§ 18. Der Hilbert-Kalkül

Ziel ist es, alle Tautologien aus Axiomen mit Hilfe von Ableitungsregeln herzuleiten.

Wir schränken uns hier der Einfachkeit halber auf Formeln ein, die nur die Junktoren $\rightarrow$ und $\neg$ enthalten.

Nach Satz 14.6 ist jede aussagenlogische Formel äquivalent zu einer solchen Formel.

Wenn wir in diesem Abschnitt von einer „Formel“ sprechen, so meinen wir stets eine aussagenlogische Formel von dieser Form.

Definition 18.1 (Hilbert-Kalkül)

1. Für beliebige Formeln ϕ, ψ, π sind die folgenden Formeln Axiome:

(Ax1) $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi))$

(Ax2) $((\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \pi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \pi)))$

(Ax3) $((\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi))$

2. Die einzige Ableitungsregel ist Modus Ponens:

(MP) $$\frac{\phi \quad (\phi \rightarrow \psi)}{\psi}$$

Hat man die Formeln ϕ und $\phi \rightarrow \psi$ bereits abgeleitet, so kann man auch ψ ableiten.

Dresden

Definition 18.2 (Ableitung)

Es sei Γ eine Menge von Formeln und ϕ eine Formel.

1. Eine Ableitung von ϕ aus Γ ist eine endliche Folge von Formeln

   $$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m,$$

   für die gilt:

   - $\psi_m = \phi$
   - Für alle $i, 1 \leq i \leq m$, trifft auf ψ_i einer der folgenden drei Fälle zu:

     (a) ψ_i ist ein Axiom,

     (b) $\psi_i \in \Gamma$,

     (c) ψ_i entsteht durch Anwendung von Modus Ponens aus Formeln ψ_ℓ und ψ_r für Indices $\ell, r < i$.

2. Gibt es eine Ableitung von ϕ aus Γ, so sagen wir auch, daß ϕ aus Γ ableitbar ist und schreiben

   $$\Gamma \vdash \phi.$$

Beachte:

1. Die Menge Γ kann endlich oder unendlich sein.
2. Die Elemente von Γ nennen wir Hypothesen.
3. Ist Γ die leere Menge, so schreiben wir $\vdash \phi$ anstelle von $\emptyset \vdash \phi$.
4. Ist $\Gamma \subseteq \Delta$, so folgt aus $\Gamma \vdash \phi$ auch $\Delta \vdash \phi$.

   Insbesondere folgt aus $\vdash \phi$ auch $\Gamma \vdash \phi$ für jede Formelmenge Γ.

Beispiele 18.3

1. Es gilt $\vdash ((p \to q) \to (p \to p))$

   $(p \to (q \to p))$ (Ax1)

   $((p \to (q \to p)) \to ((p \to q) \to (p \to p)))$ (Ax2)

   $((p \to q) \to (p \to p))$ (MP)

Dresden

Beispiele 18.3

2. Es gilt $\{\phi, (\psi \rightarrow (\phi \rightarrow \pi))\} \vdash (\psi \rightarrow \pi)$

ϕ	(Hyp)
$(\psi \rightarrow (\phi \rightarrow \pi))$	(Hyp)
$(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi))$	(Ax1)
$(\psi \rightarrow \phi)$	(MP)
$((\psi \rightarrow (\phi \rightarrow \pi)) \rightarrow ((\psi \rightarrow \phi) \rightarrow (\psi \rightarrow \pi)))$	(Ax2)
$((\psi \rightarrow \phi) \rightarrow (\psi \rightarrow \pi))$	(MP)
$(\psi \rightarrow \pi)$	(MP)

3. Es gilt $\vdash (\phi \rightarrow \phi)$

$((\phi \rightarrow ((\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)))$	(Ax2)
$(\phi \rightarrow ((\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi))$	(Ax1)
$((\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi))$	(MP)
$(\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \phi))$	(Ax1)
$(\phi \rightarrow \phi)$	(MP)

