

Formale Systeme

Repetitorium IV

Hinweis

Ziel des Repetitoriums ist es, ausgewählte Kapitel der Vorlesung zu wiederholen, indem den Teilnehmern die auf den Übungsblättern mit *) gekennzeichneten Aufgaben vorgerechnet werden, auf Schwerpunkte der Vorlesung eingegangen wird und Fragen dazu diskutiert werden können.

Das Repetitorium IV bezieht sich auf die Übungsblätter 12 bis 14. Die letzte Aufgabe wurde zusätzlich aufgenommen.

Aufgabe 1

Prüfen Sie, ob die folgenden Äquivalenzen gelten.

- a) $((a \rightarrow \neg b) \wedge (\neg a \rightarrow (b \wedge c))) \wedge ((\neg b \vee c) \rightarrow d) \equiv ((\neg(a \leftrightarrow b) \wedge (a \vee c)) \wedge \neg((b \vee d) \rightarrow (c \wedge \neg d)))$
- b) $((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow a \equiv (((a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)) \rightarrow \neg(\neg c \wedge a))$
- c) $((b \wedge l) \rightarrow m) \wedge ((a \wedge b) \rightarrow l) \wedge a \wedge b \equiv ((\neg b \wedge l \wedge \neg a \wedge b) \vee (\neg l \wedge l \wedge \neg a \wedge b) \vee (m \wedge l \wedge a \wedge b))$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie Formeln φ_a , φ_b und φ_c mit $Var(\varphi_a) = Var(\varphi_b) = Var(\varphi_c) = \{p, q, r\}$ deren Auswertungen in folgender Wahrheitstafel gegeben sind.

p	q	r	φ_a	φ_b	φ_c
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1

Aufgabe 3

Prüfen Sie mittels semantischer Tableaux die folgenden Formeln auf Erfüllbarkeit:

- a) $((a \vee \neg b) \rightarrow (b \wedge c)) \wedge (\neg(c \vee b) \wedge \neg(a \wedge b))$
- b) $((\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b)) \wedge ((\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b))$

Aufgabe 4

Transformieren Sie die Formel $\neg(\neg(a \leftrightarrow b) \rightarrow ((a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)))$ in folgende Normalformen:

- a) KNF
- b) DNF

Aufgabe 5

Prüfen Sie mittels Resolution die folgenden Formeln auf Erfüllbarkeit:

- a) $(a \wedge ((c \wedge b) \wedge ((\neg c \vee \neg b) \vee (a \wedge (c \wedge b))))$
- b) $((\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (a \vee \neg c) \wedge (b \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee d) \wedge (\neg c \vee d) \wedge (c \vee \neg d))$

Aufgabe 6

Stimmen die folgenden Aussagen? Begründen Sie.

- a) Wenn $\Gamma \models \psi$ und ψ sei eine Tautologie, dann ist Γ auch allgemeingültig.
- b) Eine Formel φ ist eine Hornformel, wenn sie in NNF ist und aus Konjunktionen innerhalb von Disjunktionen besteht, von denen jede höchstes ein positives Literal enthält.
- c) Für $K_1 = \{a, b, c\}$ und $K_2 = \{\neg a, \neg b\}$ ist $\{c\}$ keine Resolvente.
- d) Aus $\models \varphi$ folgt φ ist allgemeingültig.

Aufgabe 7

Gegeben sei $\Gamma = \{(A \rightarrow B)\} \vdash (\neg B \rightarrow C)$. Ist die folgende Ableitung eine gültige Ableitung des Hilbert-Kalküls? Kennzeichnen Sie jeden gültigen Schritt mit der verwendeten Hypothese aus Γ , dem verwendeten Axiom oder der Ableitungsregel Modus Ponens und kennzeichnen Sie alle fehlerhaften Schritte.

- 1 $(A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- 2 $(\neg A \rightarrow \neg(B \rightarrow C)) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow \neg A)$
- 3 $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$
- 4 $((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- 5 $(A \rightarrow B)$
- 6 $(A \rightarrow C)$
- 7 $(\neg(\neg B \rightarrow C) \rightarrow \neg(A \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (\neg B \rightarrow C))$
- 8 $(\neg B \rightarrow C)$