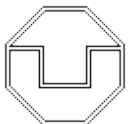


Ziel ist es, Allgemeingültigkeit bzw. Erfüllbarkeit einer Formel durch Anwendung von Schlußregeln herleiten zu können:

- **Allgemeingültigkeit:** beginnend mit einfachen Axiomen sollen **alle Tautologien** durch Anwendung einfacher Schlußregeln erzeugt werden; die zu testende Formel ist eine Tautologie, wenn sie auf diese Art erzeugt werden kann.
- **Erfüllbarkeit:** beginnend mit der zu testenden Formel versucht man, durch Anwendung einfacher Schlußregeln einen **Widerspruch** herzuleiten; gelingt das nicht, so ist die Formel erfüllbar.

Beachte:

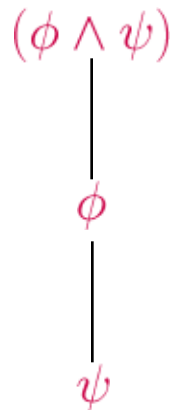
- Da ϕ eine Tautologie ist gdw. $\neg\phi$ unerfüllbar ist, kann man beide Arten von Kalkülen für beide Zwecke verwenden.
- **Kalküle der zweiten Art** eignen sich besser zur Automatisierung, während **Kalküle der ersten Art** besser für die Untersuchung formaler Eigenschaften einer Logik geeignet sind.



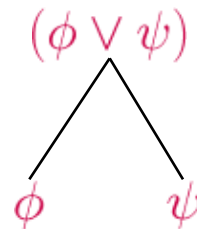
§ 16. Semantische Tableaux

Ziel ist es, für eine aussagenlogische Formel ϕ zu entscheiden, ob sie erfüllbar ist, d.h. ob sie ein Modell hat.

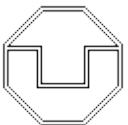
Dazu werden die Formeln gemäß der Semantik der Junktoren in Teilformeln zerlegt:



Um $\phi \wedge \psi$ zu erfüllen,
muß man sowohl ϕ
als auch ψ erfüllen.



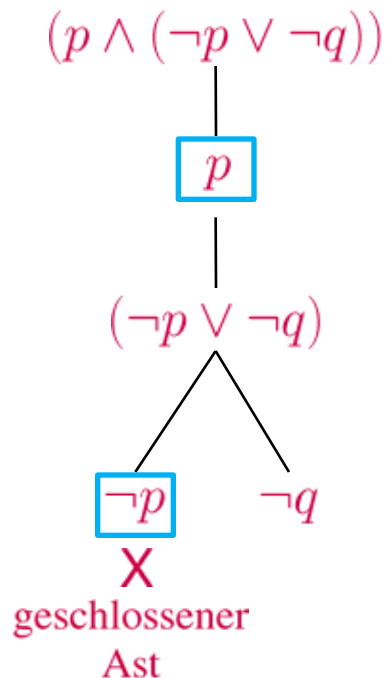
Um $\phi \vee \psi$ zu erfüllen,
muß man ϕ erfüllen
oder ψ erfüllen.



§ 16. Semantische Tableaux

Ziel ist es, für eine aussagenlogische Formel ϕ zu entscheiden, ob sie erfüllbar ist, d.h. ob sie ein Modell hat.

Dazu werden die Formeln gemäß der Semantik der Junktoren in Teilformeln zerlegt, bis ein offensichtlicher Widerspruch gefunden wird.



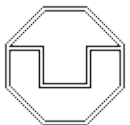
Idee:

Formeln in einem Ast des Baums müssen gleichzeitig (d.h. von derselben Wertzuweisung) erfüllt werden.

Pfad von Wurzel zu einem Blatt



offensichtlich nicht gleichzeitig erfüllbar



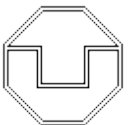
§ 16. Semantische Tableaux

Ziel ist es, für eine aussagenlogische Formel ϕ zu entscheiden, ob sie erfüllbar ist, d.h. ob sie ein Modell hat.