Beispiele 18.3

4. Es gilt $\vdash (\neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi))$

$$(\neg\psi \rightarrow (\neg\phi \rightarrow \neg\psi)) \quad \text{(Ax1)}$$

$$((\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)) \quad \text{(Ax3)}$$

$$(((\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow ((\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)))) \quad \text{(Ax1)}$$

$$(\neg\psi \rightarrow ((\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi))) \quad \text{(MP)}$$

$$((\neg\psi \rightarrow ((\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi))) \rightarrow$$
$$((\neg\psi \rightarrow (\neg\phi \rightarrow \neg\psi)) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)))) \quad \text{(Ax2)}$$

$$((\neg\psi \rightarrow (\neg\phi \rightarrow \neg\psi)) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi))) \quad \text{(MP)}$$

$$(\neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)) \quad \text{(MP)}$$

Lemma 18.4

1. Jedes Axiom des Hilbert-Kalküls ist eine Tautologie.

2. Modus Ponens ist eine korrekte Ableitungsregel,
   d.h. für jede Wertzuweisung w gilt:

   Ist $w(\phi) = 1$ und $w((\phi \rightarrow \psi)) = 1$, so ist auch $w(\psi) = 1$.

Beweis:

1. kann man leicht durch Aufstellen der Wahrheitstafeln für die Axiome zeigen.

2. ergibt sich unmittelbar aus der Semantik der Implikation.

Satz 18.5 (Korrektheit)

Es sei Γ eine Menge von Formeln und ϕ eine Formel.
Dann folgt aus $\Gamma \vdash \phi$ auch $\Gamma \models \phi$.

Beweis:

Gilt $\Gamma \vdash \phi$, so gibt es eine Ableitung

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m = \phi$$

von ϕ aus Γ.

Es sei nun w ein Modell von Γ.

Zu zeigen: $w(\phi) = 1$.

Wir zeigen durch Induktion über i: $w(\psi_i) = 1$ für alle $i, 1 \leq i \leq m$.

$\underline{i = 1:}$

Dann ist ψ_i ein Axiom oder eine Hypothese aus Γ.

Im ersten Fall folgt $w(\psi_i) = 1$ aus Lemma 18.4 und
im zweiten, da w Modell von Γ ist.

Dresden

Satz 18.5 (Korrektheit)

Es sei Γ eine Menge von Formeln und ϕ eine Formel.
Dann folgt aus $\Gamma \vdash \phi$ auch $\Gamma \models \phi$.

Beweis:

Gilt $\Gamma \vdash \phi$, so gibt es eine Ableitung

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m = \phi$$

von ϕ aus Γ.

Es sei nun w ein Modell von Γ.

Zu zeigen: $w(\phi) = 1$.

Wir zeigen durch Induktion über i: $w(\psi_i) = 1$ für alle $i, 1 \leq i \leq m$.

$\underline{i > 1:}$

Ist ψ_i ein Axiom oder eine Hypothese aus Γ, so folgt wieder $w(\psi_i) = 1$.

Sonst entsteht ψ_i durch Anwendung von Modus Ponens aus Formeln ψ_ℓ und ψ_r für $\ell, r < i$.

Induktion liefert $w(\psi_\ell) = 1$ und $w(\psi_r) = 1$

und Korrektheit von Modus Pones deshalb $w(\psi_i) = 1$.

Bevor wir die Umkehrung von Satz 18.5 zeigen können, benötigen wir ein Hilfsmittel, das die Konstruktion von Ableitungen erleichtert.

Lemma 18.6 (Deduktionslemma)

Es sei Γ eine Menge von Formeln und ϕ, ψ Formeln.

Dann gilt $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$ gdw. $\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \psi)$.

Beweis:

Eine Richtung kann sehr einfach gezeigt werden:

Gilt $\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \psi)$, so offenbar auch $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash (\phi \rightarrow \psi)$.

Außerdem gilt offensichtlich $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \phi$.

Schreibt man die beiden Ableitungen hintereinander, so erhält man eine Ableitung mit Hypothesenmenge $\Gamma \cup \{\phi\}$, in der ϕ und $(\phi \rightarrow \psi)$ vorkommen.

Modus Ponens liefert dann $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$.

Wir zeigen die andere Richtung durch Induktion über die Länge m einer kürzesten Ableitung für $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$.

$m = 1$:

Dann ist ψ ein Axiom oder eine Hypothese aus Γ oder gleich ϕ.

1. Ist ψ ein Axiom, so zeigt die Ableitung

ψ	(Ax)
$(\psi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi))$	(Ax1)
$(\phi \rightarrow \psi)$	(MP),

   daß $\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \psi)$ gilt.

