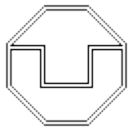
Formale Systeme

Prof. Dr.-Ing. Franz Baader
Lehrstuhl für Automatentheorie
Institut für Theoretische Informatik
TU Dresden

Information zur Vorlesung und zur Organisation der Übungen:

http://lat.inf.tu-dresden.de/teaching/ws2013-2014/FS/

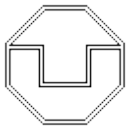


Dresden

Formale Systeme

Literatur:

- Skript zur Vorlesung und Folien (siehe Web-page).
- Uwe Schöning, *Theoretische Informatik – kurzgefasst*, Spektrum Akademischer Verlag, 2001.
- Ingo Wegener, *Theoretische Informatik – eine algorithmenorientierte Einführung*, Teubner, 1999.
- Uwe Schöning, *Logik für Informatiker*, Spektrum Akademischer Verlag, 2000.

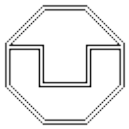


Formale Systeme

Ein wichtige Aufgabe in der Informatik ist die formale Modellierung der betrachteten Systeme.

Die Theoretische Informatik stellt die formalen Grundlagen für eine derartige Modellierung zur Verfügung:

Syntax:	Semantik:
Was kann man sagen?	Was bedeutet das gesagte?
Automaten und formale Sprachen	Logik



Dresden

Logik

in der Informatik

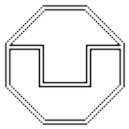
Wir betrachten hier logische Formeln über atomaren Aussagen (Aussagenlogik).

- Wie sieht eine logische Formel aus?
  Wann ist eine logische Formel wahr bzw. nicht wahr?

  Syntax und Semantik der Aussagenlogik

- Wie kann man aus einer Menge von logischen Formeln weitere Aussagen/Formeln schlussfolgern?

  Kalküle des logischen Schließens



Automaten und Formale Sprachen

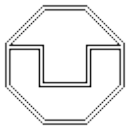
Hier betrachtet man Wörter (z.B. abb, bbaba, ...) und

Formale Sprachen, d.h. Mengen von Wörtern (z.B. $\{aa, bb, ab\}$, Wörter über a, b, die eine gerade Anzahl an as enthalten, ...).

Wichtige Fragestellungen

(a) Charakterisierung: wie beschreibt man die (meist unendlichen) Mengen von Wörtern mit endlichem Aufwand?

- Automaten oder Maschinen, die genaue die Elemente der Menge akzeptieren (endliche Automaten, Kellerautomaten, Turing-Maschinen).
- Grammatiken, die genau die Elemente der Menge generieren (vgl. AuD: kontextfreie Grammatiken, z.B. zur Beschreibung der Syntax von Programmiersprachen).
- Ausdrücke, die beschreiben, wie man die Sprache aus Basissprachen mittels gewisser Operationen (z.B. Vereinigung) erzeugen kann.



Chomsky-Hierarchy

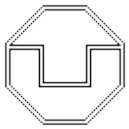
faßt die wichtigsten Klassen
Formaler Sprachen zusammen

Klasse	Automatentyp	Grammatiktyp
Typ 0	Turingmaschine (TM)	allgemeine Chomsky-Grammatik
Typ 1	TM mit linearer Bandbeschränkung	kontextsensitive Grammatik
Typ 2	Kellerautomat	kontextfreie Grammatik
Typ 3	endlicher Automat	einseitig lineare Grammatik

Die aus praktischer Sicht wichtigste Typen sind Typ 2 und Typ 3:

Typ 3: auch Beschreibung durch reguläre Ausdrücke,
die z.B. als Suchpattern bei der Textsuche Verwendung finden.

Typ 2: können weitgehend die Syntax von Programmiersprachen
beschreiben.



Wichtige Fragestellungen

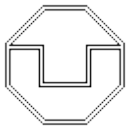
(b) Entscheidungsprobleme: welche Problemstellungen sind für eine Sprachklasse entscheidbar und mit welchem Aufwand?

- Wortproblem: geg. eine Beschreibung der Sprache L (durch Automat, Grammatik,..) und ein Wort w. Gilt $w \in L$?

