Theoretische Informatik und Logik

3. Übungsblatt

Sommersemester 2014

Hinweis

Folgende Aufgaben dienen der Selbstkontrolle und werden in der Übung nicht besprochen.

*) a) Zeigen Sie für die Funktion $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto 2^x$, dass sie primitiv rekursiv ist.

b) Zeigen Sie für die Funktion $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto \lceil \sqrt{x} \rceil$, dass sie μ-rekursiv ist.

Die aus der Vorlesung bekannten primitiv rekursiven Funktionen Addition, modifizierte Differenz und Multiplikation können dabei verwendet werden.

**) Geben Sie ein *WHILE*-Programm an, das die Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x_1, x_2) \mapsto kgV(x_1, x_2)$ berechnet und erklären Sie seine Arbeitsweise.

Die Funktion f berechnet das *kleinste gemeinsame Vielfache* zweier natürlicher Zahlen.

Beachten Sie: $kgV(m, 0) = kgV(0, m) = 0$. Für die arithmetischen Operationen Multiplikation, Addition, modifizierte Differenz, Maximum, Minimum und Division mit Rest können Sie die Symbole *mult*, $+$, $\dot{-}$, *max*, *min* und *div* im Programm benutzen. (Beispiel: $x_{10} := max(x_{11}, x_{12})$)

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass folgende Funktionen $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ LOOP-berechenbar sind:

a) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x, y) \mapsto x \dot{-} y$

b) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x, y) \mapsto \mathrm{mult}(x, y)$

c) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x, y) \mapsto \max(x, y)$

d) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x, y) \mapsto \mathrm{ggT}(x, y)$

Aufgabe 2

Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $x \mapsto \lfloor \log_{10}(x) \rfloor$.

- Geben Sie ein WHILE-Programm an, das f berechnet.
- Notieren Sie f als μ-rekursive Funktion.

Aufgabe 3

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Alle primitiv rekursiven Funktionen sind LOOP-berechenbar.

b) Ist eine Funktion f nicht LOOP-berechenbar, dann ist f auch keine totale berechenbare Funktion.

c) Jede Turing-berechenbare Funktion ist auch μ-rekursiv.

d) Es gibt Funktionen, die nicht berechenbar sind.

e) Alle Relationen sind entscheidbar.

Aufgabe 4

In der Vorlesung wurde die Ackermannfunktion A vorgestellt.

a) Nennen Sie die Eigenschaften dieser Funktion.

b) Berechnen Sie $A(2, 3)$.

c) Zeigen Sie, dass die Ackermannfunktion eine totale Funktion ist.

d) Überzeugen Sie sich, dass A berechenbar ist:
Notieren Sie einen Algorithmus in Pseudocode, der die Ackermannfunktion berechnet und dabei keine Rekursion verwendet.