TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik Institut für Theoretische Informatik, Lehrstuhl für Automatentheorie

Theoretische Informatik und Logik

2. Übungsblatt

Sommersemester 2014

Hinweis

Folgende Aufgaben dienen der Selbstkontrolle und werden in der Übung nicht besprochen.

*) Geben Sie eine Turingmaschine $\mathcal{A}_{mod2}$ an, die die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x \bmod 2$ berechnet. Benutzen Sie die unäre Kodierung für natürliche Zahlen aus der Vorlesung.

**) Gegeben sind die beiden Funktionen $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Für die Funktion $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n, 0) &= g(x_1, \dots, x_n) \\ f(x_1, \dots, x_n, y+1) &= h(f(x_1, \dots, x_n, y)). \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Sind g und h primitiv rekursiv, so ist auch f primitiv rekursiv.

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Jede berechenbare Funktion ist Turing-berechenbar.

b) Eine Relation R ist partiell entscheidbar gdw. R rekursiv aufzählbar ist.

c) Ist R nicht entscheidbar, so ist R oder $\overline{R}$ nicht partiell entscheidbar.

d) Wenn $R \subseteq (\Sigma^*)^n$ partiell entscheidbar ist, dann auch $\overline{R} = (\Sigma^*)^n \setminus R$.

Aufgabe 2

Zeigen Sie für folgende Funktionen, dass sie primitiv-rekursiv sind:

- Fakultät: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x!$
- modifizierte Differenz:
$$\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ (x, y) \mapsto x \dot{-} y = \begin{cases} 0, \text{ falls } x < y \\ x - y, \text{ falls } x \geq y \end{cases}$$
- Abstand:
$$\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ (x, y) \mapsto |x - y| = \begin{cases} x - y, \text{ falls } y \leq x \\ y - x, \text{ falls } x < y \end{cases}$$

Aufgabe 3

Gegeben sei ein endliches Alphabet Σ. Entwickeln Sie eine Kodierungsfunktion für Wörter, d. h. eine bijektive, berechenbare Funktion $\pi : \Sigma^* \to \mathbb{N}$, so dass auch die Umkehrfunktion $\pi^{-1} : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ berechenbar ist.

Hinweis: Kodieren Sie ohne Einschränkung die Elemente von Σ mit Zahlen aus $\{0, \dots, |\Sigma| - 1\}$ und fassen Sie $w \in \Sigma^*$ als Zahl zur Basis $|\Sigma|$ auf. Achten Sie auf auftretende führende Nullen.