§ 14. Äquivalenz und Normalformen

Definition 14.1 (Äquivalenz)

Die Formeln ϕ und ψ sind äquivalent gdw. sie dieselben Modelle haben.

Wir schreiben dann $\phi \equiv \psi$.

Satz 14.2

1. $\phi \equiv \psi$ gdw. $w(\phi) = w(\psi)$ für alle Wertzuweisungen w.
2. $\phi \equiv \psi$ gdw. $\models \phi \leftrightarrow \psi$
3. Sind ϕ und ψ Tautologien, so gilt $\phi \equiv \psi$.
4. Sind ϕ und ψ unerfüllbar, so gilt $\phi \equiv \psi$.

Beispiel

Die folgenden beiden Formeln sind äquivalent:

$(p \rightarrow q)$ und $(\neg q \rightarrow \neg p)$

Man stellt dazu die Wahrheitstafel für beide Formeln auf:

p	q	$(p \rightarrow q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg q \rightarrow \neg p))$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1

äquivalent!

Satz 14.3

Die Relation $\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der aussagenlogischen Formeln, d.h. es gilt für alle Formeln ϕ, ψ, π:

- $\phi \equiv \phi$ (Reflexivität).
- Wenn $\phi \equiv \psi$, dann auch $\psi \equiv \phi$ (Symmetrie).
- Wenn $\phi \equiv \psi$ und $\psi \equiv \pi$, dann auch $\phi \equiv \pi$ (Transitivität).

Beweis:

folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß die Gleichheitsrelation auf $\{0, 1\}$ reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

Satz 14.4

Es sei ϕ eine Formel und $\psi \in Unt(\phi)$.

Ist $\psi \equiv \pi$ und entsteht $\widehat{\phi}$ aus ϕ dadurch, daß man irgendein Vorkommen von ψ in ϕ durch π ersetzt, so gilt auch $\phi \equiv \widehat{\phi}$.

Beispiel:

$\phi = (p \rightarrow (q \rightarrow p))$

Es ist $p \equiv (p \vee p)$ und $\widehat{\phi} = (p \rightarrow (q \rightarrow (p \vee p)))$ entsteht aus ϕ, indem man das zweite Vorkommen von p in ϕ durch $(p \vee p)$ ersetzt.

Satz 14.4

Es sei ϕ eine Formel und $\psi \in Unt(\phi)$.

Ist $\psi \equiv \pi$ und entsteht $\widehat{\phi}$ aus ϕ dadurch, daß man irgendein Vorkommen von ψ in ϕ durch π ersetzt, so gilt auch $\phi \equiv \widehat{\phi}$.

Beweis:

Es genügt zu zeigen, daß für alle Wertzuweisungen w gilt: $w(\phi) = w(\widehat{\phi})$.

Bei der Auswertung von $\widehat{\phi}$ stößt man auf die Unterformel π, die durch die Ersetzung eingeführt wurde, und wertet dieses zu $w(\pi)$ aus.

Bei der Auswertung von ϕ stößt man an der selben Stelle auf die Unterformel ψ, und wertet dieses zu $w(\psi)$ aus.

Wegen $\psi \equiv \pi$ gilt aber $w(\psi) = w(\pi)$, was zeigt, daß beide Auswertungen das selbe Resultat liefern, d.h. $w(\phi) = w(\widehat{\phi})$.

Satz 14.4

Es sei ϕ eine Formel und $\psi \in Unt(\phi)$.

Ist $\psi \equiv \pi$ und entsteht $\widehat{\phi}$ aus ϕ dadurch, daß man irgendein Vorkommen von ψ in ϕ durch π ersetzt, so gilt auch $\phi \equiv \widehat{\phi}$.

