§ 17. Resolution

Ziel ist es wieder, für eine aussagenlogische Formel ϕ zu entscheiden, ob sie erfüllbar ist, d.h. ob sie ein Modell hat.

Bei der Resolution geht man davon aus, daß die Formel in konjunktiver Normalform (KNF) vorliegt:

$$\phi = ((L_{1,1} \vee \ldots \vee L_{1,n_1}) \wedge \ldots \wedge (L_{k,1} \vee \ldots \vee L_{k,n_k}))$$

Die Konjunkte $K_i = (L_{i,1} \vee \ldots \vee L_{i,n_i})$ nennen wir Klauseln.

Da die Wertzuweisung w genau dann ein Modell von $(K_1 \wedge \ldots \wedge K_k)$ ist, wenn sie ein Modell der Menge $\{K_1, \ldots, K_k\}$ ist, betrachten wir im Folgenden endliche Mengen von Klauseln anstelle von Formeln in KNF.

Da Disjunktion assoziativ, kommutativ und idempotent ist, genügt es, für eine Klausel $K_i = (L_{i,1} \vee \ldots \vee L_{i,n_i})$ die Menge ihrer Literale $\{L_{i,1}, \ldots, L_{i,n_i}\}$ zu kennen.

Definition 17.1 (Klauseln)

1. Eine Klausel ist eine endliche Menge von Literalen. Die Wertzuweisung w erfüllt die Klausel $K = \{L_1, \ldots, L_n\}$ gdw. es ein $i, 1 \leq i \leq n$, gibt mit $w(L_i) = 1$. Wir schreiben dann auch $w(K) = 1$ und andernfalls $w(K) = 0$.

2. Die leere Menge von Literalen nennen wir die leere Klausel und schreiben sie als $\Box$. Es ist $w(\Box) = 0$ für alle Wertzuweisungen w.

3. Eine Klauselmenge ist eine endliche Menge von Klauseln. Die Wertzuweisung w erfüllt die Klauselmenge $M = \{K_1, \ldots, K_k\}$ gdw. für alle $j, 1 \leq j \leq k$, gilt: $w(K_j) = 1$. Wir schreiben dann auch $w(M) = 1$ und andernfalls $w(M) = 0$.

Die Formel

$$\phi = ((L_{1,1} \vee \ldots \vee L_{1,n_1}) \wedge \ldots \wedge (L_{k,1} \vee \ldots \vee L_{k,n_k}))$$

in KNF entspricht der Klauselmenge

$$M_\phi = \{\{L_{1,1}, \ldots, L_{1,n_1}\}, \ldots, \{L_{k,1}, \ldots, L_{k,n_k}\}\}.$$

Offenbar sind ϕ und M_ϕ äquivalent, d.h. es gilt $w(\phi) = w(M_\phi)$ für alle Wertzuweisungen w.

Definition 17.2 (Resolvente)

Es seien K_1, K_2, R Klauseln und M eine Klauselmenge.

1. Ist p eine aussagenlogische Variable mit $p \in K_1$ und $\neg p \in K_2$, so ist

   $$(K_1 \setminus \{p\}) \cup (K_2 \setminus \{\neg p\})$$

   eine Resolvente von K_1 und K_2.

2. Die Klausel R ist eine Resolvente von M, wenn R Resolvente zweier Klauseln in M ist.

Beispiel:

$\phi = (p \wedge q \wedge (\neg p \vee \neg q))$ entspricht der Klauselmenge $M_\phi = \{\{p\}, \{q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$.

- $\{\neg q\}$ ist Resolvente von $\{p\}$ und $\{\neg p, \neg q\}$ und damit auch von M_ϕ.
- $\{\neg p\}$ ist Resolvente von $\{q\}$ und $\{\neg p, \neg q\}$ und damit auch von M_ϕ.
- $\Box$ ist Resolvente von $\{p\}$ und $\{\neg p\}$.

Resolventen sind semantische Konsequenzen der Klauseln, aus denen sie erzeugt wurden.

Lemma 17.3 (Resolventen sind Konsequenzen)

Es seien K_1, K_2, R Klauseln, M eine Klauselmenge und w eine Wertzuweisung.

1. Ist R eine Resolvente von K_1 und K_2, so ist R auch eine semantische Konsequenz von $\{K_1, K_2\}$,
   d.h. aus $w(K_1) = 1 = w(K_2)$ folgt auch $w(R) = 1$.
2. Insbesondere ist damit jedes Modell von M auch ein Modell aller Resolventen von M.

Beweis:

2. folgt unmittelbar aus 1..

