Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Informatik
Professur für Automatentheorie

Wintersemester 2010/11

Formale Systeme

14. Übungsblatt

Hinweis

Folgende Aufgaben dienen der Selbstkontrolle und werden in der Übung nicht besprochen.

*) Prüfen Sie mittels Resolution die folgenden Formeln auf Erfüllbarkeit:

a) $(a \wedge ((c \wedge b) \wedge ((\neg c \vee \neg b) \vee (a \wedge (c \wedge b)))))$

b) $((\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (a \vee \neg c) \wedge$
$(b \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee d) \wedge (\neg c \vee d) \wedge (c \vee \neg d))$

**) Stimmen die folgenden Aussagen? Begründen Sie.

(a) Wenn $\Gamma \models \psi$ und ψ sei eine Tautologie, dann ist Γ auch allgemeingültig.

(b) Eine Formel ϕ ist eine Hornformel, wenn sie in NNF ist und aus Konjunktionen innerhalb von Disjunktionen besteht, von denen jede höchstes ein positives Literal enthält.

(c) Für $K_1 = \{a, b, c\}$ und $K_2 = \{\neg a, \neg b\}$ ist $\{c\}$ keine Resolvente.

(d) Aus $\models \phi$ folgt ϕ ist allgemeingültig.

Aufgabe 1

Klauseln, die maximal 2 Literale enthalten, sind *2-Klauseln*. Zeigen sie, daß für endliche Mengen M von 2-Klauseln, $Res^*(M)$ in polynomieller Zeit (in der Anzahl der Literale in M) berechnet werden kann.

Aufgabe 2

Gegeben seien die Formeln ϕ, ψ und π sowie $\Gamma = \{\neg\psi \rightarrow \neg\phi,\ \psi \rightarrow \neg\pi\}$. Welche der folgenden Ableitungen sind gültige Ableitungen des Hilbert-Kalküls? Kennzeichnen Sie jeden gültigen Schritt mit der verwendeten Hypothese aus Γ, dem verwendeten Axiom oder der Ableitungsregel Modus Ponens und kennzeichnen Sie alle fehlerhaften Schritte.

a)

1	$((\neg\psi \to \pi) \to (\neg\psi \to (\neg\psi \to \pi)))$
2	$(((\neg\psi \to \pi) \to \neg\psi) \to ((\neg\psi \to \pi) \to (\neg\psi \to \pi)))$
3	$(\neg\psi \to (\pi \to \neg\psi))$
4	$((\neg\psi \to \pi) \to (\neg\psi \to \pi))$
5	$(\neg\psi \to \neg\phi)$
7	$((\neg\psi \to \pi) \to (\neg\phi \to \pi))$
8	$(\psi \to \neg\pi)$
9	$(\neg\phi \to \pi)$

b)

1	$(\neg\psi \to \neg\phi)$
2	$(\psi \to \neg\pi)$
3	$((\neg\psi \to \neg\phi) \to (\phi \to \psi))$
4	$(\phi \to \psi)$
5	$((\psi \to \neg\pi) \to (\phi \to (\psi \to \neg\pi)))$
6	$(\phi \to (\psi \to \neg\pi))$
7	$((\phi \to (\psi \to \neg\pi)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \neg\pi)))$
8	$((\phi \to \psi) \to (\phi \to \neg\pi))$
9	$(\phi \to \neg\pi)$

Aufgabe 3

Zeigen Sie mittels Hilbert-Kalkül, daß

$$(((\phi \to \psi) \to (\phi \to \phi)) \to (\neg\psi \to \neg\psi))$$

eine Tautologie ist.

Aufgabe 4

Ein Graph $G = (V, E)$ besteht aus einer Knotenmenge V und einer Kantenmenge $E \subseteq V \times V$. Sei $\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ eine k-elementige Menge von "Farben". Eine *k-Färbung* für den Graphen G ist eine Funktion $f : V \to \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ derart, daß für alle $(a, b) \in E$ gilt: $f(a) \neq f(b)$. G heißt *k-färbbar*, wenn es eine k-Färbung für G gibt.

Beweisen Sie die folgende Aussage: Ein Graph G ist k-färbbar, wenn jeder endliche Teilgraph von G k-färbbar ist.
($G' = (V', E')$ ist Teilgraph von einem Graphen $G = (V, E)$, wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.)