



## Theoretische Informatik und Logik

### 5. Übungsblatt

Sommersemester 2014

#### Aufgabe 1

- a) Im Satz 2.5 der Vorlesung wurde gezeigt, dass  $f$  berechenbar ist gdw. Graph  $(f)$  rekursiv aufzählbar ist.

Zeigen Sie, dass eine totale Funktion  $f$  berechenbar ist gdw. ihr Graph entscheidbar ist.

- b) Es sei  $f$  eine partielle oder totale Funktion.

Zeigen Sie, dass der Graph  $(f)$  partiell entscheidbar ist gdw. die Funktion  $f$  (partiell oder total) berechenbar ist.

#### Aufgabe 2

Folgende Variationen des primitiven Rekursionsverfahrens führen wieder zu primitiv rekursiven Funktionen:

- a) Gegeben sind die beiden Funktionen  $g : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$  und  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Für die Funktion  $f : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$  gilt

$$\begin{aligned}f(x_1, \dots, x_n, 0) &= g(x_1, \dots, x_n) \\f(x_1, \dots, x_n, y + 1) &= h(f(x_1, \dots, x_n, y)).\end{aligned}$$

Zeigen Sie: Sind  $g$  und  $h$  primitiv rekursiv, so ist auch  $f$  primitiv rekursiv.

- b) Es seien  $g_1, g_2 : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$  und  $h_1, h_2 : \mathbb{N}^{n+3} \rightarrow \mathbb{N}$  Funktionen. Die Funktionen  $f_i : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$  entstehen aus  $g_1, g_2, h_1$  und  $h_2$  für  $i \in \{1, 2\}$  durch *simultane Rekursion* wie folgt:

$$\begin{aligned}f_1(\vec{x}, 0) &= g_1(\vec{x}) \\f_2(\vec{x}, 0) &= g_2(\vec{x}) \\f_1(\vec{x}, y + 1) &= h_1(\vec{x}, f_1(\vec{x}, y), f_2(\vec{x}, y), y) \\f_2(\vec{x}, y + 1) &= h_2(\vec{x}, f_1(\vec{x}, y), f_2(\vec{x}, y), y).\end{aligned}$$

Zeigen Sie: Sind  $g_1, g_2, h_1$  und  $h_2$  primitiv rekursiv, so sind auch  $f_1$  und  $f_2$  primitiv rekursiv.

*Hinweis:*

Verwenden Sie die Kodierungsfunktion  $c : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  aus der Vorlesung.

### Aufgabe 3

Geben Sie ein *WHILE*-Programm an, das die Funktion  $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}, (x_1, x_2) \mapsto \text{kgV}(x_1, x_2)$  berechnet und erklären Sie seine Arbeitsweise.

Die Funktion  $f$  berechnet das *kleinste gemeinsame Vielfache* zweier natürlicher Zahlen.

Beachten Sie:  $\text{kgV}(m, 0) = \text{kgV}(0, m) = 0$ . Für die arithmetischen Operationen Multiplikation, Addition, modifizierte Differenz, Maximum, Minimum und Division mit Rest können Sie die Symbole *mult*,  $+$ ,  $\div$ , *max*, *min* und *div* im Programm benutzen (z. B.  $x_{10} := \text{max}(x_{11}, x_{12})$ ).

### Aufgabe 4

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- a) Für jede Relation  $R$  gilt genau eine der folgenden drei Eigenschaften.
  - $R$  und  $\bar{R}$  sind rekursiv und damit auch rekursiv aufzählbar.
  - $R$  und  $\bar{R}$  sind nicht rekursiv aufzählbar und damit auch nicht rekursiv.
  - Genau eine der beiden Relationen  $R$  und  $\bar{R}$  ist rekursiv aufzählbar, aber nicht rekursiv, die andere ist nicht rekursiv aufzählbar.
- b) Lemma 5.12 (1) gilt auch für partiell entscheidbare Relationen bzw. Lemma 5.12 (2) gilt auch für nicht partiell entscheidbare Relationen.
- c) Es ist entscheidbar, ob für kontextfreie Grammatiken  $G_1, G_2$  gilt  $L(G_1) \subseteq L(G_2)$ .