

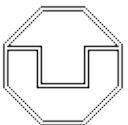
§ 14. Äquivalenz und Normalformen

Definition 14.1 (Äquivalenz)

Die Formeln ϕ und ψ sind **äquivalent** gdw. sie dieselben Modelle haben.
Wir schreiben dann $\phi \equiv \psi$.

Satz 14.2

1. $\phi \equiv \psi$ gdw. $w(\phi) = w(\psi)$ für alle Wertzuweisungen w .
2. $\phi \equiv \psi$ gdw. $\models \phi \leftrightarrow \psi$
3. Sind ϕ und ψ **Tautologien**, so gilt $\phi \equiv \psi$.
4. Sind ϕ und ψ **unerfüllbar**, so gilt $\phi \equiv \psi$.



Beispiel

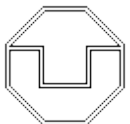
Die folgenden beiden Formeln sind äquivalent:

$$(p \rightarrow q) \text{ und } (\neg q \rightarrow \neg p)$$

Man stellt dazu die **Wahrheitstafel** für beide Formeln auf:

p	q	$(p \rightarrow q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg q \rightarrow \neg p)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1

äquivalent!



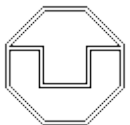
Satz 14.3

Die Relation \equiv ist eine **Äquivalenzrelation** auf der Menge der aussagenlogischen Formeln, d.h. es gilt für alle Formeln ϕ, ψ, π :

- $\phi \equiv \phi$ (Reflexivität).
- Wenn $\phi \equiv \psi$, dann auch $\psi \equiv \phi$ (Symmetrie).
- Wenn $\phi \equiv \psi$ und $\psi \equiv \pi$, dann auch $\phi \equiv \pi$ (Transitivität).

Beweis:

folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß die **Gleichheitsrelation** auf $\{0, 1\}$ **reflexiv, transitiv und symmetrisch** ist.



Satz 14.4

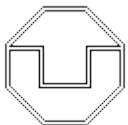
Es sei ϕ eine Formel und $\psi \in \text{Unt}(\phi)$.

Ist $\psi \equiv \pi$ und entsteht $\hat{\phi}$ aus ϕ dadurch, daß man irgendein Vorkommen von ψ in ϕ durch π ersetzt, so gilt auch $\phi \equiv \hat{\phi}$.

Beispiel:

$$\phi = (p \rightarrow (q \rightarrow p))$$

Es ist $p \equiv (p \vee p)$ und $\hat{\phi} = (p \rightarrow (q \rightarrow (p \vee p)))$ entsteht aus ϕ , indem man das zweite Vorkommen von p in ϕ durch $(p \vee p)$ ersetzt.



Satz 14.4

Es sei ϕ eine Formel und $\psi \in \text{Unt}(\phi)$.

Ist $\psi \equiv \pi$ und entsteht $\hat{\phi}$ aus ϕ dadurch, daß man irgendein Vorkommen von ψ in ϕ durch π ersetzt, so gilt auch $\phi \equiv \hat{\phi}$.

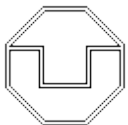
Beweis:

Es genügt zu zeigen, daß für alle Wertzuweisungen w gilt: $w(\phi) = w(\hat{\phi})$.

Bei der **Auswertung** von $\hat{\phi}$ stößt man auf die **Unterformel** π , die durch die Ersetzung eingeführt wurde, und wertet dieses zu $w(\pi)$ aus.

Bei der **Auswertung** von ϕ stößt man an der selben Stelle auf die Unterformel ψ , und wertet dieses zu $w(\psi)$ aus.

Wegen $\psi \equiv \pi$ gilt aber $w(\psi) = w(\pi)$, was zeigt, daß beide Auswertungen das selbe Resultat liefern, d.h. $w(\phi) = w(\hat{\phi})$.



Satz 14.4

Es sei ϕ eine Formel und $\psi \in \text{Unt}(\phi)$.

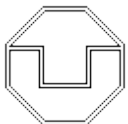
Ist $\psi \equiv \pi$ und entsteht $\widehat{\phi}$ aus ϕ dadurch, daß man irgendein Vorkommen von ψ in ϕ durch π ersetzt, so gilt auch $\phi \equiv \widehat{\phi}$.

