TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik Institut für Theoretische Informatik, Lehrstuhl für Automatentheorie

Theoretische Informatik und Logik

11. Übungsblatt

Sommersemester 2014

> **Hinweis**
>
> Folgende Aufgaben dienen der Selbstkontrolle und werden in der Übung nicht besprochen.
>
> *) Sei ϕ eine Formel, in der die Variable x nicht frei vorkommt. Zeigen Sie, dass dann gilt:
>
> $$\phi \equiv \exists x.\phi \equiv \forall x.\phi$$
>
> **) Seien $\phi, \phi_1, \phi_2, \psi, \psi_1, \psi_2$ prädikatenlogische Formeln. Zeigen Sie die folgenden Äquivalenzen:
>
> a) $(\phi_1 \wedge \phi_2) \rightarrow \psi \equiv \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow \psi)$
>
> b) $(\phi_1 \vee \phi_2) \rightarrow \psi \equiv (\phi_1 \rightarrow \psi) \wedge (\phi_2 \rightarrow \psi)$
>
> c) $\phi \rightarrow (\psi_1 \wedge \psi_2) \equiv (\phi \rightarrow \psi_1) \wedge (\phi \rightarrow \psi_2)$
>
> d) $\phi \rightarrow (\psi_1 \vee \psi_2) \equiv (\phi \rightarrow \psi_1) \vee \psi_2$

Aufgabe 1

Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Formeln eine erfüllbarkeitsäquivalente bereinigte Formel in Skolemform:

a) $P(x) \vee (\exists x.Q(x,x)) \vee (\forall x.P(f(x)))$

b) $(\forall x.\exists y.Q(f(x), g(y))) \wedge (\forall x.(P(x,y,y) \vee Q(h(y), x)))$

c) $(\forall x.\forall x.(P(x) \rightarrow Q(x,x))) \vee (\exists x.\forall y.(Q(x, g(y,z)) \wedge \exists z.Q(z,z)))$

Aufgabe 2

Seien ϕ und ψ Formeln der Prädikatenlogik, x, y Variablen, sodass x nicht frei in ψ und y nicht frei in ϕ vorkommt, und $Q_x, Q_y \in \{\forall, \exists\}$ Quantoren. Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Äquivalenzen:

a) $Q_x x.Q_y y.(\phi \wedge \psi) \equiv (Q_x x.\phi) \wedge (Q_y y.\psi)$

b) $Q_x x.Q_y y.(\phi \vee \psi) \equiv (Q_x x.\phi) \vee (Q_y y.\psi)$

c) $Q_x x.Q_y y.(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\overline{Q_x} x.\phi) \rightarrow (Q_y y.\psi)$

Dabei gilt $\overline{\forall} = \exists$ und $\overline{\exists} = \forall$.

Aufgabe 3

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

- Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Kinder fliegen können.
- Grüne Drachen können fliegen.
- Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachens ist.
- Alle grünen Drachen sind glücklich.

Zeigen Sie, dass die letzte Aussage aus den ersten drei folgt.

Aufgabe 4

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Jede Formel in Pränexform ist in Skolemform.

b) Jede Formel in Skolemform ist in Pränexform.

c) Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel.

d) Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Pränexform.

e) Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Skolemform.