  Anwendungsbeispiele:

  * Programmiersprache, deren Syntax durch eine kontextfreie Grammatik beschrieben ist. Entscheide, ob ein geg. Programm P syntaktisch korrekt ist.

  * Suchpattern als regulärer Ausdruck. Suche die Dateien (= Wörter), welche das Suchpattern enthalten (= zu der durch den Ausdruck beschriebenen Sprache gehören).



Wichtige Fragestellungen

(b) Entscheidungsprobleme: welche Problemstellungen sind für eine Sprachklasse entscheidbar und mit welchem Aufwand?

- Leerheitsproblem: geg. eine Beschreibung der Sprache L.
  Ist $L \neq \emptyset$?

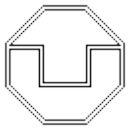
  Anwendungsbeispiel:

  * Wenn ein Suchpattern die leere Sprache beschreibt, so muß man die Dateien gar nicht durchsuchen.

- Äquivalenzproblem: beschreiben zwei verschiedene Beschreibungen dieselbe Sprache?

  Anwendungsbeispiel:

  * Zwei Lehrbücher über eine Programmiersprache beschreiben die Syntax durch verschiedene Grammatiken. Sind diese Beschreibungen wirklich äquivalent?

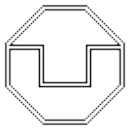


Wichtige Fragestellungen

(c) Abschlußeigenschaften: unter welchen Operationen auf Sprachen (wie Durchschnitt $L_1 \cap L_2$, Vereinigung $L_1 \cup L_2$, Komplement $\overline{L}$) ist die Sprachklasse abgeschlossen?

Anwendungsbeispiel:

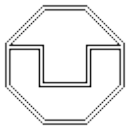
* Suchpattern: suche nach Dateien, die das Pattern nicht enthalten (Komplement) oder die zwei Pattern gleichzeitig enthalten (Durchschnitt).
* Reduziere das Äquivalenzproblem auf das Leerheitsproblem: statt "$L_1 = L_2$?" entscheide "$(L_1 \cap \overline{L_2}) \cup (L_2 \cap \overline{L_1}) = \emptyset$?".



Automaten und Formale Sprachen

Teil I: Endliche Automaten

0. Einführung
1. Nichtdeterministische endliche Automaten
2. Deterministische endliche Automaten
3. Nachweis der Nichterkennbarkeit
4. Abschlußeigenschaften und Entscheidungsprobleme
5. Reguläre Ausdrücke und Sprachen



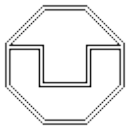
Automaten und Formale Sprachen

Teil II: Grammatiken, kontextfreie Sprachen und Kellerautomaten

6. Die Chomsky Hierarchie
7. Rechtslineare Grammatiken und reguläre Sprachen
8. Normalformen kontextfreier Sprachen
9. Abschlußeigenschaften kontextfreier Sprachen
10. Kellerautomaten

Teil III: Turingmaschinen und Grammatiken

11. Turingmaschinen
12. Zusammenhang zwischen Turingmaschinen und Grammatiken



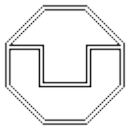
Endliche Automaten sind gekennzeichnet durch

- endliche Menge von (internen) Zuständen
- Übergänge zwischen Zuständen: abhängig von internen Struktur des Automaten und der Eingabe

Im Prinzip sind Rechner ebenfalls endliche Automaten:
endlich viel Speicherplatz und daher nur endliche Menge an Konfigurationen.