2. Ist $\psi \in \Gamma$ eine Hypothese, so zeigt die gleiche Ableitung wie in 1., daß $\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \psi)$ gilt.
   Nur wird ψ in der ersten Zeile nun als Hypothese eingesetzt.

3. Ist $\psi = \phi$, so müssen wir $\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \phi)$ zeigen.

   Wir wissen aber bereits, daß $\vdash (\phi \rightarrow \phi)$ gilt (Beispiel 18.3 (3)).

   Daher gilt offenbar auch $\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \phi)$.

$m > 1$:

Ist ψ ein Axiom oder eine Hypothese aus Γ oder gleich ϕ, so kann man $\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \psi)$ wie im Fall $m = 1$ zeigen.

Ansonsten entsteht ψ durch Anwenden von Modus Ponens aus Formeln π und $(\pi \rightarrow \psi)$, die in der Ableitung für $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$ vor ψ auftreten.

Es gilt daher $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \pi$ und $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash (\pi \rightarrow \psi)$ mit Ableitungen, die kürzer als m sind.

Induktion liefert $\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \pi)$ und $\Gamma \vdash (\phi \rightarrow (\pi \rightarrow \psi))$.

Daher gibt es die folgende Ableitung mit Hypothesenmenge Γ:

$$\begin{array}{ll}
\quad\vdots & \\
(\phi \rightarrow (\pi \rightarrow \psi)) & \\
\quad\vdots & \\
(\phi \rightarrow \pi) & \\
((\phi \rightarrow (\pi \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \pi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi))) & \text{(Ax2)} \\
((\phi \rightarrow \pi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)) & \text{(MP)} \\
(\phi \rightarrow \psi) & \text{(MP)}
\end{array}$$

Dies zeigt $\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \psi)$.

Lemma 18.7 (Hypothetischer Syllogismus)

Es sei Γ eine Menge von Formeln und ϕ, ψ, π Formeln.

Gilt $\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \psi)$ und $\Gamma \vdash (\psi \rightarrow \pi)$, so auch $\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \pi)$.

Beweis:

Gilt $\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \psi)$ und $\Gamma \vdash (\psi \rightarrow \pi)$, so gibt es die folgende Ableitung mit Hypothesenmenge $\Gamma \cup \{\phi\}$:

$$\begin{array}{ll}
\vdots & \\
(\phi \rightarrow \psi) & \\
\vdots & \\
(\psi \rightarrow \pi) & \\
\phi & \text{(Hyp)} \\
\psi & \text{(MP)} \\
\pi & \text{(MP)}
\end{array}$$

Dies zeigt $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \pi$.

Das Deduktionslemma liefert nun $\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \pi)$.

Dresden

Lemma 18.7 zeigt, daß man Hypothetischen Syllogismus als zusätzliche Ableitungsregel verwenden kann, ohne die Menge der ableitbaren Formeln zu verändern:

$$\text{(HS)} \quad \frac{(\phi \rightarrow \psi) \quad (\psi \rightarrow \pi)}{(\phi \rightarrow \pi)}$$

Beispiel 18.8

Es gilt $\vdash ((\neg\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi)$

Mit Beispiel 18.3 (4) gilt $\vdash (\neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi))$ für beliebige Formeln ϕ, ψ, also auch

$$\vdash (\neg\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \neg(\phi \rightarrow \phi))).$$

Unter Verwendung von (Ax2) und (MP) erhalten wir daraus

$$(*) \qquad \vdash ((\neg\phi \rightarrow \phi) \rightarrow (\neg\phi \rightarrow \neg(\phi \rightarrow \phi))).$$

Andererseits zeigt die folgende Ableitung

$$
\begin{array}{ll}
(\neg\phi \to \neg(\phi \to \phi)) & \text{(Hyp)} \\
((\neg\phi \to \neg(\phi \to \phi)) \to ((\phi \to \phi) \to \phi)) & \text{(Ax3)} \\
((\phi \to \phi) \to \phi) & \text{(MP)} \\
(\phi \to \phi) & \text{(Bsp. 8.3 (3))} \\
\phi & \text{(MP)},
\end{array}
$$

daß $\{(\neg\phi \to \neg(\phi \to \phi))\} \vdash \phi$ gilt.