Beispiel:

$$\phi = (p \rightarrow (q \rightarrow p))$$

Es ist $p \equiv (p \vee p)$ und $\widehat{\phi} = (p \rightarrow (q \rightarrow (p \vee p)))$ entsteht aus ϕ , indem man das zweite Vorkommen von p in ϕ durch $(p \vee p)$ ersetzt.

$$\begin{aligned} w(\widehat{\phi}) &= w((p \rightarrow (q \rightarrow (p \vee p)))) \\ &= \rightarrow^S(w(p), \rightarrow^S(w(q), w(p \vee p))) \\ &= \rightarrow^S(w(p), \rightarrow^S(w(q), w(p))) \\ &= w((p \rightarrow (q \rightarrow p))) \\ &= w(\phi) \end{aligned}$$



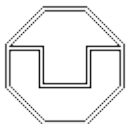
Der Satz zeigt, daß man **äquivalente Formeln beliebig durch einander ersetzen** kann, ohne die Semantik einer Formel (d.h. deren Auswertung unter Wertzuweisungen) zu verändern. Es ist daher **egal, welches Element der Äquivalenzklasse** einer Formel in einer anderen Formel vorkommt.

- Im folgenden verwenden wir häufig \top zur Bezeichnung einer beliebigen **Tautologie**, d.h.

$$w(\top) = 1 \text{ für alle Wertzuweisungen } w,$$

- und \perp zur Bezeichnung einer beliebigen **unerfüllbaren Formel**, d.h.

$$w(\perp) = 0 \text{ für alle Wertzuweisungen } w.$$



Satz 14.5

Für alle Formeln ϕ, ψ, π gelten die folgenden Äquivalenzen:

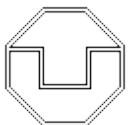
$$\begin{array}{ll} (\phi \wedge \phi) \equiv \phi & \text{Idempotenz} \\ (\phi \vee \phi) \equiv \phi & \end{array} \quad \begin{array}{ll} (\phi \wedge \psi) \equiv (\psi \wedge \phi) & \text{Kommutativität} \\ (\phi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \phi) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} ((\phi \wedge \psi) \wedge \pi) \equiv (\phi \wedge (\psi \wedge \pi)) & \text{Assoziativität} \\ ((\phi \vee \psi) \vee \pi) \equiv (\phi \vee (\psi \vee \pi)) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (\phi \wedge (\phi \vee \psi)) \equiv \phi & \text{Absorption} \\ (\phi \vee (\phi \wedge \psi)) \equiv \phi & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (\phi \wedge (\psi \vee \pi)) \equiv ((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \pi)) & \text{Distributivität} \\ (\phi \vee (\psi \wedge \pi)) \equiv ((\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \pi)) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (\phi \wedge \top) \equiv \phi & \text{Tautologie} \\ (\phi \vee \top) \equiv \top & \end{array} \quad \begin{array}{ll} (\phi \vee \perp) \equiv \phi & \text{Unerfüllbarkeit} \\ (\phi \wedge \perp) \equiv \perp & \end{array}$$



Satz 14.5 (Fortsetzung)

Für alle Formeln ϕ, ψ, π gelten die folgenden Äquivalenzen:

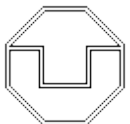
$$\neg(\phi \wedge \psi) \equiv (\neg\phi \vee \neg\psi) \quad \text{de Morgan}$$

$$\neg(\phi \vee \psi) \equiv (\neg\phi \wedge \neg\psi)$$

$$\neg\neg\phi \equiv \phi \quad \text{Doppelnegation}$$

$$(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\phi \vee \psi) \quad \text{Implikation}$$

$$(\phi \leftrightarrow \psi) \equiv ((\phi \wedge \psi) \vee (\neg\phi \wedge \neg\psi)) \quad \text{Bi-Implikation}$$



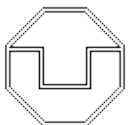
Beweis von Satz 14.5:

Die Gültigkeit der Äquivalenzen kann leicht mittels **Aufstellen der Wahrheitstafeln** nachgewiesen werden.

Als Beispiel betrachten wir $\neg(\phi \wedge \psi) \equiv (\neg\phi \vee \neg\psi)$ und $(\phi \vee \top) \equiv \top$:

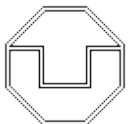
ϕ	ψ	$\neg\phi$	$\neg\psi$	$(\phi \wedge \psi)$	$\neg(\phi \wedge \psi)$	$(\neg\phi \vee \neg\psi)$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

ϕ	\top	$(\phi \vee \top)$
0	1	1
1	1	1



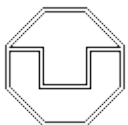
Beachte:

- **Assoziativität** zeigt, daß die **Klammerstruktur** geschachtelter Konjunktionen (bzw. Disjunktionen) **irrelevant** ist. Wir können daher einfach $(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n)$ (bzw. $(\phi_1 \vee \dots \vee \phi_n)$) schreiben.
- **Kommutativität** zeigt, daß auch die **Reihenfolge** der Konjunkte in solch einer Konjunktion (bzw. der Disjunkte in solch einer Disjunktion) **irrelevant** ist.
- **Idempotenz** zeigt, daß sogar die **Vielfachheit** des Vorkommens eines Konjunks in solch einer Konjunktion (bzw. eines Disjunks in solch einer Disjunktion) **irrelevant** ist.