Dresden

Beweis von 1.:

Es sei $K_1 = \{p, L_{1,1}, \ldots, L_{1,n_1}\}$ und $K_2 = \{\neg p, L_{2,1}, \ldots, L_{2,n_2}\}$ und somit $R = \{L_{1,1}, \ldots, L_{1,n_1}, L_{2,1}, \ldots, L_{2,n_2}\}$.

Ist w ein Modell von K_1 und K_2, so folgt aus $w(K_1) = 1$, daß $w(p) = 1$ oder $w(L_{1,j}) = 1$ für ein $j, 1 \leq j \leq n_1$.

1. Fall: $w(L_{1,j}) = 1$ für ein $j, 1 \leq j \leq n_1$.

Dann ist offensichtlich auch $w(R) = 1$.

2. Fall: $w(p) = 1$.

Dann ist $w(\neg p) = 0$ und somit folgt aus $w(K_2) = 1$, daß es ein $j, 1 \leq j \leq n_2$, gibt mit $w(L_{2,j}) = 1$.

Daraus folgt wieder unmittelbar $w(R) = 1$.

Das Resolutionsverfahren berechnet nun sukzessive Resolventen, bis keine neuen Klauseln mehr erzeugt werden.

Definition 17.4 (Resolution)

Es sei M eine Klauselmenge.

1. Wir definieren
   - $Res(M) := M \cup \{R \mid R \text{ ist Resolvente von } M\}$,
2. Wir iterieren nun die Anwendung von Res:
   - $Res^0(M) := M$,
   - $Res^{i+1}(M) := Res(Res^i(M))$,
   - $Res^*(M) := \bigcup_{i \geq 0} Res^i(M)$.

Offenbar gilt $Res^0(M) \subseteq Res^1(M) \subseteq Res^2(M) \subseteq \cdots \subseteq Res^*(M)$.

Die Iteration wird nach endlich vielen Schritten stabil.

Lemma 17.5 (Terminierung)

Es sei M eine Klauselmenge.

1. Es gibt ein $k \geq 0$ mit $Res^{k+1}(M) = Res^k(M)$.
2. Für dieses k gilt dann $Res^*(M) = Res^k(M)$.

Beweis:

2. Ist $Res^{k+1}(M) = Res^k(M)$, so gilt

$$Res^0(M) \subseteq Res^1(M) \subseteq \cdots \subseteq Res^k(M) = Res^{k+1}(M) = Res^{k+2}(M) = \cdots$$

Daher ist $Res^*(M) = \bigcup_{i\geq 0} Res^i(M) = Res^k(M)$.

Dresden

Beweis von 1.:

Es sei $\mathcal{L}$ die Menge der Literale, die in M vorkommen und ℓ die Kardinalität dieser Menge.

Da durch Resolution keine neuen Literale erzeugt werden, sind alle Resolventen R aus den Literalen in $\mathcal{L}$ aufgebaut,

d.h. $R \subseteq \mathcal{L}$.

Daher gilt $|Res^*(M)| \leq 2^\ell$.

Deshalb kann bei der Inklusionskette

$$M = Res^0(M) \subseteq Res^1(M) \subseteq Res^2(M) \subseteq \cdots \subseteq Res^*(M)$$

maximal $2^\ell - |M|$ mal echte Inklusion gelten,

d.h. es gibt ein $k \leq 2^\ell - |M|$ mit $Res^k(M) = Res^{k+1}(M)$.

Dresden

Satz 17.6 (Korrektheit und Vollständigkeit)

Es sei M eine Klauselmenge.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. M ist erfüllbar.
2. $\Box \notin Res^*(M)$.

Beweis:

„$1 \rightarrow 2$": Es sei w ein Modell von M.

Unter Verwendung von Lemma 17.3 kann man durch Induktion leicht zeigen, daß dann w auch ein Modell von $Res^i(M)$ für alle $i \geq 0$ ist.

Folglich ist w auch ein Modell von $Res^*(M)$.

Da $w(\Box) = 0$ gilt, kann daher $\Box$ kein Element von $Res^*(M)$ sein.

Dresden

Beweis:

„2 → 1“: Wir zeigen die Kontraposition, d.h. die Gültigkeit der Aussage

$(*)$ Ist M unerfüllbar, so ist $\Box \in Res^*(M)$.

Für eine Klauselmenge M sei $c(M)$ die Anzahl der Vorkommen von Literalen in M,
d.h. ist $M = \{\{L_{1,1}, \ldots, L_{1,n_1}\}, \ldots, \{L_{k,1}, \ldots, L_{k,n_k}\}\}$, so ist $c(M) = n_1 + \ldots + n_k$.

Wir zeigen $(*)$ durch Induktion über $c(M)$:

$\underline{c(M) = 0}$:

Dann ist $M = \{\Box\}$ und damit $\Box \in Res^*(M)$.