Das Deduktionslemma liefert nun

$(**)\qquad \vdash ((\neg\phi \to \neg(\phi \to \phi)) \to \phi).$

Wir haben bereits gezeigt:

$(*)\qquad \vdash ((\neg\phi \to \phi) \to (\neg\phi \to \neg(\phi \to \phi))).$

Mit HS erhalten wir aus $(*)$ und $(**)$

$$\vdash ((\neg\phi \to \phi) \to \phi).$$

Dresden

Wir wollen nun die Umkehrung von Satz 18.5 zeigen, d.h.:

(∗) Aus $\Gamma \models \phi$ folgt $\Gamma \vdash \phi$.

Dazu gehen wir wie folgt vor:

1. Wir führen den Begriff der Konsistenz einer Formelmenge ein: eine Formelmenge ist konsistent, wenn aus ihr keine widersprüchlichen Formeln herleitbar sind.

2. Wir zeigen, daß jede konsistente Formelmenge ein Modell hat:

   (a) Jede konsistente Formelmenge kann zu einer maximal konsistenten Formelmenge erweitert werden.

   (b) Maximal konsistente Formelmengen definieren ein Modell.

3. Aus 2. kann man dann (∗) leicht folgern.

Definition 18.9 (Konsistenz)

Es sei Γ eine Menge von Formeln.

Dann ist Γ inkonsistent gdw. es eine Formel ψ gibt mit $\Gamma \vdash \psi$ und $\Gamma \vdash \neg\psi$.

Ansonsten ist Γ konsistent.

Aus einer inkonsistenten Formelmenge kann man jede Formel ableiten.

Lemma 18.10

Es sei Γ eine Menge von Formeln.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. Γ ist inkonsistent.
2. Für jede Formel ϕ gilt $\Gamma \vdash \phi$.

Beweis:

„$2 \Rightarrow 1$" Gilt 2., so kann man aus Γ jede Formel ableiten,

also insbesondere auch $\Gamma \vdash p$ und $\Gamma \vdash \neg p$.

„$1 \Rightarrow 2$" Es sei ψ eine Formel mit $\Gamma \vdash \psi$ und $\Gamma \vdash \neg\psi$.

Mit Beispiel 18.3 (4) gilt für jede Formel ϕ auch $\vdash (\neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi))$
und damit $\Gamma \vdash (\neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi))$.

Zweimaliges Anwenden von (MP) liefert $\Gamma \vdash \phi$.

Konsistente Formelmengen kann man stets um die Negation nicht-ableitbarer Formeln erweitern, ohne die Konsistenz zu zerstören.

Lemma 18.11

> Es sei Γ eine konsistente Menge von Formeln und ϕ eine Formel mit $\Gamma \not\vdash \phi$.
>
> Dann ist $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ konsistent.

Beweis:

Angenommen, $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ ist inkonsistent.

Dann gilt mit Lemma 18.10 auch $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash \phi$.

Das Deduktionslemma liefert $\Gamma \vdash (\neg\phi \rightarrow \phi)$.

Mit Beispiel 18.8 gilt $\Gamma \vdash ((\neg\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi)$

und mit Modus Ponens auch $\Gamma \vdash \phi$.

Dies widerspricht der Wahl von ϕ.

Dresden

Definition 18.12 (maximal konsistente Erweiterung)

Es seien Γ, Δ Mengen von Formeln.

1. Δ ist eine Erweiterung von Γ gdw. $\Gamma \subseteq \Delta$.
2. $\Delta \supseteq \Gamma$ ist eine maximal konsistente Erweiterung von Γ gdw. für alle Formeln ψ gilt: entweder $\Delta \vdash \psi$ oder $\Delta \vdash \neg\psi$.

exklusives oder,
d.h. nicht beides!

Wir wollen nun zeigen, daß jede konsistente Formelmenge eine maximal konsistente Erweiterung hat.

Dazu überlegen wir uns zunächst, daß die Menge aller Formeln abzählbar ist, d.h. es gibt eine Aufzählung aller Formeln:

$$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots$$

Dresden

Einschub

Die Menge aller Formeln ist abzählbar.

Beweis:

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß

$$\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}.$$

Für eine Formel ϕ definieren wir ihr Gewicht $g(\phi)$ induktiv:

- $g(p_n) := n$;
- $g(\neg\psi) := 1 + g(\psi)$;
- $g((\psi \rightarrow \pi)) := 1 + g(\psi) + g(\pi)$.

Offenbar gibt es für jedes n nur endlich viele Formeln ϕ mit $g(\phi) = n$.