Beachte:

- Äquivalenz kann man auch zwischen Mengen von Formeln definieren:
 Γ und Δ sind äquivalent ($\Gamma \equiv \Delta$) gdw. sie dieselben Modelle haben.
- Entsprechend sind die Formel ϕ und die Formelmenge Γ äquivalent gdw. sie dieselben Modelle haben.
- Offenbar sind $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ und $(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n)$ äquivalent.

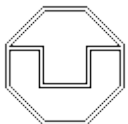


Wir betrachten zunächst **Normalformen**, bei denen nur eine **Teilmenge der eingeführten Junktoren** verwendet wird:

Satz 14.6

Es sei ϕ eine aussagenlogische Formel.

1. ϕ ist äquivalent zu einer Formel, die **nur die Junktoren \wedge und \neg** enthält.
2. ϕ ist äquivalent zu einer Formel, die **nur die Junktoren \vee und \neg** enthält.
3. ϕ ist äquivalent zu einer Formel, die **nur die Junktoren \rightarrow und \neg** enthält.



Beweis:

Wir zeigen zunächst durch **Induktion**, daß ϕ äquivalent ist zu einer Formel, die **nur die Junktoren \wedge, \vee, \neg** enthält:

$\phi = p \in \mathcal{P}$: dann ist ϕ selbst die gesuchte Formel.

$\phi = \psi \wedge \pi$:

die Induktionsannahme liefert Formeln ψ', π' , die nur die Junktoren \wedge, \vee, \neg enthalten und für die gilt: $\psi \equiv \psi'$ und $\pi \equiv \pi'$.

Dann ist $\psi' \wedge \pi'$ die gesuchte Formel.

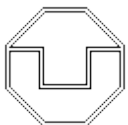
$\phi = \psi \vee \pi$ und $\phi = \neg\psi$ können analog behandelt werden.

$\phi = \psi \rightarrow \pi$:

die Induktionsannahme liefert Formeln ψ', π' , die nur die Junktoren \wedge, \vee, \neg enthalten und für die gilt: $\psi \equiv \psi'$ und $\pi \equiv \pi'$.

Dann ist $\neg\psi' \vee \pi'$ die gesuchte Formel.

$\phi = \psi \leftrightarrow \pi$ kann analog behandelt werden.



Beweis (Fortsetzung):

Es sei nun ϕ' eine Formel, die äquivalent zu ϕ ist und nur die Junktoren \wedge, \vee, \neg enthält.

(1) Unter Verwendung der Äquivalenz

$$(\psi \vee \pi) \equiv (\neg\neg\psi \vee \neg\neg\pi) \equiv \neg(\neg\psi \wedge \neg\pi)$$

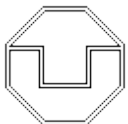
kann man aus ϕ' nun noch alle Vorkommen von \vee eliminieren.

Formal zeigt man dies wieder durch eine Induktion, die analog zu der vorherigen durchgeführt werden kann.

(2) Unter Verwendung der Äquivalenz

$$(\psi \wedge \pi) \equiv (\neg\neg\psi \wedge \neg\neg\pi) \equiv \neg(\neg\psi \vee \neg\pi)$$

kann man aus ϕ' alternativ auch alle Vorkommen von \wedge eliminieren.



Beweis (Fortsetzung):

Es sei nun ϕ'' eine Formel, die äquivalent zu ϕ ist und nur die Junktoren \vee, \neg enthält.

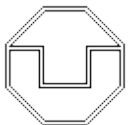
(3) Unter Verwendung der Äquivalenz

$$(\psi \vee \pi) \equiv (\neg\neg\psi \vee \pi) \equiv (\neg\psi \rightarrow \pi)$$

kann man aus ϕ'' durch Einführung von \rightarrow nun alle Vorkommen von \vee eliminieren.

