odot \mathcal{B}_F$ isomorph zu der Quotiententermalgebra $\mathcal{T}(\Sigma \cup \Delta, X_0)/_{E \cup F}$.

Somit gibt es einen $(\Sigma \cup \Delta)$–Isomorphismus $\Phi_\Sigma : \mathcal{T}(\Sigma \cup \Delta, X_0)/_{E\cup F} \to \mathcal{A}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}$ und entsprechend einen $(\Sigma \cup \Delta)$–Isomorphismus $\Phi_\Delta : \mathcal{T}(\Sigma \cup \Delta, X_0)/_{E\cup F} \to \mathcal{B}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}$ dh. Bijektionen $\Phi_\Sigma : T(\Sigma \cup \Delta, X_0)/_{E\cup F} \to A_\infty$ und $\Phi_\Delta : T(\Sigma \cup \Delta, X_0)/_{E\cup F} \to B_\infty$, so daß $s =_{E\cup F} t$ genau dann gilt, wenn $\mathcal{A}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)} \models \Phi_\Sigma(s) = \Phi_\Sigma(t)$ oder, äquivalent dazu, $\mathcal{B}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)} \models \Phi_\Delta(s) = \Phi_\Delta(t)$ gilt.

Da das amalgamierte Produkt $\mathcal{A}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}$ als Σ–Struktur durch X_∞ erzeugt ist und der funktionale Teil von $\mathcal{A}_\infty$ isomorph zu $\mathcal{T}(\Sigma, X_\infty)/_E$ ist, ist $A_\infty = \{ \; t_{\mathcal{A}_\infty} \;\; : \;\; t \in T(\Sigma, X_\infty) \; \}$ und für alle Terme $s,\, t \in T(\Sigma, X_\infty)$ gilt $t_{\mathcal{A}_\infty} = s_{\mathcal{A}_\infty}$ genau dann, wenn $[t]_E = [s]_E$ gilt. Wir können daher die Trägermenge A_∞ von $\mathcal{A}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}$ mit $T(\Sigma, X_\infty)/_E$ (und entsprechend die Trägermenge B_∞ von $\mathcal{B}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}$ mit $T(\Delta, Y_\infty)/_F$) identifizieren.

Für jeden Term t aus $T(\Sigma\cup\Delta, X_0)$, jede Abbildung $\alpha : X_0 \to A_\infty$ und $\hat{t} := \hat{\alpha}(t)$, ist $\hat{t}$ ein $(\Sigma\cup\Delta)$–Term über einer endlichen Teilmenge von A_∞, wobei $\hat{\alpha}$ die $(\Sigma\cup\Delta)$–Homomorphe Erweiterung von α auf $T(\Sigma\cup\Delta, X_0)$ bezeichnet.
Die Interpretation $\hat{t}_{\mathcal{A}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}}$ von $\hat{t}$ in $\mathcal{A}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}$ ist nach Definition des amalgamierten Produktes ein Element $a \in A_\infty$, dh. nach obiger Identifikation eine E–Äquivalenzklasse aus $T(\Sigma, X_\infty)/_E$, mit :

$$a = \begin{cases} [t]_E & \text{falls } t \in T(\Sigma, X_0) \\ h_\infty(\hat{t}_{\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}) & \text{falls } t \in T(\Sigma\cup\Delta, X_0) \text{ und } t \text{ ein } \Delta\text{–Term ist und} \\ [s]_E & \text{wobei } s := \hat{t}[w \leftarrow h_\infty((\hat{t}_{|w})_{\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}})]_{w\in FremdStellen(\hat{t})}, \;\; \text{sonst} \end{cases}$$

Entsprechend, ist $\hat{t} := \hat{\beta}(t)$ für einen beliebigen Term $t \in T(\Sigma\cup\Delta, X_0)$ und eine beliebige Abbildung $\beta : X_0 \to B_\infty$, so ist $\hat{t}$ ein $(\Sigma\cup\Delta)$–Term über einer endlichen Teilmenge von B_∞ und die Interpretation $\hat{t}_{\mathcal{B}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}}$ von $\hat{t}$ in $\mathcal{B}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}$ ein Element $b \in B_\infty$ mit :

$$b = \begin{cases} [t]_F & \text{falls } t \in T(\Delta, X_0) \\ g_\infty(\hat{t}_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}) & \text{falls } t \in T(\Sigma\cup\Delta, X_0) \text{ und } t \text{ ein } \Sigma\text{–Term ist und} \\ [s]_F & \text{wobei } s := \hat{t}[w \leftarrow h_\infty((\hat{t}_{|w})_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}})]_{w\in FremdStellen(\hat{t})}, \;\; \text{sonst} \end{cases}$$

Für alle $t \in T(\Sigma\cup\Delta, X_0)$ gilt somit :

$$t_{\mathcal{B}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}} = g_\infty(t_{\mathcal{A}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}})$$

und äquivalent dazu (nach Lemma 4.1) :

$$t_{\mathcal{A}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}} = h_\infty(t_{\mathcal{B}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}})$$

Wir können uns daher ohne Einschränkung darauf beschränken, die Terme aus $T(\Sigma\cup\Delta, X_0)$ in $\mathcal{A}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}$ oder in $\mathcal{B}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}$ zu interpretieren.

Zudem können wir statt $(\Sigma\cup\Delta)$–Terme über der Erzeugermenge X_0 ohne Einschränkung $(\Sigma\cup\Delta)$–Terme über einer beliebigen Variablenmenge X geeigneter Kardinalität betrachten.

Denn, ist X eine beliebige abzählbar unendliche Variablenmenge und $\varphi : X \to X_0$ eine beliebige Bijektion, so kann die Interpretation $t_{\mathcal{A}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}}$ von t in $\mathcal{A}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}$ für alle Terme $t \in T(\Sigma \cup \Delta, X)$ durch :

$$t_{\mathcal{A}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}} := \hat{t}_{\mathcal{A}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}}$$

definiert werden, wobei $\hat{t} := \hat{\varphi}(t)$ ist und $\hat{\varphi}$ die $(\Sigma \cup \Delta)$–homomorphe Erweiterung von φ auf $T(\Sigma \cup \Delta, X_0)$ bezeichnet.
Damit ist jeder $(\Sigma \cup \Delta)$–Isomorphismus zwischen $\mathcal{T}(\Sigma \cup \Delta, X_0)/_{E\cup F}$ und $\mathcal{A}_F \odot \mathcal{B}_F$ durch φ und einen $(\Sigma \cup \Delta)$–Isomorphismus zwischen $\mathcal{T}(\Sigma \cup \Delta, X)/_{E\cup F}$ und $\mathcal{A}_F \odot \mathcal{B}_F$ eindeutig bestimmt (und umgekehrt).

Die Hauptidee des Beweises besteht darin, zuerst die Erzeugermenge X_0 auf einer beliebigen abzählbar unendlichen Variablenmenge X bijektiv abzubilden und dann, mit Hilfe des Reduktionssystems R und den Termfunktionen π_1 und π_2, zwei surjektive $(\Sigma \cup \Delta)$–Homomorphismen : $\Phi_{\Sigma,\infty} : T(\Sigma \cup \Delta, X) \to A_\infty$ und $\Phi_{\Delta,\infty} : T(\Sigma \cup \Delta, X) \to B_\infty$ zu konstruieren, die folgende Bedingungen erfüllen :

1. $\Phi_{\Sigma,\infty} = h_\infty \circ \Phi_{\Delta,\infty}$ und $\Phi_{\Delta,\infty} = g_\infty \circ \Phi_{\Sigma,\infty}$.

2. Für alle Terme $s,\ t \in T(\Sigma \cup \Delta, X)$, gilt $\Phi_{\Sigma,\infty}(s) = \Phi_{\Sigma,\infty}(t)$ genau dann, wenn $s =_{E\cup F} t$ gilt.

3. Für alle Terme $t \in T(\Sigma \cup \Delta, X)$ gilt : $\Phi_{\Sigma,\infty}(t) = t_{\mathcal{A}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}}$.

Man beachte, daß die Bedingung 1. impliziert, daß auch für $\Phi_{\Delta,\infty}$ entsprechende Aussagen zu den Eigenschaften 2. und 3. gelten.

Die Abbildungen $\Phi_\Sigma : T(\Sigma \cup \Delta, X)/_{E\cup F} \to A_\infty$ und $\Phi_\Delta : T(\Sigma \cup \Delta, X)/_{E\cup F} \to B_\infty$, respektiv definiert durch $\Phi_\Sigma([t]_{E\cup F}) := \Phi_{\Sigma,\infty}(t)$ und $\Phi_\Delta([t]_{E\cup F}) := \Phi_{\Delta,\infty}(t)$ für alle $[t]_{E\cup F} \in T(\Sigma \cup \Delta, X)/_{E\cup F}$, sind dann wohldefinierte $(\Sigma \cup \Delta)$–Isomorphismen zwischen $\mathcal{T}(\Sigma \cup \Delta, X)/_{E\cup F}$ und $\mathcal{A}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}$ respektiv $\mathcal{B}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}$.

Die Gültigkeit von atomaren Formeln in der kombinierten Struktur $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$, dh. in $\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}$ oder $\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}$, kann dann mit Hilfe von $\Phi_{\Sigma,\infty}$ oder $\Phi_{\Delta,\infty}$ äquivalent definiert werden.
Denn, einerseits, gilt :

$$\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta} \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

nach der allgemeinen Definition der Gültigkeit von Formeln in einer Struktur genau dann, wenn :

$$P_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}(\hat{\alpha}(t_1), \hat{\alpha}(t_2), \ldots, \hat{\alpha}(t_n))$$

für jede Wertzuweisung $\alpha : X \to A_\infty$, gilt, wobei $\hat{\alpha}$ die $(\Sigma \cup \Delta)$–homomorphe Erweiterung von α auf $T(\Sigma \cup \Delta, X)$ bezeichnet.

Andererseits ist $\Phi_{\Sigma,\infty}$ ein $(\Sigma \cup \Delta)$–Homomorphismus, der nach Konstruktion die Bedingung 3. erfüllt. Damit gibt es zu jeder Abbildung $\alpha : X \to A_\infty$ genau eine R–normierte Substitution $\sigma : X \to T{\downarrow_R}$, so daß

$$(\hat{\alpha}(t))_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}} = \Phi_{\Sigma,\infty}(\sigma(t))$$

für alle Terme $t \in T(\Sigma \cup \Delta, X)$ gilt.
Diese Substitution ist, für alle $x \in X$, durch :

$$\sigma(x) := \Psi^{-1}_{\Sigma,\infty}(\alpha(x))$$

definiert, wobei $\Psi_{\Sigma,\infty}$ die Einschränkung von $\Phi_{\Sigma,\infty}$ auf $T{\downarrow_R}$ bezeichnet. Man beachte, daß $\Psi_{\Sigma,\infty}$ eine Bijektion ist, da $\Phi_{\Sigma,\infty}$ nach Konstruktion die Bedingung 2. erfüllt und R ein konvergentes Reduktionssystem für $(E \cup F)$ ist.

Zudem gibt es umgekehrt zu jeder Substitution $\sigma : X \to T(\Sigma \cup \Delta, X)$ *mindestens* eine Abbildung $\alpha : X \to A_\infty$ definiert, für alle x aus X, durch :

$$\alpha(x) := \Phi_{\Sigma,\infty}(\sigma(x))$$

so daß :

$$(\hat{\alpha}(t))_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}} = \Phi_{\Sigma,\infty}(\sigma(t))$$

für alle Terme $t \in T(\Sigma \cup \Delta, X)$ gilt.

Da $\Phi_{\Sigma,\infty}$ die Bedingung 2. erfüllt und R ein konvergentes Reduktionssystem für $E \cup F$ ist, gilt für alle Terme $t \in T(\Sigma \cup \Delta, X)$ und alle Substitutionen $\sigma : X \to T(\Sigma \cup \Delta, X)$ stets $\Phi_{\Sigma,\infty}(\sigma(t)) = \Psi_{\Sigma,\infty}(\sigma_R(t))$, wobei σ_R die R–normierte Form von σ bezeichnet. Damit gibt es zu jeder Substitution $\sigma : X \to T(\Sigma \cup \Delta, X)$ *genau* eine Abbildung $\alpha : X \to A_\infty$ definiert, für alle x aus X, durch :

$$\alpha(x) := \Psi_{\Sigma,\infty}(\sigma_R(x))$$

so daß :

$$(\hat{\alpha}(t))_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}} = \Psi_{\Sigma,\infty}(\sigma_R(t))$$

für alle Terme $t \in T(\Sigma \cup \Delta, X)$ gilt.

Damit gilt $\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta} \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, für ein Prädikatensymbol P aus $\Sigma^{(n)}$ und beliebige Terme t_1, t_2, …, t_n aus $T(\Sigma \cup \Delta, X)$ genau dann, wenn

$$P_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}(\Phi_{\Sigma,\infty}(\sigma(t_1)), \Phi_{\Sigma,\infty}(\sigma(t_2)), \ldots, \Phi_{\Sigma,\infty}(\sigma(t_n))$$

für jede R–normierte Substitution $\sigma : X \to T{\downarrow_R}$ gilt.

Zusammen mit der Interpretation der Prädikate in der kombinierten Struktur und der Bedingung 1, kann die obige äquivalente Definition (der Gültigkeit von atomaren Formeln in der kombinierten Struktur) zusätzlich, wie folgt, äquivalent transformiert werden.

Da die Bedingung 1 nach Voraussetzung erfüllt ist, gilt : $\Phi_{\Sigma,\infty} = h_\infty \circ \Phi_{\Delta,\infty}$. Damit gilt $\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta} \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, für ein Prädikatensymbol P aus $\Sigma^{(n)}$ und beliebige Terme t_1, t_2, ..., t_n aus $T(\Sigma \cup \Delta, X)$ genau dann, wenn

$$P_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}(h_\infty \circ \Phi_{\Delta,\infty}(\sigma(t_1)), h_\infty \circ \Phi_{\Delta,\infty}(\sigma(t_2)), \ldots, h_\infty \circ \Phi_{\Delta,\infty}(\sigma(t_n))$$

für jede R–normierte Substitution $\sigma : X \to T{\downarrow_R}$ gilt.

Nach Interpretation der Prädikatensymbole in der kombinierten Struktur gilt :

$$P_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}(h_\infty \circ \Phi_{\Delta,\infty}(\sigma(t_1)), h_\infty \circ \Phi_{\Delta,\infty}(\sigma(t_2)), \ldots, h_\infty \circ \Phi_{\Delta,\infty}(\sigma(t_n))$$

genau dann, wenn

$$P_{\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}(\Phi_{\Delta,\infty}(\sigma(t_1)), \Phi_{\Delta,\infty}(\sigma(t_2)), \ldots, \Phi_{\Delta,\infty}(\sigma(t_n))$$

gilt.

Damit gilt $\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta} \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, *für ein Prädikatensymbol* P *aus* $\Sigma^{(n)}$ *und beliebige Terme* t_1, t_2, ..., t_n *aus* $T(\Sigma \cup \Delta, X)$ *genau dann, wenn*

$$P_{\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}(\Phi_{\Delta,\infty}(\sigma(t_1)), \Phi_{\Delta,\infty}(\sigma(t_2)), \ldots, \Phi_{\Delta,\infty}(\sigma(t_n))$$

für jede R*–normierte Substitution* $\sigma : X \to T{\downarrow_R}$ *gilt.*

Da die Abbildungen $\Phi_{\Sigma,\infty}$ und $\Phi_{\Delta,\infty}$ mit Hilfe des Reduktionssystems R und den Termfunktionen π_1 und π_2 konstruiert werden, erlaubt uns jede der obigen äquivalenten Interpretationen (der Gültigkeit von atomaren Formeln in der kombinierten Struktur $\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}$ oder $\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}$) einen Zusammenhang zwischen dem algebraischen Ansatz nach [BS 94] und dem syntaktischen Ansatz nach [KR 94] herzustellen.

3. Motivation und Grundidee

Definition 6.2

1. Für alle Terme t aus $T(\Sigma \cup \Delta, X)$, die *keine Variablen* sind, definieren wir die *Signatur* von t durch :
$$sg(t) = \begin{cases} \Sigma & \text{falls } t = f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \text{ und } f \in \Sigma \\ \Delta & \text{falls } t = g(s_1, s_2, \ldots, s_n) \text{ und } g \in \Delta \end{cases}$$

2. Für alle Terme t aus $T(\Sigma \cup \Delta, X)$ definieren wir die Anzahl der *Theorienweschseln* in t durch : $ht(t) = 0$, falls t eine Variable ist, $ht(t) := 1$, falls t ein reiner Term ist und $ht(t) := 1 + max\{\ ht(s) \quad : \quad s \in FremdTerme(t)\ \}$, sonst.

Lemma 6.3
Die Relation $\sim$ definiert auf der Menge $T{\downarrow_R}$ aller R–irreduziblen Terme durch :

$$s \sim t \qquad :\Longleftrightarrow \qquad s, t \in X \qquad \vee \qquad sg(s) = sg(t) \quad \wedge \quad ht(s) = ht(t)$$

ist eine Äquivalenzrelation auf $T{\downarrow_R}$.