Dazu werden die Formeln gemäß der Semantik der Junktoren in Teilformeln zerlegt, bis ein offensichtlicher Widerspruch gefunden wird.

Bei der formalen Definition semantischer Tableaux betrachten wir nur Formeln in Negationsnormalform (NNF), um möglichst wenige Regeln einführen zu müssen.

Mit Satz 14.8 ist dies keine Beschränkung der Allgemeinheit, da jede aussagenlogische Formel in eine äquivalente Formel in NNF überführt werden kann.



Definition 16.1 (Semantisches Tableau)

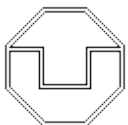
Es sei ϕ eine aussagenlogische Formel in **Negationsnormalform**.

1. Ein **Baum**, der aus nur einem mit ϕ beschrifteten **Knoten** besteht, ist ein **Tableau** für ϕ .
2. Es sei T ein Tableau für ϕ und A ein Ast in T , der *Erweiterungsregel*
 - einen mit $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ beschrifteten Knoten enthält,
 - aber **keine** zwei Knoten enthält, die mit ψ_1 bzw. ψ_2 beschriftet sind.

Dann ist der Baum, der aus T entsteht, indem man den Ast A unten um einen mit ψ_1 beschrifteten Knoten gefolgt von einem mit ψ_2 beschrifteten Knoten erweitert, ebenfalls ein Tableau für ϕ .

3. Es sei T ein Tableau für ϕ und A ein Ast in T , der *Erweiterungsregel*
 - einen mit $(\psi_1 \vee \psi_2)$ beschrifteten Knoten enthält,
 - aber **weder** einen mit ψ_1 noch einen mit ψ_2 beschrifteten Knoten enthält.

Dann ist der Baum, der aus T entsteht, indem man den Ast A unten sowohl um einen mit ψ_1 beschrifteten Knoten als auch einen mit ψ_2 beschrifteten Knoten erweitert, ebenfalls ein Tableau für ϕ .



$$((p \wedge q) \wedge (\neg p \vee \neg q))$$

$$(p \wedge q)$$

$$(\neg p \vee \neg q)$$

$$p$$

$$q$$

$$\neg p$$

$$\neg q$$

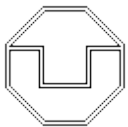
X

X

Vollständig, d.h. keine Erweiterungsregel mehr anwendbar.

Geschlossen, d.h. alle Äste sind geschlossen.

unerfüllbar



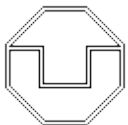
Definition 16.2

Es sei T ein Tableau für ϕ und A ein Ast in T .

1. Wir bezeichnen die Menge aller Formeln, die einen Knoten von A beschriften, mit $For(A)$.
2. Der Ast A ist **geschlossen** gdw. es eine aussagenlogische Variable p gibt mit $\{p, \neg p\} \subseteq For(A)$. Ansonsten ist A **offen**.
3. Das Tableau T ist **geschlossen** gdw. jeder Ast von T **geschlossen** ist. Ansonsten ist T **offen**.
4. Das Tableau T ist **vollständig** gdw. auf keinen offenen Ast eine Erweiterungsregel aus Definition 16.1 anwendbar ist.