Wir erhalten nun eine Aufzählung aller Formeln wie folgt:

zähle alle Formeln ϕ mit $g(\phi) = 1$ (in beliebiger Reihenfolge) auf,
gefolgt von allen Formeln mit $g(\phi) = 2, \ldots$

Lemma 18.13 (maximal konsistente Erweiterung)

Es sei Γ eine konsistente Menge von Formeln.

Dann hat Γ eine maximal konsistente Erweiterung.

Beweis:

Es sei $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots$ eine Aufzählung aller Formeln.

Wir definieren Erweiterungen $\Delta_0 \subseteq \Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \ldots$ von Γ induktiv:

$$\Delta_0 := \Gamma;$$

$$\Delta_{i+1} := \begin{cases} \Delta_i & \text{falls } \Delta_i \vdash \phi_{i+1} \\ \Delta_i \cup \{\neg\phi_{i+1}\} & \text{falls } \Delta_i \not\vdash \phi_{i+1} \end{cases}$$

Unter Verwendung von Lemma 18.11 zeigt man leicht, daß die Formelmengen Δ_i für $i \geq 0$ konsistent sind.

Wir definieren nun $\Delta_\infty := \bigcup_{i \geq 0} \Delta_i$.

1. Offenbar ist Δ_∞ eine Erweiterung von Γ.

2. Δ_∞ ist konsistent:

   Wäre Δ_∞ inkonsistent, so gäbe es eine Formel ϕ mit

   $\Delta_\infty \vdash \phi$ und $\Delta_\infty \vdash \neg\phi$.

   Die zugehörigen Ableitungen verwenden nur endlich viele Hypothesen.

   Daher gibt es ein $k \geq 0$ mit $\Delta_k \vdash \phi$ und $\Delta_k \vdash \neg\phi$.

   Dies widerspricht der Tatsache, daß Δ_k konsistent ist.

3. Maximalität von Δ_∞:

   Es sei ϕ eine beliebige Formel.

   Dann gibt es ein $i \geq 1$ mit $\phi = \phi_i$.

   Nach Definition der Menge Δ_i gilt $\Delta_i \vdash \phi_i$ oder $\Delta_i \vdash \neg\phi_i$.

   Damit gilt auch $\Delta_\infty \vdash \phi_i$ oder $\Delta_\infty \vdash \neg\phi_i$.

Dresden

Lemma 18.14 (Konsistenz impliziert Erfüllbarkeit)

Jede konsistente Formelmenge hat ein Modell.

Beweis:

Es sei Γ eine konsistente Formelmenge und
Δ eine maximal konsistente Erweiterung von Γ.

Wir definieren die Wertzuweisung w_Δ wie folgt:

$$w_\Delta(p) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \Delta \vdash p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wegen $\Gamma \subseteq \Delta$
damit auch von Γ.

Wir zeigen nun, daß w_Δ ein Modell von Δ ist.

Genauer zeigen wir für alle Formeln ϕ

$$\Delta \vdash \phi \text{ gdw. } w_\Delta(\phi) = 1$$

durch Induktion über den Formelaufbau:

Ist $\phi \in \Delta$,
so gilt dann $\Delta \vdash \phi$
und somit $w_\Delta(\phi) = 1$.

Dresden

$\underline{\phi = p \in \mathcal{P}}$:

Es gilt $\Delta \vdash p$ gdw. $w_\Delta(p) = 1$ nach Definition von w_Δ.

$\underline{\phi = \neg\psi}$:

Es gilt $\Delta \vdash \neg\psi$ gdw. $\Delta \not\vdash \psi$ gdw. $w_\Delta(\psi) = 0$ gdw. $w_\Delta(\neg\psi) = 1$.

Δ maximal konsistent

Induktion

Semantik von $\neg$

$\underline{\phi = (\psi \rightarrow \pi)}$:

$w_\Delta((\psi \rightarrow \pi)) = 0$ gdw. $w_\Delta(\psi) = 1$ und $w_\Delta(\pi) = 0$ gdw.

$\Delta \vdash \psi$ und $\Delta \not\vdash \pi$ gdw. $\Delta \vdash \psi$ und $\Delta \vdash \neg\pi$.

Es bleibt zu zeigen:

$\Delta \vdash \psi$ und $\Delta \vdash \neg\pi$ gdw. $\Delta \not\vdash (\psi \rightarrow \pi)$.

