Theoretische Informatik und Logik

8. Übungsblatt

Sommersemester 2014

Hinweis

Folgende Aufgabe dient der Selbstkontrolle und wird in der Übung nicht besprochen.

*) Zeigen Sie die folgenden Aussagen:
   a) Ist $L_2 \in PSPACE$ und gilt $L_1 \leq_p L_2$, so ist auch L_1 in *PSPACE*.
   b) Ist L_1 *PSPACE*-hart und gilt $L_1 \leq_p L_2$, so ist auch L_2 *PSPACE*-hart.

Aufgabe 1

Welche der folgenden QBF sind erfüllbar?

a) $\exists p_1 . p_1$

b) $\forall p_1 . p_1$

c) $\exists p_1 . \bot$

d) $\forall p_1 . \exists p_2 . p_2 \to p_1$

e) $\forall p_1 . \exists p_2 . \forall p_3 . (p_1 \vee p_2) \wedge p_3$

f) $\forall p_1 . \forall p_2 . \exists p_3 . \forall p_4 . (p_1 \wedge p_2 \to p_4) \vee \neg p_3$

Aufgabe 2

Ein *PSPACE-Spiel* ist ein Tupel $G = (\phi, \Gamma_1, \Gamma_2, <)$ mit den folgenden Komponenten:

- ϕ ist eine aussagenlogische Formel,
- $\mathrm{Var}(\phi) = \Gamma_1 \uplus \Gamma_2$ mit $|\Gamma_1| = |\Gamma_2|$,
- $<$ ist eine lineare Ordnung auf $\mathrm{Var}(\phi)$.

Das Spiel besteht aus $|\mathrm{Var}(\phi)|$ Runden, und wird von zwei Spielern gespielt. Spieler 1 beginnt, indem er einen Wahrheitswert für die bzgl. $<$ kleinste Variable in Γ_1 festlegt. Dann wählt Spieler 2 einen Wahrheitswert für die kleinste Variable in Γ_2. So fahren die Spieler abwechselnd fort, bis jede Variable einen Wahrheitswert hat. Schließlich gewinnt Spieler 1, wenn die Formel ϕ zu 1 ausgewertet wird.

Eine *Gewinnstrategie für Spieler 2* ist ein Baum (V, E, ℓ) mit Wurzel v_0 und Tiefe $|\mathrm{Var}(\phi)|$, sodass $\ell\colon V \to \{0,1\}^*$ eine Beschriftung der Knoten mit Binärworten ist. Weiterhin müssen folgende Eigenschaften erfüllt sein:

- $\ell(v_0) = \varepsilon$
- Jeder Knoten v mit geradem Abstand zur Wurzel hat genau zwei Nachfolgerknoten w_1, w_2, sodass $\ell(w_1) = \ell(v)0$ und $\ell(w_2) = \ell(v)1$ gelten.
- Jeder Knoten v mit ungeradem Abstand zur Wurzel hat genau einen Nachfolgerknoten w, sodass $\ell(w) \in \{\ell(v)0, \ell(v)1\}$ gilt.
- Jede Knotenbeschriftung $\ell(v) = x_1x_2 \dots x_k \in \{0,1\}^*$ wird als eine partielle Variablenzuweisung $\{p_1 \mapsto x_1, p_2 \mapsto x_2, \dots, p_k \mapsto x_k\}$ interpretiert.
- Die totalen Variablenzuweisungen zu den Knoten in Tiefe $2n$ werten die Formel ϕ zu 0 aus.

a) Für welche der folgenden *PSPACE*-Spiele gibt es eine Gewinnstrategie für Spieler 2?

   i) $G_1 = (p_1 \wedge p_2, \{p_1\}, \{p_2\}, \{(p_1, p_2)\})$

   ii) $G_2 = ((p_1 \vee p_2) \wedge (p_3 \to p_4), \{p_1, p_3\}, \{p_2, p_4\}, \{(p_i, p_j) \mid i < j\})$

b) Zeigen Sie, dass die Entscheidung, ob ein *PSPACE*-Spiel eine Gewinnstrategie für Spieler 2 besitzt, *PSPACE*-vollständig ist.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass *PSPACE* unter Komplement, Durchschnitt, Vereinigung, Konkatenation und Kleene-Stern abgeschlossen ist.

Aufgabe 4

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Jedes *PSPACE*-harte Problem ist *NP*-hart.

b) Es gibt kein *NP*-hartes Problem, das in *PSPACE* liegt.

c) Jedes *NP*-vollständige Problem liegt in *PSPACE*.

d) Es gilt $NP = PSPACE$, wenn es ein *PSPACE*-hartes Problem in *NP* gibt.

e) Wenn $P \neq NP$ gilt, dann gibt es kein *NP*-hartes Problem in P.

f) Sei L ein *PSPACE*-vollständiges Problem. Dann gilt $L \in P$ gdw $P = PSPACE$.