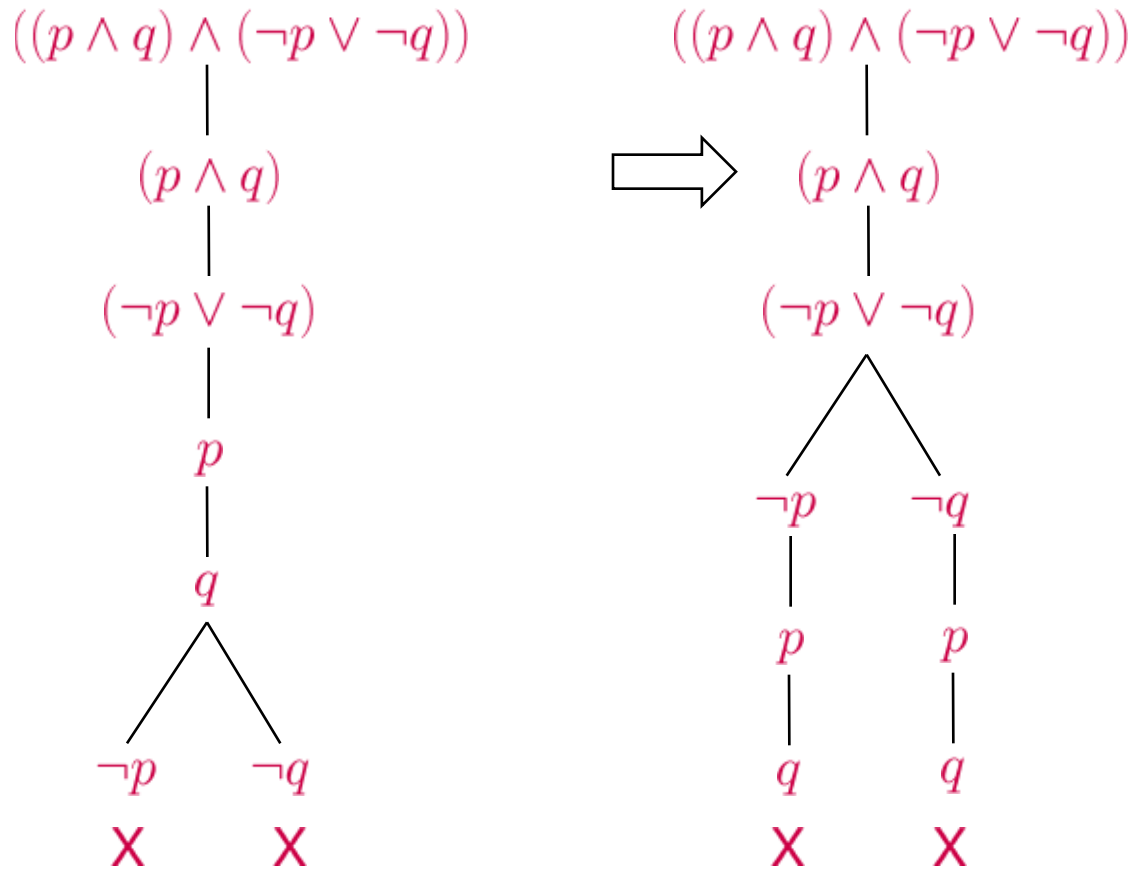
Beachte:

Es ist nicht nötig, einen geschlossenen Ast noch zu erweitern, da er stets geschlossen bleiben wird.

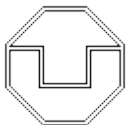


Beachte:

Zu einer gegebenen Formel kann es verschiedene vollständige Tableaux geben, da man zu einem Zeitpunkt verschiedene Äste und in einem Ast verschiedene Knoten haben kann, auf die Erweiterungsregeln anwendbar sind.



Das Endresultat wird durch die Auswahl aber nicht beeinflusst.



Satz 16.3 (Korrektheit und Vollständigkeit)

Es sei ϕ eine aussagenlogische Formel in Negationsnormalform und T ein vollständiges Tableau für ϕ .

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. ϕ ist erfüllbar.
2. T ist offen.

Vollständigkeit:

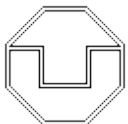
alle erfüllbaren Formeln werden durch den Tableau-Kalkül erkannt “1 \rightarrow 2”

Korrektheit:

nur erfüllbare Formeln werden durch den Tableau-Kalkül erkannt “2 \rightarrow 1”

Beachte:

Die Aussage des Satzes ist unabhängig davon, welches vollständige Tableau für ϕ betrachtet wird.



Beweis der Vollständigkeit:

Es sei ϕ eine erfüllbare Formel und w eine Wertzuweisung mit $w(\phi) = 1$.