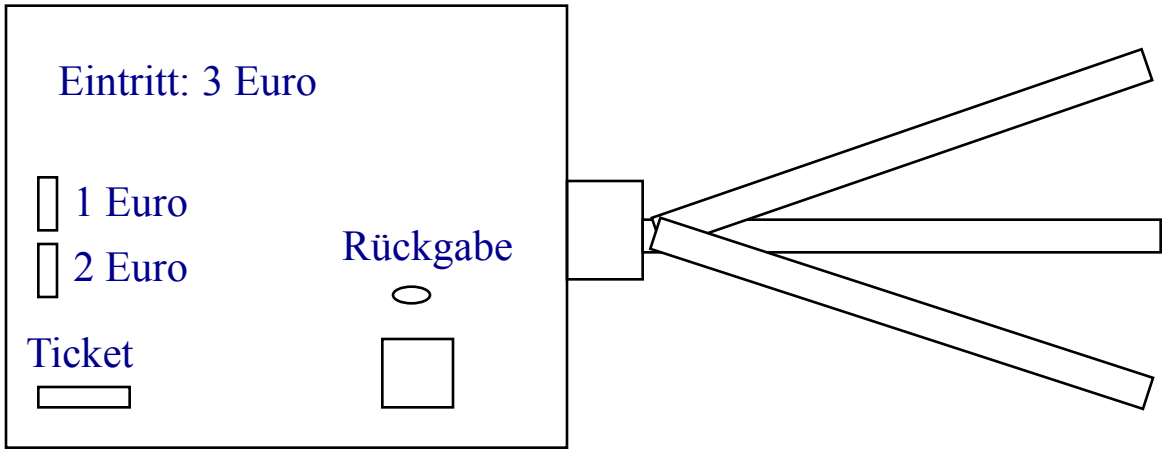
Aber:

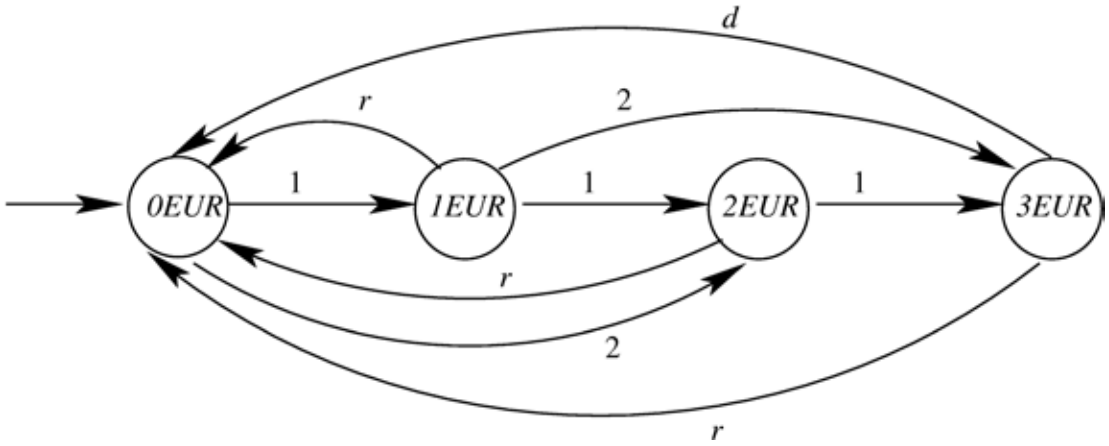
Keine geeignete Beschreibungsebene wegen extrem hoher Zustandsanzahl. Daher abstrahiert man von der Speicherplatzbeschränkung und nimmt potentiell unendlichen Speicher an (in GThI 2: Turing-Maschinen mit unendlichen Bändern).



Beispiel

Eintrittskartenautomat





Welche Eingabe führt zum Zustand 3EUR, in dem man durch das Drehgitter darf?

Grundlegende Definitionen

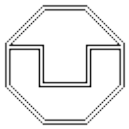
Alphabet: endliche Menge von Buchstaben
Σ für Alphabete, $a, b, c, \ldots$ für Buchstaben.

Wort: endliche Folge von Buchstaben
$w = a_1 \ldots a_n$ mit $a_i \in \Sigma$ heißt Wort über dem Alphabet Σ.

Länge: des Worts $w = a_1 \ldots a_n$ ist $|w| = n$;
z.B. $|aba| = 3$.

Anzahl der Vorkommen von Buchstaben:
$|w|_a$ zählt die Anzahl der Vorkommen von a in w;
z.B. $|aba|_a = 2$, $|aba|_b = 1$, $|aba|_c = 0$.

Leeres Wort: ε hat Länge 0.



Grundlegende Definitionen

Σ^*: Menge aller Wörter über Σ;

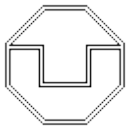
$\Sigma^+ := \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$.

Formale Sprache: Menge von Wörtern;

$L \subseteq \Sigma^*$ ist formale Sprache über Σ.

Beispiele:

- Menge der Wörter über $\{a, \ldots, z\}$, die korrekte Wörter der deutschen Sprache sind.
- Menge der Wörter, die das Stichwort "theorie" enthalten.