Beispiel:

$$\begin{aligned} ((p \wedge q) \vee q) &\equiv (\neg(\neg p \vee \neg q)) \vee q \\ &\equiv (\neg(\neg\neg p \rightarrow \neg q) \vee q) \\ &\equiv (\neg\neg(\neg\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow q) \equiv ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow q) \end{aligned}$$



Definition 14.7 (Negationsnormalform)

Es sei ϕ eine aussagenlogische Formel. Dann ist ϕ in **Negationsnormalform**, falls

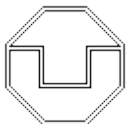
1. ϕ **nur die Junktoren \wedge , \vee und \neg enthält**, und
2. **in ϕ der Negationsoperator nur auf aussagenlogische Variablen** (d.h. nicht auf komplexe Formeln) angewendet wird.

Beispiel:

$$((p \wedge \neg q) \vee q) \quad \checkmark$$

$$(\neg(p \wedge q) \vee q) \quad \times$$

$$((p \vee q) \rightarrow q) \quad \times$$



Satz 14.8

Es sei ϕ eine aussagenlogische Formel. Dann gibt es eine zu ϕ äquivalente Formel, die in Negationsnormalform ist.

Beweis:

Es sei ϕ' eine zu ϕ äquivalente Formel, die nur die Junktoren \wedge, \vee, \neg enthält.

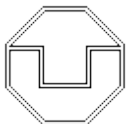
Wir zeigen den Satz durch Induktion über die Größe von ϕ' :

(1) $\phi' = p \in \mathcal{P}$: dann ist ϕ' die gesuchte Negationsnormalform.

(2) $\phi' = (\psi \circ \pi)$ für einen Junktor $\circ \in \{\wedge, \vee\}$.

Dann gibt es nach Induktion Formeln ψ', π' in Negationsnormalform mit:
 $\psi' \equiv \psi$ und $\pi' \equiv \pi$.

In diesem Fall ist $(\psi' \circ \pi')$ die gesuchte Negationsnormalform von ϕ .



$$(3) \phi' = \neg\psi$$

1. Fall: $\psi = p \in \mathcal{P}$.

Dann ist $\phi' = \neg p$ die gesuchte Negationsnormalform von ϕ .

2. Fall: $\psi = \neg\pi$.

Dann ist $\phi' = \neg\neg\pi \equiv \pi$.

Nach Induktion gibt es eine zu π äquivalente Formel

π' in Negationsnormalform.

Damit ist π' die gesuchte Negationsnormalform von ϕ .

3. Fall: $\psi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$.

4. Fall: $\psi = (\psi_1 \vee \psi_2)$ ist analog.

Dann ist $\phi' = \neg(\psi_1 \wedge \psi_2) \equiv (\neg\psi_1 \vee \neg\psi_2)$.

Nach Induktion gibt es Formeln π'_1, π'_2 in Negationsnormalform mit:

$\pi'_1 \equiv \neg\psi_1$ und $\pi'_2 \equiv \neg\psi_2$.

Damit ist $(\pi'_1 \vee \pi'_2)$ die gesuchte Negationsnormalform von ϕ .



Definition 14.9 (DNF und KNF)

1. Ein **Literal** ist eine aussagenlogische Variable (**positives Literal**) oder die Negation einer aussagenlogischen Variablen (**negatives Literal**).
2. Eine Formel ϕ ist in **konjunktiver Normalform (KNF)**, falls sie eine **Konjunktion von Disjunktionen von Literalen** ist:

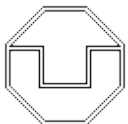
$$\phi = \left(\bigwedge_{i=1}^n \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{i,j} \right) \right),$$

wobei die $L_{i,j}$ Literale sind.

3. Eine Formel ϕ ist in **disjunktiver Normalform (DNF)**, falls sie eine **Disjunktion von Konjunktionen von Literalen** ist:

$$\phi = \left(\bigvee_{i=1}^n \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} L_{i,j} \right) \right),$$

wobei die $L_{i,j}$ Literale sind.



Satz 14.10

Es sei ϕ eine aussagenlogische Formel. Dann gibt es eine zu ϕ äquivalente Formel, die in KNF ist, und eine zu ϕ äquivalente Formel, die in DNF ist.

Beweis:

Es sei ϕ' eine zu ϕ äquivalente Formel, die in Negationsnormalform ist.

Um daraus eine äquivalente Formel in KNF zu erzeugen, wendet man das Distributivitätsgesetz

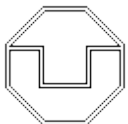
$$(\phi \vee (\psi \wedge \pi)) \equiv ((\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \pi))$$

auf ϕ' an.

Um daraus eine äquivalente Formel in DNF zu erzeugen, wendet man das Distributivitätsgesetz

$$(\phi \wedge (\psi \vee \pi)) \equiv ((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \pi))$$

auf ϕ' an.