Beispiel:

$\phi = (p \rightarrow (q \rightarrow p))$

Es ist $p \equiv (p \vee p)$ und $\widehat{\phi} = (p \rightarrow (q \rightarrow (p \vee p)))$ entsteht aus ϕ, indem man das zweite Vorkommen von p in ϕ durch $(p \vee p)$ ersetzt.

$$
\begin{aligned}
w(\widehat{\phi}) &= w((p \rightarrow (q \rightarrow (p \vee p)))) \\
&= \rightarrow^S(w(p), \rightarrow^S(w(q), w(p \vee p))) \\
&= \rightarrow^S(w(p), \rightarrow^S(w(q), w(p))) \\
&= w((p \rightarrow (q \rightarrow p))) \\
&= w(\phi)
\end{aligned}
$$

Der Satz zeigt, daß man äquivalente Formeln beliebig durch einander ersetzen kann, ohne die Semantik einer Formel (d.h. deren Auswertung unter Wertzuweisungen) zu verändern. Es ist daher egal, welches Element der Äquivalenzklasse einer Formel in einer anderen Formel vorkommt.

- Im folgenden verwenden wir häufig $\top$ zur Bezeichnung einer beliebigen Tautologie, d.h.

  $w(\top) = 1$ für alle Wertzuweisungen w,

- und $\bot$ zur Bezeichnung einer beliebigen unerfüllbaren Formel, d.h.

  $w(\bot) = 0$ für alle Wertzuweisungen w.

Satz 14.5

Für alle Formeln ϕ, ψ, π gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}(\phi \wedge \phi) &\equiv \phi \\ (\phi \vee \phi) &\equiv \phi\end{aligned}$$ Idempotenz

$$\begin{aligned}(\phi \wedge \psi) &\equiv (\psi \wedge \phi) \\ (\phi \vee \psi) &\equiv (\psi \vee \phi)\end{aligned}$$ Kommutativität

$$\begin{aligned}((\phi \wedge \psi) \wedge \pi) &\equiv (\phi \wedge (\psi \wedge \pi)) \\ ((\phi \vee \psi) \vee \pi) &\equiv (\phi \vee (\psi \vee \pi))\end{aligned}$$ Assoziativität

$$\begin{aligned}(\phi \wedge (\phi \vee \psi)) &\equiv \phi \\ (\phi \vee (\phi \wedge \psi)) &\equiv \phi\end{aligned}$$ Absorption

$$\begin{aligned}(\phi \wedge (\psi \vee \pi)) &\equiv ((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \pi)) \\ (\phi \vee (\psi \wedge \pi)) &\equiv ((\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \pi))\end{aligned}$$ Distributivität

$$\begin{aligned}(\phi \wedge \top) &\equiv \phi \\ (\phi \vee \top) &\equiv \top\end{aligned}$$ Tautologie

$$\begin{aligned}(\phi \vee \bot) &\equiv \phi \\ (\phi \wedge \bot) &\equiv \bot\end{aligned}$$ Unerfüllbarkeit

Satz 14.5 (Fortsetzung)

Für alle Formeln ϕ, ψ, π gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} \neg(\phi \wedge \psi) &\equiv (\neg\phi \vee \neg\psi) \\ \neg(\phi \vee \psi) &\equiv (\neg\phi \wedge \neg\psi) \end{aligned}$$ de Morgan

$$\neg\neg\phi \equiv \phi$$ Doppelnegation

$$(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\phi \vee \psi)$$ Implikation

$$(\phi \leftrightarrow \psi) \equiv ((\phi \wedge \psi) \vee (\neg\phi \wedge \neg\psi))$$ Bi-Implikation

Beweis von Satz 14.5:

Die Gültigkeit der Äquivalenzen kann leicht mittels Aufstellen der Wahrheitstafeln nachgewiesen werden.

Als Beispiel betrachten wir $\neg(\phi \wedge \psi) \equiv (\neg\phi \vee \neg\psi)$ und $(\phi \vee \top) \equiv \top$:

ϕ	ψ	$\neg\phi$	$\neg\psi$	$(\phi \wedge \psi)$	$\neg(\phi \wedge \psi)$	$(\neg\phi \vee \neg\psi)$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

ϕ	$\top$	$(\phi \vee \top)$
0	1	1
1	1	1

Dresden

Beachte:

- Assoziativität zeigt, daß die Klammerstruktur geschachtelter Konjunktionen (bzw. Disjunktionen) irrelevant ist. Wir können daher einfach $(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n)$ (bzw. $(\phi_1 \vee \ldots \vee \phi_n)$) schreiben.

- Kommutativität zeigt, daß auch die Reihenfolge der Konjunkte in solch einer Konjunktion (bzw. der Disjunkte in solch einer Disjunktion) irrelevant ist.