Operationen auf Sprachen

Boolesche Operationen: Vereingung, Durchschnitt, Komplement und Differenz;

$$L_1 \cup L_2,\ L_1 \cap L_2,$$

$$\overline{L} := \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\},$$

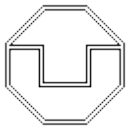
$$L_1 \setminus L_2 := L_1 \cap \overline{L_2}.$$

Konkatenation: Aneinanderhängen von Wörtern;

$u \cdot v := uv$; z.B. $abb \cdot ab = abbab$.

$$L_1 \cdot L_2 := \{u \cdot v \mid u \in L_1 \text{ und } v \in L_2\}.$$

Beachte: der Konkatenationspunkt wird auch bei Sprachen meist weggelassen, d.h. $L_1 L_2$ anstelle von $L_1 \cdot L_2$.



Operationen auf Sprachen

Kleene-Stern: Iterierte Konkatenation

$$L^0 := \{\varepsilon\},$$

$$L^{n+1} := L^n \cdot L,$$

$$L^* := \bigcup_{n \geq 0} L^n,$$

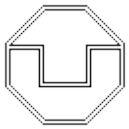
$$L^+ := \bigcup_{n \geq 1} L^n$$

Präfix, Suffix, Infix: Anfangs-, End-, und Mittelstücke von Wörtern;

u ist Präfix von v gdw $v = uw$ für ein $w \in \Sigma^*$,

u ist Suffix von v gdw $v = wu$ für ein $w \in \Sigma^*$,

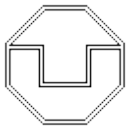
u ist Infix von v gdw $v = w_1 u w_2$ für $w_1, w_2 \in \Sigma^*$.



Inhaltsangabe

Teil I: Endliche Automaten

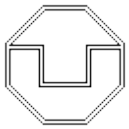
0. Einführung
1. Nichtdeterministische endliche Automaten
2. Deterministische endliche Automaten
3. Nachweis der Nichterkennbarkeit
4. Abschlußeigenschaften und Entscheidungsprobleme
5. Reguläre Ausdrücke und Sprachen



Definition 1.1 (Transitionssystem)

Ein Transitionssystem ist von der Form $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, I, \Delta, F)$, wobei

- Q eine Menge von Zuständen ist (nicht notwendigerweise endlich!),
- Σ ein endliches Alphabet ist,
- $I \subseteq Q$ eine Menge von Anfangszuständen ist,
- $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ eine Übergangsrelation (Transitionsrelation) ist,
- $F \subseteq Q$ eine Menge von Endzuständen ist.



Definition 1.2 (Nichtdeterministischer endlicher Automat)

Das Transitionssystem $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, I, \Delta, F)$ heißt nichtdeterministischer endlicher Automat (NEA) falls

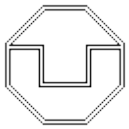
- $|Q| < \infty$ und
- $|I| = 1$.

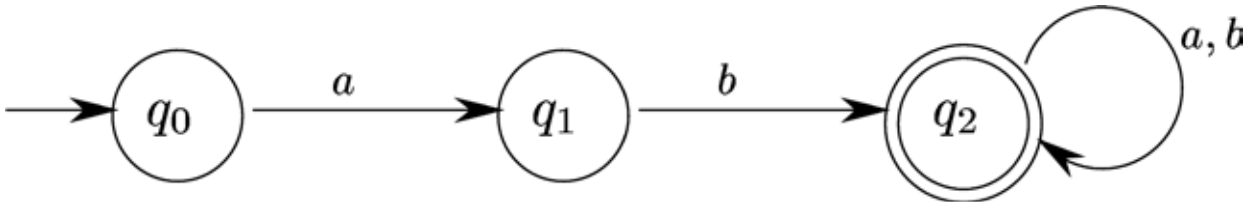
Schreibweise: $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$.

Beispiel 1.3 (Nichtdeterministischer endlicher Automat)

$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$ mit

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$,
- $\Sigma = \{a, b\}$,
- $\Delta = \{(q_0, a, q_1), (q_1, b, q_2), (q_2, a, q_2), (q_2, b, q_2)\}$,
- $F = \{q_2\}$.





