

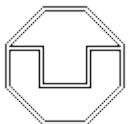
## § 18. Der Hilbert-Kalkül

Ziel ist es, alle Tautologien aus Axiomen mit Hilfe von Ableitungsregeln herzuleiten.

Wir schränken uns hier der Einfachheit halber auf Formeln ein, die nur die Junktoren  $\rightarrow$  und  $\neg$  enthalten.

Nach Satz 14.6 ist jede aussagenlogische Formel äquivalent zu einer solchen Formel.

Wenn wir in diesem Abschnitt von einer „Formel“ sprechen, so meinen wir stets eine aussagenlogische Formel von dieser Form.



## Definition 18.1 (Hilbert-Kalkül)

1. Für beliebige Formeln  $\phi, \psi, \pi$  sind die folgenden Formeln **Axiome**:

$$\text{(Ax1)} \quad (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi))$$

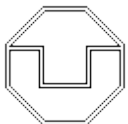
$$\text{(Ax2)} \quad ((\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \pi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \pi)))$$

$$\text{(Ax3)} \quad ((\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi))$$

2. Die einzige **Ableitungsregel** ist **Modus Ponens**:

$$\text{(MP)} \quad \frac{\phi \quad (\phi \rightarrow \psi)}{\psi}$$

Hat man die Formeln  $\phi$  und  $\phi \rightarrow \psi$  bereits abgeleitet,  
so kann man auch  $\psi$  ableiten.



## Definition 18.2 (Ableitung)

Es sei  $\Gamma$  eine Menge von Formeln und  $\phi$  eine Formel.

1. Eine **Ableitung von  $\phi$  aus  $\Gamma$**  ist eine endliche Folge von Formeln

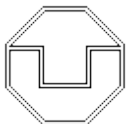
$$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m,$$

für die gilt:

- $\psi_m = \phi$
- Für alle  $i, 1 \leq i \leq m$ , trifft auf  $\psi_i$  **einer der folgenden drei Fälle** zu:
  - (a)  $\psi_i$  ist ein **Axiom**,
  - (b)  $\psi_i \in \Gamma$ ,
  - (c)  $\psi_i$  entsteht durch **Anwendung von Modus Ponens** aus Formeln  $\psi_\ell$  und  $\psi_r$  für Indices  $\ell, r < i$ .

2. Gibt es eine Ableitung von  $\phi$  aus  $\Gamma$ , so sagen wir auch, daß  **$\phi$  aus  $\Gamma$  ableitbar** ist und schreiben

$$\Gamma \vdash \phi.$$



### Beachte:

1. Die Menge  $\Gamma$  kann endlich oder unendlich sein.
2. Die Elemente von  $\Gamma$  nennen wir Hypothesen.
3. Ist  $\Gamma$  die leere Menge, so schreiben wir  $\vdash \phi$  anstelle von  $\emptyset \vdash \phi$ .
4. Ist  $\Gamma \subseteq \Delta$ , so folgt aus  $\Gamma \vdash \phi$  auch  $\Delta \vdash \phi$ .  
Insbesondere folgt aus  $\vdash \phi$  auch  $\Gamma \vdash \phi$  für jede Formelmenge  $\Gamma$ .

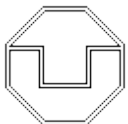
### Beispiele 18.3

1. Es gilt  $\vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p))$

$$(p \rightarrow (q \rightarrow p)) \quad (\text{Ax1})$$

$$((p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p))) \quad (\text{Ax2})$$

$$((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p)) \quad (\text{MP})$$



## Beispiele 18.3

2. Es gilt  $\{\phi, (\psi \rightarrow (\phi \rightarrow \pi))\} \vdash (\psi \rightarrow \pi)$

$\phi$  (Hyp)

$(\psi \rightarrow (\phi \rightarrow \pi))$  (Hyp)

$(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi))$  (Ax1)

$(\psi \rightarrow \phi)$  (MP)

$((\psi \rightarrow (\phi \rightarrow \pi)) \rightarrow ((\psi \rightarrow \phi) \rightarrow (\psi \rightarrow \pi)))$  (Ax2)

$((\psi \rightarrow \phi) \rightarrow (\psi \rightarrow \pi))$  (MP)

$(\psi \rightarrow \pi)$  (MP)

3. Es gilt  $\vdash (\phi \rightarrow \phi)$

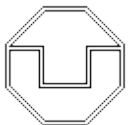
$((\phi \rightarrow ((\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)))$  (Ax2)

