Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Informatik
Professur für Automatentheorie

Sommersemester 2012

Einführung in die Informatik

3. Übungsblatt - Lösungen Aufgabe 13 c) - e)

Aufgabe 13

c) Gilt: $(\{\varepsilon\} \cdot L)^* = L^*$?

Diese Identität gilt und ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen der Operationen. $(\{\varepsilon\} \cdot L)^* \overset{def}{=} (\emptyset \cdot L)^* = (L)^* = L^*$.

d) Gilt: $(L_1^* \cup L_2^*)^* = (L_1 \cup L_2)^*$?

Auch diese Identität gilt und wird wie üblich durch die beiden Mengeninklusionen bewiesen:

a) $(L_1^* \cup L_2^*)^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$

Es sei $w \in ({L_1}^* \cup {L_2}^*)^*$.
Falls $w = \varepsilon$, so gilt $w \in (L_1 \cup L_2)^*$ offensichtlich. Ansonsten läßt sich w zerlegen in Teilworte:

$$w = u_1 u_2 \ldots u_n,$$

so dass für jedes $1 \leq i \leq n$ gilt: $u_i \in {L_1}^*$ oder $u_i \in {L_2}^*$. Also gilt für jedes i entweder

- $u_i = \varepsilon$,
- $u_i = x_{i1} x_{i2} \ldots x_{i\ell_i}$ mit $x_{ij} \in L_1$ oder
- $u_i = x_{i1} x_{i2} \ldots x_{i\ell_i}$ mit $x_{ij} \in L_2$.

Daher gilt also $w = x_{11} x_{12} \cdots x_{1l_1} \cdots x_{n1} x_{n2} \cdots x_{1l_n} \in (L_1 \cup L_2)^*$. Da wir keine weitere Annahme über w getroffen haben, gilt nun für alle $w \in ({L_1}^* \cup {L_2}^*)^*$ auch $w \in (L_1 \cup L_2)^*$.

b) $(L_1^* \cup L_2^*)^* \supseteq (L_1 \cup L_2)^*$

Da für jede Sprache L gilt, dass $L \subseteq L^*$, folgt diese Richtung unmittelbar aus der Monotonie von $\cup$ (d.h. aus $X_1 \subseteq X_2$ und $Y_1 \subseteq Y_2$ folgt auch $X_1 \cup Y_1 \subseteq X_2 \cup Y_2$ und ${X_1}^*$) und * (d.h. aus $X_1 \subseteq X_2$ folgt auch ${X_1}^* \subseteq {X_2}^*$).

f) Gilt: $(L^* \cup L)^* = L^*$?

Die Identität gilt und folgt unmittelbar aus den Definitionen.

$(L^* \cup L)^* = \bigcup_{n>0} (L^* \cup L)^n = \bigcup_{n>0} (\cup_{m>0} L^m \cup L^1)^n = \bigcup_{n>0} (\cup_{m>0} L^m)^n = \bigcup_{n>0} L^n = L^*$.