- Idempotenz zeigt, daß sogar die Vielfachheit des Vorkommens eines Konjunkts in solch einer Konjunktion (bzw. eines Disjunkts in solch einer Disjunktion) irrelevant ist.

Beachte:

- Äquivalenz kann man auch zwischen Mengen von Formeln definieren:

  Γ und Δ sind äquivalent ($\Gamma \equiv \Delta$) gdw. sie dieselben Modelle haben.

- Entsprechend sind die Formel ϕ und die Formelmenge Γ äquivalent gdw. sie dieselben Modelle haben.

- Offenbar sind $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ und $(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n)$ äquivalent.

Wir betrachten zunächst Normalformen, bei denen nur eine Teilmenge der eingeführten Junktoren verwendet wird:

Satz 14.6

Es sei ϕ eine aussagenlogische Formel.

1. ϕ ist äquivalent zu einer Formel, die nur die Junktoren $\wedge$ und $\neg$ enthält.
2. ϕ ist äquivalent zu einer Formel, die nur die Junktoren $\vee$ und $\neg$ enthält.
3. ϕ ist äquivalent zu einer Formel, die nur die Junktoren $\rightarrow$ und $\neg$ enthält.

Beweis:

Wir zeigen zunächst durch Induktion, daß ϕ äquivalent ist zu einer Formel, die nur die Junktoren $\wedge, \vee, \neg$ enthält:

$\phi = p \in \mathcal{P}$: dann ist ϕ selbst die gesuchte Formel.

$\phi = \psi \wedge \pi$:

die Induktionsannahme liefert Formeln ψ', π', die nur die Junktoren $\wedge, \vee, \neg$ enthalten und für die gilt: $\psi \equiv \psi'$ und $\pi \equiv \pi'$.

Dann ist $\psi' \wedge \pi'$ die gesuchte Formel.

$\phi = \psi \vee \pi$ und $\phi = \neg\psi$ können analog behandelt werden.

$\phi = \psi \rightarrow \pi$:

die Induktionsannahme liefert Formeln ψ', π', die nur die Junktoren $\wedge, \vee, \neg$ enthalten und für die gilt: $\psi \equiv \psi'$ und $\pi \equiv \pi'$.

Dann ist $\neg\psi' \vee \pi'$ die gesuchte Formel.

$\phi = \psi \leftrightarrow \pi$ kann analog behandelt werden.

Beweis (Fortsetzung):

Es sei nun ϕ' eine Formel, die äquivalent zu ϕ ist und nur die Junktoren $\wedge, \vee, \neg$ enthält.

(1) Unter Verwendung der Äquivalenz

$$(\psi \vee \pi) \equiv (\neg\neg\psi \vee \neg\neg\pi) \equiv \neg(\neg\psi \wedge \neg\pi)$$

kann man aus ϕ' nun noch alle Vorkommen von $\vee$ eliminieren.

Formal zeigt man dies wieder durch eine Induktion, die analog zu der vorherigen durchgeführt werden kann.

(2) Unter Verwendung der Äquivalenz

$$(\psi \wedge \pi) \equiv (\neg\neg\psi \wedge \neg\neg\pi) \equiv \neg(\neg\psi \vee \neg\pi)$$

kann man aus ϕ' alternativ auch alle Vorkommen von $\wedge$ eliminieren.

Beweis (Fortsetzung):

Es sei nun ϕ'' eine Formel, die äquivalent zu ϕ ist und nur die Junktoren $\vee, \neg$ enthält.

(3) Unter Verwendung der Äquivalenz

$$(\psi \vee \pi) \equiv (\neg\neg\psi \vee \pi) \equiv (\neg\psi \rightarrow \pi)$$

kann man aus ϕ'' durch Einführung von $\rightarrow$ nun alle Vorkommen von $\vee$ eliminieren.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
((p \wedge q) \vee q) &\equiv (\neg(\neg p \vee \neg q)) \vee q) \\
&\equiv (\neg(\neg\neg p \rightarrow \neg q) \vee q) \\
&\equiv (\neg\neg(\neg\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow q) \equiv ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow q)
\end{aligned}$$

Dresden

Definition 14.7 (Negationsnormalform)

Es sei ϕ eine aussagenlogische Formel. Dann ist ϕ in Negationsnormalform, falls

1. ϕ nur die Junktoren $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ enthält, und
2. in ϕ der Negationsoperator nur auf aussagenlogische Variablen (d.h. nicht auf komplexe Formeln) angewendet wird.