Es bleibt zu zeigen:

$\Delta \vdash \psi$ und $\Delta \vdash \neg\pi$ gdw. $\Delta \not\vdash (\psi \rightarrow \pi)$.

1. Angenommen, $\Delta \vdash \psi$ und $\Delta \vdash \neg\pi$, aber $\Delta \vdash (\psi \rightarrow \pi)$.

   Modus Ponens liefert $\Delta \vdash \pi$, im Widerspruch zur Konsistenz von Δ.

2. Es gelte $\Delta \not\vdash (\psi \rightarrow \pi)$.

   (a) Angenommen $\Delta \not\vdash \psi$.

   Dann gilt $\Delta \vdash \neg\psi$ und wegen $\vdash (\neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \pi))$ auch

   $\Delta \vdash (\psi \rightarrow \pi)$, was einen Widerspruch liefert.

   (b) Angenommen $\Delta \not\vdash \neg\pi$.

   Dann gilt $\Delta \vdash \pi$ und wegen $\vdash (\pi \rightarrow (\psi \rightarrow \pi))$ auch

   $\Delta \vdash (\psi \rightarrow \pi)$, was einen Widerspruch liefert.

Satz 18.15 (Vollständigkeit)

Es sei Γ eine Menge von Formeln und ϕ eine Formel.

Dann folgt aus $\Gamma \models \phi$ auch $\Gamma \vdash \phi$.

Beweis:

Es gelte $\Gamma \models \phi$, d.h. in jedem Modell w von Γ gilt $w(\phi) = 1$.

Angenommen $\Gamma \not\vdash \phi$.

Mit Lemma 18.11 ist dann $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ konsistent

und mit Lemma 18.14 hat $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ damit ein Modell w.

Damit gibt es aber ein Modell w von Γ mit $w(\phi) = 0$. *Widerspruch!*

Dresden

Korollar 18.16 (Korrektheit und Vollständigkeit)

Es sei Γ eine Menge von Formeln und ϕ eine Formel.

Dann gilt $\Gamma \models \phi$ gdw. $\Gamma \vdash \phi$.

Korollar 18.17 (Tautologien)

Es sei ϕ eine Formel.

Dann gilt $\models \phi$ gdw. $\vdash \phi$.

Der Hilbert-Kalkül liefert aber kein effektives Verfahren, um für eine Formel zu entscheiden, ob sie eine Tautologie ist oder nicht:

- Es ist nicht klar, wie man für eine gegebene Formel ϕ mit $\vdash \phi$ automatisch eine Ableitung erzeugen kann.
- Man muß also systematisch alle Ableitungen erzeugen und darauf warten, ob eine für ϕ dabei ist.
- Dadurch kann man aber $\not\vdash \phi$ nicht nach endlich vielen Schritten erkennen.

Tableau- und Resolutionskalkül sind für die Automatisierung besser geeignet:

- Um zu überprüfen, ob ϕ eine Tautologie ist, testet man, ob $\neg\phi$ unerfüllbar ist.

Der Hilbert-Kalkül kann aber dazu verwendet werden, formale Eigenschaften der Aussagenlogik zu zeigen.

Satz 18.18 (Kompaktheitssatz, Endlichkeitssatz)

Es sei Γ eine Menge von Formeln.

Dann hat Γ genau dann ein Modell, wenn jede endliche Teilmenge von Γ ein Modell hat.

Beweis:

„$\Rightarrow$“: Jedes Modell von Γ ist offenbar auch Modell jeder Teilmenge von Γ.

„$\Leftarrow$“: Angenommen Γ hat kein Modell.

Zu zeigen: Es gibt eine endliche Teilmenge von Γ, die kein Modell hat.

Hat Γ kein Modell, so ist Γ inkonsistent, d.h.

es gibt eine Formel ϕ mit $\Gamma \vdash \phi$ und $\Gamma \vdash \neg\phi$.

Die Ableitungen $\Gamma \vdash \phi$ und $\Gamma \vdash \neg\phi$ verwenden nur endlich viele Hypothesen,

d.h. es gibt eine endliche Menge $\Delta \subseteq \Gamma$ mit $\Delta \vdash \phi$ und $\Delta \vdash \neg\phi$.

Damit gibt eine endliche Menge $\Delta \subseteq \Gamma$, die inkonsistent ist,

also kein Modell hat.