

§ 17. Resolution

Ziel ist es wieder, für eine aussagenlogische Formel ϕ zu entscheiden, ob sie erfüllbar ist, d.h. ob sie ein Modell hat.

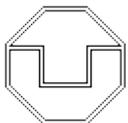
Bei der Resolution geht man davon aus, daß die Formel in konjunktiver Normalform (KNF) vorliegt:

$$\phi = ((L_{1,1} \vee \dots \vee L_{1,n_1}) \wedge \dots \wedge (L_{k,1} \vee \dots \vee L_{k,n_k}))$$

Die Konjunkte $K_i = (L_{i,1} \vee \dots \vee L_{i,n_i})$ nennen wir Klauseln.

Da die Wertzuweisung w genau dann ein Modell von $(K_1 \wedge \dots \wedge K_k)$ ist, wenn sie ein Modell der Menge $\{K_1, \dots, K_k\}$ ist, betrachten wir im Folgenden endliche Mengen von Klauseln anstelle von Formeln in KNF.

Da Disjunktion assoziativ, kommutativ und idempotent ist, genügt es, für eine Klausel $K_i = (L_{i,1} \vee \dots \vee L_{i,n_i})$ die Menge ihrer Literale $\{L_{i,1}, \dots, L_{i,n_i}\}$ zu kennen.



Definition 17.1 (Klauseln)

1. Eine **Klausel** ist eine **endliche Menge von Literalen**. Die Wertzuweisung w erfüllt die Klausel $K = \{L_1, \dots, L_n\}$ gdw. es ein $i, 1 \leq i \leq n$, gibt mit $w(L_i) = 1$. Wir schreiben dann auch $w(K) = 1$ und andernfalls $w(K) = 0$.
2. Die leere Menge von Literalen nennen wir die **leere Klausel** und schreiben sie als \square . Es ist $w(\square) = 0$ für alle Wertzuweisungen w .
3. Eine **Klauselmenge** ist eine **endliche Menge von Klauseln**. Die Wertzuweisung w erfüllt die Klauselmenge $M = \{K_1, \dots, K_k\}$ gdw. für alle $j, 1 \leq j \leq k$, gilt: $w(K_j) = 1$. Wir schreiben dann auch $w(M) = 1$ und andernfalls $w(M) = 0$.

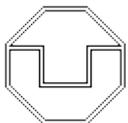
Die Formel

$$\phi = ((L_{1,1} \vee \dots \vee L_{1,n_1}) \wedge \dots \wedge (L_{k,1} \vee \dots \vee L_{k,n_k}))$$

in KNF entspricht der Klauselmenge

$$M_\phi = \{\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{k,1}, \dots, L_{k,n_k}\}\}.$$

Offenbar sind ϕ und M_ϕ äquivalent, d.h. es gilt $w(\phi) = w(M_\phi)$ für alle Wertzuweisungen w .



Definition 17.2 (Resolvente)

Es seien K_1, K_2, R Klauseln und M eine Klauselmenge.

1. Ist p eine aussagenlogische Variable mit $p \in K_1$ und $\neg p \in K_2$, so ist

$$(K_1 \setminus \{p\}) \cup (K_2 \setminus \{\neg p\})$$

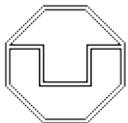
eine **Resolvente** von K_1 und K_2 .

2. Die Klausel R ist eine **Resolvente von M** , wenn R Resolvente zweier Klauseln in M ist.

Beispiel:

$\phi = (p \wedge q \wedge (\neg p \vee \neg q))$ entspricht der Klauselmenge $M_\phi = \{\{p\}, \{q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$.

- $\{\neg q\}$ ist Resolvente von $\{p\}$ und $\{\neg p, \neg q\}$ und damit auch von M_ϕ .
- $\{\neg p\}$ ist Resolvente von $\{q\}$ und $\{\neg p, \neg q\}$ und damit auch von M_ϕ .
- \square ist Resolvente von $\{p\}$ und $\{\neg p\}$.