Beispiel:

$((p \wedge \neg q) \vee q)$ ✓

$(\neg(p \wedge q) \vee q)$ ✗

$((p \vee q) \rightarrow q)$ ✗

Dresden

Satz 14.8

Es sei ϕ eine aussagenlogische Formel. Dann gibt es eine zu ϕ äquivalente Formel, die in Negationsnormalform ist.

Beweis:

Es sei ϕ' eine zu ϕ äquivalente Formel, die nur die Junktoren $\wedge, \vee, \neg$ enthält.

Wir zeigen den Satz durch Induktion über die Größe von ϕ':

(1) $\phi' = p \in \mathcal{P}$: dann ist ϕ' die gesuchte Negationsnormalform.

(2) $\phi' = (\psi \circ \pi)$ für einen Junktor $\circ \in \{\wedge, \vee\}$.

Dann gibt es nach Induktion Formeln ψ', π' in Negationsnormalform mit:
$\psi' \equiv \psi$ und $\pi' \equiv \pi$.

In diesem Fall ist $(\psi' \circ \pi')$ die gesuchte Negationsnormalform von ϕ.

(3) $\phi' = \neg\psi$

1. Fall: $\psi = p \in \mathcal{P}$.

Dann ist $\phi' = \neg p$ die gesuchte Negationsnormalform von ϕ.

2. Fall: $\psi = \neg\pi$.

Dann ist $\phi' = \neg\neg\pi \equiv \pi$.

Nach Induktion gibt es eine zu π äquivalente Formel π' in Negationsnormalform.

Damit ist π' die gesuchte Negationsnormalform von ϕ.

3. Fall: $\psi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$.

4. Fall: $\psi = (\psi_1 \vee \psi_2)$ ist analog.

Dann ist $\phi' = \neg(\psi_1 \wedge \psi_2) \equiv (\neg\psi_1 \vee \neg\psi_2)$.

Nach Induktion gibt es Formeln π_1', π_2' in Negationsnormalform mit: $\pi_1' \equiv \neg\psi_1$ und $\pi_2' \equiv \neg\psi_2$.

Damit ist $(\pi_1' \vee \pi_2')$ die gesuchte Negationsnormalform von ϕ.

Definition 14.9 (DNF und KNF)

1. Ein Literal ist eine aussagenlogische Variable (positives Literal) oder die Negation einer aussagenlogischen Variablen (negatives Literal).

2. Eine Formel ϕ ist in konjunktiver Normalform (KNF), falls sie eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist:

$$\phi = \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{i,j} \right) \right),$$

wobei die $L_{i,j}$ Literale sind.

3. Eine Formel ϕ ist in disjunktiver Normalform (DNF), falls sie eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist:

$$\phi = \left(\bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} L_{i,j} \right) \right),$$

wobei die $L_{i,j}$ Literale sind.

Satz 14.10

Es sei ϕ eine aussagenlogische Formel. Dann gibt es eine zu ϕ äquivalente Formel, die in KNF ist, und eine zu ϕ äquivalente Formel, die in DNF ist.

Beweis:

Es sei ϕ' eine zu ϕ äquivalente Formel, die in Negationsnormalform ist.

Um daraus eine äquivalente Formel in KNF zu erzeugen, wendet man das Distributivitätsgesetz

$$(\phi \vee (\psi \wedge \pi)) \quad \equiv \quad ((\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \pi))$$

auf ϕ' an.

Um daraus eine äquivalente Formel in DNF zu erzeugen, wendet man das Distributivitätsgesetz

$$(\phi \wedge (\psi \vee \pi)) \quad \equiv \quad ((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \pi))$$

auf ϕ' an.