$\underline{c(M) > 0}$:

1. Fall: M enthält nur Klauseln, die Einermengen sind.

Da M unerfüllbar ist, gibt es daher eine aussagenlogische Variable p
mit $\{p\} \in M$ und $\{\neg p\} \in M$.

Offenbar gilt dann $\Box \in Res^*(M)$.

$c(M) > 0$:

2. Fall: M enthält eine Klausel, die keine Einermenge ist.

Es sei $K = \{L, L_1, \ldots, L_n\} \in M$ diese Klausel und $N := M \setminus \{K\}$.

Wir betrachten die Klauselmengen

$$M_1 = N \cup \{\{L\}\} \text{ und } M_2 = N \cup \{\{L_1, \ldots, L_n\}\}.$$

Da M unerfüllbar ist, sind auch M_1 und M_2 unerfüllbar

und es gilt $c(M_1) < c(M)$ und $c(M_2) < c(M)$.

Induktion liefert $\Box \in Res^*(M_1)$ und $\Box \in Res^*(M_2)$.

(a) Wird bei der Erzeugung der Resolvente $\Box \in Res^*(M_1)$ die Klausel $\{L\}$ nicht verwendet, so ist $\Box \in Res^*(N) \subseteq Res^*(M)$.

(b) Wird bei der Erzeugung der Resolvente $\Box \in Res^*(M_1)$ die Klausel $\{L\}$ verwendet, so ist $\{L_1, \ldots, L_n\} \in Res^*(M)$.

Damit ist aber $\Box \in Res^*(M_2) \subseteq Res^*(M)$.

Dresden

Beispiel:

$$M = \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$$

Wähle $K = \{\neg p, \neg q\}$ und $L = \neg p$.

Dann ist

$$M_1 = \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}\} \cup \{\{\neg p\}\} \text{ und}$$

$$M_2 = \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}\} \cup \{\{\neg q\}\}.$$

$\square \in Res^*(M_1)$:

$$\begin{tikzcd}
\{p, q\} \arrow[dr] & & \{p, \neg q\} \arrow[dl] & \\
& \{p\} \arrow[dr] & & \{\neg p\} \arrow[dl] \\
& & \square &
\end{tikzcd}$$

$\square \in Res^*(M_2)$:

$$\begin{tikzcd}
& \{p, q\} \arrow[dr] & & \{\neg p, q\} \arrow[dl] \\
\{\neg q\} \arrow[dr] & & \{q\} \arrow[dl] & \\
& \square & &
\end{tikzcd}$$

Beispiel:

$M = \{\{p,q\},\{p,\neg q\},\{\neg p,q\},\{\neg p,\neg q\}\}$

$\Box \in Res^*(M_1)$:

$$\begin{tikzcd}
\{p,q\} \arrow[dr] & & \{p,\neg q\} \arrow[dl] & \\
& \{p\} \arrow[dr] & & \{\neg p\} \arrow[dl] \\
& & \Box &
\end{tikzcd}$$

$\Box \in Res^*(M_2)$:

$$\begin{tikzcd}
& \{p,q\} \arrow[dr] & & \{\neg p,q\} \arrow[dl] \\
\{\neg q\} \arrow[dr] & & \{q\} \arrow[dl] & \\
& \Box & &
\end{tikzcd}$$

$\Box \in Res^*(M)$:

$$\begin{tikzcd}
\{p,q\} \arrow[dr] & & \{p,\neg q\} \arrow[dl] & & & & \\
& \{p\} \arrow[dr] & & \{\neg p,\neg q\} \arrow[dl] & & \{p,q\} \arrow[dl] & \{\neg p,q\} \arrow[dll] \\
& & \{\neg q\} \arrow[dr] & & \{q\} \arrow[dl] & & \\
& & & \Box & & &
\end{tikzcd}$$

Beachte:

- Sobald wir bei der Resolution die leere Klausel erzeugt haben, wissen wir, daß die Klauselmenge M unerfüllbar ist.

  Wir müssen daher nicht ganz $Res^*(M)$ in der Reihenfolge $Res^1(M), Res^2(M), Res^3(M), \ldots$ erzeugen.

  Es genügt, eine Herleitung der leeren Klausel zu finden.

  Man kann also bei der Resolution Unerfüllbarkeit eventuell frühzeitig erkennen.

  Bei einer erfüllbaren Klauselmenge müssen wir aber $Res^*(M)$ ganz berechnen, um sicher zu sein, daß die leere Klausel nicht erzeugt werden kann.

- Im Gegensatz dazu kann man bei dem Tableau-Verfahren eventuell Erfüllbarkeit frühzeitig erkennen:

  Es genügt ja, einen offenen Ast zu finden, auf den keine Erweiterungsregeln mehr anwendbar sind.