Beispiel 1.3 (Nichtdeterministischer endlicher Automat)

$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$ mit

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$,
- $\Sigma = \{a, b\}$,
- $\Delta = \{(q_0, a, q_1), (q_1, b, q_2), (q_2, a, q_2), (q_2, b, q_2)\}$,
- $F = \{q_2\}$.

Definition 1.4 (Pfad in Transitionssystem)

Ein Pfad in einem Transitionssystem $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, I, \Delta, F)$ ist eine Folge

$$\pi = (p_0, a_1, p_1)(p_1, a_2, p_2) \cdots (p_{n-1}, a_n, p_n)$$

mit $(p_i, a_{i+1}, p_{i+1}) \in \Delta$ für $i = 0, \ldots, n-1$.

Pfad von p nach q: $p_0 = p$ und $p_n = q$.

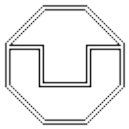
Beschriftung des Pfads π: $a_1 \ldots a_n$

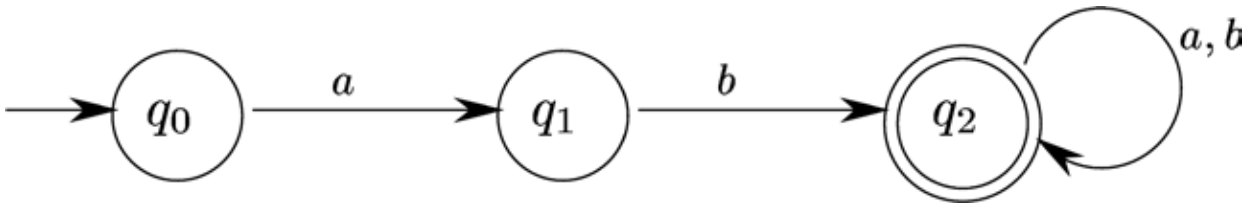
Länge des Pfads π: n

Länge 0: leerer Pfad mit Beschriftung ε.

$p \xrightarrow{w}_{\mathcal{A}} q$: es gibt einen Pfad von p nach q mit Beschriftung w.

$Q_1 \xrightarrow{w}_{\mathcal{A}} Q_2$: es gibt $p_1 \in Q_1$ und $p_2 \in Q_2$ mit $p_1 \xrightarrow{w}_{\mathcal{A}} p_2$.





Leerer Pfad von q_0 nach q_0 mit Beschriftung ε.

Pfad von q_0 nach q_1 mit Beschriftung a.

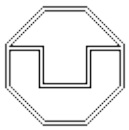
Pfad von q_0 nach q_2 mit Beschriftung ab.

Pfad von q_0 nach q_2 mit Beschriftung aba.

Pfad von q_0 nach q_2 mit Beschriftung abb.

Pfad von q_0 nach q_2 mit Beschriftung $abaa$.

$$q_0 \xrightarrow{abw}_{\mathcal{A}} q_2 \text{ für all } w \in \Sigma^*.$$



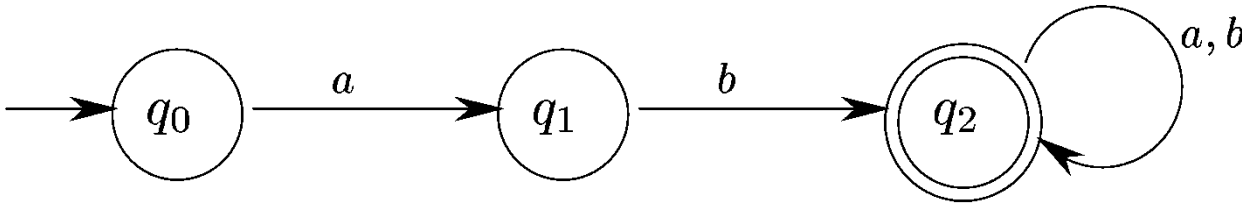
Definition 1.5 (Akzeptierte Sprache)

Das Transitionssystem $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, I, \Delta, F)$ akzeptiert (erkennt) das Wort $w \in \Sigma^*$ gdw