Normalformen

durch Anwenden von Ersetzungsregeln

Die betrachteten **Normalformen** können alle dadurch erzeugt werden, daß man gewisse **Äquivalenzen** aus **Satz 14.5** als **Ersetzungsregeln** verwendet, d.h. **nur in eine Richtung** anwendet:

- Um aus einer beliebigen aussagenlogischen Formel eine äquivalente zu erzeugen, die nur die **Junktoren** \wedge, \vee, \neg enthält, wendet man die **Äquivalenzen**

$$(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\phi \vee \psi)$$

$$(\phi \leftrightarrow \psi) \equiv ((\phi \wedge \psi) \vee (\neg\phi \wedge \neg\psi))$$

nur **von links nach rechts** an.

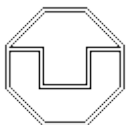
- Um daraus dann eine äquivalente Formel in **Negationsnormalform** zu erzeugen, wendet man die **Äquivalenzen**

$$\neg(\phi \wedge \psi) \equiv (\neg\phi \vee \neg\psi)$$

$$\neg(\phi \vee \psi) \equiv (\neg\phi \wedge \neg\psi)$$

$$\neg\neg\phi \equiv \phi$$

nur **von links nach rechts** an.



Normalformen

durch Anwenden von Ersetzungsregeln

Um von einem solchen **Ersetzungsverfahren** zu zeigen, daß es tatsächlich eine äquivalente Formel in der gewünschten Normalform liefert, muß man zeigen:

1. Regelanwendung ist **äquivalenzerhaltend**.

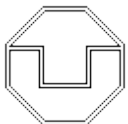
Dies ergibt sich für die betrachteten Normalformen aus **Satz 14.5** und **Satz 14.4**.

2. Regelanwendung ist **terminierend**, d.h. nach endlich vielen Anwendungen erhält man eine Formel, auf die keine Regel mehr anwendbar ist.

Dies ist ohne zusätzliche Hilfsmittel oft **nicht einfach** zu zeigen.

3. Regelanwendung **liefert** die gewünschte **Normalform**, d.h. eine Formel, auf die keine der Regeln anwendbar ist, ist in Normalform.

Dies ist bei den betrachteten Normalformen **leicht** zu zeigen.



Terminierung

ist nicht einfach

Um Terminierung zu zeigen, ordnet man jeder Formel ϕ ein geeignetes „Maß“ $\kappa(\phi)$ zu und zeigt, daß **Regelanwendung** dieses Maß „verkleinert“.

Zum Beispiel nimmt durch Anwendung der Regel

$$\neg\neg\phi \Rightarrow \phi$$

die **Größe** der Formel ab.

Bei der Regel

$$(\phi \leftrightarrow \psi) \Rightarrow ((\phi \wedge \psi) \vee (\neg\phi \wedge \neg\psi))$$

ist dies aber **nicht** der Fall.

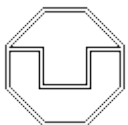
Unsere **Induktionsbeweise** betrachten im Prinzip “inner-most” **Regelanwendungen**, wofür Terminierung leichter zu zeigen ist.

Master-Vorlesung

Term Rewriting Systems

entwickelt u.a. Hilfsmittel

zum Nachweis der Terminierung.



Die Literale L, L' heißen **komplementär**, falls es eine aussagenlogische Variable p gibt mit $\{L, L'\} = \{p, \neg p\}$.

Beachte:

Für eine **Formel ϕ in DNF** kann man Erfüllbarkeit sehr leicht entscheiden: ist

$$\phi = \left(\bigvee_{i=1}^n \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} L_{i,j} \right) \right),$$

so ist ϕ genau dann **erfüllbar**, wenn es ein i , $1 \leq i \leq n$, gibt, sodaß $\{L_{i,1}, \dots, L_{i,m_i}\}$ **keine komplementären Literale** enthält.

Beweis:

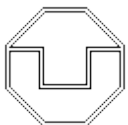
„ \Rightarrow “ Ist ϕ **erfüllbar**, so muß es ein Disjunkt geben, das erfüllbar ist. Offenbar ist eine Konjunktion, die komplementäre Literale enthält, nicht erfüllbar. Daher kann das erfüllbare Disjunkt keine komplementären Literale enthalten.