Normalformen

durch Anwenden von Ersetzungsregeln

Die betrachteten Normalformen können alle dadurch erzeugt werden, daß man gewisse Äquivalenzen aus Satz 14.5 als Ersetzungsregeln verwendet, d.h. nur in eine Richtung anwendet:

- Um aus einer beliebigen aussagenlogischen Formel eine äquivalente zu erzeugen, die nur die Junktoren $\wedge, \vee, \neg$ enthält, wendet man die Äquivalenzen

$$
\begin{aligned}
(\phi \rightarrow \psi) &\equiv (\neg\phi \vee \psi) \\
(\phi \leftrightarrow \psi) &\equiv ((\phi \wedge \psi) \vee (\neg\phi \wedge \neg\psi))
\end{aligned}
$$

  nur von links nach rechts an.

- Um daraus dann eine äquivalente Formel in Negationsnormalform zu erzeugen, wendet man die Äquivalenzen

$$
\begin{aligned}
\neg(\phi \wedge \psi) &\equiv (\neg\phi \vee \neg\psi) \\
\neg(\phi \vee \psi) &\equiv (\neg\phi \wedge \neg\psi) \\
\neg\neg\phi &\equiv \phi
\end{aligned}
$$

  nur von links nach rechts an.

Normalformen

durch Anwenden von Ersetzungsregeln

Um von einem solchen Ersetzungsverfahren zu zeigen, daß es tatsächlich eine äquivalente Formel in der gewünschten Normalform liefert, muß man zeigen:

1. Regelanwendung ist äquivalenzerhaltend.

   Dies ergibt sich für die betrachteten Normalformen aus Satz 14.5 und Satz 14.4.

2. Regelanwendung ist terminierend, d.h. nach endlich vielen Anwendungen erhält man eine Formel, auf die keine Regel mehr anwendbar ist.

   Dies ist ohne zusätzliche Hilfsmittel oft nicht einfach zu zeigen.

3. Regelanwendung liefert die gewünschte Normalform, d.h. eine Formel, auf die keine der Regeln anwendbar ist, ist in Normalform.

   Dies ist bei den betrachteten Normalformen leicht zu zeigen.

Terminierung

ist nicht einfach

Um Terminierung zu zeigen, ordnet man jeder Formel ϕ ein geeignetes „Maß“ $\kappa(\phi)$ zu und zeigt, daß Regelanwendung dieses Maß „verkleinert“.

Zum Beispiel nimmt durch Anwendung der Regel

$$\neg\neg\phi \Rightarrow \phi$$

die Größe der Formel ab.

Bei der Regel

$$(\phi \leftrightarrow \psi) \Rightarrow ((\phi \wedge \psi) \vee (\neg\phi \wedge \neg\psi))$$

ist dies aber nicht der Fall.

Master-Vorlesung
Term Rewriting Systems
entwickelt u.a. Hilfsmittel
zum Nachweis der Terminierung.

Unsere Induktionsbeweise betrachten im Prinzip “inner-most” Regelanwendungen, wofür Terminierung leichter zu zeigen ist.

Die Literale L, L' heißen komplementär, falls es eine aussagenlogische Variable p gibt mit $\{L, L'\} = \{p, \neg p\}$.

Beachte:

Für eine Formel ϕ in DNF kann man Erfüllbarkeit sehr leicht entscheiden: ist

$$\phi = \left(\bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} L_{i,j} \right) \right),$$

so ist ϕ genau dann erfüllbar, wenn es ein i, $1 \leq i \leq n$, gibt, sodaß $\{L_{i,1}, \ldots, L_{i,m_i}\}$ keine komplementären Literale enthält.

Beweis:

„$\Rightarrow$" Ist ϕ erfüllbar, so muß es ein Disjunkt geben, das erfüllbar ist. Offenbar ist eine Konjunktion, die komplementäre Literale enhält, nicht erfüllbar. Daher kann das erfüllbare Disjunkt keine komplementären Literale enhalten.

„$\Leftarrow$" Enthält das Disjunkt $\bigwedge_{j=1}^{m_i} L_{i,j}$ keine komplementären Literale, so kann man leicht eine Wertzuweisung angeben, die es zu 1 auswertet: Definiere

$w(p) = 1$ falls $p \in \{L_{i,1}, \ldots, L_{i,m_i}\}$

$w(p) = 0$ falls $\neg p \in \{L_{i,1}, \ldots, L_{i,m_i}\}$

andernfalls wähle $w(p)$ beliebig

Dresden

Test auf Erfüllbarkeit

Wir haben damit bisher zwei Möglichkeiten gesehen, wie man eine gegebene Formel auf Erfüllbarkeit testen kann:

1. Stelle die Wahrheitstafel auf und überprüfe, ob in der Spalte für die Formel eine 1 auftritt.

2. Transformiere die Formel in DNF und überprüfe, ob es ein Disjunkt ohne komplementäre Literale gibt.

Beide Verfahren können (im schlimmsten Fall) exponentiell viel Zeit benötigen.