Resolventen sind semantische Konsequenzen der Klauseln, aus denen sie erzeugt wurden.

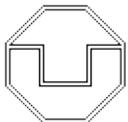
Lemma 17.3 (Resolventen sind Konsequenzen)

Es seien K_1, K_2, R Klauseln, M eine Klauselmenge und w eine Wertzuweisung.

1. Ist R eine Resolvente von K_1 und K_2 , so ist R auch eine semantische Konsequenz von $\{K_1, K_2\}$,
d.h. aus $w(K_1) = 1 = w(K_2)$ folgt auch $w(R) = 1$.
2. Insbesondere ist damit jedes Modell von M auch ein Modell aller Resolventen von M .

Beweis:

2. folgt unmittelbar aus 1..



Beweis von 1.:

Es sei $K_1 = \{p, L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}$ und $K_2 = \{\neg p, L_{2,1}, \dots, L_{2,n_2}\}$
und somit $R = \{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}, L_{2,1}, \dots, L_{2,n_2}\}$.

Ist w ein Modell von K_1 und K_2 , so folgt aus $w(K_1) = 1$,
daß $w(p) = 1$ oder $w(L_{1,j}) = 1$ für ein $j, 1 \leq j \leq n_1$.

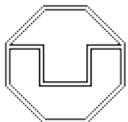
1. Fall: $w(L_{1,j}) = 1$ für ein $j, 1 \leq j \leq n_1$.

Dann ist offensichtlich auch $w(R) = 1$.

2. Fall: $w(p) = 1$.

Dann ist $w(\neg p) = 0$ und somit folgt aus $w(K_2) = 1$,
daß es ein $j, 1 \leq j \leq n_2$, gibt mit $w(L_{2,j}) = 1$.

Daraus folgt wieder unmittelbar $w(R) = 1$.



Das **Resolutionsverfahren** berechnet nun sukzessive Resolventen, bis keine neuen Klauseln mehr erzeugt werden.

Definition 17.4 (Resolution)

Es sei M eine Klauselmenge.

1. Wir definieren

- $Res(M) := M \cup \{R \mid R \text{ ist Resolvente von } M\},$

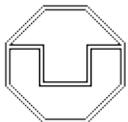
2. Wir iterieren nun die Anwendung von Res :

- $Res^0(M) := M,$

- $Res^{i+1}(M) := Res(Res^i(M)),$

- $Res^*(M) := \bigcup_{i \geq 0} Res^i(M).$

Offenbar gilt $Res^0(M) \subseteq Res^1(M) \subseteq Res^2(M) \subseteq \dots \subseteq Res^*(M).$



Die Iteration wird nach endlich vielen Schritten stabil.

Lemma 17.5 (Terminierung)

Es sei M eine Klauselmeng.

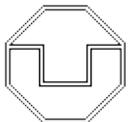
1. Es gibt ein $k \geq 0$ mit $Res^{k+1}(M) = Res^k(M)$.
2. Für dieses k gilt dann $Res^*(M) = Res^k(M)$.

Beweis:

2. Ist $Res^{k+1}(M) = Res^k(M)$, so gilt

$$Res^0(M) \subseteq Res^1(M) \subseteq \dots \subseteq Res^k(M) = Res^{k+1}(M) = Res^{k+2}(M) = \dots$$

Daher ist $Res^*(M) = \bigcup_{i \geq 0} Res^i(M) = Res^k(M)$.



Beweis von 1.:

Es sei \mathcal{L} die Menge der Literale, die in M vorkommen und ℓ die Kardinalität dieser Menge.

Da durch Resolution keine neuen Literale erzeugt werden, sind alle Resolventen R aus den Literalen in \mathcal{L} aufgebaut, d.h. $R \subseteq \mathcal{L}$.