Folgerung 6.4

Die Menge $T{\downarrow_R}$ ist als disjunkte Vereinigung

$$T{\downarrow_R} \quad = \quad K_0 \quad \cup \quad \cup_{i=1}^{\infty} K_{\Sigma,i} \quad \cup \quad \cup_{i=1}^{\infty} K_{\Delta,i}$$

darstellbar, wobei $K_0 := X$ ist und für alle $i > 0$:

$$K_{\Sigma,i} := \{\ t{\downarrow_R} \in T{\downarrow_R} \quad : \quad sg(t{\downarrow_R}) = \Sigma\ \wedge\ ht(t{\downarrow_R}) = i\ \}$$

$$K_{\Delta,i} := \{\ t{\downarrow_R} \in T{\downarrow_R} \quad : \quad sg(t{\downarrow_R}) = \Delta\ \wedge\ ht(t{\downarrow_R}) = i\ \}$$

sind.

Bemerkung 6.5

Ist Y eine beliebige Variablenmenge geeigneter Kardinalität und $\pi : T{\downarrow_R} \to Y$ eine beliebige Bijektion, so induziert die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $T{\downarrow_R}$, wie im Lemma 6.3, eine Äquivalenzrelation $\sim_{\pi,Y}$ auf Y, die für alle Elemente y und z aus Y durch :

$$y \sim_{\pi,Y} z \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \pi^{-1}(y) \sim \pi^{-1}(z)$$

definiert ist.

Folgerung 6.6

Ist Y eine beliebige Variablenmenge geeigneter Kardinalität und $\pi : T{\downarrow_R} \to Y$ eine beliebige Bijektion, so ist Y stets als disjunkte Vereinigung :

$$Y \quad = \quad Y_0 \quad \cup \quad \cup_{i=1}^{\infty} Y_{\Sigma,i} \quad \cup \quad \cup_{i=1}^{\infty} Y_{\Delta,i}$$

darstellbar, wobei :

$$Y_0 := \{\ y \in Y \quad : \quad \pi^{-1}(y) \in K_0\ \}$$

ist und für alle $i > 0$:

$$Y_{\Sigma,i} := \{\ y \in Y \quad : \quad \pi^{-1}(y) \in K_{\Sigma,i}\ \}$$

$$Y_{\Delta,i} := \{\ y \in Y \quad : \quad \pi^{-1}(y) \in K_{\Delta,i}\ \}$$

sind.

Andererseits kann die Menge $(X_\infty \cup Y_\infty)$ aller Erzeuger entsprechend der Variablenmenge Y aller Abstraktionsvariablen als disjunkte Vereinigung :

$$X_\infty \cup Y_\infty \quad = \quad X_0 \quad \cup \quad \cup_{i=1}^{\infty} X_i \quad \cup \quad \cup_{i=1}^{\infty} Y_i$$

dargestellt werden.

Die Darstellung der Variablenmenge Y und Erzeugermenge $(X_\infty \cup Y_\infty)$ als disjunkte Vereinigung motiviert die Idee, durch zwei geeignete Folgen von Bijektionen $\delta_{\Sigma,n} : Y_{\Sigma,n} \to Y_n$ und $\delta_{\Delta,n} : Y_{\Delta,n} \to X_n$, alle Variablenmengen $Y_{\Sigma,n}$ und $Y_{\Delta,n}$ *simultan und induktiv über* n respektiv auf den Erzeugermengen Y_n und X_n abzubildet. Dabei wird eine Variable y auf einem Erzeuger e genau dann abgebildet wird, wenn :

- $\pi^{-1}(y) \in X$ und $\varphi(x) = e$, oder
- $\pi^{-1}(y) \in T\downarrow_R$, $sg(\pi^{-1}(y)) = \Delta$ und $(\pi^{-1}(y))_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}} = e$, oder
- $\pi^{-1}(y) \in T\downarrow_R$, $sg(\pi^{-1}(y)) = \Sigma$ und $(\pi^{-1}(y))_{\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}} = e$

gilt, wobei $\varphi : X \to X_0$ eine beliebige Bijektion ist.

Im nächsten Abschnitt werden wir diese Folgen von Bijektionen konstruieren und anschließend deren Grenzwerte verwendet, um die surjektiven Homomorphismen $\Phi_{\Sigma,\infty}$ und $\Phi_{\Delta,\infty}$ zu definieren. Dazu brauchen wir einige Eigenschaften des Reduktionssystems R.

Exkurs : Zwei Eigenschaften des Reduktionssystems R

In diesem Abschnitt zeigen wir zwei Eigenschaften des Reduktionssystems R, die in diesem und nächsten Kapitel benötigt werden. Sie werden im Folgenden mit den Eigenchaften 1 und 2 bezeichnet. Die Herleitungsschritte dieser Eigenschaften werden nur der Vollständigkeit halber angegeben und sind für die Stellen, an der diese Eigenchaften benötigt werden, nicht relevant.

Sei R das Reduktionssystem, das durch die Anwendung der Vervollständigung ohne Abbruch auf $E \cup F$ mit einer geeigneten totalen Reduktionsordnung auf $T(\Sigma \cup \Delta, X)$ entsteht, wobei die Variablen aus X als Konstanten betrachtet werden.
Ferner sei $R^> := \{\ \theta(l) \to \theta(r) \quad : \quad (l,r) \in R, \theta \in SUB_X, \theta(l) > \theta(r)\ \}$.
Da die Elemente von X als Konstanten behandelt werden, sind alle Elemente von SUB_X Grundsubstitutionen.

Lemma
Ist $(l, r) \in R$, θ eine Grundsubstitution und $\theta(l) \rightarrow \theta(r) \in R^{>}$, so ist $\theta(l)$ keine Variable und keine Konstante.

Beweis

Der Beweis dieser Aussage, wie in [KR 94], folgt im wesentlichen daraus, daß E_1 und E_2 konsistent sind und, daß für jede totale Reduktionsordnung (oder Vereinfachungsordnung) $>$ und alle Terme $t : t > x$, für alle $x \in Var(t)$, gilt.

Aus dem obigen Lemma folgt die erste (im Folgenden nützliche) Eigenschaft von R.

Eigenschaft 1 : alle Variablen und Konstanten sind R–irreduzibel.

Lemma
Sei $t \xrightarrow{n}_R t{\downarrow_R}$ und bezeichnen $\theta_1(l_1) \rightarrow \theta_1(r_1)$, $\theta_2(l_2) \rightarrow \theta_2(r_2)$, ..., $\theta_n(l_n) \rightarrow \theta_n(r_n)$ die Reduktionsregeln aus $R^{>}$ mit denen t auf $t{\downarrow_R}$ reduziert wurde. Dann gilt :

$\forall i = 1, 2, \ldots, n, \;\; \forall x \in Var(r_i) \backslash Var(l_i) \quad : \quad \theta_i(x)$ ist eine Variable oder eine Konstante.

Beweis

Seien t ein beliebiger R–reduzierbarer Term, $w \in O(t)$, $(g, d) \in R$ und $\theta \in SUB_X$ mit : $\theta(g) > \theta(d)$ und $t_{|_w} = \theta(l)$. Damit ist t mit R zu $t_1 := t[w \leftarrow \theta(d)]$ reduzierbar.
Angenommen θ erfüllt nicht die Bedingung des Lemmas, dh. es gibt mindestens eine Variable $x \in Var(d) \backslash Var(g)$, so daß $\theta(x)$ keine Variable und keine Konstante ist.
Sei dann τ eine beliebige Substitution, die die Bedingung des Lemmas erfüllt und mit θ auf alle Variablen $x \notin Var(d) \backslash Var(g)$ übereinstimmt. Dann gilt : $\theta(x) = \tau(x)$, für alle $x \in Var(g)$, und damit auch : $\theta(g) = \tau(g)$.
Da $>$ eine totale Reduktionsordnung ist, gilt andererseits nach Definition von τ : $\theta(x) \geq \tau(x)$, für alle $x \in Var(g)$. Damit gilt :

$$\tau(g) = \theta(g) > \theta(d) \geq \tau(d)$$

Da $\tau(g) \geq \tau(d)$ und $\tau(g) = \theta(g)$ gelten, ist $\tau(g) \rightarrow \tau(d)$ aus $R^{>}$ und t ist mit $\tau(g) \rightarrow \tau(d)$ reduzierbar.
Mit Induktion über die Länge n einer Ableitungskette $t \xrightarrow{n}_R t{\downarrow_R}$, folgt dann, daß man sich bei der Berechnung von R–Normalformen auf solche Regeln aus $R^{>}$ beschränken kann, die die Bedingung des Lemmas erfüllen.

Folgerung
Sei t ein R–reduzibler Σ–Term, dessen Fremdterme R–irreduzibel sind. Dann gibt es stets einen direkten R–Nachfolger t_1 von t, der entweder

- ein Fremdterm von t (und damit ein Δ–Term), oder
- ein Σ–Term ist, dessen fremdterme R–irreduzibel sind.

Ferner gilt stets : $t^{\pi_1} =_E t_1^{\pi_1}$.
Entsprechendes gilt symmetrisch für alle R–reduziblen Δ–Terme, dessen Fremdterme R–irreduzibel sind.

Mit Induktion über die Länge n einer Ableitungskette $t \xrightarrow{n}_R t{\downarrow_R}$ und obiger Folgerung folgt die zweite (im Folgenden mehrfach verwendete) Eigenschaft des Reduktionssystems R.

Eigenschaft 2 : ist t ein R–reduzibler Σ–Term, dessen Fremdterme R–irreduzibel sind, so gilt stets : $t^{\pi_1} =_E (t{\downarrow_R})^{\pi_1}$. Entsprechend, gilt $t^{\pi_2} =_F (t{\downarrow_R})^{\pi_2}$, für alle R–reduziblen Δ–Terme, dessen Fremdterme R–irreduzibel sind.

4. Konstruktion der Homomorphismen $\Phi_{\Sigma,\infty}$ und $\Phi_{\Delta,\infty}$

Definition 6.7

Sei X eine beliebige abzählbar unendliche Variablenmenge und $\varphi : X \to X_0$ eine beliebige Bijektion, wobei X_0 die gemeinsame Erzeugemenge von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ bezeichnet.
Wir definieren dann induktiv über n zwei Folgen von Abbildungen $\delta_{\Sigma,n} : Y_{\Sigma,n} \to Y_n$ und $\delta_{\Delta,n} : Y_{\Delta,n} \to X_n$ durch :

- $\delta_{\Sigma,0}(y) = \delta_{\Delta,0}(y) := \varphi \circ \pi^{-1}(y)$, für alle $y \in Y_0$, wobei : $Y_{\Sigma,0} = Y_{\Delta,0} := Y_0$,
- $\delta_{\Sigma,n}(y) = g_\infty([(\pi^{-1}(y))^{\pi_1}\sigma_{\Delta,n-1})]_E)$, für alle $y \in Y_{\Sigma,n}$, wobei :
$$\sigma_{\Delta,n-1} := \cup_{k=0}^{n-1}\delta_{\Delta,k}$$
- $\delta_{\Delta,n}(y) = h_\infty([(\pi^{-1}(y))^{\pi_2}\sigma_{\Sigma,n-1})]_E)$, für alle $y \in Y_{\Delta,n}$, wobei :
$$\sigma_{\Sigma,n-1} := \cup_{k=0}^{n-1}\delta_{\Sigma,k}$$

Lemma 6.8

Für alle $n \geq 0$, sind $\delta_{\Sigma,n}$ und $\delta_{\Delta,n}$ bijektive Abbildungen.

Beweis

Wir zeigen die Aussage des Lemmas simultan für $\delta_{\Sigma,n}$ und $\delta_{\Delta,n}$ durch Induktion über n.

- $n = 0$
Nach Definition stimmen $\delta_{\Sigma,0}$ und $\delta_{\Delta,0}$ mit $\varphi \circ \pi^{-1}$ auf Y_0 überein. Da sowohl π als auch φ bijektiv sind, sind $\delta_{\Sigma,0}$ und $\delta_{\Delta,0}$ nach Definition (identische) Bijektionen zwischen Y_0 und X_0.

- $n \rightarrow n+1$
  Angenommen, für ein $n \in IN$ und alle $k \leq n$, sind $\delta_{\Sigma,k}$ und $\delta_{\Delta,k}$ bijektive Abbildungen.

  Die Abbildung $\delta_{\Sigma,n+1}: \ Y_{\Sigma,n+1} \rightarrow Y_{n+1}$ ist dann für alle $y \in Y_{\Sigma,n+1}$ durch :

$$\delta_{\Sigma,n+1}(y) = g_\infty([(\pi^{-1}(y)^{\pi_1})\sigma_{\Delta,n})]_E)$$

  definiert, wobei :

$$\sigma_{\Delta,n} := \cup_{k=0}^{n} \ \delta_{\Delta,k}$$

  ist.
  Entsprechend ist die Abbildung $\delta_{\Delta,n+1} \ : \ Y_{\Delta,n+1} \rightarrow X_{n+1}$, für alle $y \in Y_{\Delta,n+1}$, durch :

$$\delta_{\Delta,n+1}(y) = h_\infty([(\pi^{-1}(y)^{\pi_2})\sigma_{\Sigma,n})]_E)$$

  definiert, wobei :

$$\sigma_{\Sigma,n} := \cup_{k=0}^{n} \ \delta_{\Sigma,k}$$

  ist.

a) Um die Korrektheit der Definitionen von $\delta_{\Sigma,n+1}$ und $\delta_{\Delta,n+1}$ sicher zu stellen, müssen wir zuerst zeigen, daß $\delta_{\Sigma,n+1}$ als Bildbereich $Y_{\Sigma,n+1}$ und $\delta_{\Delta,n+1}$ als Bildbereich X_{n+1} haben, dh., daß $\delta_{\Sigma,n+1}(y) \in Y_{n+1}$, für alle $y \in Y_{\Sigma,n+1}$ und entsprechend $\delta_{\Delta,n+1}(y) \in X_{n+1}$, für alle $y \in Y_{\Delta,n+1}$, gelten.

   Wir zeigen diese Aussage nur für $\delta_{\Sigma,n+1}$, da der entsprechende Beweis für $\delta_{\Delta,n+1}$ völlig symmetrisch ist.
   Wir müssen daher für alle $y \in Y_{\Sigma,n+1}$ zeigen, daß $\delta_{\Sigma,n+1}(y) \in Y_{n+1}$ ist.

   Sei dazu $y \in Y_{\Sigma,n+1}$, dann ist $\pi^{-1}(y) \in K_{\Sigma,n+1}$, dh. es gibt einen R–irreduziblen Term $t{\downarrow_R}$, mit $sg(t{\downarrow_R}) = \Sigma$, $ht(t{\downarrow_R}) = n+1$ und $\pi(t{\downarrow_R}) = y$.

   Damit gibt es eine Stelle w in $t{\downarrow_R}$, so daß der Unterterm s von $t{\downarrow_R}$ an der Stelle w ein Fremdterm von $t{\downarrow_R}$ ist, mit $s \in K_{\Delta,n}$, dh. mit $sg(s) = \Delta$ und $ht(s) = n$.

   Für alle weiteren Fremdterme s' von $t{\downarrow_R}$ gilt dann : $ht(s') \leq ht(s)$. Damit gilt für alle Fremdterme s von $t{\downarrow_R}$: $s \in K_{\Delta,k}$, für ein geeignetes $k \leq n$.

   Damit ist :

$$(t{\downarrow_R})^{\pi_1} \in T(\Sigma, \cup_{i=0}^{n} Y_{\Delta,i})$$

   und es gilt :

$$Var((t{\downarrow_R})^{\pi_1}) \cap Y_{\Delta,n} \neq \emptyset$$

Nach Induktion ist somit :

$$(t{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,n} \in T(\Sigma, \cup_{i=0}^{n} X_i)$$

und es gilt :

$$Erz((t{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,n}) \cap X_n \neq \emptyset$$

wobei $Erz(t)$, entsprechend $Var(t)$, die Menge aller Erzeuger bezeichnet, die in dem Term t vorkommen.

Da $t{\downarrow_R}$ aus $K_{\Sigma,n+1}$ ist, ist $t{\downarrow_R}$ ein R–irreduzibler Σ–Term mit $t{\downarrow_R} \neq x$, für alle $x \in X$. Damit ist auch $(t{\downarrow_R})^{\pi_1}$ nach Definition von π_1 ein Σ–Term, der keine Variable aus Y ist. Nach Induktionsannahme ist somit auch $(t{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,n}$ kein Erzeuger aus X_∞.
Damit ist :

$$[(t{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,n}]_E \in A_n \backslash (A_{n-1} \cup X_n)$$

Nach Definition von g_∞ ist dann

$$g_\infty([(t{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,n}]_E) \in Y_{n+1}$$

Da $t{\downarrow_R} = \pi^{-1}(y)$ ist, folgt aus der Definition von $\delta_{\Sigma,n+1}$, daß $\delta_{\Sigma,n+1}(y) \in Y_{n+1}$ ist.

b) Als nächstes müssen wir zeigen, daß die Abbildungen $\delta_{\Sigma,n+1}$ und $\delta_{\Delta,n+1}$ injektiv sind. Wir zeigen dies nur für $\delta_{\Sigma,n+1}$, da der Beweis für $\delta_{\Delta,n+1}$ ähnlich ist.