„ \Leftarrow “ Enthält das Disjunkt $\bigwedge_{j=1}^{m_i} L_{i,j}$ **keine komplementären Literale**, so kann man leicht eine Wertzuweisung angeben, die es zu 1 auswertet: Definiere

$$w(p) = 1 \text{ falls } p \in \{L_{i,1}, \dots, L_{i,m_i}\}$$

$$w(p) = 0 \text{ falls } \neg p \in \{L_{i,1}, \dots, L_{i,m_i}\}$$

andernfalls wähle $w(p)$ beliebig



Test auf Erfüllbarkeit

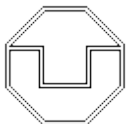
Wir haben damit bisher zwei Möglichkeiten gesehen, wie man eine gegebene Formel auf **Erfüllbarkeit testen** kann:

1. Stelle die **Wahrheitstafel** auf und überprüfe, ob in der Spalte für die Formel eine 1 auftritt.
2. Transformiere die Formel **in DNF** und überprüfe, ob es ein Disjunkt ohne komplementäre Literale gibt.

Beide Verfahren können (im schlimmsten Fall) **exponentiell viel Zeit** benötigen.

Beachte:

Anwendung der Distributivregel $(\phi \wedge (\psi \vee \pi)) \Rightarrow ((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \pi))$
verdoppelt ϕ .



§ 15. Hornformeln

Definition 15.1 (Hornformel)

Eine Formel ϕ ist eine **Hornformel** gdw. sie in **KNF** ist und jedes **Konjunkt** höchstens ein **positives Literal** enthält.

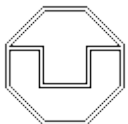
$(p \vee q)$ ist **keine** Hornformel.

$((\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge p \wedge q \wedge \neg r)$ ist eine Hornformel.

Hornformeln können auch als spezielle **Mengen von Implikationen** aufgefaßt werden:

$$\{((p \wedge q) \rightarrow r), (\top \rightarrow p), (\top \rightarrow q), (r \rightarrow \perp)\}$$

Wir nennen diese Implikationen **Hornklauseln**.



Hornformeln können auch als spezielle **Mengen von Implikationen** aufgefaßt werden:

Jedes **Konjunkt der Hornformel** kann in eine äquivalente **Hornklausel** übersetzt werden.

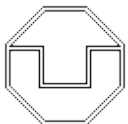
$$(\neg p_1 \vee \dots \vee \neg p_n \vee q) \longrightarrow ((p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q)$$

$$(\neg p_1 \vee \dots \vee \neg p_n) \longrightarrow ((p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow \perp)$$

$$q \longrightarrow (\top \rightarrow q)$$

Satz 15.2

Zu jeder **Hornformel** können wir effektiv eine äquivalente endliche **Menge von Hornklauseln** bestimmen.



Entscheidungsprobleme

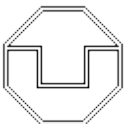
für endliche Mengen von Hornklauseln

Es sei Γ eine endliche Menge von Hornklauseln.

1. **Erfüllbarkeit:** hat Γ ein Modell?
2. **Konsequenz 1:** folgt $p \in \mathcal{P}$ aus Γ ?
3. **Konsequenz 2:** folgt $((p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q)$ aus Γ ?

Konsequenz 2 kann mit Hilfe von Konsequenz 1 entschieden werden:

$$\begin{array}{ccc} ((p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q) & & q \text{ folgt aus} \\ \text{folgt aus } \Gamma & \text{gdw.} & \Gamma \cup \{(\top \rightarrow p_1), \dots, (\top \rightarrow p_n)\} \end{array}$$



Entscheidungsprobleme

für endliche Mengen von Hornklauseln

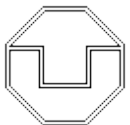
Es sei Γ eine endliche Menge von Hornklauseln.

1. **Erfüllbarkeit:** hat Γ ein Modell?
2. **Konsequenz 1:** folgt $p \in \mathcal{P}$ aus Γ ?
3. **Konsequenz 2:** folgt $((p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q)$ aus Γ ?

Konsequenz 1 kann mit Hilfe von Erfüllbarkeit entschieden werden:

q folgt aus Γ gdw. $\Gamma \cup \{q \rightarrow \perp\}$ unerfüllbar

Es genügt also, ein Entscheidungsverfahren für die Erfüllbarkeit von Mengen von Hornklauseln zu entwickeln, um alle drei Entscheidungsprobleme zu lösen.



Entscheidungsverfahren

für Erfüllbarkeit einer
endliche Mengen von Hornklauseln

Es sei Γ eine endliche Menge von Hornklauseln
und $Var(\Gamma) = \bigcup_{\phi \in \Gamma} Var(\phi)$ die Menge der Variablen von Γ .