Beachte:

Anwendung der Distributivregel $(\phi \wedge (\psi \vee \pi)) \Rightarrow ((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \pi))$ verdoppelt ϕ.

Dresden

§ 15. Hornformeln

Definition 15.1 (Hornformel)

Eine Formel ϕ ist eine Hornformel gdw. sie in KNF ist und jedes Konjunkt höchstens ein positives Literal enthält.

$(p \vee q)$ ist keine Hornformel.

$((\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge p \wedge q \wedge \neg r)$ ist eine Hornformel.

Hornformeln können auch als spezielle Mengen von Implikationen aufgefaßt werden:

$$\{((p \wedge q) \rightarrow r), \quad (\top \rightarrow p), \quad (\top \rightarrow q), \quad (r \rightarrow \bot)\}$$

Wir nennen diese Implikationen Hornklauseln.

Hornformeln können auch als spezielle Mengen von Implikationen aufgefaßt werden:

Jedes Konjunkt der Hornformel kann in eine äquivalente Hornklausel übersetzt werden.

$$(\neg p_1 \vee \ldots \vee \neg p_n \vee q) \quad \longrightarrow \quad ((p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q)$$

$$(\neg p_1 \vee \ldots \vee \neg p_n) \quad \longrightarrow \quad ((p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow \bot)$$

$$q \quad \longrightarrow \quad (\top \rightarrow q)$$

Satz 15.2

> Zu jeder Hornformel können wir effektiv eine äquivalente endliche Menge von Hornklauseln bestimmen.

Entscheidungsprobleme

für endliche Mengen von Hornklauseln

Es sei Γ eine endliche Menge von Hornklauseln.

1. Erfüllbarkeit: hat Γ ein Modell?
2. Konsequenz 1: folgt $p \in \mathcal{P}$ aus Γ?
3. Konsequenz 2: folgt $((p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q)$ aus Γ?

Konsequenz 2 kann mit Hilfe von Konsequenz 1 entschieden werden:

$((p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q)$ folgt aus Γ gdw. q folgt aus $\Gamma \cup \{(\top \rightarrow p_1), \ldots, (\top \rightarrow p_n)\}$

Entscheidungsprobleme

für endliche Mengen von Hornklauseln

Es sei Γ eine endliche Menge von Hornklauseln.

1. Erfüllbarkeit: hat Γ ein Modell?
2. Konsequenz 1: folgt $p \in \mathcal{P}$ aus Γ?
3. Konsequenz 2: folgt $((p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q)$ aus Γ?

Konsequenz 1 kann mit Hilfe von Erfüllbarkeit entschieden werden:

q folgt aus Γ gdw. $\Gamma \cup \{q \rightarrow \bot\}$ unerfüllbar

Es genügt also, ein Entscheidungsverfahren für die Erfüllbarkeit von Mengen von Hornklauseln zu entwickeln, um alle drei Entscheidungsprobleme zu lösen.

Entscheidungsverfahren

für Erfüllbarkeit einer
endliche Mengen von Hornklauseln

Es sei Γ eine endliche Menge von Hornklauseln
und $Var(\Gamma) = \bigcup_{\phi\in\Gamma} Var(\phi)$ die Menge der Variablen von Γ.

Für $i \geq 0$ definieren wir Mengen $V_i \subseteq Var(\Gamma)$ durch Induktion über i:

$$
\begin{aligned}
V_0 &:= \{q \in Var(\Gamma) \mid (\top \rightarrow q) \in \Gamma\} \\
V_{i+1} &:= V_i \cup \\
&\quad\ \{q \in Var(\Gamma) \mid \exists p_1, \ldots, p_n \in V_i \text{ mit } ((p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q) \in \Gamma\}
\end{aligned}
$$

Es gilt $V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots \subseteq Var(\Gamma)$.