Seien dazu y_1 und y_2 aus $Y_{\Sigma,n+1}$ mit $\delta_{\Sigma,n+1}(y_1) = \delta_{\Sigma,n+1}(y_1)$. Wir müssen dann zeigen, daß y_1 und y_2 gleich seien müssen.

Nach Voraussetzung und Definition von $\delta_{\Sigma,n+1}$ gilt :

$$g_\infty([(\pi^{-1}(y_1))^{\pi_1}\sigma_{\Delta,n}]_E) = g_\infty([(\pi^{-1}(y_2))^{\pi_1}\sigma_{\Delta,n}]_E)$$

Da g_∞ bijektiv ist, gilt auch :

$$[(\pi^{-1}(y_1))^{\pi_1}\sigma_{\Delta,n}]_E = [(\pi^{-1}(y_2))^{\pi_1}\sigma_{\Delta,n}]_E$$

Damit gilt nach Induktion :

$$(\pi^{-1}(y_1))^{\pi_1} =_E (\pi^{-1}(y_2))^{\pi_1}$$

Da $\pi^{-1}(y_1)$ und $\pi^{-1}(y_2)$ beide R–irreduzibele Terme sind, gilt dies genau dann, wenn $\pi^{-1}(y_1)$ und $\pi^{-1}(y_2)$ syntaktisch gleich sind, dh. wenn $\pi^{-1}(y_1) = \pi^{-1}(y_2)$ ist.
Da π bijektiv ist, gilt dies genau dann, wenn $y_1 = y_2$ ist.

c) Als nächstes müssen wir noch zeigen, daß die Abbildungen $\delta_{\Sigma,n+1}$ und $\delta_{\Delta,n+1}$ surjektiv sind. Ähnlich, wie für die Injektivität, zeigen wir die Surjektivität nur für $\delta_{\Sigma,n+1} : Y_{\Sigma,n+1} \to Y_{n+1}$, da der Beweis für $\delta_{\Delta,n+1}$ entsprechend verläuft.

Sei dazu y ein beliebiges Element aus Y_{n+1}. Dann gibt es zu y nach Konstruktion des amalgamierten Produktes ein Element $a \in A_n \backslash (A_{n-1} \cup X_n)$ mit $y = g_\infty(a)$.
Damit gibt es zu y nach Induktionsannahme, dh. genauer nach Konstruktion der Abbildungen $\delta_{\Sigma,k}$ und $\delta_{\Delta,k}$ für alle $k \leq n$, ein $t \in T(\Sigma, \cup_{i=0}^{n} X_i)$ mit :

$$\begin{cases} \bullet \quad a = [t]_E \\ \bullet \quad Erz(t) \cap X_n \neq \emptyset \\ \bullet \quad \forall\, x \in Erz(t) \quad : \quad t_{\mathcal{A}_\infty} \neq x \end{cases}$$

Da nach Induktionsannahme die Abbildungen $\delta_{\Delta,k} : Y_{\Delta,k} \to X_k$, für alle $k \leq n$, definierte Bijektionen sind, sind auch die Abbildungen $\delta_{\Delta,k}^{-1}$, für alle $k \leq n$, definierte Bijektionen.
Damit ist die Abbildung $\sigma_{\Delta,n}^{-1} := \cup_{i=0}^{n} \delta_{\Delta,i}^{-1}$ auch eine bijektive Abbildung und der Term s definiert durch : $s := t\sigma_{\Delta,n}^{-1}$ aus $T(\Sigma, \cup_{i=0}^{n} Y_{\Delta,i})$.
Da in t mindestens ein Erzeuger aus X_n vorkommt, gilt zusätzlich : $Var(s) \cap Y_{\Delta,n} \neq \emptyset$.

Nun kann π^{-1} als Substitution τ aufgefaßt werden, die auf alle Terme aus $T(\Sigma \cup \Delta, Y)$ anwendbar ist. Die Anwendung von τ auf einem beliebigen Term aus $T(\Sigma, Y)$ liefert einen Term aus $T(\Sigma \cup \Delta, X)$, der selbst R–irreduzibel ist, falls t eine Variable aus Y ist oder, einen Term aus $T(\Sigma \cup \Delta, X)$, dessen Fremdterme alle R–irreduzibel sind, sonst.

Da $\cup_{i=0}^{n} Y_i$ eine Teilmenge von Y ist, ist die Substitution τ auf s anwendbar.
Sei $s_0 := \tau(s)$. Da $Var(s) \cap Y_{\Delta,n} \neq \emptyset$ ist, gilt : $ht(s_0) = n + 1$.
Wir unterscheiden zwei Fälle :

∗ Fall 1 : s_0 ist R–irreduzibel.
Dann ist π für s_0 definiert. Damit gibt es ein $y_0 \in Y$, so daß $y_0 := \pi(s_0)$ gilt.
Da $sg(s_0) = \Sigma$ und $ht(s_0) = n + 1$ ist, ist $y_0 \in Y_{\Sigma,n+1}$.
Für y_0 wollen wir zeigen, daß $\delta_{\Sigma,n+1}(y_0) = y$ ist.

Nach Definition von $\delta_{\Sigma,n+1}$ gilt :

$$\delta_{\Sigma,n+1}(y_0) = g_\infty([(\pi^{-1}(y_0)^{\pi_1})\sigma_{\Delta,n})]_E)$$

Da nach Definition $y_0 = \pi(s_0)$ ist, gilt :

$$\delta_{\Sigma,n+1}(y_0) = g_\infty([s_0^{\pi_1}\sigma_{\Delta,n})]_E)$$

Mit Hilfe der Definitionen für s_0, $\sigma_{\Delta,n}$ und π_1 kann man leicht die Identität : $t = s_0^{\pi_1}\sigma_{\Delta,n}$ überprüfen (siehe die Bemerkung am Ende des Beweises).

Damit gilt :

$$\delta_{\Sigma,n+1}(y_0) = g_\infty([t]_E)$$

Da nach Definition $[t]_E = a$ ist und $g_\infty(a) = y$ gilt, gilt :

$$\delta_{\Sigma,n+1}(y_0) = y$$

Damit gibt es zu jedem $y \in Y_{n+1}$, der mit der obigen Definition für s einen R–irreduziblen Term s_0 definiert, ein Urbild $y \in Y_{\Sigma,n+1}$

* Fall 2 : s_0 ist R–reduzibel.

  Dann sind aber alle Fremdterme von s_0 R–irreduzibel. Nach der Eigenschaft 2 von R gilt dann :

$$s_0^{\pi_1} =_E (s_0{\downarrow_R})^{\pi_1}$$

Da $=_E$ abgeschlossen bezüglich Substitutionen ist, gilt auch :

$$s_0^{\pi_1}\sigma_{\Delta,n} =_E (s_0{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,n}$$

Damit ist :

$$[s_0^{\pi_1}\sigma_{\Delta,n=1}]_E = [(s_0{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,n}]_E$$

Als nächstes zeigen wir : $ht(s_0{\downarrow_R}) = n+1$ und $\delta_{\Sigma,n+1}(\pi(s_0{\downarrow_R})) = y$.

Da $a = [t]_E$ ist, folgt aus Obigem und der gleichen Identität $t = s_0^{\pi_1}\sigma_{\Delta,n}$:

$$[(s_0{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,n}]_E = a$$

Da $a \in A_n \backslash (A_{n-1} \cup X_n)$ ist, ist $(s_0{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,n}$ ein Σ–Term über $\cup_{i=0}^n X_i$ mit :

$$Erz((s_0{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,n}) \cap X_n \neq \emptyset$$

Damit ist $(s_0{\downarrow_R})^{\pi_1}$ nach Induktion ein Σ–Term über $\cup_{i=0}^n Y_{\Delta,i}$ mit :

$$Var((s_0{\downarrow_R})^{\pi_1}) \cap Y_{\Delta,n} \neq \emptyset$$

Damit gilt:

$$ht(s_0{\downarrow_R}) = 1 + ht(\pi^{-1}(v))$$

wobei v eine beliebige Variable aus $Var(s_0{\downarrow_R}^{\pi_1}) \cap Y_{\Delta,n}$ ist.

Da $\pi^{-1}(v) \in K_{\Delta,n}$ und $ht(t{\downarrow_R}) = n$, für alle $t{\downarrow_R} \in T{\downarrow_R}$, sind, gilt somit :

$$ht(s_0{\downarrow_R}) = 1 + n$$

Damit ist $s_0{\downarrow_R}$ ein R–irreduzibler Term aus $K_{\Sigma,n+1}$. Nach dem Beweis zum Fall 1 gilt dann :

$$\delta_{\Sigma,n+1}(\pi(s_0{\downarrow_R})) = y$$

Bemerkung (zur Identität $t = s_0^{\pi_1}\sigma_{\Delta,n}$)
Nach Definition ist $s_0 := \tau(s)$, wobei τ die Substitution bezeichnet, die jede Variable y aus Y durch den R–irreduziblen Term $t{\downarrow_R}$ mit $\pi(t{\downarrow_R}) = y$ ersetzt.
Damit gilt : $s_0^{\pi_1} = s$. Andererseits gilt nach Definition von s : $s = t\sigma_{\Delta,n}^{-1}$.
Insgesamt gilt dann : $s_0^{\pi_1}\sigma_{\Delta,n} = s\sigma_{\Delta,n} = t\sigma_{\Delta,n}^{-1}\sigma_{\Delta,n} = t$.

Seien $\sigma_{\Sigma,\infty}$ und $\sigma_{\Delta,\infty}$ respektiv die Grenzwerte der Folgen $(\sigma_{\Sigma,n})_{n\in IN}$ und $(\sigma_{\Delta,n})_{n\in IN}$, die durch die Konstruktion der Folgen $(\delta_{\Sigma,n})_{n\in IN}$ und $(\delta_{\Delta,n})_{n\in IN}$ (Definition 6.7) induziert werden. Dann gilt offenbar : $\sigma_{\Sigma,\infty} = \cup_{i=0}^{\infty}\sigma_{\Sigma,i}$ und $\sigma_{\Delta,\infty} = \cup_{i=0}^{\infty}\sigma_{\Delta,i}$.
Als direkte Folgerung aus Lemma 6.8 gilt dann :

Folgerung 6.9

Die Grenzwerte $\sigma_{\Sigma,\infty} : Y_{\Sigma,\infty} := \cup_{i=0}^{\infty}Y_{\Sigma,i} \to Y_\infty$ und $\sigma_{\Delta,\infty} : Y_{\Delta,\infty} := \cup_{i=0}^{\infty}Y_{\Delta,i} \to X_\infty$ sind bijektive Abbildungen.

Lemma 6.10

Für die Grenzwerte $\sigma_{\Sigma,\infty}$ und $\sigma_{\Delta,\infty}$ und alle Terme $t \in T(\Sigma \cup \Delta, X)$ gilt :

$$(1) \qquad [(t{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,\infty}]_E = h_\infty([(t{\downarrow_R})^{\pi_2}\sigma_{\Sigma,\infty}]_F)$$

$$(2) \qquad [(t{\downarrow_R})^{\pi_2}\sigma_{\Sigma,\infty}]_F = g_\infty([(t{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,\infty}]_E)$$

Beweis

Da $h_\infty : B_\infty \to A_\infty$ und $g_\infty : A_\infty \to B_\infty$ zu einander inverse Bijektionen sind, genügt es die Aussage (1) des Lemmas zu zeigen. Die Aussage (2) folgt dann einfach durch Anwendung von h_∞ auf die Identität (1). Sei dazu t ein beliebiger Term aus $T(\Sigma \cup \Delta, X)$.

- Fall 1: t ist eine Variable aus X.
  Dann ist $t = x$, für ein $x \in X$, und es gilt : $(t{\downarrow_R})^{\pi_1} = (t{\downarrow_R})^{\pi_2} = \pi(t) = \pi(x) \in Y_0$.
  Nach Definition von $\sigma_{\Sigma,\infty}$ und $\sigma_{\Delta,\infty}$ stimmen sie mit $\delta_{\Sigma,0}$ und $\delta_{\Delta,0}$ auf Y_0 überein.
  Damit gilt : $(t{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,\infty} = (t{\downarrow_R})^{\pi_1}\delta_{\Delta,0}$ und $(t{\downarrow_R})^{\pi_2}\sigma_{\Sigma,\infty} = (t{\downarrow_R})^{\pi_2}\delta_{\Sigma,0}$.
  Da $\delta_{\Sigma,0}$ und $\delta_{\Delta,0}$ mit $\varphi \circ \pi^{-1}$ auf Y_0 übereinstimmen, gilt :

  $$\delta_{\Delta,0}((t{\downarrow_R})^{\pi_1}) \overset{\text{Eig.1}}{=} \delta_{\Delta,0}(x^{\pi_1}) \overset{\text{Def.}}{=} \delta_{\Delta,0}(\pi(x)) \overset{\text{Def.}}{=} \varphi \circ \pi^{-1}(\pi(x)) = \varphi(x)$$

  Völlig analog zeigt man dann auch : $\delta_{\Sigma,0}((t{\downarrow_R})^{\pi_2}) = \varphi(x)$.
  Da h_∞ mit der Identität auf X_0 übereinstimmt, folgt dann die Behauptung (1) des Lemmas für alle Variablen, dh. alle Elemente aus X.

- Fall 2 : $t{\downarrow_R}$ ist ein Δ–Term mit $ht(t{\downarrow_R}) = n$, für ein $n > 0$.
  Dann ist $(t{\downarrow_R})^{\pi_1} = \pi(t{\downarrow_R}) = y \in Y_{\Delta,n}$ und damit $\sigma_{\Delta,\infty}(y) = \delta_{\Delta,n}(y)$.
  Nach Definition von $\delta_{\Delta,n}$ gilt dann :

$$\delta_{\Delta,n}(y) = h_\infty([(\pi^{-1}(y))^{\pi_2}\sigma_{\Sigma,n-1}]_F) = h_\infty([(t{\downarrow_R})^{\pi_2}\sigma_{\Sigma,n-1}]_F)$$

  Damit gilt :

$$[(t{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,\infty}]_E = \delta_{\Delta,n}(y) = h_\infty([(t{\downarrow_R})^{\pi_2}\sigma_{\Sigma,\infty}]_F)$$

- Fall 3 : $t{\downarrow_R}$ ist ein Σ–Term mit $ht(t{\downarrow_R}) = n$, für ein $n > 0$.
  Dann ist $(t{\downarrow_R})^{\pi_2} = \pi(t{\downarrow_R}) = y \in Y_{\Sigma,n}$.
  Entsprechend dem zweiten Fall gilt dann :

$$[(t{\downarrow_R})^{\pi_2}\sigma_{\Sigma,\infty}]_F = \delta_{\Sigma,n}(y) = g_\infty([(\pi^{-1}(y))^{\pi_1}\sigma_{\Delta,n-1}]_E) = g_\infty([(t{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,n-1}]_E)$$

  Da $h_\infty : B_\infty \to A_\infty$ und $g_\infty : A_\infty \to B_\infty$ inverse Bijektionen sind, gilt dann :

$$[(t{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,\infty}]_E = h_\infty([(t{\downarrow_R})^{\pi_2}\sigma_{\Sigma,\infty}]_F)$$

Als nächstes werden wir die Bijektionen $\sigma_{\Sigma,\infty}$ und $\sigma_{\Delta,\infty}$ verwenden, um die Abbildungen $\Phi_{\Sigma,\infty}$ und $\Phi_{\Delta,\infty}$ zu definieren.

Lemma 6.11

Sei $\Phi_{\Sigma,\infty} : T(\Sigma \cup \Delta, X) \to A_\infty$ eine Abbildung, definiert durch :

$$\Phi_{\Sigma,\infty}(t) = [(t{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,\infty}]_E$$

und sei entsprechend $\Phi_{\Delta,\infty} : T(\Delta \cup \Delta, X) \to B_\infty$ eine Abbildung definiert durch :

$$\Phi_{\Delta,\infty}(t) = [(t{\downarrow_R})^{\pi_2}\sigma_{\Sigma,\infty}]_F$$

für alle $t \in T(\Sigma \cup \Delta, X)$. Dann gilt :

1. $\Phi_{\Sigma,\infty} = h_\infty \circ \Phi_{\Delta,\infty}$ und $\Phi_{\Delta,\infty} = g_\infty \circ \Phi_{\Sigma,\infty}$.

2. $\Phi_{\Sigma,\infty}$ ist ein surjektiver $(\Sigma \cup \Delta)$–Homomorphismus von $\mathcal{T}(\Sigma \cup \Delta, X)$ nach $\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}$ und $\Phi_{\Delta,\infty}$ ist ein surjektiver $(\Sigma \cup \Delta)$–Homomorphismus von $\mathcal{T}(\Sigma \cup \Delta, X)$ nach $\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}$.