$(\phi \rightarrow ((\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi))$  (Ax1)

$((\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi))$  (MP)

$(\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \phi))$  (Ax1)

$(\phi \rightarrow \phi)$  (MP)



## Beispiele 18.3

4. Es gilt  $\vdash (\neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi))$

$$(\neg\psi \rightarrow (\neg\phi \rightarrow \neg\psi)) \quad (\text{Ax1})$$

$$((\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)) \quad (\text{Ax3})$$

$$(((\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow ((\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)))) \quad (\text{Ax1})$$

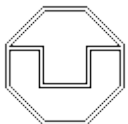
$$(\neg\psi \rightarrow ((\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi))) \quad (\text{MP})$$

$$((\neg\psi \rightarrow ((\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi))) \rightarrow$$

$$((\neg\psi \rightarrow (\neg\phi \rightarrow \neg\psi)) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)))) \quad (\text{Ax2})$$

$$((\neg\psi \rightarrow (\neg\phi \rightarrow \neg\psi)) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi))) \quad (\text{MP})$$

$$(\neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)) \quad (\text{MP})$$

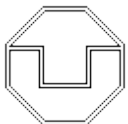


## Lemma 18.4

1. Jedes **Axiom** des Hilbert-Kalküls ist eine **Tautologie**.
2. **Modus Ponens** ist eine **korrekte Ableitungsregel**,  
d.h. für jede Wertzuweisung  $w$  gilt:  
Ist  $w(\phi) = 1$  und  $w((\phi \rightarrow \psi)) = 1$ , so ist auch  $w(\psi) = 1$ .

### Beweis:

1. kann man leicht durch Aufstellen der **Wahrheitstafeln** für die Axiome zeigen.
2. ergibt sich unmittelbar aus der **Semantik der Implikation**.



### Satz 18.5 (Korrektheit)

Es sei  $\Gamma$  eine Menge von Formeln und  $\phi$  eine Formel.  
Dann folgt aus  $\Gamma \vdash \phi$  auch  $\Gamma \models \phi$ .

**Beweis:**

Gilt  $\Gamma \vdash \phi$ , so gibt es eine **Ableitung**

$$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m = \phi$$

von  $\phi$  aus  $\Gamma$ .

Es sei nun  $w$  ein **Modell** von  $\Gamma$ .

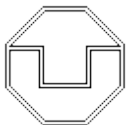
Zu zeigen:  $w(\phi) = 1$ .

Wir zeigen durch **Induktion** über  $i$ :  $w(\psi_i) = 1$  für alle  $i, 1 \leq i \leq m$ .

$i = 1$ :

Dann ist  $\psi_i$  ein **Axiom** oder eine **Hypothese** aus  $\Gamma$ .

Im ersten Fall folgt  $w(\psi_i) = 1$  aus **Lemma 18.4** und  
im zweiten, da  $w$  **Modell** von  $\Gamma$  ist.





### Satz 18.5 (Korrektheit)

Es sei  $\Gamma$  eine Menge von Formeln und  $\phi$  eine Formel.  
Dann folgt aus  $\Gamma \vdash \phi$  auch  $\Gamma \models \phi$ .

**Beweis:**

Gilt  $\Gamma \vdash \phi$ , so gibt es eine **Ableitung**

$$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m = \phi$$

von  $\phi$  aus  $\Gamma$ .

Es sei nun  $w$  ein **Modell** von  $\Gamma$ .

Zu zeigen:  $w(\phi) = 1$ .

Wir zeigen durch **Induktion** über  $i$ :  $w(\psi_i) = 1$  für alle  $i, 1 \leq i \leq m$ .

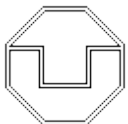
$i > 1$ :

Ist  $\psi_i$  ein **Axiom** oder eine **Hypothese** aus  $\Gamma$ , so folgt wieder  $w(\psi_i) = 1$ .

Sonst entsteht  $\psi_i$  durch **Anwendung von Modus Ponens** aus Formeln  $\psi_\ell$  und  $\psi_r$  für  $\ell, r < i$ .

**Induktion** liefert  $w(\psi_\ell) = 1$  und  $w(\psi_r) = 1$

und **Korrektheit von Modus Ponens** deshalb  $w(\psi_i) = 1$ .