Da $Var(\Gamma)$ endlich ist, gibt es ein k mit $V_k = V_{k+1}$ und damit

$$V_k = \bigcup_{i\geq 0} V_i.$$

Dresden

Lemma 15.3

Γ ist erfüllbar gdw.
es kein $((p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow \bot) \in \Gamma$ gibt mit $\{p_1, \ldots, p_n\} \subseteq V_k$.

Beispiel:

$$\Gamma := \{((p \wedge q) \rightarrow r), \quad (\top \rightarrow p), \quad (\top \rightarrow q), \quad (r \rightarrow \bot)\}$$

$$V_0 = \{p, q\}$$

$$V_1 = \{p, q, r\}$$

$V_2 = V_1$, d.h. $k = 1$.

$(r \rightarrow \bot) \in \Gamma$
$\{r\} \subseteq V_k$ $\longrightarrow$ Γ unerfüllbar

Lemma 15.3

Γ ist erfüllbar gdw.
es kein $((p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \to \bot) \in \Gamma$ gibt mit $\{p_1, \ldots, p_n\} \subseteq V_k$.

Beweis

„$\Leftarrow$“ Wir verwenden V_k zur Definition einer Wertzuweisung w:

$$w(p) := \begin{cases} 1 & \text{für } p \in V_k \\ 0 & \text{für } p \notin V_k \end{cases}$$

$(\top \to q) \in \Gamma$: Dann ist $q \in V_0 \subseteq V_k$, und somit $w(q) = 1$.

Also gilt $w((\top \to q)) = 1$.

Dresden

Lemma 15.3

Γ ist erfüllbar gdw.
es kein $((p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow \bot) \in \Gamma$ gibt mit $\{p_1, \ldots, p_n\} \subseteq V_k$.

Beweis

„$\Leftarrow$“ Wir verwenden V_k zur Definition einer Wertzuweisung w:

$$w(p) := \begin{cases} 1 & \text{für } p \in V_k \\ 0 & \text{für } p \notin V_k \end{cases}$$

$((p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q) \in \Gamma$:

Ist $\{p_1, \ldots, p_n\} \subseteq V_k$, so ist $q \in V_{k+1} = V_k$ und somit $w(q) = 1$.

Also gilt $w(((p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q)) = 1$.

Ist $\{p_1, \ldots, p_n\} \not\subseteq V_k$, so gibt es ein $i, 1 \leq i \leq n$, mit $w(p_i) = 0$.

Also gilt $w(((p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q)) = 1$.

Lemma 15.3

Γ ist erfüllbar gdw.
es kein $((p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \to \bot) \in \Gamma$ gibt mit $\{p_1, \ldots, p_n\} \subseteq V_k$.

Beweis

„$\Leftarrow$“ Wir verwenden V_k zur Definition einer Wertzuweisung w:

$$w(p) := \begin{cases} 1 & \text{für } p \in V_k \\ 0 & \text{für } p \notin V_k \end{cases}$$

$((p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \to \bot) \in \Gamma$:

Dann ist $\{p_1, \ldots, p_n\} \not\subseteq V_k$, d.h. gibt es ein $i, 1 \leq i \leq n$, mit $w(p_i) = 0$.

Also gilt $w(((p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \to \bot)) = 1$.

Dresden

Lemma 15.3

Γ ist erfüllbar gdw.
es kein $((p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow \bot) \in \Gamma$ gibt mit $\{p_1, \ldots, p_n\} \subseteq V_k$.

Beweis

„$\Rightarrow$“ Es sei w ein Modell von Γ.

Wir definieren $V := \{p \in \mathcal{P} \mid w(p) = 1\}$ und zeigen
$V_i \subseteq V$ für alle $i \geq 0$ durch Induktion:

$i = 0$:

ist $p \in V_0$, so gilt $(\top \rightarrow p) \in \Gamma$,

und somit $w((\top \rightarrow p)) = 1$.

Dies zeigt $w(p) = 1$, d.h. $p \in V$.

Lemma 15.3

Γ ist erfüllbar gdw.
es kein $((p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow \bot) \in \Gamma$ gibt mit $\{p_1, \ldots, p_n\} \subseteq V_k$.