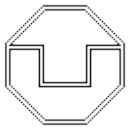
$$I \xrightarrow{w}_{\mathcal{A}} F.$$

Die von $\mathcal{A}$ akzeptierte (erkannte) Sprache ist

$$L(\mathcal{A}) := \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \text{ akzeptiert } w\}.$$



$$L(\mathcal{A}) = \{abw \mid w \in \Sigma^*\}$$

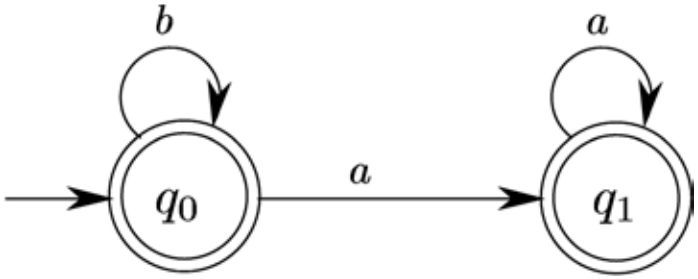


Definition 1.6 (erkennbare Sprachen)

Die Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt erkennbar gdw es einen NEA $\mathcal{A}$ gibt mit $L = L(\mathcal{A})$.

Beispiel 1.7 (eine erkennbare Sprachen)

$L := \{w \in \{a,b\}^* \mid ab \text{ ist nicht Infix von } w\}$.

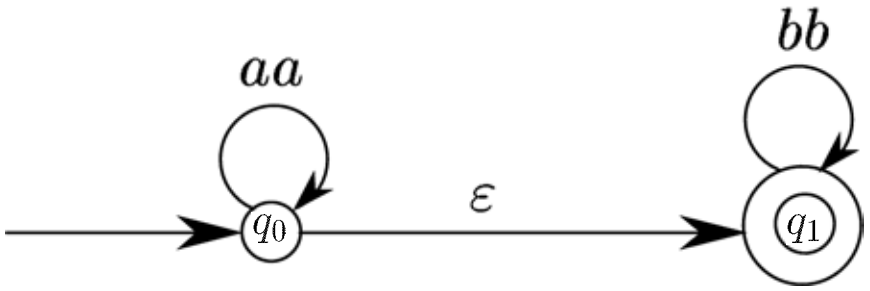


Äquivalente Transitionssysteme: erkennen dieselbe Sprache.

Definition 1.8 (NEA mit Wort- und ε-Übergängen)

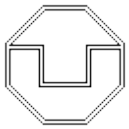
1. Ein NEA mit Wortübergängen hat die Form $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$, wobei Q, Σ, q_0, F wie beim NEA definiert sind und $\Delta \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q$ eine endliche Menge von Wortübergängen ist.

2. Ein ε-NEA ist ein NEA mit Wortübergängen, wobei für alle $(q, w, q') \in \Delta$ gilt: $|w| \leq 1$ (d.h. $w \in \Sigma$ oder $w = \varepsilon$).



Pfad $(q_0, aa, q_0)(q_0, aa, q_0)(q_0, \varepsilon, q_1)(q_1, bb, q_1)$ hat Beschriftung $aa \cdot aa \cdot \varepsilon \cdot bb = aaaabb$.

Akzeptierte Sprache?



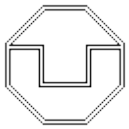
Satz 1.9 (NEA mit Wortübergängen nicht stärker als NEA)

Zu jedem NEA mit Wortübergängen kann man effektiv einen äquivalenten NEA (ohne Wortübergänge) konstruieren.

Effektiv: durch einen Algorithmus realisierbar, der als Eingabe den NEA mit Wortübergängen erhält und als Ausgabe den dazu äquivalenten NEA liefert.

Beweis:

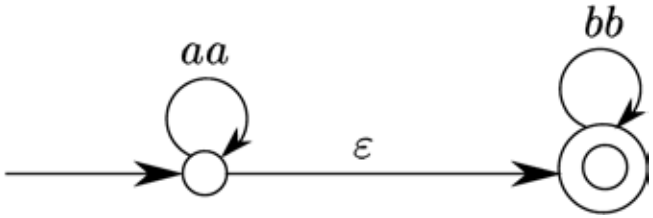
NEA mit Wortübergängen $\xrightarrow{\text{Lemma 1.10}}$ ε-NEA $\xrightarrow{\text{Lemma 1.12}}$ NEA



