Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Informatik
Professur für Automatentheorie

Wintersemester 08/09

Grundlagen der Theoretischen Informatik
Repetitorium III

Hinweis

Ziel des Repetitoriums ist es, ausgewählte Kapitel der Vorlesung zu wiederholen, indem den Teilnehmern die auf den Übungsblättern mit *) gekennzeichneten Aufgaben vorgerechnet werden, auf Schwerpunkte der Vorlesung eingegangen wird und Fragen dazu diskutiert werden können.
Das Repetitorium III bezieht sich auf die Übungsblätter 9 – 13.

Aufgabe 1

Geben Sie einen deterministischen Kellerautomaten $\mathcal{A}$ an mit

$$L(\mathcal{A}) = \{wcw^R \mid w \in \{a,b\}^*\},$$

wobei für $w = a_1 \dots a_n$ gilt $w^R = a_n \dots a_1$.

Aufgabe 2

Man gebe eine Turingmaschine $\mathcal{A}_{exp}$ an, die die Funktion

$$f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ (x,y) \mapsto x^y$$

berechnet. Man verwende dazu in geeigneter Weise eine 2–Band–Turingmaschine.
Hinweis:
Offensichtlich muß die Funktion f auf die Multiplikation zurückgeführt werden. Es ist sinnvoll, zusätzliche Symbole in Γ zu verwenden.

Aufgabe 3

Zeigen Sie für folgende Funktionen, dass sie primitiv-rekursiv sind:

- $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto x^2 + 1$
- $f_2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ (x,y) \mapsto max(x,y)$

Aufgabe 4

Folgende Variationen des primitiven Rekursionsverfahrens führen wieder zu primitiv rekursiven Funktionen:

a) Es seien $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Funktionen. Für die Funktion $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ gelte

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n, 0) &= g(x_1, \ldots, x_n) \\ f(x_1, \ldots, x_n, y+1) &= h(f(x_1, \ldots, x_n, y)). \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Sind g und h primitiv rekursiv, so auch f.

b) Es seien $g_1, g_2 : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ und $h_1, h_2 : \mathbb{N}^{n+3} \to \mathbb{N}$ Funktionen.
Die Funktionen $f_i : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ entstehen aus g_1, g_2, h_1 und h_2 für $i \in \{1, 2\}$ durch *simultane Rekursion* wie folgt:

$$\begin{aligned} f_1(\vec{x}, 0) &= g_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}, 0) &= g_2(\vec{x}) \\ f_1(\vec{x}, y+1) &= h_1(\vec{x}, f_1(\vec{x}, y), f_2(\vec{x}, y), y) \\ f_2(\vec{x}, y+1) &= h_2(\vec{x}, f_1(\vec{x}, y), f_2(\vec{x}, y), y). \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Sind g_1, g_2, h_1 und h_2 primitiv rekursiv, so auch f_1 und f_2.
Beachte:
Verwenden Sie die Kodierungsfunktion $c : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ aus der Vorlesung.

Aufgabe 5

a) Geben Sie ein WHILE-Programm an, das das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) zweier natürlicher Zahlen berechnet.

b) Überlegen Sie, ob die Funktion kgV auch LOOP-berechenbar ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6

Geben Sie einen NEA $\mathcal{A}$ für die Sprache

$$L(\mathcal{A}) = \Sigma^* \setminus L(r)$$

an mit $\Sigma = \{a, b\}$ und $r = (((a \cdot b) + (a \cdot a \cdot b)) + (a \cdot b \cdot a))^*$.