Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Informatik
Professur für Automatentheorie

Grundlagen der Theoretischen Informatik I

Musterlösung für 2. Übungsblatt, Aufgabe 4b.

Aufgabe 4

Es sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ mit $q_0 \in Q$ ein DEA. Ergänzen Sie den Beweis von Lemma 2.9, indem Sie zeigen:

b) Ist $\sim_k = \sim_{k+1}$, so ist $\sim_k = \sim_\mathcal{A}$.

Lösung

Zur Erinnerung aus der Vorlesung: $\sim_\mathcal{A} \subseteq Q \times Q$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Zustandsmenge von DEAs. Sie beschreibt die Äquivalenz von Zuständen, d.h., das Verhalten eines DEAs ist in allen zueinander äquivalenten Zuständen gleich. Anwendung: Minimierung von DEAs durch Zusammenfassen zueinander äquivalenter Zustände. Es gilt:

- $q \sim_\mathcal{A} q'$ gdw. $L(\mathcal{A}_q) = L(\mathcal{A}_{q'})$ (Def. 2.8)
- $q \sim_0 q'$ gdw. $(q \in F \Longrightarrow q' \in F)$
- $q \sim_{i+1} q'$ gdw. $q \sim_i q'$ und $\forall a \in \Sigma \;.\; \delta(q, a) \sim_i \delta(q', a)$

Zu zeigen ist: Wenn $\sim_k = \sim_{k+1}$, dann ist $\sim_k = \sim_\mathcal{A}$, d.h.: $\forall p, q \in Q \;.\; p \sim_k q \Longleftrightarrow p \sim_\mathcal{A} q$ (Terminierung der DEA-Minimierung).

Der indirekte Beweis wird in zwei Teilen geführt.

Erster Teil
Zunächst wird gezeigt, dass $(\sim_k = \sim_{k+1}) \Longrightarrow (\sim_k = \sim_{k+l})$ für alle $l \in \mathbb{N}$.
Es gilt lt. Vor. $\sim_k = \sim_{k+1}$, und es sei $l > 1$. Falls $l \in \{0, 1\}$, gilt $\sim_k = \sim_{k+l}$ offensichtlich.
Angenommen, es gibt eine natürliche Zahl l mit $\sim_k \neq \sim_{k+l}$ (*).
Da lt. Vorlesung gilt: $\sim_j \supseteq \sim_{j+r}$, muß es also $p, q \in Q$ geben mit $p \sim_k q$ und $p \not\sim_{k+l} q$. Also gibt es $a \in \Sigma$ mit $r := \delta(p, a) \not\sim_{k+l-1} \delta(q, a) =: s$.
Sei l nun die kleinste natürliche Zahl, für die (*) gilt. Dann steht $r \not\sim_k s \Longrightarrow p \not\sim_{k+1} q$ (da $\delta(p, a) \not\sim_k \delta(q, a)$) im Widerspruch zu $\sim_k = \sim_{k+1}$ (da $p \sim_k q$ vorausgesetzt war).

Zweiter Teil
Es gilt $\sim_k = \sim_{k+1} = \sim_{k+l} \;\; \forall l \in \mathbb{N}$.
Lt. Vorlesung ist zusätzlich bekannt, dass für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt: $p \sim_\mathcal{A} q \Longrightarrow p \sim_i q$.
Um „=“ statt „$\Longrightarrow$“ zu zeigen, genügt es somit zu zeigen, dass für alle $p, q \in Q$ gilt: $p \sim_k q \Longrightarrow p \sim_\mathcal{A} q$.
Es gilt lt. Vor. $p \sim_k q$.
Angenommen, $p \not\sim_\mathcal{A} q$. Dann gibt es o.B.d.A. $w \in \Sigma^*$ mit $w \in L(\mathcal{A}_q)$ und $w \notin L(\mathcal{A}_p)$. Also gilt für $n = |w|$: $p \not\sim_n q$, denn aus $w \in L(\mathcal{A}_q)$ folgt, daß $\delta(q, w) \in F$, und aus $w \notin L(\mathcal{A}_p)$ folgt, daß $\delta(p, w) \notin F$. Wegen $\sim_i \supseteq \sim_{i+1} \;\; \forall i \geq 0$ und $\sim_k = \sim_{k+l} \;\; \forall l \geq 0$ gilt also $p \not\sim_k q$ im Widerspruch zur Annahme.

w.z.b.w