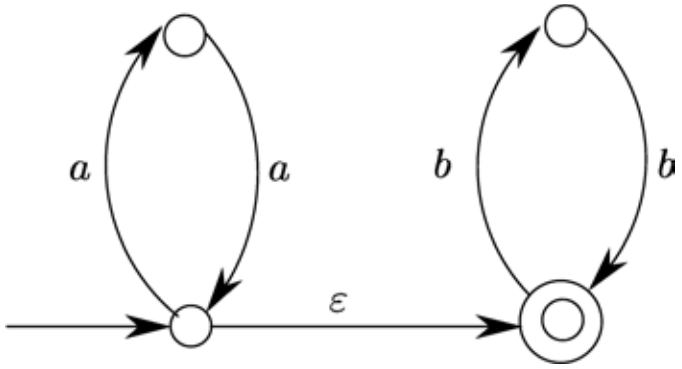
Lemma 1.10 (NEA mit Wortübergängen nicht stärker als ε-NEA)

Zu jedem NEA mit Wortübergängen kann man effektiv einen äquivalenten ε-NEA konstruieren.

Beispiel 1.11



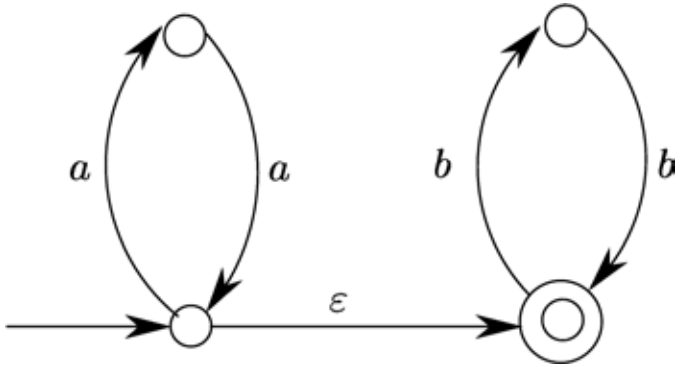
wird zu



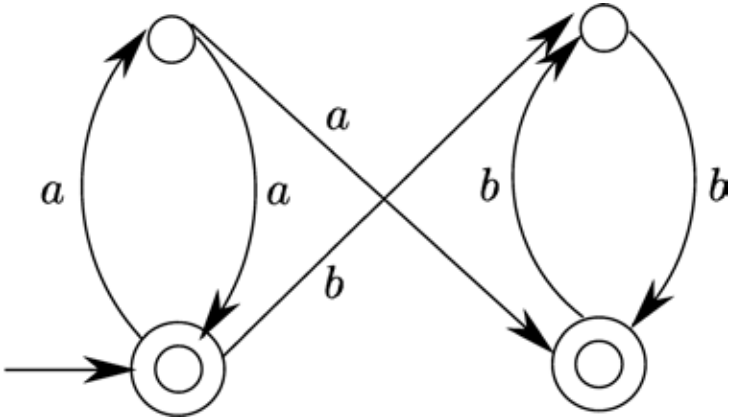
Dresden

Lemma 1.12 (ε-NEA nicht stärker als NEA)

Zu jedem ε-NEA kann man effektiv einen äquivalenten NEA konstruieren.



wird zu



Beweis:

Der ε-NEA

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$$

sei gegeben.

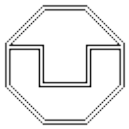
Wir konstruieren daraus einen NEA ohne ε-Übergänge wie folgt:

$$\mathcal{A}' = (Q, \Sigma, q_0, \Delta', F'),$$

wobei

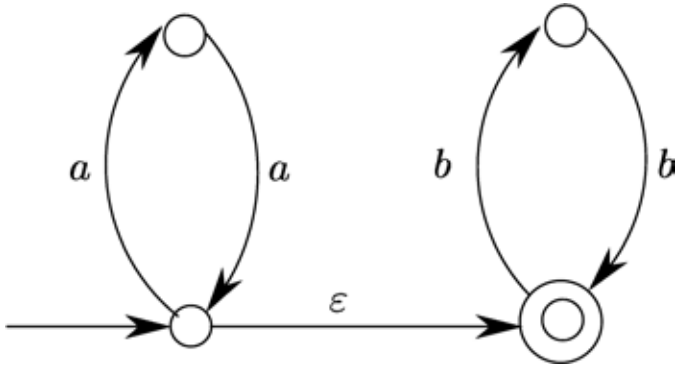
- $\Delta' := \{(p, a, q) \in Q \times \Sigma \times Q \mid p \xrightarrow{a}_{\mathcal{A}} q\}$
- $F' := \begin{cases} F \cup \{q_0\} & \text{falls} \quad q_0 \xrightarrow{\varepsilon}_{\mathcal{A}} F \\ F & \text{sonst} \end{cases}$

Zu zeigen: $\mathcal{A}'$ kann effektiv bestimmt werden und $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$.