Beweis

„$\Rightarrow$“ Es sei w ein Modell von Γ.

Wir definieren $V := \{p \in \mathcal{P} \mid w(p) = 1\}$ und zeigen
$V_i \subseteq V$ für alle $i \geq 0$ durch Induktion:

$i \rightarrow i + 1$:

ist $p \in V_{i+1} \setminus V_i$, so gibt es $\{p_1, \ldots, p_n\} \subseteq V_i$ mit $((p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow p) \in \Gamma$,

und somit $w((p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow p)) = 1$.

Induktion liefert $p_1, \ldots, p_n \in V$, d.h. $w(p_1) = \ldots = w(p_n) = 1$.

Dies zeigt $w(p) = 1$, d.h. $p \in V$.

Dresden

Lemma 15.3

Γ ist erfüllbar gdw.
es kein $((p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \to \bot) \in \Gamma$ gibt mit $\{p_1, \ldots, p_n\} \subseteq V_k$.

Beweis

„$\Rightarrow$“ Es sei w ein Modell von Γ.

Wir wissen nun $V_k \subseteq V = \{p \in \mathcal{P} \mid w(p) = 1\}$.

Angenommen, es gibt $((p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \to \bot) \in \Gamma$ mit $\{p_1, \ldots, p_n\} \subseteq V_k$.

Dann liefert $V_k \subseteq V$, daß $w(p_1) = \ldots = w(p_n) = 1$ ist.

Dann gilt aber $w(((p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \to \bot)) = 0$,

was der Annahme widerspricht, daß w Modell von Γ ist.

Dresden

Satz 15.4

Erfüllbarkeit ist für endliche Mengen von Hornklauseln (und damit für Hornformeln) in polynomieller Zeit entscheidbar.

Beweis:

- Die Kardinalität von $Var(\Gamma)$ ist linear in der Größe von Γ.
- Damit ist die Anzahl der zu berechnenden Mengen V_i linear in der Größe von Γ.
- Die Berechnung jeder einzelnen Menge V_i ist offenbar auch in polynomieller Zeit möglich.

Dresden

Beispiel

Die Berechnung der terminierenden Symbole einer kontextfreien Grammatik kann als eine Anwendung des Erfüllbarkeitsalgorithmuses für Hornformeln angesehen werden.

Lemma 8.4 (Berechnung der terminierenden Symbole)

Zu einer kontextfreien Grammatik $G = (N, \Sigma, P, S)$ kann man effektiv die Menge der terminierenden Nichtterminalsymbole bestimmen.

Wir definieren dazu

$$\begin{aligned} T_1 &:= \{A \in N \mid \exists w \in \Sigma^* : A \longrightarrow w \in P\} \\ T_{i+1} &:= T_i \cup \{A \in N \mid \exists w \in (\Sigma \cup T_i)^* : A \longrightarrow w \in P\} \end{aligned}$$

Es gilt $T_1 \subseteq T_2 \subseteq T_3 \subseteq \ldots \subseteq N$.

Da N endlich ist, gibt es ein k mit $T_k = T_{k+1}$ und damit

$$T_k = \bigcup_{i \geq 1} T_i$$

Es gilt:

$$T_k = \{A \in N \mid A \text{ ist terminierend}\}$$

Beispiel

Die Berechnung der terminierenden Symbole einer kontextfreien Grammatik kann als eine Anwendung des Erfüllbarkeitsalgorithmuses für Hornformeln angesehen werden.

Wir verwenden die Nichtterminalsymbole als aussagenlogische Variablen:

Jede Produktion in P liefert eine Horrnklausel in der Menge $\Gamma(P)$:

- $A \longrightarrow w \in P$ mit $w \in \Sigma^*$ liefert die Hornklausel

  $$\top \rightarrow A$$

- $A \longrightarrow w_0 A_1 w_1 \ldots A_n w_n$ mit $w_0 w_1 \ldots w_n \in \Sigma^*$ liefert die Hornklausel

  $$((A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow A)$$

Es gilt: A folgt aus $\Gamma(P)$ gdw. A is terminierend.

$$\updownarrow$$

$\Gamma(P) \cup \{A \rightarrow \bot\}$ unerfüllbar

Dresden