3. Für alle $s, t \in T(\Sigma \cup \Delta, X)$ gilt : $\Phi_{\Sigma,\infty}(s) = \Phi_{\Sigma,\infty}(t) \iff \Phi_{\Delta,\infty}(s) = \Phi_{\Delta,\infty}(t)$.

4. Für alle $s, t \in T(\Sigma \cup \Delta, X)$ gilt : $\Phi_{\Sigma,\infty}(s) = \Phi_{\Sigma,\infty}(t) \iff s =_{E\cup F} t$.

5. Für alle $t \in T(\Sigma \cup \Delta, X)$ gilt : $\Phi_{\Sigma,\infty}(t) = \hat{t}_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}$ und $\Phi_{\Delta,\infty}(t) = \hat{t}_{\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}$.
   Dabei ist $\hat{t} := \hat{\varphi}(t)$, für die $(\Sigma \cup \Delta)$–Homomorphe Erweiterung $\hat{\varphi}$ einer beliebigen aber festgelegten Bijektion $\varphi : X \to X_0$.

Beweis

1. Diese Identitäten sind eine direkte Folgerung aus den Definitionen von $\Phi_{\Sigma,\infty}$ und $\Phi_{\Delta,\infty}$ und Lemma 6.14.

2. Nach 1. genügt es, die Aussage 2. des Lemmas nur für $\Phi_{\Sigma,\infty}$ zu zeigen.

   • Wir zeigen zuerst, daß $\Phi_{\Sigma,\infty}$ ein $(\Sigma \cup \Delta)$–Homomorphismus ist.
   Sei dazu f ein beliebiges Funktionssymbol aus $\Sigma \cup \Delta$ und bezeichne n die Stelligkeit von f. Ferner seien t_1, t_2, …, t_n beliebige Terme aus $T(\Sigma \cup \Delta, X)$.
   Wir wollen für $\Phi_{\Sigma,\infty}$ und $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ zeigen, daß

$$\Phi_{\Sigma,\infty}(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = f_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}(\Phi_{\Sigma,\infty}(t_1), \Phi_{\Sigma,\infty}(t_2), \ldots, \Phi_{\Sigma,\infty}(t_n))$$

   gilt. Wir unterscheiden dazu zwei Fälle :

   ∗ Fall 1 : $f \in \Sigma$.
   Dann gilt nach Definition von $\Phi_{\Sigma,\infty}$:

$$\Phi_{\Sigma,\infty}(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = [f(t_1, t_2, \ldots, t_n){\downarrow_R}^{\pi_1}\sigma_{\Delta,\infty}]_E$$

   Da R ein Reduktionssystem für $E \cup F$ ist, gilt auch :

$$\Phi_{\Sigma,\infty}(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = [f(t_1{\downarrow_R}, t_2{\downarrow_R}, \ldots, t_n{\downarrow_R}){\downarrow_R}^{\pi_1}\sigma_{\Delta,\infty}]_E$$

   Da f ein Σ–Symbol ist, gilt dann nach Definition von π_1 :

$$\Phi_{\Sigma,\infty}(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = [f((t_1{\downarrow_R})^{\pi_1}, (t_2{\downarrow_R})^{\pi_1}, \ldots, (t_n{\downarrow_R})^{\pi_1})\sigma_{\Delta,\infty}]_E$$

   Da $=_E$ abgeschlossen bezüglich Substitutionen ist, gilt :

$$\Phi_{\Sigma,\infty}(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = [f((t_1{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,\infty}, (t_2{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,\infty}, \ldots, (t_n{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,\infty})]_E$$

   Da das amalgamierten Produkt interpretiert als Σ–Algebra durch X_∞ erzeugt ist und der funktionale Teil isomorph zu der Quotiententermalgebta $\mathcal{T}(\Sigma, X_\infty)/_E$ ist, gilt :

$$\Phi_{\Sigma,\infty}(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = f_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma}}([s_1]_E, [s_2]_E, \ldots, [s_n]_E)$$

   wobei $s_i := (t_i{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,\infty}$, für $i = 1, 2, \ldots, n$.
   Da alle s_i, für $i = 1, 2, \ldots, n$, reine Σ–Terme über X_∞ oder Erzeuger aus X_∞ sind, gilt nach Interpretation der Prädikatensymbole in dem amalgamierten Produkt $\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}$:

$$\Phi_{\Sigma,\infty}(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = f_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}([s_1]_E, [s_2]_E, \ldots, [s_n]_E)$$

Nach Definition von $\Phi_{\Sigma,\infty}$ und s_i, für $i = 1, 2, \ldots, n$ gilt dann :

$$\Phi_{\Sigma,\infty}(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = f_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}(\Phi_{\Sigma,\infty}(t_1), \Phi_{\Sigma,\infty}(t_2), \ldots, \Phi_{\Sigma,\infty}(t_n))$$

* Fall 2 : $f \in \Delta$.
  Nach der Aussage 1. dieses Lemmas gilt für alle Terme $t \in T(\Sigma \cup \Delta, X)$: $\Phi_{\Sigma,\infty}(t) = h_\infty \circ \Phi_{\Delta,\infty}(t)$. Insbesondere gilt für $t := f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$:

$$\Phi_{\Sigma,\infty}(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = h_\infty \circ \Phi_{\Delta,\infty}(f(t_1, t_2, \ldots, t_n))$$

  Da f nun ein Δ–Symbol ist, gilt entsprechend dem Fall $f \in \Sigma$:

$$\Phi_{\Delta,\infty}(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = f_{\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}(\Phi_{\Delta,\infty}(t_1), \Phi_{\Delta,\infty}(t_2), \ldots, \Phi_{\Delta,\infty}(t_n))$$

  Durch Einsetzen in der vorherigen Identität folgt dann :

$$\Phi_{\Sigma,\infty}(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = h_\infty(f_{\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}(\Phi_{\Delta,\infty}(t_1), \Phi_{\Delta,\infty}(t_2), \ldots, \Phi_{\Delta,\infty}(t_n)))$$

  Da h_∞ ein $(\Sigma \cup \Delta)$–Homomorphismus ist und nach 1. $h_\infty \circ \Phi_{\Delta,\infty} = \Phi_{\Sigma,\infty}$ ist, gilt dann :

$$\Phi_{\Sigma,\infty}(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = f_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}(\Phi_{\Sigma,\infty}(t_1), \Phi_{\Sigma,\infty}(t_2), \ldots, \Phi_{\Sigma,\infty}(t_n))$$

- Als Nächstes zeigen wir, daß $\Phi_{\Sigma,\infty}$ surjektiv ist.
  Sei $a \in A_\infty$. Dann gibt es ein $n \geq 0$, so daß $a \in X_n$ oder $a \in A_n \backslash (A_{n-1} \cup X_n)$.

  * Fall 1 : $a \in X_n$
    Dann gibt es eine Variable $y \in Y_{\Delta,n}$ mit $\delta_{\Delta,n}(y) = a$. Damit gibt es einen R–irreduziblen Term $t{\downarrow}_R \in K_{\Delta,n}$ mit $\delta_{\Delta,n}(y) = a$.
    Nach Definition von $\delta_{\Delta,n}$ ist $\delta_{\Delta,n}(y) = h_\infty([(t{\downarrow}_R)^{\pi_2}\sigma_{\Sigma,n-1}]_F)$.
    Damit ist $\delta_{\Delta,n}(y) = h_\infty([(t{\downarrow}_R)^{\pi_2}\sigma_{\Sigma,\infty}]_F)$.
    Nach Lemma 6.10 ist somit $\delta_{\Delta,n}(y) = [(t{\downarrow}_R)^{\pi_1}\sigma_{\Delta,\infty}]_E$.
    Da $\delta_{\Delta,n}(y) = a$ ist, gilt nach Definition von $\Phi_{\Sigma,\infty}$: $\Phi_{\Sigma,\infty}(t) = a$.
    Damit gibt es zu jedem Erzeuger $a \in X_\infty$ mindestens einen Term $t \in T(\Sigma \cup \Delta, X)$ mit $\Phi_{\Sigma,\infty}(t) = a$.

  * Fall 2 : $a \in A_n \backslash (A_{n-1} \cup X_n)$
    Dann gibt es nach der Konstruktion des amalgamierten Produktes einen Erzeuger $y \in Y_{n+1}$ mit $h_\infty(y) = a$.
    Ähnlich wie bei dem Fall 1 gibt es somit zu y einen Term $t \in T(\Sigma \cup \Delta, X)$ mit $\Phi_{\Delta,\infty}(t) = y$. Damit gilt auch : $h_\infty \circ \Phi_{\Delta,\infty}(t) = h_\infty(y) = a$, da h_∞ eine Bijektion ist. Nach der ersten Aussage dieses Lemmas ist $h_\infty \circ \Phi_{\Delta,\infty} = \Phi_{\Sigma,\infty}$ Damit gilt : $\Phi_{\Sigma,\infty}(t) = a$.
    Damit gibt es auch zu jedem Element a aus A_∞, der kein erzeuger ist, einen Term t aus $T(\Sigma \cup \Delta, X)$ mit $\Phi_{\Sigma,\infty}(t) = a$.

3. Seien s und t beliebige Terme aus $T(\Sigma \cup \Delta, X)$. Dann gilt :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\Sigma,\infty}(s) = \Phi_{\Sigma,\infty}(t) &\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} [(t{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,\infty}]_E = [(t{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,\infty}]_E \\
&\Longleftrightarrow g_\infty([(t{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,\infty}]_E) = g_\infty([(t{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,\infty}]_E) \\
&\overset{(6.10)}{\Longleftrightarrow} [(t{\downarrow_R})^{\pi_2}\sigma_{\Sigma,\infty}]_F = [(t{\downarrow_R})^{\pi_2}\sigma_{\Sigma,\infty}]_F \\
&\Longleftrightarrow \Phi_{\Delta,\infty}(s) = \Phi_{\Delta,\infty}(t)
\end{aligned}$$

4. Die Aussage 4. des Lemmas ist eine Folgerung aus :
   a) $s =_{E \cup F} t \quad \Longleftrightarrow \quad s{\downarrow_R} = t{\downarrow_R}$,
   b) Konstruktion von $\sigma_{\Sigma,\infty}$ und $\sigma_{\Delta,\infty}$,
   c) Abgeschlossenheit von $=_E$ und $=_F$ bezüglich Substitutionen und
   d) den Definitionen von $\Phi_{\Sigma,\infty}$ und $\Phi_{\Delta,\infty}$.

5. Sei $\varphi : X \to X_0$ eine beliebige (aber festgelegte) Bijektion. Wir zeigen die Aussage 5 des Lemmas simultan für $\Phi_{\Sigma,\infty}$ und $\Phi_{\Delta,\infty}$ und alle Terme $t \in T(\Sigma \cup \Delta, X)$ durch Induktion über die Anzahl der Theorienwechseln in t, dh. über $ht(t)$.

- Induktionsanfang : sei t ein beliebiger reiner Term aus $T(\Sigma \cup \Delta, X)$ oder eine beliebige Variable aus X und sei $\hat{t} := \hat{\varphi}(t)$. Ferner nehmen wir o.E. an, daß t eine Variable oder ein reiner Σ–Term ist.
  Dann ist, nach Konstruktion des amalgamierten Produktes, $\hat{t}_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}} = [\hat{t}]_E$.
  Nach der Eigenschaft 2 von R gilt dann für den Term t : $t^{\pi_1} =_E (t{\downarrow_R})^{\pi_1}$.
  Da $=_E$ abgeschlossen bezüglich Substitutionen ist, gilt : $t^{\pi_1}\sigma_{\Delta,0} =_E (t{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,0}$, dh. $[t^{\pi_1}\sigma_{\Delta,0}]_E = [(t{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,0}]_E$.
  Da einerseits $\hat{t}_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}} = [\hat{t}]_E$ ist und andererseits (nach Konstruktion von $\sigma_{\Delta,0}$) $t^{\pi_1}\sigma_{\Delta,0} = \hat{t}$ und (nach Definition von $\Phi_{\Sigma,\infty}$) $\Phi_{\Sigma,\infty}(t) = [(t{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,0}]_E$ gelten, gilt insgesamt : $\Phi_{\Sigma,\infty}(t) = \hat{t}_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}$.

  Zu dem Induktionsanfang müssen wir noch zeigen : $\Phi_{\Delta,\infty}(t) = \hat{t}_{\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}$.
  Da t nach Annahme eine Variable oder ein reiner Σ–Term ist, ist $\hat{t}_{\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}} = g_\infty(\hat{t}_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}})$.
  Andererseits gilt nach Induktionsanfang : $\hat{t}_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}} = \Phi_{\Sigma,\infty}(t)$.
  Damit gilt : $\hat{t}_{\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}} = g_\infty \circ \Phi_{\Sigma,\infty}(t)$.
  Nach der Aussage 1. dieses Lemmas ist aber $g_\infty \circ \Phi_{\Sigma,\infty} = \Phi_{\Delta,\infty}$.
  Damit gilt : $\Phi_{\Delta,\infty}(t) = \hat{t}_{\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}$.

- Induktionsannahme : Für ein $n > 1$, alle Variablen und alle Terme t mit $ht(t) \leq n$, nehmen wir an, daß die Behauptung 5. des Lemmas gilt.

- Induktionsschritt : sei t ein beliebiger Term aus $T(\Sigma \cup \Delta, X)$ mit $ht(t) = n + 1$. Ferner nehmen wir o.E. an, daß t ein Σ–Term ist und setzen $\hat{t} := \hat{\varphi}(t)$.

Nach Konstruktion des amalgamierten Produktes und Definition von $\hat{t}_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}$ gilt dann :

$$\hat{t}_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}} = [\hat{t}[w \leftarrow h_\infty(((\hat{t}_{|w}))_{\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}})]_{w\in Fremdstellen(\hat{t})}]_E$$

Für alle Fremdterme $\hat{t}_{|w}$ von $\hat{t}$ gilt nach Definition von ht : $ht(\hat{t}_{|w}) < ht(\hat{t})$. Damit ist die Induktionsvoraussetzung für alle Fremdterme von $\hat{t}$ anwendbar, dh. es gilt :

$$\Phi_{\Delta,\infty}(t_{|w}) = (\hat{t}_{|w})_{\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}$$

Damit gilt :

$$\hat{t}_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}} = [\hat{t}[w \leftarrow h_\infty \circ \Phi_{\Delta,\infty}(\hat{t}_{|w})]_{w\in Fremdstellen(\hat{t})}]_E$$

Nach der ersten Aussage dieses Lemmas ist $h_\infty \circ \Phi_{\Delta,\infty} = \Phi_{\Sigma,\infty}$. Damit gilt :

$$\hat{t}_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}} = [\hat{t}[w \leftarrow \Phi_{\Sigma,\infty}(\hat{t}_{|w})]_{w\in Fremdstellen(\hat{t})}]_E$$

Da $\Phi_{\Sigma,\infty}$ ein $(\Sigma \cup \Delta)$–Homomorphismus ist (Aussage 2 des Lemmas), gilt :

$$\hat{t}_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}} = \Phi_{\Sigma,\infty}(t[w \leftarrow t_{|w}]_{w\in Fremdstellen(t)})$$

Aus der trivialen Identität : $t = t[w \leftarrow t_{|w}]_{w\in Fremdstellen(t)}$ folgt dann :

$$\hat{t}_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}} = \Phi_{\Sigma,\infty}(t)$$

$\Phi_{\Delta,\infty}(t) = \hat{t}_{\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}$ folgt dann Wie im Induktionsanfang aus der gezeigten Identität $\Phi_{\Sigma,\infty}(t) = \hat{t}_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}$.

Folgerung 6.12

Für jede Abbildung $\alpha : X \to A_\infty$ und alle Terme $t \in T(\Sigma \cup \Delta, X)$ gilt :

$$(\hat{\alpha}(t))_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}} = (\sigma(t))_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}} = \Phi_{\Sigma,\infty}(\sigma(t))$$

wobei $\sigma : X \to T(\Sigma \cup \Delta, X)$ die Substitution definiert, für alle x aus X, durch :

$$\sigma(x) := \Psi^{-1}_{\Sigma,\infty}(\alpha(x))$$

und $\Psi_{\Sigma,\infty}$ die Einschränkung von $\Phi_{\Sigma,\infty}$ auf $T{\downarrow_R}$ bezeichnen.

Entsprechend gilt für jede Abbildung $\beta : X \to B_\infty$ und alle Terme $t \in T(\Sigma \cup \Delta, X)$:

$$(\hat{\beta}(t))_{\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}} = (\sigma(t))_{\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}} = \Phi_{\Delta,\infty}(\theta(t))$$

wobei $\theta : X \to T(\Sigma \cup \Delta, X)$ die Substitution definiert, für alle x aus X, durch :

$$\theta(x) := \Psi^{-1}_{\Delta,\infty}(\beta(x))$$

und $\Psi_{\Delta,\infty}$ die Einschränkung von $\Phi_{\Delta,\infty}$ auf $T{\downarrow_R}$ bezeichnen.

Beweis

Der Beweis Folgt direkt aus Lemma 6.11.2 und 6.11.5.