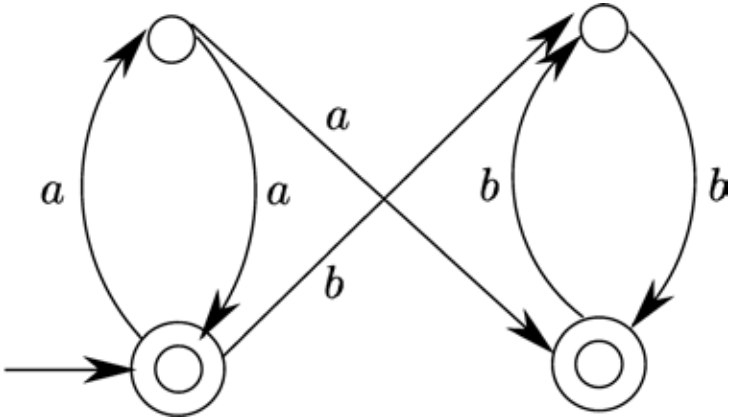


Lemma 1.12 (ε-NEA nicht stärker als NEA)

Zu jedem ε-NEA kann man effektiv einen äquivalenten NEA konstruieren.



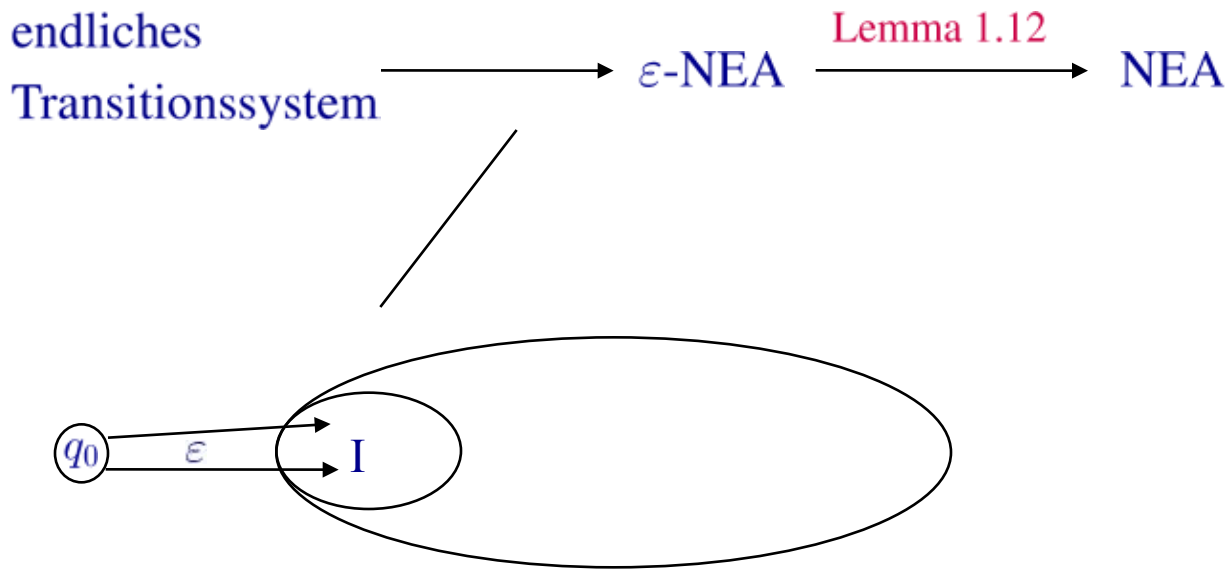
wird zu



Lemma 1.12 liefert auch das folgende

Zu jedem endlichen Transitionssystem kann man effektiv einen äquivalenten NEA konstruieren.

Beweis:



Dresden