Wir zeigen zunächst die Korrektheit der folgenden Aussage:

Jedes Tableau T für ϕ enthält einen Ast A ,
für den w Modell von $For(A)$ ist.

Wir beweisen die Aussage durch **Induktion über die Anzahl n der Erweiterungsschritte**, die zur Konstruktion von T nötig sind:

$n = 0$:

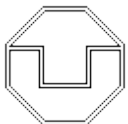
Dann besteht T aus einem **einzigem Knoten**, der mit ϕ beschriftet ist.

Dieser ist auch der **einzigste Ast**, und w ist nach Annahme ein Modell von ϕ .

$n \rightarrow n + 1$:

T entsteht durch Anwendung einer **Erweiterungsregel** auf den Ast A' des **Tableaus T'** für ϕ .

Nach **Induktionsannahme** enthält T' einen Ast A'' , für den w ein Modell von $For(A'')$ ist.



$n \rightarrow n + 1$:

T entsteht durch Anwendung einer **Erweiterungsregel** auf den **Ast A'** des **Tableaus T'** für ϕ

Nach **Induktionsannahme** enthält T' einen **Ast A''** , für den w ein Modell von $For(A'')$ ist.

1. Fall: A' und A'' sind verschiedene Äste in T' .

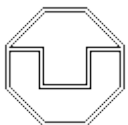
Dann ist A'' auch ein **Ast in T** und w ist ein Modell von $For(A'')$.

2. Fall: A' und A'' sind derselbe Ast in T' .

Wurde die **Erweiterungsregel** auf eine **Konjunktion $(\psi_1 \wedge \psi_2)$** angewandt, so gilt:

- $For(A') = For(A'')$ enthält $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ und damit ist w ein Modell von $(\psi_1 \wedge \psi_2)$;
- T enthält einen **Ast A** mit $For(A) = For(A'') \cup \{\psi_1, \psi_2\}$.

Da w ein Modell von $For(A'')$ ist und aus $w((\psi_1 \wedge \psi_2)) = 1$ auch $w(\psi_1) = 1 = w(\psi_2)$ folgt, ist w auch ein Modell von $For(A)$.

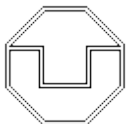


2. Fall: A' und A'' sind derselbe Ast in T' .

Wurde die Erweiterungsregel auf eine Disjunktion $(\psi_1 \vee \psi_2)$ angewandt, so gilt:

- $For(A') = For(A'')$ enthält $(\psi_1 \vee \psi_2)$ und damit ist w ein Modell von $(\psi_1 \vee \psi_2)$;
- T enthält Äste A_1, A_2 mit $For(A_1) = For(A'') \cup \{\psi_1\}$ und $For(A_2) = For(A'') \cup \{\psi_2\}$.

Da w ein Modell von $For(A'')$ ist und aus $w((\psi_1 \vee \psi_2)) = 1$ auch $w(\psi_1) = 1$ oder $w(\psi_2) = 1$ folgt, ist w ein Modell von $For(A_1)$ oder von $For(A_2)$.

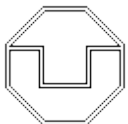


Wir haben damit gezeigt:

Jedes Tableau T für ϕ enthält einen Ast A ,
für den w Modell von $For(A)$ ist.

Damit ist aber dieser Ast A offen, da w nicht gleichzeitig Modell von p und von $\neg p$ sein kann.

Dies schließt den Beweis der Vollständigkeit ab.



Beweis der Korrektheit:

Es sei T ein vollständiges Tableau für ϕ und A ein offener Ast in T .

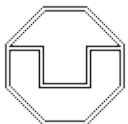
Wir verwenden A zur Definition einer **Wertzuweisung** w_A :

$$w_A(p) = \begin{cases} 1 & \text{falls } p \in \text{For}(A) \\ 0 & \text{falls } p \notin \text{For}(A) \end{cases}$$

Wir zeigen nun die Korrektheit der folgenden Aussage:

w_A ist ein Modell von $\text{For}(A)$.