Lemma 6.13

Seien Σ und Δ disjunkte Signaturen, $\mathcal{A}$ eine freie Σ–Struktur, $\mathcal{B}$ eine freie Δ–Struktur und bezeichne $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ das amalgamierte Produkt von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.
Ferner seien P ein beliebiges Prädikatensymbol aus $(\Sigma \cup \Delta)$, X eine beliebige abzählbar unendliche Variablenmenge und t_1, t_2, ..., t_n beliebige Terme aus $T(\Sigma \cup \Delta, X)$. Dann gilt :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \odot \mathcal{B} \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n) &\iff P_{\mathcal{A}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}}(\Phi_{\Sigma,\infty}(t_1), \Phi_{\Sigma,\infty}(t_2), \ldots, \Phi_{\Sigma,\infty}(t_n)) \\
&\iff P_{\mathcal{B}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}}(\Phi_{\Delta,\infty}(t_1), \Phi_{\Delta,\infty}(t_2), \ldots, \Phi_{\Delta,\infty}(t_n)) \\
&\iff \begin{cases} P_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma}}(\Phi_{\Sigma,\infty}(t_1), \Phi_{\Sigma,\infty}(t_2), \ldots, \Phi_{\Sigma,\infty}(t_n)) & \text{falls } P \in \Sigma \\ P_{\mathcal{B}_\infty^{\Delta}}(\Phi_{\Delta,\infty}(t_1), \Phi_{\Delta,\infty}(t_2), \ldots, \Phi_{\Delta,\infty}(t_n)) & \text{falls } P \in \Delta \end{cases}
\end{aligned}$$

Beweis

Da $\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}$ und $\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}$ isomorph sind, nehmen wir o.E. an, daß $\mathcal{A} \odot \mathcal{B} := \mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}$ ist.

Nach der allgemeinen Definition der Gültigkeit von atomaren Formeln in einer Struktur gilt $\mathcal{A} \odot \mathcal{B} \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ genau dann, wenn

$$P_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}((\hat{\alpha}(t_1))_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}, (\hat{\alpha}(t_2))_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}, \ldots, (\hat{\alpha}(t_n))_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}})$$

für jede Wertzuweisung $\alpha : X \to A_\infty$ gilt, wobei $\hat{\alpha}$ die $(\Sigma \cup \Delta)$–homomorphe Erweiterung von α auf $T(\Sigma \cup \Delta, X)$ bezeichnet.

Nach Folgerung 6.12 gilt $P_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}((\hat{\alpha}(t_1))_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}, (\hat{\alpha}(t_2))_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}, \ldots, (\hat{\alpha}(t_n))_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}})$ genau dann, wenn

$$P_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}(\Phi_{\Sigma,\infty}(\sigma(t_1)), \Phi_{\Sigma,\infty}(\sigma(t_2)), \ldots, \Phi_{\Sigma,\infty}(\sigma(t_n)))$$

für jede R–normierte Substitution $\sigma : X \to T{\downarrow_R}$ gilt.

Da $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ nach Satz 4.2 eine freie Struktur ist, ist die Interpretation von P in $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$, dh. in diesem Fall in $\mathcal{A}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}$, abgeschlossen bezüglich Substitutionen.
Da zudem jede Substitution eindeutig durch ihre R–normierte Form darstellbar ist, gilt $P_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}((\hat{\alpha}(t_1))_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}, (\hat{\alpha}(t_2))_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}, \ldots, (\hat{\alpha}(t_n))_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}})$ genau dann, wenn

$$P_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}(\Phi_{\Sigma,\infty}(t_1), \Phi_{\Sigma,\infty}(t_2), \ldots, \Phi_{\Sigma,\infty}(t_n))$$

gilt.

Insgesamt haben wir mit der Vereinbarung $\mathcal{A} \odot \mathcal{B} := \mathcal{A}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}$ gezeigt, daß $\mathcal{A} \odot \mathcal{B} \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ genau dann gilt, wenn $P_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}(\Phi_{\Sigma,\infty}(t_1), \Phi_{\Sigma,\infty}(t_2), \ldots, \Phi_{\Sigma,\infty}(t_n))$ gilt.

Mit der Vereinbarung $\mathcal{A} \odot \mathcal{B} := \mathcal{B}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}$ zeigt man ähnlich wie mit $\mathcal{A} \odot \mathcal{B} := \mathcal{A}_\infty^{(\Sigma\cup\Delta)}$, daß $\mathcal{A} \odot \mathcal{B} \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ genau dann gilt, wenn $P_{\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}(\Phi_{\Delta,\infty}(t_1), \Phi_{\Delta,\infty}(t_2), \ldots, \Phi_{\Delta,\infty}(t_n))$ gilt.

Nach Interpretation der Prädikatensymbole in $\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}$ gilt

$$P_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}(\Phi_{\Sigma,\infty}(t_1), \Phi_{\Sigma,\infty}(t_2), \ldots, \Phi_{\Sigma,\infty}(t_n))$$

genau dann, wenn

$$P_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma}}(\Phi_{\Sigma,\infty}(t_1), \Phi_{\Sigma,\infty}(t_2), \ldots, \Phi_{\Sigma,\infty}(t_n))$$

gilt, falls $P \in \Sigma$ ist oder wenn

$$P_{\mathcal{B}_\infty^{\Delta}}(g_\infty \circ \Phi_{\Sigma,\infty}(t_1), g_\infty \circ \Phi_{\Sigma,\infty}(t_2), \ldots, g_\infty \circ \Phi_{\Sigma,\infty}(t_n))$$

gilt, falls $P \in \Delta$ ist.

Da nach Lemma 6.11.1 : $g_\infty \circ \Phi_{\Sigma,\infty} = \Phi_{\Delta,\infty}$ gilt, ist die Behauptung des Lemmas insgesamt bewiesen.

5. Hauptbeweis

In diesem letzten Abschnitt wollen wir zeigen, daß eine atoamre Formel über der gemischten Signatur in der Kombinierten Struktur $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$, wie in [BS 94], genau dann gilt, wenn sie nach der Definition der Gültigkeit von atomaren Formeln über der gemischten Signatur, wie in [KR 94], gilt. Da $\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}$ und $\mathcal{B}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}$ isomorph sind, legen wir o.E. in Folgenden $\mathcal{A} \odot \mathcal{B} := \mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}$ fest.

Zu jedem Prädikatensymbol $P \in (\Sigma \cup \Delta)$ führen wir ein Paar (P_{BS}, P_{KR}) von Prädikatensymbolen mit der gleichen Stelligkeit wie P ein. Dabei gilt $P_{BS}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ genau dann, wenn $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ in dem amalgamierten Produkt $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$, wie in [BS 94], gilt. Entsprechend gilt $P_{KR}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ genau dann, wenn $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ nach der Definition der Gültigkeit von atomaren Formeln über der gemischten Signatur, wie in [KR 94], gilt.

Hauptsatz

Seien Σ, Δ, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ wie in der allgemeinen Voraussetzung dieses Kapitels, X eine beliebige abzählbar unendliche Variablenmenge, P ein Prädikatensymbol aus $(\Sigma_P \cup \Delta_P)$

und t_1, t_2, …, t_n beliebige Terme aus $T(\Sigma \cup \Delta, X)$, wobei n die Stelligkeit von P bezeichnet. Dann gilt :

$$P_{BS}(t_1, t_2, \ldots, t_n) \iff P_{KR}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

Beweis

Sei P ein beliebiges Prädikatensymbol aus $(\Sigma \cup \Delta)$, X eine abzählbar unendliche Variablenmenge und t_1, t_2, …, t_n beliebige Terme aus $T(\Sigma \cup \Delta, X)$. Ferner nehmen wir im Folgenden o.E. an, daß $P \in \Sigma$ ist.
Damit ist es Folgendes zu zeigen :

$$\mathcal{A} \odot \mathcal{B} \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n) \qquad \iff \qquad \mathcal{A} \models P(\ (t_1{\downarrow_R})^{\pi_1},\ (t_2{\downarrow_R})^{\pi_1}, \ldots, (t_n{\downarrow_R})^{\pi_1}\ )$$

1. Wir zeigen zunächst die erste Richtung, dh. :

$$\mathcal{A} \odot \mathcal{B} \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{A} \models P(\ (t_1{\downarrow_R})^{\pi_1},\ (t_2{\downarrow_R})^{\pi_1}, \ldots, (t_n{\downarrow_R})^{\pi_1}\ )$$

Dazu nehmen wir an, daß $\mathcal{A} \odot \mathcal{B} \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ gilt.

Nach Lemma 6.13 gilt $\mathcal{A}_\infty^{\Sigma \cup \Delta} \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ genau dann, wenn

$$P_{\mathcal{A}_\infty^\Sigma}(\Phi_{\Sigma,\infty}(t_1),\ \Phi_{\Sigma,\infty}(t_2), \ldots, \Phi_{\Sigma,\infty}(t_n))$$

gilt.

Nach Definition von $\Phi_{\Sigma,\infty}$ (Lemma 6.11) gilt für $\Phi_{\Sigma,\infty}$ und alle Terme $t \in T(\Sigma \cup \Delta, X)$:

$$\Phi_{\Sigma,\infty}(t) = [(t{\downarrow_R})^{\pi_1} \sigma_{\Delta,\infty}]_E$$

Damit gilt $\mathcal{A}_\infty^{\Sigma \cup \Delta} \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ genau dann, wenn

$$P_{\mathcal{A}_\infty^\Sigma}([(t_1{\downarrow_R})^{\pi_1} \sigma_{\Delta,\infty}]_E,\ [(t_2{\downarrow_R})^{\pi_1} \sigma_{\Delta,\infty}]_E, \ldots, [(t_n{\downarrow_R})^{\pi_1} \sigma_{\Delta,\infty}]_E)$$

gilt.

Seien, für $i = 1, 2, \ldots, n$, $s_i := (t_i{\downarrow_R})^{\pi_1} \sigma_{\Delta,\infty}$. Dann sind alle s_i aus $T(\Sigma, X_\infty)$ und $[s_i]_E$ aus $T(\Sigma, X_\infty)/_E$.

Da $\mathcal{A}_\infty^\Sigma$ frei über X_∞ ist, ist die Interpretation von P in $\mathcal{A}_\infty^\Sigma$ abgeschlossen bezüglich Substitutionen. Damit gilt $\mathcal{A}_\infty^{\Sigma \cup \Delta} \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ genau dann, wenn für jede Abbildung $\tau : X_\infty \to T(\Sigma, X_\infty)$:

$$P_{\mathcal{A}_\infty^\Sigma}([\hat{\tau}(s_1)]_E, [\hat{\tau}(s_2)]_E, \ldots, [\hat{\tau}(s_n)]_E)$$

gilt, wobei $\hat{\tau}$ die Σ–homomorphe Erweiterung von τ auf $T(\Sigma, X_\infty)$ bezeichnet.

Da $\mathcal{A}_\infty^\Sigma$ selbst durch X_∞ erzeugt ist, bedeutet dies, daß $\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta} \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ genau dann gilt, wenn für jede Abbildung $\beta : X_\infty \to A_\infty$

$$P_{\mathcal{A}_\infty^\Sigma}(\hat{\beta}(s_1), \hat{\beta}(s_2), \ldots, \hat{\beta}(s_n))$$

gilt.

Da die Abbildung $\sigma_{\Delta,\infty} : Y_{\Delta,\infty} \to X_\infty$ nach Folgerung 6.9 eine Bijektion ist, ist jede Abbildung $\lambda : Y_{\Delta,\infty} \to A_\infty$ durch eine Abbildung $\beta : X_\infty \to A_\infty$ eindeutig bestimmt, die für alle $x \in X_\infty$ durch :

$$\beta(x) = \lambda \circ \sigma_{\Delta,\infty}^{-1}(x)$$

definiert ist.

Damit gilt $\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta} \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ genau dann, wenn :

$$P_{\mathcal{A}_\infty^\Sigma}(\hat{\lambda} \circ \sigma_{\Delta,\infty}^{-1}(s_1), \hat{\lambda} \circ \sigma_{\Delta,\infty}^{-1}(s_2), \ldots, \hat{\lambda} \circ \sigma_{\Delta,\infty}^{-1}(s_n))$$

für jede Abbildung $\lambda : Y_{\Delta,\infty} \to A_\infty$ gilt, wobei $\hat{\lambda}$ die Σ–homomorphe Erweiterung von λ auf $T(\Sigma, Y_{\Delta,\infty})$ bezeichnet.

Nach Definition von s_i, für $i = 1, 2, \ldots, n$, gilt dann :

$$\hat{\lambda} \circ \sigma_{\Delta,\infty}^{-1}(s_i) = (t_i{\downarrow_R})^{\pi_1}$$

Damit gilt $\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta} \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ genau dann, wenn :

$$P_{\mathcal{A}_\infty^\Sigma}(\hat{\lambda}((t_1{\downarrow_R})^{\pi_1}), \hat{\lambda}((t_2{\downarrow_R})^{\pi_1}), \ldots, \hat{\lambda}((t_n{\downarrow_R})^{\pi_1}))$$

für jede Abbildung $\lambda : Y_{\Delta,\infty} \to A_\infty$ gilt.
Nach der allgemeinen Definition der Gültigkeit einer atomaren Formel in einer Struktur ist dies gleichbedeutend damit, daß $\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta} \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ genau dann gilt, wenn

$$\mathcal{A}_\infty^\Sigma \models P((t_1{\downarrow_R})^{\pi_1}, (t_2{\downarrow_R})^{\pi_1}, \ldots, (t_n{\downarrow_R})^{\pi_1})$$

gilt.

Da $\mathcal{A}_\infty^\Sigma$ und $\mathcal{A}$ freie Strukturen für die gleiche Varietät über zwei Mengen mit der gleichen Kardinalität (X_0 und X_∞) sind, sind sie isomorph.
Damit gilt $\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta} \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ genau dann, wenn

$$\mathcal{A} \models P((t_1{\downarrow_R})^{\pi_1}, (t_2{\downarrow_R})^{\pi_1}, \ldots, (t_n{\downarrow_R})^{\pi_1})$$

gilt, dh. genau dann wenn $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ nach der Definition von [KR 94] gilt.

2. Für die zweite Richtung müssen wir zeigen :

$$\mathcal{A} \models P((t_1{\downarrow_R})^{\pi_1}, (t_2{\downarrow_R})^{\pi_1}, \ldots, (t_n{\downarrow_R})^{\pi_1}) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{A} \odot \mathcal{B} \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

Da $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}^{\Sigma}_{\infty}$ isomorph sind, gilt

$$\mathcal{A} \models P((t_1{\downarrow_R})^{\pi_1}, (t_2{\downarrow_R})^{\pi_1}, \ldots, (t_n{\downarrow_R})^{\pi_1})$$

genau dann, wenn

$$\mathcal{A}^{\Sigma}_{\infty} \models P((t_1{\downarrow_R})^{\pi_1}, (t_2{\downarrow_R})^{\pi_1}, \ldots, (t_n{\downarrow_R})^{\pi_1})$$

gilt.

Nach der allgemeinen Definition der Gültigkeit einer Formel in einer Struktur gilt dann

$$\mathcal{A}^{\Sigma}_{\infty} \models P((t_1{\downarrow_R})^{\pi_1}, (t_2{\downarrow_R})^{\pi_1}, \ldots, (t_n{\downarrow_R})^{\pi_1})$$

genau dann, wenn

$$P_{\mathcal{A}^{\Sigma}_{\infty}}(\hat{\lambda}((t_1{\downarrow_R})^{\pi_1}), \hat{\lambda}((t_2{\downarrow_R})^{\pi_1}), \ldots, \hat{\lambda}((t_n{\downarrow_R})^{\pi_1}))$$

für jede Wertzuweisung $\lambda : Y_{\Delta,\infty} \to A_\infty$ gilt.