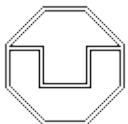
Für $i \geq 0$ definieren wir Mengen $V_i \subseteq Var(\Gamma)$ durch Induktion über i :

$$\begin{aligned} V_0 &:= \{q \in Var(\Gamma) \mid (\top \rightarrow q) \in \Gamma\} \\ V_{i+1} &:= V_i \cup \\ &\quad \{q \in Var(\Gamma) \mid \exists p_1, \dots, p_n \in V_i \text{ mit } ((p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q) \in \Gamma\} \end{aligned}$$

Es gilt $V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots \subseteq Var(\Gamma)$.

Da $Var(\Gamma)$ endlich ist, gibt es ein k mit $V_k = V_{k+1}$ und damit

$$V_k = \bigcup_{i \geq 0} V_i.$$



Lemma 15.3

Γ ist erfüllbar gdw.

es kein $((p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow \perp) \in \Gamma$ gibt mit $\{p_1, \dots, p_n\} \subseteq V_k$.

Beispiel:

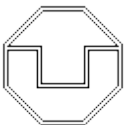
$$\Gamma := \{((p \wedge q) \rightarrow r), (\top \rightarrow p), (\top \rightarrow q), (r \rightarrow \perp)\}$$

$$V_0 = \{p, q\}$$

$$V_1 = \{p, q, r\}$$

$$V_2 = V_1, \text{ d.h. } k = 1.$$

$$\begin{array}{l} (r \rightarrow \perp) \in \Gamma \\ \{r\} \subseteq V_k \end{array} \longrightarrow \Gamma \text{ unerfüllbar}$$



Lemma 15.3

Γ ist erfüllbar gdw.

es kein $((p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow \perp) \in \Gamma$ gibt mit $\{p_1, \dots, p_n\} \subseteq V_k$.

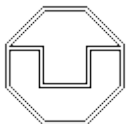
Beweis

„ \Leftarrow “ Wir verwenden V_k zur Definition einer Wertzuweisung w :

$$w(p) := \begin{cases} 1 & \text{für } p \in V_k \\ 0 & \text{für } p \notin V_k \end{cases}$$

$(\top \rightarrow q) \in \Gamma$: Dann ist $q \in V_0 \subseteq V_k$, und somit $w(q) = 1$.

Also gilt $w((\top \rightarrow q)) = 1$.



Lemma 15.3

Γ ist erfüllbar gdw.

es kein $((p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow \perp) \in \Gamma$ gibt mit $\{p_1, \dots, p_n\} \subseteq V_k$.

Beweis

„ \Leftarrow “ Wir verwenden V_k zur Definition einer Wertzuweisung w :

$$w(p) := \begin{cases} 1 & \text{für } p \in V_k \\ 0 & \text{für } p \notin V_k \end{cases}$$

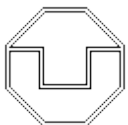
$((p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q) \in \Gamma$:

Ist $\{p_1, \dots, p_n\} \subseteq V_k$, so ist $q \in V_{k+1} = V_k$ und somit $w(q) = 1$.

Also gilt $w(((p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q)) = 1$.

Ist $\{p_1, \dots, p_n\} \not\subseteq V_k$, so gibt es ein i , $1 \leq i \leq n$, mit $w(p_i) = 0$.

Also gilt $w(((p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q)) = 0$.



Lemma 15.3

Γ ist erfüllbar gdw.

es kein $((p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow \perp) \in \Gamma$ gibt mit $\{p_1, \dots, p_n\} \subseteq V_k$.

Beweis

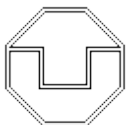
„ \Leftarrow “ Wir verwenden V_k zur Definition einer Wertzuweisung w :

$$w(p) := \begin{cases} 1 & \text{für } p \in V_k \\ 0 & \text{für } p \notin V_k \end{cases}$$

$((p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow \perp) \in \Gamma$:

Dann ist $\{p_1, \dots, p_n\} \not\subseteq V_k$, d.h. gibt es ein i , $1 \leq i \leq n$, mit $w(p_i) = 0$.

Also gilt $w(((p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow \perp)) = 1$.



Lemma 15.3

Γ ist erfüllbar gdw.

es kein $((p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow \perp) \in \Gamma$ gibt mit $\{p_1, \dots, p_n\} \subseteq V_k$.

Beweis

„ \Rightarrow “ Es sei w ein Modell von Γ .

Wir definieren $V := \{p \in \mathcal{P} \mid w(p) = 1\}$ und zeigen

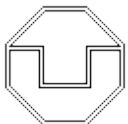
$V_i \subseteq V$ für alle $i \geq 0$ durch Induktion:

$i = 0$:

ist $p \in V_0$, so gilt $(\top \rightarrow p) \in \Gamma$,

und somit $w((\top \rightarrow p)) = 1$.

Dies zeigt $w(p) = 1$, d.h. $p \in V$.



