Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Informatik
Professur für Automatentheorie

Wintersemester 2010/11

Formale Systeme

12. Übungsblatt

Hinweis

Folgende Aufgaben dienen der Selbstkontrolle und werden in der Übung nicht besprochen.

*) Prüfen Sie, ob die folgenden Äquivalenzen gelten.

a) $(((a \to \neg b) \wedge (\neg a \to (b \wedge c))) \wedge ((\neg b \vee c) \to d)) \equiv$
$((\neg(a \leftrightarrow b) \wedge (a \vee c)) \wedge \neg((b \vee d) \to (c \wedge \neg d)))$

b) $(((a \to b) \to a) \to a) \equiv (((a \to b) \wedge (b \to c)) \to \neg(\neg c \wedge a))$

c) $(((b \wedge l) \to m) \wedge ((a \wedge b) \to l) \wedge a \wedge b) \equiv$
$((\neg b \wedge l \wedge \neg a \wedge b) \vee (\neg l \wedge l \wedge \neg a \wedge b) \vee (m \wedge l \wedge a \wedge b))$

**) Bestimmen Sie Formeln ϕ_a, ϕ_b und ϕ_c mit $Var(\phi_a) = Var(\phi_b) = Var(\phi_c) = \{p, q, r\}$ deren Auswertungen in folgender Wahrheitstafel gegeben sind.

p	q	r	ϕ_a	ϕ_b	ϕ_c
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1

Aufgabe 1

Gegeben sei eine endliche Menge von Elementen E und eine Menge von Variablen für Mengen V. Ein *Mengen-Constraintsystem* C über E und V ist eine endliche Menge von Constraints der Art:

$$\begin{aligned} a &\in X, \\ a &\notin X, \\ a &\in X \cup Y \quad \text{oder} \\ X &\subseteq Y \cup Z \quad \text{für } a \in E \text{ und } \{X, Y, Z\} \subseteq V. \end{aligned}$$

Eine Lösung L eines Mengen-Constraintsystems C über E und V ist eine Abbildung von $L : V \longrightarrow 2^E$, wobei

$$\begin{aligned}
\text{wenn } (a \in X) \in C, &\text{ dann ist } a \in L(X),\\
\text{wenn } (a \notin X) \in C, &\text{ dann ist } a \notin L(X),\\
\text{wenn } (a \in X \cup Y) \in C, &\text{ dann ist } a \in L(X) \cup L(Y),\\
\text{wenn } (X \subseteq Y \cup Z) \in C, &\text{ dann ist } L(Z) \subseteq L(Y) \cup L(Z).
\end{aligned}$$

a) Hat das folgende Mengen-Constraintsystem eine Lösung?

$V = \{M_1, M_2, M_3, M_4\} \qquad E = \{a, b, c, d\}$

$C = \{M_2 \subseteq M_1 \cup M_3,\ M_4 \subseteq M_3 \cup M_2,\ a \in M_1,\ a \notin M_3,\ b \in M_4,\ b \in M_1,\ b \notin M_3,$
$\quad c \in M_4,\ c \notin M_1,\ c \notin M_3,\ d \in M_4,\ d \notin M_1,\ d \notin M_2\}$

b) Geben Sie ein allgemeines Verfahren an, das Lösungen eines Mengen-Constraintsystems in polynomieller Zeit entscheidet.

Hinweis:
Übersetzen Sie C in eine endliche Menge von Hornformeln – entscheidend ist die Kodierung der Mengenzugehörigkeit von Elementen.

Aufgabe 2

Testen Sie mittels semantischer Tableaux die folgenden Formeln auf Erfüllbarkeit.

a) $(\neg(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \vee r)) \wedge r)$

b) $(((p \wedge (r \wedge \neg q)) \wedge ((r \wedge (\neg p \vee q)) \vee (s \wedge p))))$

Aufgabe 3

Wir betrachten Formeln, die aussschliesslich $\rightarrow$ und $\neg$ als Junktoren verwenden. Geben Sie für diese Art von Formeln Erweiterungsregeln für das semantische Tableau an, sodaß weiterhin gilt: Ein vollständiges Tableau für ϕ ist offen gdw. ϕ erfüllbar ist.

Begründen Sie warum ihre Erweiterungsregeln korrekt und vollständig sind.