Da $\sigma_{\Delta,\infty} : Y_{\Delta,\infty} \to X_\infty$ eine Bijektion ist, ist jede Abbildung $\lambda : Y_{\Delta,\infty} \to A_\infty$ durch $\sigma_{\Delta,\infty}$ und eine Abbildung $\beta : X_\infty \to A_\infty$ eindeutig bestimmt, die für alle $x \in X_\infty$ durch :

$$\beta(x) := \lambda \circ \sigma^{-1}_{\Delta,\infty}(x)$$

definiert ist. Umgekehrt gibt es zu jeder Abbildung $\beta : X_\infty \to A_\infty$ genau eine Abbildung $\lambda : Y_{\Delta,\infty} \to A_\infty$, definiert für alle $y \in Y_{\Delta,\infty}$ durch :

$$\lambda(y) := \beta \circ \sigma_{\Delta,\infty}(y)$$

Damit gilt :

$$\mathcal{A}^{\Sigma}_{\infty} \models P((t_1{\downarrow_R})^{\pi_1}, (t_2{\downarrow_R})^{\pi_1}, \ldots, (t_n{\downarrow_R})^{\pi_1})$$

genau dann, wenn für jede Abbildung $\beta : X_\infty \to A_\infty$:

$$P_{\mathcal{A}^{\Sigma}_{\infty}}(\beta \circ \sigma_{\Delta,\infty}((t_1{\downarrow_R})^{\pi_1}), \beta \circ \sigma_{\Delta,\infty}((t_2{\downarrow_R})^{\pi_1}), \ldots, \beta \circ \sigma_{\Delta,\infty}((t_n{\downarrow_R})^{\pi_1}))$$

gilt. Insbesondere gilt für $\beta_0 := id_{|X_\infty}$ nach Voraussetzung :

$$P_{\mathcal{A}^{\Sigma}_{\infty}}(\beta_0 \circ \sigma_{\Delta,\infty}((t_1{\downarrow_R})^{\pi_1}), \beta_0 \circ \sigma_{\Delta,\infty}((t_2{\downarrow_R})^{\pi_1}), \ldots, \beta_0 \circ \sigma_{\Delta,\infty}((t_n{\downarrow_R})^{\pi_1}))$$

Da $\mathcal{A}_\infty^\Sigma$ durch X_∞ erzeugt ist, gilt zusätzlich für β_0 und alle Terme $t \in T(\Sigma \cup \Delta, X)$:

$$\beta_0 \circ \sigma_{\Delta,\infty}((t{\downarrow_R})^{\pi_1}) = [(t{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,\infty}]_E$$

Damit gilt nach Voraussetzung :

$$P_{\mathcal{A}_\infty^\Sigma}([(t_1{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,\infty}]_E, [(t_2{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,\infty}]_E, \ldots, [(t_n{\downarrow_R})^{\pi_1}\sigma_{\Delta,\infty}]_E)$$

Nach Definition von $\Phi_{\Sigma,\infty}$ gilt dann auch :

$$P_{\mathcal{A}_\infty^\Sigma}(\Phi_{\Sigma,\infty}(t_1), \Phi_{\Sigma,\infty}(t_2), \ldots, \Phi_{\Sigma,\infty}(t_n))$$

Da $\mathcal{A}_\infty^\Sigma$ eine Σ–Unterstruktur von $\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}$, gilt auch :

$$P_{\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta}}(\Phi_{\Sigma,\infty}(t_1), \Phi_{\Sigma,\infty}(t_2), \ldots, \Phi_{\Sigma,\infty}(t_n))$$

Nach Lemma 6.13 folgt somit die zweite Richtung, dh. es gilt :

$$\mathcal{A}_\infty^{\Sigma\cup\Delta} \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n).$$

∇

Zusammenfassung : wir haben damit als Hauptergebnis gezeigt, daß eine atomare Formel über der gemischten Signatur in dem amalgamierten Produkt wie in [BS 94] genau dann gilt, wenn sie nach der syntaktischen Definition wie in [KR 94] gilt.

Es stellt sich nun die Frage, ob man die Gültigkeit von atomaren Formeln über der gemischten Signatur effektiv entscheiden kann, wenn man die Entscheidbarkeit der Gültigkeit von reinen atomaren Formeln, dh. von atomaren Formeln über der einzelnen Signaturen, voraussetzt. Dies ist das Thema des nächsten Kapitels.

KAPITEL 7

Die Entscheidbarkeit von atomaren Constraints

Im letzten Kapitel haben wir gezeigt, daß eine beliebige atomare Formel $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ über der gemischten Signatur in der kombinierten Struktur $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$, wie in [BS 94], genau dann gilt, wenn $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ in der kombinierten Struktur $\mathcal{C}$, wie in [KR 94], gilt.

Da aber das Reduktionssystem R in der Definition der Gültigkeit von atomaren Formeln über der gemischten Signatur, wie in [KR 94], im allgemeinen unendlich ist, liefert diese Definition keinen effektiven Weg, um die Gültigkeit von atomaren Formeln über der gemischten Signatur zu entscheiden.

Andererseits generiert der Dekompositionsalgorithmus, wie in [BS 94], auch bei Eingabe einer $\forall$–quantifizieren positiven Formel (über der gemischten Signatur) im Allgemeinen Ausgabepaare, deren Komponenten *beliebig* quantifizierte Formeln (über den Einzelnen Signaturen) sind.
Die Entscheidbarkeit von atomaren Formeln in den einzelnen Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ reicht damit nicht aus, um *mit dem Dekompositionsalgorithmus* die Entscheidbarkeit von atomaren Formeln in der kombinierten Struktur $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ auf die Entscheidbarkeit von atomaren Formeln in den einzelnen Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zurückzuführen.

In diesem Kapitel wird zuerst eine hinreichende Bedingung für die Entscheidbarkeit von atomaren Formeln über der gemischten Signatur in der kombinierten Struktur $\mathcal{C}$, wie in [KR 94], formuliert (Lemma 7.1). Anschließend werden schrittweise die Voraussetzungen bestimmt, unter denen diese Bedingung erfüllbar ist.
Für eine äquivalente Definition der Gültigkeit von atomaren Formeln über der gemischten Signatur, wie in [KR 94], wird dann gezeigt, daß sie diese Voraussetzungen erfüllt und damit einen effektiven Weg liefert, um die Gültigkeit von atomaren Formeln über der gemischten Signatur in der kombinierten Struktur $\mathcal{C}$ (und damit nach Kapitel 6 in der kombinierten Struktur $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$) zu entscheiden.

Definition 7.1

Seien $\mathcal{A}$ eine beliebige Σ–Struktur und P ein Prädikatensymbol aus Σ. Ferner bezeichnen A die Trägermenge von $\mathcal{A}$ und n die Stelligkeit von P.
Wir sagen, daß das Prädikat P in $\mathcal{A}$ entscheidbar ist, wenn $P^?_{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, für alle a_1, a_2, …, $a_n \in A$, entscheidbar ist.

Äquivalent dazu ist somit ein Prädikat $P \in \Sigma$, für eine beliebige Signatur Σ, in einer beliebigen Σ–Struktur $\mathcal{A}$ genau dann entscheidbar, wenn $\mathcal{A} \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, für eine beliebige abzählbar unendliche Menge X und beliebige Terme t_1, t_2, …, $t_n \in T(\Sigma, X)$, entscheidbar ist.

Lemma 7.2

Seien, für $i = 1$, 2, Σ_i disjunkte Signaturen und $\mathcal{A}_i$ freie Σ_i–Strukturen, deren funktionalen Teile E_i–freie Algebren über der gleichen abzählbar unendlichen Menge X_0 sind.
Ferner seien P ein Prädikatensymbol aus $\Sigma_i^{(n)}$, für ein beliebiges $i \in \{1, 2\}$, X, Y disjunkte abzählbar unendliche Variablenmengen und $\pi : T{\downarrow_R} \to Y$ eine beliebige Bijektion, wobei R das äquivalente Reduktionssystem für $E := E_1 \cup E_2$, wie in [BS 92] (siehe Kapitel 3), und $T{\downarrow_R}$ die Menge aller R–irreduziblen Terme aus $T(\Sigma_1 \cup \Sigma_2, X)$ bezeichnen.

Dann ist P in $\mathcal{C}$ entscheidbar, wenn :

1) P in $\mathcal{A}_i$ entscheidbar ist und
2) zu jeder Folge t_1, t_2, …, t_n von Termen aus $T(\Sigma_1 \cup \Sigma_2, X)$ eine berechenbare Folge s_1, s_2, …, s_n von Termen aus $T(\Sigma_i, Z)$ gibt, so daß $\sigma(s_j) =_{E_i} (t_j{\downarrow_R})^{\pi_i}$, für alle $j = 1, 2, \ldots$, n, gilt. Dabei ist Z eine beliebige abzählbar unendliche Variablenmenge und $\sigma : Z \to Y$ eine beliebige Substitution, deren Einschränkung auf $Var(s_1) \cup Var(s_2) \cup \ldots \cup Var(s_n)$ eine Variablenumbenennug ist.

Beweis

Seien Y, π und P wie im Lemma 7.2 und t_1, t_2, …, t_n beliebige Terme aus $T(\Sigma_1 \cup \Sigma_2, X)$.
Ferner nehmen wir an, daß die Bedingungen 1) und 2) des Lemmas erfüllt sind.
Nach Obigem genügt es zu zeigen, daß $\mathcal{C} \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ gilt.

Da die Bedingung 2) des Lemmas nach Voraussetzung erfüllt ist, kann man zu der Folge t_1, t_2, …, t_n eine Folge $s_1, s_2, \ldots, s_n$ von reinen Σ_i–Termen über jeder abzählbar unendlichen Variablenmenge Z effektiv bestimmen, so daß

$$(*) \qquad \sigma|_V(s_j) =_{E_i} (t_j{\downarrow_R})^{\pi_i}$$

für alle $j = 1$, 2, …, n gilt, wobei $\sigma : Z \to Y$ eine beliebige Substitution ist, deren Einschränkung $\sigma_{|V}$ auf $V := Var(t_1) \cup Var(t_2) \cup \ldots \cup Var(t_n)$ eine Variablenumbenennung ist.

Nach Definition der Gültigkeit von atomaren Formeln in der kombinierten Struktur $\mathcal{C}$ (siehe Kapitel 5) gilt :

$$\mathcal{C} \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n) \iff \mathcal{A}_i \models P((t_1{\downarrow_R})^{\pi_i}, (t_2{\downarrow_R})^{\pi_i}, \ldots, (t_n{\downarrow_R})^{\pi_i})$$

Nach $(*)$ gilt dann $\mathcal{C} \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ genau dann, wenn

$$\mathcal{A}_i \models P(\sigma_{|V}(s_1), \sigma_{|V}(s_2), \ldots, \sigma_{|V}(s_n))$$

für die berechenbare Folge s_1, s_2, …, s_n und die Substitution σ, gilt.

Da $\sigma_{|V}$ eine Variablenumbenennung ist, ist $(\sigma_{|V})^{-1}$ auch eine Substitution.
Nach der Abgeschlossenheit der Interpetation von P in $\mathcal{A}_i$ bezüglich Substitutionen gilt damit $\mathcal{C} \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ genau dann, wenn $\mathcal{A}_i \models P(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ gilt.

Da die Folge s_1, s_2, …, s_n nach Voraussetzung 2) effektiv berechenbar ist und P nach Voraussetzung 1) in $\mathcal{A}_i$ entscheidbar ist, ist P in $\mathcal{C}$ nach obiger Äquivalenzkette entscheidbar.

∇

Setzt man die Entscheidbarkeit eines Prädikats $P \in \Sigma_i$ in der entsprechenden Struktur $\mathcal{A}_i$ voraus, so folgt nach obigem Lemma aus der Erfüllbarkeit von Bedingung 2) stets die Entscheidbarkeit von P in der kombinierten Struktur $\mathcal{C}$ und damit, nach Kapitel 6, auch in der kombinierten Struktur $\mathcal{A}_1 \odot \mathcal{A}_2$.

Ein Weg die Erfüllbarkeit von Bedingung 2) zu untersuchen besteht darin, einen Operator $\Downarrow$ auf $T(\Sigma_1 \cup \Sigma_2, X)$ zu definieren, der zu jedem Term $t \in T(\Sigma_1 \cup \Sigma_2, X)$ eine E–äquivalente Form $t\Downarrow$ berechnet, deren Fremdterme $\Downarrow$–reduziert sind, so daß $sg(t\Downarrow) = sg(t{\downarrow_R})$ gilt.
Ist $\Downarrow$ ein solcher Operator, so kann man dann, für alle Terme $t \in T(\Sigma_1 \cup \Sigma_2, X)$, die E_i–Gleichheit von $(t{\downarrow_R})^{\pi_i}$ und $(t\Downarrow)^{\pi_i}$ zeigen (Lemma 7.4).
Ist $(t\Downarrow)^{\pi_i}$ zusätzlich (bis auf E_i–Gleichheit und Variablenumbenennung) berechenbar, so entspricht dies genau der Erfüllbarkeit der zweiten Bedingung des Lemmas 7.2.

Definition 7.3

Seien Σ eine Signaturen, X eine abzählbare Menge, E eine endliche Menge von Σ–Identitäten über X und M eine beliebige Teilmenge von $T(\Sigma, X)$. Ferner sei Y eine beliebige Variablenmenge.

Eine Abbildung $\pi : M \to Y$ heißt eine Termabstaktion modulo E von M in Y, wenn

$$\pi(s) = \pi(t) \iff s =_E t$$

für alle s, $t \in M$, gilt.

Lemma 7.4
Seien Σ_1, Σ_2 disjunkte Signaturen, X eine abzählbare Variablenmenge und $\Downarrow$ ein Operator auf $T(\Sigma, X)$, der für alle Terme $t \in T(\Sigma, X)$ folgende Bedingungen erfüllt :

0) $x\Downarrow = x$ und $a\Downarrow = a$, für alle $x \in X$ und alle $a \in \Sigma^{(0)}$,
1) $t\Downarrow \ =_E \ t$,
2) $t\Downarrow$ und $t\downarrow_R$ sind beide Variablen aus X oder es gilt : $sg(t\Downarrow) \ = sg(t\downarrow_R)$
3) alle Fremdterme von $t\Downarrow$ sind $\Downarrow$–reduziert

wobei $t\Downarrow$ die $\Downarrow$–reduzierte Form von t bezeichnet.
Ferner seien $\Sigma := \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, Y eine beliebige Variablenmenge geeigneter Kardinalität und $\pi : T(\Sigma, X) \to Y$ eine E–Termabstraktion. Dann gilt :

a) $(t\Downarrow)^{\pi_i} \ =_{E_i} \ (t\downarrow_R)^{\pi_i}$, für $i = 1, 2$ und alle $t \in T(\Sigma, X)$.

b) $t\Downarrow \ =_E \ s\Downarrow \quad \Longleftrightarrow \quad (t\Downarrow)^{\pi_i} \ =_{E_i} \ (s\Downarrow)^{\pi_i}$, für $i = 1, 2$ und alle Terme s, $t \in T(\Sigma, X)$.

c) Ist Z eine weitere Variablenmenge geeigneter Kardinalität und $\pi' : T(\Sigma, X) \to Z$ eine E–Termabstraktion, so gilt

$$(t\Downarrow)^{\pi_i} \ =_{E_i} \ (s\Downarrow)^{\pi_i} \quad \Longleftrightarrow \quad (t\Downarrow)^{\pi'_i} \ =_{E_i} \ (s\Downarrow)^{\pi'_i}$$

für $i = 1, 2$ und alle Terme s, $t \in T(\Sigma, X)$.

Beweis
Seien $\Downarrow$ ein beliebiger Operator auf $T(\Sigma, X)$, der die Bedingungen 0) – 3) des Lemmas erfüllt, $\pi : T(\Sigma, X) \to Y$ eine E–Termabstraktion und t ein beliebiger Term aus $T(\Sigma, X)$.

a) Zu zeigen : $(t\Downarrow)^{\pi_i} \ =_{E_i} \ (t\downarrow_R)^{\pi_i}$
Da $\Downarrow$ die Bedingung 2) des Lemmas erfüllt, sind $t\downarrow_R$ und $t\Downarrow$ entweder beide Variablen oder es gilt : $sg(t\Downarrow) = sg(t\downarrow_R)$.
Da E_1 und E_2 nach Voraussetzung konsistent sind und der $\Downarrow$–Operator die Bedingung 1) des Lemmas erfüllt, sind $t\downarrow_R$ und $t\Downarrow$ immer (syntaktisch) gleich, wenn sie Variablen sind. Damit ist die Behauptung klar, wenn $t\downarrow_R$ und $t\Downarrow$ Variablen sind.

- Fall 1 : $sg(t\Downarrow) = \Sigma_i$
Dann gilt nach Definition von π_i :

$$(t\Downarrow)^{\pi_i} \ = \ t\Downarrow[w \leftarrow \pi((t\Downarrow)|_w)]_{w \in FremdStellen(t\Downarrow)}. \tag{1}$$

Sei $s := t\Downarrow[w \leftarrow ((t\Downarrow)|_w)\downarrow_R]_{w \in FremdStellen(t\Downarrow)}$.

Da $\Downarrow$ die Bedingung 3) des Lemmas erfüllt, ist $(t\Downarrow)|_w$ als Fremdterm von t selbst $\Downarrow$–reduziert.