Lemma 15.3

Γ ist erfüllbar gdw.

es kein $((p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow \perp) \in \Gamma$ gibt mit $\{p_1, \dots, p_n\} \subseteq V_k$.

Beweis

„ \Rightarrow “ Es sei w ein Modell von Γ .

Wir definieren $V := \{p \in \mathcal{P} \mid w(p) = 1\}$ und zeigen

$V_i \subseteq V$ für alle $i \geq 0$ durch Induktion:

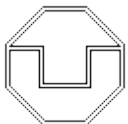
$i \rightarrow i + 1$:

ist $p \in V_{i+1} \setminus V_i$, so gibt es $\{p_1, \dots, p_n\} \subseteq V_i$ mit $((p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow p) \in \Gamma$,

und somit $w((p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow p) = 1$.

Induktion liefert $p_1, \dots, p_n \in V$, d.h. $w(p_1) = \dots = w(p_n) = 1$.

Dies zeigt $w(p) = 1$, d.h. $p \in V$.



Lemma 15.3

Γ ist erfüllbar gdw.

es kein $((p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow \perp) \in \Gamma$ gibt mit $\{p_1, \dots, p_n\} \subseteq V_k$.

Beweis

„ \Rightarrow “ Es sei w ein Modell von Γ .

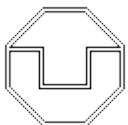
Wir wissen nun $V_k \subseteq V = \{p \in \mathcal{P} \mid w(p) = 1\}$.

Angenommen, es gibt $((p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow \perp) \in \Gamma$ mit $\{p_1, \dots, p_n\} \subseteq V_k$.

Dann liefert $V_k \subseteq V$, daß $w(p_1) = \dots = w(p_n) = 1$ ist.

Dann gilt aber $w(((p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow \perp)) = 0$,

was der Annahme widerspricht, daß w Modell von Γ ist.

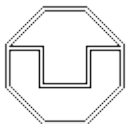


Satz 15.4

Erfüllbarkeit ist für endliche Mengen von Hornklauseln (und damit für Hornformeln) in **polynomieller Zeit** entscheidbar.

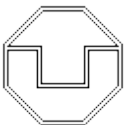
Beweis:

- Die **Kardinalität** von $Var(\Gamma)$ ist **linear** in der Größe von Γ .
- Damit ist die **Anzahl der zu berechnenden Mengen** V_i **linear** in der Größe von Γ .
- Die **Berechnung jeder einzelnen Menge** V_i ist offenbar auch in **polynomieller Zeit** möglich.



Beispiel

Die Berechnung der terminierenden Symbole einer kontextfreien Grammatik kann als eine Anwendung des Erfüllbarkeitsalgorithmuses für Hornformeln angesehen werden.



Lemma 8.4 (Berechnung der terminierenden Symbole)

Zu einer kontextfreien Grammatik $G = (N, \Sigma, P, S)$ kann man **effektiv** die **Menge der terminierenden Nichtterminalsymbole** bestimmen.

Wir definieren dazu

$$T_1 := \{A \in N \mid \exists w \in \Sigma^* : A \longrightarrow w \in P\}$$

$$T_{i+1} := T_i \cup \{A \in N \mid \exists w \in (\Sigma \cup T_i)^* : A \longrightarrow w \in P\}$$

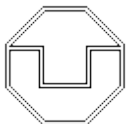
Es gilt $T_1 \subseteq T_2 \subseteq T_3 \subseteq \dots \subseteq N$.

Da N endlich ist, gibt es ein k mit $T_k = T_{k+1}$ und damit

$$T_k = \bigcup_{i \geq 1} T_i$$

Es gilt:

$$T_k = \{A \in N \mid A \text{ ist terminierend}\}$$



Beispiel

Die Berechnung der terminierenden Symbole einer kontextfreien Grammatik kann als eine Anwendung des Erfüllbarkeitsalgorithmuses für Hornformeln angesehen werden.

Wir verwenden die Nichtterminalsymbole als aussagenlogische Variablen:

Jede Produktion in P liefert eine Hornklausel in der Menge $\Gamma(P)$:

- $A \rightarrow w \in P$ mit $w \in \Sigma^*$ liefert die Hornklausel

$$\top \rightarrow A$$

- $A \rightarrow w_0 A_1 w_1 \dots A_n w_n$ mit $w_0 w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$ liefert die Hornklausel

$$((A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow A)$$

Es gilt: A folgt aus $\Gamma(P)$ gdw. A ist terminierend.



$\Gamma(P) \cup \{A \rightarrow \perp\}$ unerfüllbar

