TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik Institut für Theoretische Informatik, Lehrstuhl für Automatentheorie

Theoretische Informatik und Logik

10. Übungsblatt

Sommersemester 2014

Hinweis

Folgende Aufgaben dienen der Selbstkontrolle und werden in der Übung nicht besprochen.

*) Wiederholen Sie die folgenden Begriffe: Term, Formel, Interpretation, Modell, Auswertungsproblem, konjunktive Anfrage, Skolemform

**) Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Es gilt $\{\phi\} \models \psi$ genau dann, wenn $\phi \to \psi$ allgemeingültig ist.

b) Es gilt $\{\phi_1, \dots, \phi_k\} \models \psi$ genau dann, wenn $\left(\bigwedge_{i=1}^{k} \phi_i\right) \to \psi$ allgemeingültig ist.

***) Seien ϕ und ψ Formeln und x eine Variable. Zeigen Sie, dass dann die folgende Äquivalenz gilt:

$$\exists x.(\phi \to \psi) \equiv (\forall x.\phi) \to (\exists x.\psi)$$

Aufgabe 1

Beweisen Sie die folgende Teilaussage von Satz 12.2:
Es sei ψ eine Formel, in der die Variable x nicht frei vorkommt. Dann gilt:

a) $\forall x.(\phi \vee \psi) \equiv (\forall x.\phi) \vee \psi$

Zeigen Sie außerdem die folgenden Äquivalenzen:

b) $\forall x.(\phi \to \psi) \equiv (\exists x.\phi) \to \psi$

c) $\exists x.(\phi \to \psi) \equiv (\forall x.\phi) \to \psi$

d) $\forall x.(\psi \to \phi) \equiv \psi \to (\forall x.\phi)$

e) $\exists x.(\psi \to \phi) \equiv \psi \to (\exists x.\phi)$

f) $\forall x.(\phi \leftrightarrow \psi) \equiv ((\exists x.\phi) \to \psi) \wedge (\psi \to (\forall x.\phi))$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Formeln eine äquivalente bereinigte Formel in Pränexform:

a) $\forall x.(P(x,x) \leftrightarrow \neg\exists y.Q(x,y))$

b) $(\forall x.P(f(x,x))) \vee (Q(x,z) \to \exists x.P(g(x,y,z)))$

c) $(\forall x.P(x)) \wedge ((\forall y.\exists x.Q(x,g(y))) \to \exists y.(R(f(y)) \vee \neg Q(y,x)))$

Aufgabe 3

Formalisieren Sie Bertrand Russells Barbier-Paradoxon

Der Barbier rasiert genau diejenigen Personen, die sich nicht selbst rasieren.

als eine prädikatenlogische Formel und zeigen Sie, dass diese unerfüllbar ist.

Aufgabe 4

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Wenn ϕ und ψ äquivalent sind, dann auch erfüllbarkeitsäquivalent.

b) Wenn ϕ und ψ erfüllbarkeitsäquivalent sind, dann auch äquivalent.

c) Es gilt $\phi \equiv \psi$ genau dann, wenn $\{\phi\} \models \psi$ und $\{\psi\} \models \phi$.

d) Es gilt $\phi \equiv \psi$, falls ϕ und ψ allgemeingültig sind.

e) Es gilt $\phi \equiv \psi$, falls ϕ und ψ unerfüllbar sind.

f) Es gilt $(\phi\{x \mapsto s\})\{y \mapsto t\} = (\phi\{y \mapsto t\})\{x \mapsto s\}$.

g) Jede QBF ist eine prädikatenlogische Formel.

Aufgabe 5

Gegeben sei die folgende relationale Datenbank:

Personen:

Name	*Geburtsjahr*	*Geburtsort*
Gottfried Wilhelm Leibniz	1646	Leipzig
David Hilbert	1862	Königsberg
Kurt Gödel	1906	Brünn
Alonzo Church	1903	Washington
Alan Turing	1912	London
Emil Leon Post	1897	Augustow
Stephen A. Cook	1939	Buffalo (New York)

Städte:

Stadt	*Kontinent*
Leipzig	Europa
Königsberg	Europa
Brünn	Europa
Washington	Nordamerika
London	Europa
Augustow	Europa
Buffalo (New York)	Nordamerika

Fachgebiete:

Fachgebiet	*Personen*
Mathematik	Leibniz, Hilbert, Gödel, Church, Turing, Post, Cook
Logik	Gödel, Church, Turing, Post
Informatik	Turing, Cook
Physik	Leibniz
Philosophie	Leibniz

Die Relation Fachgebiete ist komprimiert dargestellt, z.B. sind die beiden Paare (Informatik,Turing) und (Informatik,Cook) enthalten.

Formulieren Sie die folgenden Anfragen als relationale Formeln:

a) Welche Personen haben auf dem Fachgebiet der Logik gearbeitet?

b) Welche in Europa geborenen Personen haben auf dem Fachgebiet der Informatik gearbeitet?

c) Welche Personen waren nur auf dem Fachgebiet der Mathematik tätig und sonst nirgends?

Welche der relationalen Formeln sind konjunktive Anfragen?