Wegen $\phi \in \text{For}(A)$ folgt daraus unmittelbar, daß w **Modell von ϕ** ist.



Es bleibt zu zeigen:

w_A ist ein Modell von $For(A)$.

Es sei $\psi \in For(A)$.

Wir zeigen $w_A(\psi) = 1$ durch **Induktion** über den Formelaufbau:

$\psi = p$ für eine aussagenlogische Variable p :

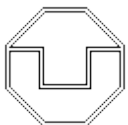
Dann ist $p \in For(A)$ und somit $w_A(p) = 1$.

$\psi = \neg p$ für eine aussagenlogische Variable p :

Da A offen ist, gilt daher $p \notin For(A)$ und somit $w_A(p) = 0$,
was $w_A(\neg p) = 1$ liefert.

Beachte:

Da ϕ in NNF ist, sind auch alle Formeln,
die Knoten im Tableau beschriften, in NNF.
Daher kann Negation nur unmittelbar vor Variablen auftreten.



Es bleibt zu zeigen:

w_A ist ein Modell von $For(A)$.

Es sei $\psi \in For(A)$.

Wir zeigen $w_A(\psi) = 1$ durch **Induktion** über den Formelaufbau:

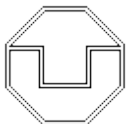
$\psi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$:

Da A offen ist und T vollständig ist, gilt $\{\psi_1, \psi_2\} \subseteq For(A)$.

Induktion liefert $w_A(\psi_1) = 1 = w_A(\psi_2)$, was $w_A((\psi_1 \wedge \psi_2)) = 1$ zeigt.

$\psi = (\psi_1 \vee \psi_2)$:

Kann ähnlich gezeigt werden.



Insgesamt haben wir damit gezeigt:

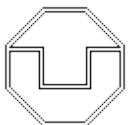
Satz 16.3 (Korrektheit und Vollständigkeit)

Es sei ϕ eine aussagenlogische Formel in Negationsnormalform und T ein vollständiges Tableau für ϕ .

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. ϕ ist erfüllbar.
2. T ist offen.

Damit wir daraus ein Verfahren erhalten, das Erfüllbarkeit von aussagenlogischen Formeln (in NNF) effektiv entscheiden kann, müssen wir noch zeigen, daß man ein vollständiges Tableau stets in endlicher Zeit konstruieren kann.



Dies folgt unmittelbar aus der folgenden Tatsache:

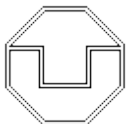
Lemma 16.4

Es sei ϕ eine aussagenlogische Formel in Negationsnormalform und T ein Tableau für ϕ .

Dann enthält jeder Ast von T maximal $2 \cdot |\text{Unt}(\phi)| + 1$ viele Knoten.

Beweis:

- Jeder Knoten im Ast außer der Wurzel entsteht durch Anwendung einer Erweiterungsregel auf eine Formel, die im Ast vorkommt.
- Jede Formel, die im Ast vorkommt, ist ein Element von $\text{Unt}(\phi)$.
- Für jede solche Formel kann maximal einmal eine Erweiterungsregel angewandt werden (auch wenn sie mehrmals vorkommt nicht mehr als ein Mal).
- Jede Anwendung einer Erweiterungsregel erzeugt maximal zwei Knoten des Astes.



Dies folgt unmittelbar aus der folgenden Tatsache:

Lemma 16.4

Es sei ϕ eine aussagenlogische Formel in Negationsnormalform und T ein Tableau für ϕ .

Dann enthält jeder Ast von T maximal $2 \cdot |\text{Unt}(\phi)| + 1$ viele Knoten.

Für $n = 2 \cdot |\text{Unt}(\phi)| + 1$ enthält daher ein vollständiges Tableau für ϕ maximal $2^{n+1} - 1$ viele Knoten, kann also in höchstens exponentieller Zeit konstruiert werden.

