TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik Institut für Theoretische Informatik, Lehrstuhl für Automatentheorie

Theoretische Informatik und Logik

9. Übungsblatt

Sommersemester 2014

Hinweis

Folgende Aufgabe dient der Selbstkontrolle und wird in der Übung nicht besprochen.

*) Konkretisieren Sie den Beweis von Satz 9.11 (Universalitätsproblem für NEAs ist PSPACE-vollständig), indem Sie NEAs $\mathcal{A}_w$ angeben, sodass gilt:
  - $\mathcal{A}_w$ akzeptiert genau die Wörter in Σ^*, die nicht akzeptierende Konfigurationswörter für w sind.

  Betrachten Sie folgende Fälle, die verhindern, dass ein Wort über Σ ein akzeptierendes Konfigurationswort für w ist:
  - i) Zwischen zwei #-Symbolen steht nicht genau ein Zustand.
  - ii) Der erste Zustand ist nicht der Anfangszustand.
  - iii) Symbole in aufeinanderfolgenden Konfigurationen, die nicht durch eine Transition verändert wurden, sind trotzdem verschieden.

Aufgabe 1

Geben Sie für die Formel $\forall x.\exists y.(P(f(x,y),z) \wedge (Q(x,g(x),z) \vee P(g(y),y)))$ folgendes an:

a) Menge aller Unterformeln

b) Menge aller Terme

c) Menge aller Variablen (mit Unterscheidung freier und gebundener Variablen)

d) Ein Modell

Aufgabe 2

Welche der angegebenen Strukturen sind Modelle der folgenden Formel in Prädikatenlogik mit Gleichheit?

$$\begin{aligned}&\forall x.R(x,x)\\ \wedge\ &\forall x.\forall y.R(x,y)\wedge R(y,x)\to x=y\\ \wedge\ &\forall x.\forall y.\forall z.R(x,y)\wedge R(y,z)\to R(x,z)\end{aligned}$$

a) $\mathcal{A}_1$ mit $\Delta^{\mathcal{A}_1}=\mathbb{N}$ und $R^{\mathcal{A}_1}=\{(m,n)\mid m<n\}$

b) $\mathcal{A}_2$ mit $\Delta^{\mathcal{A}_2}=\mathbb{N}$ und $R^{\mathcal{A}_2}=\{(n,n+1)\mid n\in\mathbb{N}\}$

c) $\mathcal{A}_3$ mit $\Delta^{\mathcal{A}_3}=\mathbb{N}$ und $R^{\mathcal{A}_3}=\{(m,n)\mid m \text{ teilt } n\}$

d) $\mathcal{A}_4$ mit $\Delta^{\mathcal{A}_4}=\Sigma^*$ für ein Alphabet Σ und $R^{\mathcal{A}_4}=\{(x,y)\mid \exists z\in\Sigma^+.xz=y\}$

e) $\mathcal{A}_5$ mit $\Delta^{\mathcal{A}_5}=2^M$ für eine Menge M und $R^{\mathcal{A}_5}=\{(X,Y)\mid X\subseteq Y\}$

f) $\mathcal{A}_6$ mit $\Delta^{\mathcal{A}_6}=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ und
$R^{\mathcal{A}_6}=\{((m_1,m_2),(n_1,n_2))\mid m_1<n_1\vee(m_1=n_1\wedge m_2\leq n_2)\}$

Aufgabe 3

a) Geben Sie je eine erfüllbare Formel in Prädikatenlogik mit Gleichheit an, sodass alle Modelle

   i) höchstens drei,

   ii) mindestens drei, bzw.

   iii) genau drei

   Elemente in der Grundmenge besitzen.

b) Geben Sie je eine erfüllbare Formel in Prädikatenlogik mit Gleichheit an, sodass das einstellige Funktionssymbol f in jedem Modell als eine

   i) injektive Funktion,

   ii) surjektive Funktion, bzw.

   iii) bijektive Funktion

   interpretiert wird.

Aufgabe 4

Geben Sie eine erfüllbare Formel in Prädikatenlogik mit Gleichheit an, die kein endliches Modell besitzt.

Aufgabe 5

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Aus $\Gamma \subseteq \Gamma'$ und $\Gamma \models \phi$ folgt $\Gamma' \models \phi$.

b) Jede aussagenlogische Formel ist eine prädikatenlogische Formel.

c) Eine prädikatenlogische Formel ϕ ist genau dann allgemeingültig, wenn $\neg\phi$ unerfüllbar ist.

d) Es gilt
$\{\forall x.\forall y.R(x, y) \to R(y, x), \forall x.\forall y.\forall z.R(x, y) \wedge R(y, z) \to R(x, z)\} \models \forall x.R(x, x)$.