Da R ein Reduktionssystem für $E = E_1 \cup E_2$ folgt aus der Bedingung 1) des Lemmas :

$$(t\Downarrow)|_w \;\; =_E \;\; ((t\Downarrow)|_w)\downarrow_R. \tag{2}$$

Nach Definition von s und Gleichung (2) gilt dann :

$$t\Downarrow \;\; =_E \;\; s \;\; \wedge \;\; (t\Downarrow)^{\pi_i} \;\; = \;\; s^{\pi_i}. \tag{3}$$

Da s ein i–Term ist, dessen Fremdterme R–irreduzibel sind, gilt nach der zweiten Eigenschaft von R (siehe Kapitel 6) :

$$s^{\pi_i} \;\; =_{E_i} \;\; (s\downarrow_R)^{\pi_i}. \tag{4}$$

Da R ein *konvergentes* Reduktionssystem für E ist, folgt aus $t\Downarrow =_E s$ (Bedingung 3 des Lemmas) : $(t\Downarrow)\downarrow_R = s\downarrow_R$ und aus $t\Downarrow =_E t$ (Bedingung 1) : $(t\Downarrow)\downarrow_R = t\downarrow_R$. Damit gilt :

$$s\downarrow_R \;\; = \;\; t\downarrow_R. \tag{5}$$

Insgesamt gilt dann :

$$(t\Downarrow)^{\pi_i} \;\; \overset{(3)}{=} \;\; s^{\pi_i} \;\; \overset{(4)}{=}_{E_i} \;\; (s\downarrow_R)^{\pi_i} \;\; \overset{(5)}{=} \;\; (t\downarrow_R)^{\pi_i}.$$

- Fall 2 : $sg(t\Downarrow) \neq \Sigma_i$
  Dann gilt nach Definition von π :

$$(t\Downarrow)^{\pi_i} \;\; \overset{\text{Def}}{=} \;\; \pi(t\Downarrow) \;\; \overset{\text{Bed. 1}}{=} \;\; \pi(t\downarrow_R) \;\; \overset{\text{Def}}{=} \;\; (t\downarrow_R)^{\pi_i}.$$

b) Seien $\Downarrow$ und π wie in a) und s, t beliebige Terme aus $T(\Sigma, X)$. Dann gilt

$$t\Downarrow =_E s\Downarrow \;\; \overset{\text{Bed. 1)}}{\Longleftrightarrow} \;\; t\downarrow_R = s\downarrow_R \;\; \Longleftrightarrow \;\; (t\downarrow_R)^{\pi_i} = (s\downarrow_R)^{\pi_i} \;\; \overset{\text{a)}}{\Longleftrightarrow} \;\; (t\Downarrow)^{\pi_i} =_{E_i} (s\Downarrow)^{\pi_i}$$

c) Seien $\Downarrow$ und π wie in a) und π' eine E–Termabstraktion von $T(\Sigma, X)$ in eine Menge Z geeigneter Kardinalität.

Dann ist die Abbildung $\sigma : Bild_{\pi'} \to Bild_{\pi}$ definiert durch :

$$\sigma(z) = y \iff \exists\, t \in T(\Sigma_1 \cup \Sigma_2, X) \quad | \quad \pi'(t) = z \;\wedge\; \pi(t) = y$$

offensichtlich eine Bijektion. Damit gilt :

$$(t\Downarrow)^{\pi'_i}\sigma_{|V} \;\; = \;\; (t\Downarrow)^{\pi_i} \;\; \wedge \;\; (s\Downarrow)^{\pi'_i}\sigma_{|V} \;\; = \;\; (s\Downarrow)^{\pi_i}$$

wobei $\sigma_{|V}$ die Einschränkung von σ auf die Menge $V := Var(t\Downarrow) \cup Var(s\Downarrow)$ bezeichnet. Da die Einschränkung von σ auf V eine Variablenumbenennung ist, ist auch $\sigma_{|V}^{-1}$ eine Substitution. Da zusätzlich $=_{E_i}$ abgeschlossen bezüglich Substitutionen ist, gilt somit :

$$(t\Downarrow)^{\pi_i} =_{E_i} (s\Downarrow)^{\pi_i} \iff (t\Downarrow)^{\pi_i'} =_{E_i} (s\Downarrow)^{\pi_i'}$$

Folgerung 7.5

Die Definition der Gültigkeit von atomaren Formeln über der gemischten Signatur in der kombinierten Struktur $\mathcal{C}$, wie in [KR 94],

$$\mathcal{C} \models P(\ t_1, t_2, \ldots, t_n\ ) \ :\iff\ \mathcal{A}_i \models P(\ (t_1{\downarrow_R})^{\pi_i}, (t_2{\downarrow_R})^{\pi_i}, \ldots, (t_n{\downarrow_R})^{\pi_i}\ )$$

wobei R das Reduktionssystem für E, wie in [BS 92], und $\pi : T{\downarrow_R} \to Y$ eine beliebige Bijektion sind, ist äquivalent zu der Definition

$$\mathcal{C} \models P(\ t_1, t_2, \ldots, t_n\ ) \ :\iff\ \mathcal{A}_i \models P(\ (t_1\Downarrow)^{\pi_i}, (t_2\Downarrow)^{\pi_i}, \ldots, (t_n\Downarrow)^{\pi_i}\ )$$

wobei $\Downarrow$ ein beliebiger Operator auf $T(\Sigma, X)$, der die Bedingungen 0) – 3) des Lemmas 7.4 erfüllt und π eine beliebige E–Termabstraktion auf $T(\Sigma, X)$ sind.

Ist der $\Downarrow$–Operator berechenbar und die E–Gleichheit zwischen $\Downarrow$–reduzierten Termen entscheidbar, so ist die Bestimmung der $\Downarrow$–reduzierten Formen zu den Termen t_1, t_2, …, t_n nach Folgerung 7.5 ein effektiver Weg, um $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ in $\mathcal{C}$ zu entscheiden.

Um die E–Gleichheit zwischen beliebigen $\Downarrow$–reduzierten Termen $s\Downarrow$ und $t\Downarrow$ zu entscheiden, können wir nach Lemma 7.4.b) die Entscheidbarkeit von

$$s\Downarrow \stackrel{?}{=}_E t\Downarrow$$

auf die Entscheidbarkeit der endlich vielen Fragen

$$(s\Downarrow)|_u \stackrel{?}{=}_E (s\Downarrow)|_w, \quad (t\Downarrow)|_u \stackrel{?}{=}_E (t\Downarrow)|_w, \quad (s\Downarrow)|_u \stackrel{?}{=}_E (t\Downarrow)|_w$$

zurückführen, wobei u, w beliebige Fremdstellen in den entsprechenden Termen bezeichnen.

Damit die induktive Anwendung dieser Vorgehensweise zum Erfolg führen kann, muß das Wortproblem für E_1 und E_2 (siehe Kapitel 1) entscheidbar sein.

Das nächste Lemma zeigt, daß diese Voraussetzung ausreichend ist, wenn wir die Berechenbarkeit des $\Downarrow$–Operators voraussetzen. Zu dem garantiert Lemma 7.4.c, daß das Ergebnis unabhängig von der verwendeten E–Termabstraktion π ist.

Lemma 7.6
Seien E_1 und E_2 Gleichungstheorien über disjunkten Signaturen Σ_1, Σ_2 und X eine beliebige Variablenmenge. Ferner seien $\Sigma := \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ und $\Downarrow$ ein Operator auf $T(\Sigma, X)$, der die Bedingungen des Lemmas 7.4 erfüllt.

Dann ist $s\Downarrow \stackrel{?}{=}_E t\Downarrow$, für alle Terme s, $t \in T(\Sigma, X)$, entscheidbar, wenn das Wortproblem für E_1 und E_2 entscheidbar ist und der Operator $\Downarrow$ berechenbar ist.

Beweis
Sei $\Downarrow$ ein berechenbarer Operator auf $T(\Sigma, X)$, der die Bedingung 0) – 3) aus Lemma 7.4 erfüllt und s, t beliebige Terme aus $T(\Sigma, X)$. Ferner nehmen wir an, daß das Wortproblem für E_1 und E_2 entscheidbar ist.

Zu zeigen : $s\Downarrow \stackrel{?}{=}_E t\Downarrow$ ist entscheidbar.

Wir führen den Beweis mit Induktion über die maximale Anzahl der Theorienwechseln in $s\Downarrow$ und $t\Downarrow$, dh. über $max(ht(s\Downarrow), ht(t\Downarrow))$.

1. Induktionsanfang : $s\Downarrow$ und $t\Downarrow$ sind Variablen oder reinen Terme.

- Fall 1 : $s\Downarrow$ und $t\Downarrow$ sind reine Terme und $sg(s\Downarrow) \neq sg(t\Downarrow)$
  Da der $\Downarrow$–Operator die Bedingungen 1) und 2) des Lemmas 7.4 erfüllt, ist $sg(s{\downarrow_R}) \neq sg(t{\downarrow_R})$ (nach Bedingung 2) und damit auch $s\Downarrow \neq_E t\Downarrow$ (nach Bedingung 1).

- Fall 2 : $s\Downarrow$ und $t\Downarrow$ sind reine Terme und $sg(s\Downarrow) = sg(t\Downarrow)$
  Wir nehmen o.E. an, daß $sg(s\Downarrow) = sg(t\Downarrow) = \Sigma_1$ ist. Dann gilt $s\Downarrow =_E t\Downarrow$ genau dann, wenn $(s\Downarrow)^{\pi_1} =_{E_1} (t\Downarrow)^{\pi_1}$ gilt. Da das Wortproblem für E_1 nach Voraussetzung entscheidbar ist, ist $(s\Downarrow)^{\pi_1} \stackrel{?}{=}_{E_1} (t\Downarrow)^{\pi_1}$ entscheidbar.

- Fall 3 : mindestens $s\Downarrow$ oder $t\Downarrow$ ist eine Variable.
  Da das Wortproblem für E_1 und E_2 nach Voraussetzung entscheidbar ist und $s\Downarrow =_E t\Downarrow$ genau dann gilt, wenn $(s\Downarrow)^{\pi_1} =_{E_1} (t\Downarrow)^{\pi_1}$ gilt, ist $s\Downarrow \stackrel{?}{=}_E t\Downarrow$ entscheidbar.

2. Induktionsannahme : angenommen für ein $n > 1$ und zwei (beliebige) $\Downarrow$–reduzierte Terme $s\Downarrow$ und $t\Downarrow$, mit $ht(s\Downarrow) \leq n$ und $ht(t\Downarrow) \leq n$, ist die E–Gleichheit zwischen den Elementen der Menge aller Fremdterme von $s\Downarrow$ und $t\Downarrow$ entscheidbar.

2. Induktionsschritt : zu zeigen : $s\Downarrow \stackrel{?}{=}_E t\Downarrow$ ist entscheidbar.

- Fall 1 : $sg(s\Downarrow) \neq sg(t\Downarrow)$
  Da der $\Downarrow$–Operator die Bedingung 2) des Lemmas 7.4 erfüllt, ist : $sg(s{\downarrow_R}) \neq sg(t{\downarrow_R})$ und damit auch : $s{\downarrow_R} \neq t{\downarrow_R}$.

Andererseits erfüllt $\Downarrow$ die Bedingung 1) des Lemmas 7.4 und R ist ein korrektes Reduktionssystem für E. Damit ist $(s\Downarrow)\downarrow_R = s\downarrow_R$ und $(t\Downarrow)\downarrow_R = t\downarrow_R$.
Da R zusätzlich konvergent ist, gilt $s\Downarrow =_E t\Downarrow$ genau dann, wenn $(s\Downarrow)\downarrow_R = (t\Downarrow)\downarrow_R$ gilt. Da aber $(s\Downarrow)\downarrow_R = s\downarrow_R \neq t\downarrow_R = (t\Downarrow)\downarrow_R$ ist, können $s\Downarrow$ und $t\Downarrow$ nicht E–Gleich sein, dh. es gilt : $s\Downarrow \neq_E t\Downarrow$.

- Fall 2 : $sg(s\Downarrow) = sg(t\Downarrow)$
  Dann gilt $s\Downarrow =_E t\Downarrow$ nach Lemma 7.4.b) genau dann, wenn $(s\Downarrow)^{\pi_i} =_{E_i} (s\Downarrow)^{\pi_i}$ gilt.
  Zu dem ist die E–Gleichheit (nach Induktionssannahme) für alle Fremdterme von $s\Downarrow$ und $t\Downarrow$ entscheidbar.
  Damit sind $(s\Downarrow)^{\pi_i}$ und $(t\Downarrow)^{\pi_i}$ für eine beliebige E–Termabstraktion :
  $$\pi : Fremdterme(s\Downarrow) \cup Fremdterme(t\Downarrow) \rightarrow Z$$
  berechenbar.
  Da nach Voraussetzung das Wortproblem für E_1 und E_2 entscheidbar ist, ist die Frage $(s\Downarrow)^{\pi_i} \stackrel{?}{=}_{E_i} (s\Downarrow)^{\pi_i}$ entscheidbar. Zu dem ist der Antwort nach Lemma 7.4.c) unabhängig von der verwendeten E–Termabstraktion.
  Damit ist $s\Downarrow =_E t\Downarrow$ (nach Lemma 7.4.b)) entscheidbar.

∇

Zusammenfassend haben wir bis jetzt gezeigt, daß die Bedingung 2) des Lemmas 7.2 erfüllbar ist, wenn wir die Entscheidbarkeit des Wortproblems für E_1 und E_2 vorraussetzen und einen **berechenbaren** Operator $\Downarrow$ auf $T(\Sigma_1 \cup \Sigma_2, X)$ definieren können, der die Bedingungen 0) – 3) des Lemmas 7.4 erfüllt. Der nächste Schritt besteht darin, einen solchen Operator zu definieren.

Definition 7.7 *

Seien Σ_1, Σ_2 disjunkte Signaturen, X eine Variablenmenge und E_1, E_2 respektiv endliche Mengen von Σ_1 (Σ_2)–Identitäten über X.

Die $\Downarrow$–reduzierte Form eines Terms $t \in T(\Sigma_1 \cup \Sigma_2, X)$ wird induktiv über $ht(t)$, wie folgt, definiert :

- Ist t eine Variable oder eine Konstante, so $t\Downarrow := t$.
- Andernfalls definieren wir zu t den Term :
  $$t' := t[w \leftarrow (t_{|w})\Downarrow]_{w \in FremdStellen(t)}$$
  Ferner nehmen wir an, daß die E–Gleichheit zwischen den Fremdtermen von t' entscheidbar ist.
  Für eine beliebige Variablenmenge Z (geeigneter Kardinalität) und eine beliebige Bijektion :
  $$\Pi : \{\ [s]_E \quad : \quad s \in FremdTerme(t')\ \} \rightarrow Z$$

* Diese Definition ist ähnlich zu der in [KR 94]

definieren wir zu t' den reinen Term :

$$t'' := t'[w \leftarrow \Pi(t'_{|w})]_{w \in FremdStellen(t')}$$

Die $\Downarrow$–reduzierte Form von t wird dann durch :

$$t\Downarrow = \begin{cases} u & \text{falls } \exists u \in V(t'') \cap X \quad : \quad t'' =_{E_i} u, \\ REP(\Pi^{-1}(u)) & \text{falls } \exists u \in V(t'') \backslash X \quad : \quad t'' =_{E_i} u, \\ t' & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert, wobei E_i der Signatur Σ_i von t'' entspricht und $REP(\Pi^{-1}(u))$ ein beliebiger Repräsentant der Äquivalenzklasse $\Pi^{-1}(u)$ ist.

Lemma 7.8
Der $\Downarrow$–Operator nach Definition 7.7 erfüllt die Bedingungen 0) – 3) aus Lemma 7.4.

Beweis

0) Diese Bedingung ist einfach nach Definition erfüllt.

1) Ist $t\Downarrow \neq t$, so gibt es eine Stelle $w \in O(t)$, eine Identität $(l, r) \in E$ und eine Substitution θ, so daß r eine Variable ist, $\theta(l) = t_{|w}$ und $t\Downarrow = t[w \leftarrow \theta(r)]$ gilt. Damit gilt stets $t \rightarrow_R t\Downarrow$. Da R ein korrektes Reduktionssystem für E ist, gilt somit stets $t =_E t\Downarrow$.

2) Sei t ein beliebiger Term aus $T(\Sigma_1 \cup \Sigma_2, X)$. Zu zeigen : $sg(t\downarrow_R) = sg(t\Downarrow)$.
Wir führen den Beweis durch Induktion über $ht(t)$.

- Induktionsanfang : t ist eine Variable oder ein reiner Term.
- $*$ Fall 1 : t ist eine Variable $x \in X$.
  Dann folgt respektiv aus der ersten Eigenschaft des Reduktionssystems R für E (Kapitel 6) und aus der Definition des $\Downarrow$–Operators : $t\downarrow_R = t\Downarrow = x$.

- $*$ Fall 2 : t ist ein reiner Term.
  Wir nehmen o.E. an, daß t ein reiner i–Term, für ein festgelegtes $i \in \{ 1, 2 \}$, ist.
  Dann ist $t\downarrow_R$ entweder eine Variable aus $Var(t)$ oder ein reiner i–Term.
  Da R ein konvergentes Reduktionssystem für $(E_1 \cup E_2)$ ist und t ein reiner i–Term ist, gilt $t\downarrow_R = x$ genau dann, wenn $t =_{E_i} x$ gilt (was auch $x \in Var(t)$ impliziert).
  Andererseits ist der Term t'' in der Definition 7.7 identisch mit t, da t ein reiner Term ist. Damit gilt $t\downarrow_R = x$ genau dann, wenn $t\Downarrow = x$ gilt, dh. $t\downarrow_R$ und $t\Downarrow$ sind entweder beide Variablen oder beide reine i–Terme.

- Induktionsannahme : wir nehmen an, daß für ein $n > 1$ und alle Terme t mit $ht(t) \leq n$ gilt : $t\downarrow_R$ und $t\Downarrow$ sind beide Variablen oder es gilt : $sg(t\downarrow_R) = sg(t\Downarrow)$.

- Induktionsschritt : sei t ein Term aus $T(\Sigma_1 \cup \Sigma_2, X)$ mit $ht(t) = n + 1$.