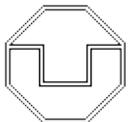
Daher gilt $|\text{Res}^*(M)| \leq 2^\ell$.

Deshalb kann bei der Inklusionskette

$$M = \text{Res}^0(M) \subseteq \text{Res}^1(M) \subseteq \text{Res}^2(M) \subseteq \dots \subseteq \text{Res}^*(M)$$

maximal $2^\ell - |M|$ mal echte Inklusion gelten,

d.h. es gibt ein $k \leq 2^\ell - |M|$ mit $\text{Res}^k(M) = \text{Res}^{k+1}(M)$.



Satz 17.6 (Korrektheit und Vollständigkeit)

Es sei M eine Klauselmenge.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. M ist erfüllbar.
2. $\square \notin Res^*(M)$.

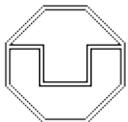
Beweis:

„1 \rightarrow 2“: Es sei w ein Modell von M .

Unter Verwendung von Lemma 17.3 kann man durch Induktion leicht zeigen, daß dann w auch ein Modell von $Res^i(M)$ für alle $i \geq 0$ ist.

Folglich ist w auch ein Modell von $Res^*(M)$.

Da $w(\square) = 0$ gilt, kann daher \square kein Element von $Res^*(M)$ sein.



Beweis:

„2 \rightarrow 1“: Wir zeigen die **Kontraposition**, d.h. die Gültigkeit der Aussage

(*) Ist M unerfüllbar, so ist $\square \in Res^*(M)$.

Für eine Klauselmenge M sei $c(M)$ die Anzahl der Vorkommen von Literalen in M , d.h. ist $M = \{\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{k,1}, \dots, L_{k,n_k}\}\}$, so ist $c(M) = n_1 + \dots + n_k$.

Wir zeigen (*) durch **Induktion** über $c(M)$:

$c(M) = 0$:

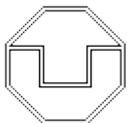
Dann ist $M = \{\square\}$ und damit $\square \in Res^*(M)$.

$c(M) > 0$:

1. Fall: M enthält nur Klauseln, die Einermengen sind.

Da M unerfüllbar ist, gibt es daher eine aussagenlogische Variable p mit $\{p\} \in M$ und $\{\neg p\} \in M$.

Offenbar gilt dann $\square \in Res^*(M)$.



$c(M) > 0$:

2. Fall: M enthält eine Klausel, die keine Einermenge ist.

Es sei $K = \{L, L_1, \dots, L_n\} \in M$ diese Klausel und $N := M \setminus \{K\}$.

Wir betrachten die Klauselmengen

$$M_1 = N \cup \{\{L\}\} \text{ und } M_2 = N \cup \{\{L_1, \dots, L_n\}\}.$$

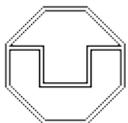
Da M unerfüllbar ist, sind auch M_1 und M_2 unerfüllbar und es gilt $c(M_1) < c(M)$ und $c(M_2) < c(M)$.

Induktion liefert $\square \in Res^*(M_1)$ und $\square \in Res^*(M_2)$.

(a) Wird bei der Erzeugung der Resolvente $\square \in Res^*(M_1)$ die Klausel $\{L\}$ nicht verwendet, so ist $\square \in Res^*(N) \subseteq Res^*(M)$.

(b) Wird bei der Erzeugung der Resolvente $\square \in Res^*(M_1)$ die Klausel $\{L\}$ verwendet, so ist $\{L_1, \dots, L_n\} \in Res^*(M)$.

Damit ist aber $\square \in Res^*(M_2) \subseteq Res^*(M)$.



Beispiel:

$$M = \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$$

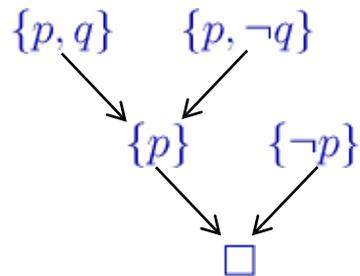
Wähle $K = \{\neg p, \neg q\}$ und $L = \neg p$.

