Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Informatik
Dr. Monika Sturm

14.04.2011

Übungsblatt 2 - Aufgabe 4

Aussage

Für alle Terme $e \in \Lambda$ gilt

$$((e)_{\lambda-CL})_{CL-\lambda} =_\beta e.$$

Hinweis: Schritte auf der Basis von $=_\alpha$ sind zugelassen.

Beweis

mit struktureller Induktion über e

1. Term e ist eine Variable
   $e \equiv x, x \in V$
   $((x)_{\lambda-CL})_{CL-\lambda} = x = e$

2. Term e ist eine Applikation
   $e \equiv e_1 e_2$

   mit IV gilt:
   $((e_1 e_2)_{\lambda-CL})_{CL-\lambda} = ((e_1)_{\lambda-CL})(e_2)_{\lambda-CL})_{CL-\lambda} = ((e_1)_{\lambda-CL})_{CL-\lambda}((e_2)_{\lambda-CL})_{CL-\lambda}$
   $\Rightarrow_\beta e_1 e_2 = e$

3. Term e ist eine Abstraktion
   $e \equiv \lambda x.t$

   mit Hilfslemma und IV gilt:
   $((\lambda x.t)_{\lambda-CL})_{CL-\lambda} = (\lambda^* x.(t)_{\lambda-CL})_{CL-\lambda} \Rightarrow_\beta \lambda x.((t)_{\lambda-CL})_{CL-\lambda} \Rightarrow_\beta \lambda x.t$
   $= e$

Hilfslemma $(\lambda^* x.e)_{CL-\lambda} \Rightarrow_\beta \lambda x.(e)_{CL-\lambda}$

Beweis

über den strukturellen Aufbau von $e \in C$

- $e \equiv x$

  $(\lambda^* x.x)_{CL-\lambda} = I_{CL-\lambda} = (\lambda x.x) = \lambda x.(x)_{CL-\lambda} = \lambda x.(e)_{CL-\lambda}$

- $e \equiv z, z \neq x$

  $(\lambda^* x.z)_{CL-\lambda}$
  $= (K\, z)_{CL-\lambda}$
  $= K_{CL-\lambda}\, z_{CL-\lambda}$
  $= (\lambda xy.x)\, z_{CL-\lambda}$
  $\rightarrow_\beta \lambda y.(z)_{CL-\lambda}$
  $=_\alpha \lambda x.(z)_{CL-\lambda}$
  $= \lambda x.(e)_{CL-\lambda}$

- $e \equiv K$ (entsprechend auch für $e \equiv S$)

  $(\lambda^* x.K)_{CL-\lambda}$
  $= (K\, K)_{CL-\lambda}$
  $= K_{CL-\lambda}\, K_{CL-\lambda}$
  $= (\lambda xy.x)\, K_{CL-\lambda}$
  $\rightarrow_\beta \lambda y.(K)_{CL-\lambda}$
  $=_\alpha \lambda x.(K)_{CL-\lambda}$
  $= \lambda x.(e)_{CL-\lambda}$

- $e \equiv (e_1\, e_2)$

  $(\lambda^* x.e_1\, e_2)_{CL-\lambda}$
  $= (S(\lambda^* x.e_1)(\lambda^* x.e_2))_{CL-\lambda}$
  $= (S(\lambda^* x.e_1))_{CL-\lambda}\ (\lambda^* x.e_2)_{CL-\lambda}$
  $= (S(\lambda^* x.e_1))_{CL-\lambda}\ (\lambda x.(e_2)_{CL-\lambda})$
  $= S_{CL-\lambda}(\lambda^* x.e_1)_{CL-\lambda}\ (\lambda x.(e_2)_{CL-\lambda})$
  $= S_{CL-\lambda}(\lambda x.(e_1)_{CL-\lambda})\ (\lambda x.(e_2)_{CL-\lambda})$
  $= (\lambda uvw.uw\,(vw))\ (\lambda x.(e_1)_{CL-\lambda})\ (\lambda x.(e_2)_{CL-\lambda})$
  $\Rightarrow_\beta \lambda w.\ (\lambda x.(e_1)_{CL-\lambda})\, w\ ((\lambda x.(e_2)_{CL-\lambda})\, w)$
  $\Rightarrow_\beta \lambda w.((e_1)_{CL-\lambda}[x := w](e_2)_{CL-\lambda}[x := w])$
  $= \lambda w.((e_1)_{CL-\lambda}\ (e_2)_{CL-\lambda})[x := w])$
  $= \lambda w.((e_1\, e_2)_{CL-\lambda}[x := w])$
  $= \lambda w.((e)_{CL-\lambda}[x := w])$
  $=_\alpha \lambda x.(e)_{CL-\lambda}$