Zu zeigen : $t{\downarrow_R}$ und $t{\Downarrow}$ sind beide Variablen oder es gilt : $sg(t{\Downarrow}) = sg(t{\downarrow_R})$.

Für die Bestimmung von $t{\Downarrow}$ unterscheiden wir nach Definition 7.7 drei Fälle :

* Fall 1 : es gibt eine Variable $x \in Var(t'') \cap X$ mit $t'' =_{E_i} x$, wobei E_i der Signatur Σ_i von t'' entspricht und t'' wie in Definition 7.7 definiert ist.
  Dann ist (nach Definition 7.7) : $t{\Downarrow} = x$.
  Da der $\Downarrow$–Operator (nach diesem Lemma) die Bedingung 1) aus Lemma 7.4 erfüllt, gilt stets : $t{\Downarrow} =_E t$, dh. es gilt in diesem Fall : $t =_E x$.
  Da einerseits x nach der Eigenschaft 1 von R (Kapitel 6) R–irreduzibel ist und andererseits R ein *konvergentes* Reduktionssystem für E ist, gilt : $t{\downarrow_R} = x$. Damit gilt : $t{\downarrow_R} = t{\Downarrow} = x$.

* Fall 2 : es gibt eine Variable $u \in Var(t'') \backslash X$ mit $t'' =_{E_i} u$, wobei E_i der Signatur Σ_i von t'' entspricht.
  Dann ist nach Definition 7.7 : $t{\Downarrow} = REP(\Pi^{-1}(u))$, wobei u die Abstraktionsvariable eines $\Downarrow$–reduzierten Fremdterms von t' ist. Damit ist u auch die Abstraktionsvariable eines Fremden Unterterms $t_{|w}$ von t mit : $sg((t_{|w}){\Downarrow}) = sg(t_{|w})$, dh. wir können einen Repräsentanten für $\Pi^{-1}(u)$ so wählen, daß es gilt : $t{\Downarrow} = (t_{|w}){\Downarrow}$, für einen Fremdterm $t_{|w}$ von t.
  Da der $\Downarrow$–Operator die Bedingung 1) des Lemmas erfüllt und R ein korrektes Reduktionssystem für E gilt :
  $$(t_{|w}){\Downarrow} =_E (t_{|w}){\downarrow_R}$$
  Damit gilt :
  $$t \overset{\text{Bed.1)}}{=}_E t{\Downarrow} = (t_{|w}){\Downarrow} =_E (t_{|w}){\downarrow_R}$$
  Dh. es gilt : $t =_E (t_{|w}){\downarrow_R}$.
  Da R ein konvergentes Reduktionssystem für E ist, gilt somit : $t{\downarrow_R} = (t_{|w}){\downarrow_R}$.
  Damit gilt insgesamt :
  $$t{\Downarrow} = (t_{|w}){\Downarrow} \quad \wedge \quad t{\downarrow_R} = (t_{|w}){\downarrow_R}$$
  Da nun $ht(t_{|w}) \leq n$ ist, ist die Induktionsannahme für $t_{|w}$ anwendbar, dh. es gilt :
  $$sg((t_{|w}){\Downarrow}) = sg((t_{|w}){\downarrow_R})$$
  und damit :
  $$sg(t{\downarrow_R}) = sg(t{\Downarrow})$$

* Fall 3 : für alle $v \in Var(t'')$ gilt : $t'' \neq_{E_i} v$.
  Dann ist nach Definition 7.7 : $t{\Downarrow} = t' := t[w \leftarrow (t_{|w}){\Downarrow}]_{w \in FremdStellen(t)}$.
  Ferner sei $t_0 := t[w \leftarrow (t_{|w}){\downarrow_R}]_{w \in FremdStellen(t)}$. Dann gilt : $sg(t') = sg(t_0)$.

  Wir unterscheiden zwei fälle für t_0 :

- Fall 3.1 : t_0 ist R–irreduzibel.
  Dann ist : $t{\downarrow_R} = t_0$ und damit :$sg(t\Downarrow) = sg(t') = sg(t_0) = sg(t{\downarrow_R})$.

- Fall 3.2 : t_0 ist R–reduzibel.
  Dann ist t_0 ein R–reduzibler Term, dessen Fremdterme R–irreduzibel sind. Nach Kapitel 6 (Eigenschaften des Reduktionssystems R) ist $t_0{\downarrow_R}$ entweder ein Fremdterm von t_0 oder es gilt : $sg(t_0) = sg(t_0{\downarrow_R})$.
  Wir zeigen, daß in diesem Fall $t_0{\downarrow_R}$ kein fremder Unterterm von t_0 sein kann.
  Angenommen, $t_0{\downarrow_R}$ wäre ein fremder Unterterm von t_0, dann wäre $t_0{\downarrow_R} = (t_{|w}){\downarrow_R}$, für eine Fremstelle $w \in O(t)$.
  Da R ein korrektes Reduktionssystem für E ist, gilt : $t_0 =_E t$ und damit auch : $t{\downarrow_R} = t_0{\downarrow_R}$, dh. $t{\downarrow_R} = (t_{|w}){\downarrow_R}$, für eine Fremdstelle $w \in O(t)$.
  Da der $\Downarrow$–Operator die Bedingung 1) erfüllt, gilt :

  $$t' =_E t$$

  und da R ein konvergentes Reduktionssystem für E ist, gilt :

  $$t{\downarrow_R} = (t_{|w}){\downarrow_R} =_E (t_{|w})\Downarrow$$

  Damit gilt :

  $$t' =_E (t_{|w})\Downarrow$$

  Somit gäbe es aber die Abstraktionsvariable $u := \Pi((t_{|w})\Downarrow)$ in t'' mit : $t'' =_{E_i} u$ und $t\Downarrow$ wäre verschieden von t' (Widerspruch).
  Damit gilt für $t_0{\downarrow_R}$: $sg(t_0{\downarrow_R}) = sg(t_0)$ und damit :

  $$sg(t{\downarrow_R}) = sg(t_0{\downarrow_R}) = sg(t') = sg(t\Downarrow)$$

  dh. es gilt : $sg(t{\downarrow_R}) = sg(t\Downarrow)$.

3) Diese Eigenchaft ist einfach nach Definition des $\Downarrow$–Operators erfüllt.

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß der $\Downarrow$–Operator von Definition 7.7 berechenbar ist.

Lemma 7.9

Sei $\Downarrow$ der Operator von Definition 7.7 und t ein beliebiger Term aus $T(\Sigma, X)$. Dann kann man zu t stets eine $\Downarrow$–reduzierte Form effektiv bestimmen.

Beweis

Sei t ein beliebiger Term aus $T(\Sigma, X)$, wobei $\Sigma := \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ ist.
Der Beweis wird mit Induktion über die Anzahl der Theorienwechseln in t durchgeführt.
Dabei werden die $\Downarrow$–Reduzierten Formen der Fremdterme von t in E–Äquivalenzklassen zerlegt.

- Induktionsanfang : t ist eine Variable oder ein reiner Term.
  - Fall 1 : t ist eine Variable oder eine Konstante.
    Dann ist nach Definition 7.7 : $t\Downarrow = t$. Damit ist $t\Downarrow$ offenbar berechenbar.
  - Fall 2 : t ist ein reiner i–Term, für ein beliebiges $i \in \{ 1, 2 \}$.
    Dann sind die Hilfsterme t' und t'' nach Definition 7.7 gleich t und damit berechenbar. Da in t nur endlich viele Variablen vorkommen und das Wortproblem für E_i nach Voraussetzung entscheidbar ist, ist : $t \stackrel{?}{=}_{E_i} v$, für alle in t vorkommenden Variablen v, Entscheidbar.
    Gibt es eine Stelle $w \in O(t)$ und eine Variable $x \in V(t)$ mit : $t_{|w} = x$ und $t =_{E_i} x$, so gilt : $t'' =_{E_i} x$.
    Nach Definition 7.7 ist somit $t\Downarrow = x$ und damit berechenbar.
    Anderenfalls ist $t\Downarrow$ nach Definition 7.7 identisch mit $t' = t$ und damit auch berechenbar.

- Induktionsannahme : angenommen, für einen beliebigen Term t und alle Fremdterme $t_{|w}$ von t kann man eine $\Downarrow$–reduzierte Form (nach Definition 7.7) bestimmen.

- Induktionsschritt : wir wollen zeigen, daß wir dann eine $\Downarrow$–reduzierte Form von t effektiv bestimmen können.
  Da wir nach Induktionsvoraussetzung zu jedem Fremterm von t eine $\Downarrow$–reduzierte Form effektiv bestimmen können, ist einerseits der Term t', wie in Definition 7.7, effektiv berechenbar und andererseits die E–Gleichheit zwischen den $\Downarrow$–reduzierten Formen nach Lemma 7.6 entscheidbar.
  Damit ist die Menge $M := \{ [(t_{|w})\Downarrow]_E \quad : \quad w \in FremdStellen(t) \}$ endlich und berechenbar.
  Sei dann Z eine beliebige Variablenmenge, mit $M \cap X = \emptyset$ und $|Z| = |M|$, und sei $\Pi : M \rightarrow Z$ eine beliebige Bijektion. Dann ist Π offenbar berechenbar und damit auch der Hilfsterm t'' nach Definition 7.7.
  Da nach Voraussetzung das Wortproblem für E_i entscheidbar ist, ist dann die Frage : $t'' \stackrel{?}{=} v$, für alle Variablen $v \in Var(t'')$, entscheidbar.
  Wir unterscheiden daher die folgenden Fälle :
  - Fall 1 : es gibt ein $v \in Var(t'')$ und $v \notin Z$.
    Dann ist $v \in X$. Damit ist : $t\Downarrow \stackrel{\text{Def}}{=} v$ und damit berechenbar.
  - Fall 2 : es gibt ein $v \in Var(t'')$ und $v \in Z$.
    Dann ist : $t\Downarrow \stackrel{\text{Def}}{=} REP(\Pi^{-1}(v))$. Da Π endlich und berechenbar ist, ist Π^{-1} auch berechenbar, dh. wir können die E–Äquivalenzklasse $K \in M$ bestimmen, mit $\Pi(K) = v$.
    Wir wählen dann für $t\Downarrow$ einen beliebigen $\Downarrow$–reduzierten Term aus K. Damit haben wir zu t eine $\Downarrow$–reduzierte Form bestimmt.

– Fall 3 : es gibt keine Variable $v \in Var(t'')$ mit $t'' =_{E_i} v$.
Dann ist $t\Downarrow$ nach Definition 7.7 gleich t'. Da t' nach Obigem berechenbar ist, ist somit $t\Downarrow$ berechenbar.

Folgerung 7.10

Für den $\Downarrow$–Operator nach Definition 7.7, alle Terme $t \in T(\Sigma, X)$ und eine beliebige und E–Termabstraktion $\pi : T(\Sigma, X) \to Z$ ist der Term :

$$(t\Downarrow)^{\pi_i}$$

bis auf Variablenumbenennung *eindeutig bestimmt* und effektiv berechenbar, für $i = 1, 2$.

Hauptsatz

Ist das Wortproblem für E_1 und E_2 entscheidbar und ist die Gültigkeit von atomaren Formeln über den einzelnen disjunkten Signaturen entscheidbar, so ist die Gültigkeit von atomaren Formeln über der gemischten Signatur nach [BS 94] und [KR 94] entscheidbar.

Beweis

Seien P ein beliebiges Prädikatensymbol, n die Stelligkeit von P und $t_1, t_2, \ldots, t_n$ beliebige Terme aus $T(\Sigma, X)$, wobei $\Sigma := \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ und X eine beliebige Variablenmenge sind.

Nach dem Hauptsatz in Kapitel 6 gilt dann $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ in dem amalgamierten Produkt, wie in [BS 94], genau dann, wenn $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ nach der Definition der Gültigkeit von atomaren Formeln über der gemischten Signatur, wie in [KR 94], gilt, dh. auch genau dann, wenn $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ in der kombinierten Struktur $\mathcal{C}$ (siehe Kapitel 5) gilt.

Nach Folgerung 7.5 gilt dann $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ in der kombinierten Struktur $\mathcal{C}$ genau dann, wenn $P(\ (t_1\Downarrow)^{\pi_i}, (t_2\Downarrow)^{\pi_i}, \ldots, (t_n\Downarrow)^{\pi_i}\ )$ in $\mathcal{A}_i$ gilt, wobei $\Downarrow$ ein Operator, der die Bedingungen 0) – 3) aus Lemma 7.4 erfüllt und π eine beliebige E–Termabstraktion sind.

Nach Folgerung 7.10 kann man zu jedem Term t einen Term $(t\Downarrow)^{\pi_i'}$ effektiv bestimmen, der die Bedingung 2) aus Lemma 7.2 erfüllt.
Damit kann man zu jeder endlichen Folge $t_1, t_2, \ldots, t_n$ eine Folge von reinen i–Termen oder Variablen $s_1, s_2, \ldots, s_n$, indem man den Term

$$t := f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

betrachtet, wobei f ein neues Funktionssymbol der Stelligkeit n bezeichnet.

Da P nach Voraussetzung in $\mathcal{A}_i$ entscheidbar ist, und $(t_i\Downarrow)^{\pi_i'}$ reine i–Terme oder Variablen sind, ist somit $P(\ (t_1\Downarrow)^{\pi_i}, (t_2\Downarrow)^{\pi_i}, \ldots, (t_n\Downarrow)^{\pi_i}\ )$ in $\mathcal{A}_i$ entscheidbar. Damit ist $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, nach Interpretation von P in $\mathcal{C}$ und Folgerung 7.5, in $\mathcal{C}$ entscheidbar.

∇

Zusammenfassung : in diesem Kapitel haben wir gezeigt, daß die Entscheidbarkeit der Gültgkeit von reinen atomaren Formeln (in den entsprechenden Strukturen) zusammen mit der Entscheidbarkeit des Wortproblems in jeder der zu kombinierenden Strukturen notwendige und hinreichene Bedingungen sind, um die Güttigkeit von atomaren Formeln über der gemischten Signatur (in der kombinierten Struktur wie in [BS 94] oder äquivalent dazu nach der Definition der Gültigkeit von atomaren Formeln über der gemischten Signatur wie in [KR 94]) effektiv zu entscheiden.

Literaturverzeichnis

[Baa, 86] : F. Baader. Unifikation in idempotent semigroups is of type zero. J. Automated Reasoning, 2(3):283–286, 1986.

[Bach, 91] : L. Bachmair. Canonical Equational Proofs. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1991.

[BS, 92] : F. Baader und K.U. Schultz. Unifikation in the Union of disjoint equational theories : combining decision procedures. In D. Kapur, editor, *Proceedings of the 11the International Conference on Automated Deduktion*, Volume 607 of *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, pages 50–65, Saratoga Springs, NY, USA, 1992. Springer–Verlag.

[BS, 93] : F. Baader und K.U. Schultz. Unifikation in the Union of disjoint equational theories : combining decision procedures, 1993. Extented version, submitted for publication.

[BS, 94] : F. Baader und K.U. Schultz. Combination of Constraint Solving Techniques : An Algebraic Point of View. Centrum für Informations und Sprachverarbeitung Universität München, 94–75.

[Bü, 86] : H.-J. Bückert. Some Relationships between unification, restricted unification and matching. In J.H. Siekmann, editor, *Proceedings of the 8th International Conference on automated Deduction*, Volume 230 of *Lecture Notes in Computer Science*, Oxford, UK, 1986. Springer–Verlag.

[DJ, 87] : N. Derschowitz, J.P. Jouhannaud, "Rewrite Systems", Unite Associee au CNRS UA 410: AL KHOWARIZMI, Rapport de Recherche 478, 1989. To appear in Volume B of "Handbook of Theoretical Computer Science", North–Holland.

[Fag, 84] : F. Fages, "Associative–Commutative Unifikation", *Proceedings of the 8th International Conference on Automated Deduction*, LNCS **170**, 1984.

[Hu, 80] : G.P. Huet. Confluent Reductions: Abstract properties and applications to term rewriting systems. *J. of the ACM*, 27, 1980.

[KB, 70] : D.E. Knuth and P.B. Bendix. Simple word problems in universal algebras. In J. Leech, editor, *Computational Problems in Abstract Algebra.* Pergamon Press, Oxford, 1970.

[KK, 89] : C. Kirchner and H. Kirchner. Constrained equational Reasoning. In *Proceedings of SIGSAM 1989 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*. ACM Press, 1989.

[KR, 94] : H. Kirchner and Ch. Ringeissen. Combining symbolic constraint solvers on algebraic Domains. Unpublished manuscript, 1994.

[Plo, 72] : G. Plotkin, "Building in Equational Theories," Machine Intelligence **7**, 1972.

[Rob, 65] : J.A. Robinson. A machine oriented logic besed on the Resolution principle. *J. of the ACM* , 12(1):23–41, 1965.

[Siek, 78] : J.H. Siekmann. Unifikation and matching problems. Memo, Essex University, 1978.

[Stl, 85] : M. Stickel. "Automated Deduction by Theory Resolution," J. Automated Reasoning **1**, 1985.

[W. Wech] : W. Wechler. Universal Algebra for Computer Scientists. Springer–Verlag, 1992.