Dann ist

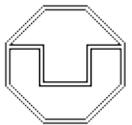
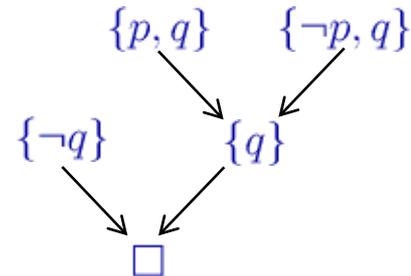
$$M_1 = \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}\} \cup \{\{\neg p\}\} \text{ und}$$

$$M_2 = \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}\} \cup \{\{\neg q\}\}.$$

$\square \in \text{Res}^*(M_1)$:



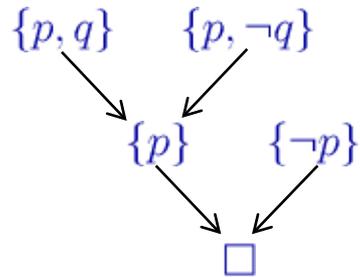
$\square \in \text{Res}^*(M_2)$:



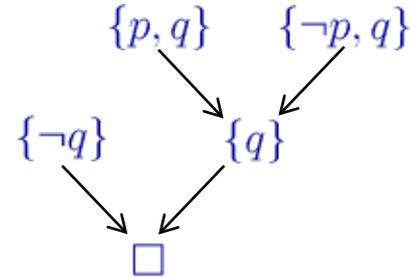
Beispiel:

$$M = \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$$

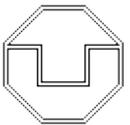
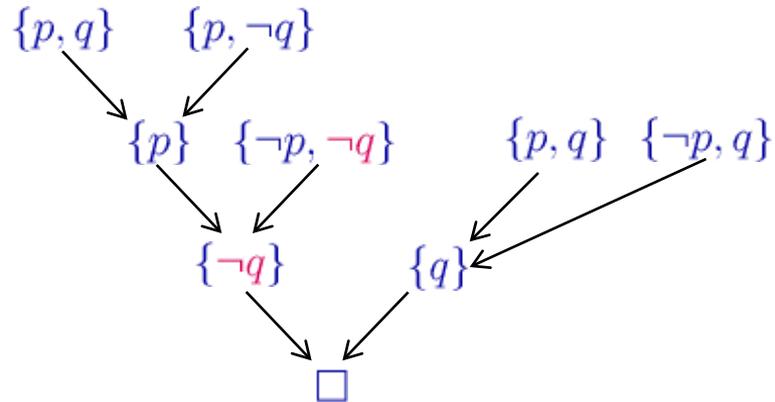
$\square \in Res^*(M_1)$:



$\square \in Res^*(M_2)$:



$\square \in Res^*(M)$:



Beachte:

- Sobald wir bei der Resolution die **leere Klausel erzeugt** haben, wissen wir, daß die Klauselmenge M unerfüllbar ist.

Wir müssen daher **nicht ganz** $Res^*(M)$ in der Reihenfolge $Res^1(M), Res^2(M), Res^3(M), \dots$ erzeugen.

Es genügt, **eine Herleitung der leeren Klausel** zu finden.

Man kann also bei der Resolution **Unerfüllbarkeit** eventuell **frühzeitig erkennen**.

Bei einer **erfüllbaren Klauselmenge** müssen wir aber $Res^*(M)$ **ganz berechnen**, um sicher zu sein, daß die leere Klausel nicht erzeugt werden kann.

- Im Gegensatz dazu kann man bei dem Tableau-Verfahren eventuell **Erfüllbarkeit frühzeitig erkennen**:

Es genügt ja, **einen offenen Ast** zu finden, auf den keine Erweiterungsregeln mehr anwendbar sind.