Bevor wir die **Umkehrung von Satz 18.5** zeigen können, benötigen wir ein **Hilfsmittel**, das die Konstruktion von Ableitungen erleichtert.

### Lemma 18.6 (Deduktionslemma)

Es sei  $\Gamma$  eine Menge von Formeln und  $\phi, \psi$  Formeln.  
Dann gilt  $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$  gdw.  $\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \psi)$ .

**Beweis:**

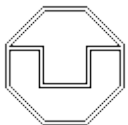
Eine Richtung kann sehr einfach gezeigt werden:

Gilt  $\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \psi)$ , so offenbar auch  $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash (\phi \rightarrow \psi)$ .

Außerdem gilt offensichtlich  $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \phi$ .

Schreibt man die beiden Ableitungen hintereinander, so erhält man eine **Ableitung mit Hypothesenmenge  $\Gamma \cup \{\phi\}$** , in der  $\phi$  und  $(\phi \rightarrow \psi)$  vorkommen.

**Modus Ponens** liefert dann  $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$ .



Wir zeigen die **andere Richtung** durch **Induktion** über die **Länge  $m$**  einer kürzesten Ableitung für  $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$ .

$m = 1$ :

Dann ist  $\psi$  ein **Axiom** oder eine **Hypothese** aus  $\Gamma$  oder **gleich  $\phi$** .

1. Ist  $\psi$  ein **Axiom**, so zeigt die Ableitung

$\psi$  (Ax)

$(\psi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi))$  (Ax1)

$(\phi \rightarrow \psi)$  (MP),

daß  $\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \psi)$  gilt.

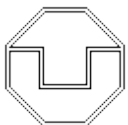
2. Ist  $\psi \in \Gamma$  eine **Hypothese**, so zeigt die **gleiche Ableitung** wie in 1., daß  $\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \psi)$  gilt.

Nur wird  $\psi$  in der ersten Zeile nun **als Hypothese** eingesetzt.

3. Ist  $\psi = \phi$ , so müssen wir  $\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \phi)$  zeigen.

Wir wissen aber bereits, daß  $\vdash (\phi \rightarrow \phi)$  gilt (Beispiel 18.3 (3)).

Daher gilt offenbar auch  $\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \phi)$ .



$m > 1$ :

Ist  $\psi$  ein **Axiom** oder eine **Hypothese** aus  $\Gamma$  oder gleich  $\phi$ ,  
so kann man  $\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \psi)$  wie im Fall  $m = 1$  zeigen.

Ansonsten entsteht  $\psi$  durch Anwenden von **Modus Ponens** aus Formeln  
 $\pi$  und  $(\pi \rightarrow \psi)$ , die **in der Ableitung** für  $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$  **vor  $\psi$**  auftreten.

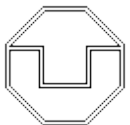
Es gilt daher  $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \pi$  und  $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash (\pi \rightarrow \psi)$   
mit **Ableitungen**, die **kürzer als  $m$**  sind.

**Induktion** liefert  $\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \pi)$  und  $\Gamma \vdash (\phi \rightarrow (\pi \rightarrow \psi))$ .

Daher gibt es die folgende **Ableitung** mit **Hypothesenmenge  $\Gamma$** :

$$\begin{array}{l} \vdots \\ (\phi \rightarrow (\pi \rightarrow \psi)) \\ \vdots \\ (\phi \rightarrow \pi) \\ ((\phi \rightarrow (\pi \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \pi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi))) \quad \text{(Ax2)} \\ ((\phi \rightarrow \pi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)) \quad \text{(MP)} \\ (\phi \rightarrow \psi) \quad \text{(MP)} \end{array}$$

Dies zeigt  $\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \psi)$ .



## Lemma 18.7 (Hypothetischer Syllogismus)

Es sei  $\Gamma$  eine Menge von Formeln und  $\phi, \psi, \pi$  Formeln.  
Gilt  $\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \psi)$  und  $\Gamma \vdash (\psi \rightarrow \pi)$ , so auch  $\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \pi)$ .

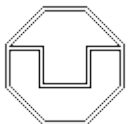
**Beweis:**

Gilt  $\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \psi)$  und  $\Gamma \vdash (\psi \rightarrow \pi)$ , so gibt es die folgende Ableitung mit Hypothesenmenge  $\Gamma \cup \{\phi\}$ :

|                           |       |
|---------------------------|-------|
| $\vdots$                  |       |
| $(\phi \rightarrow \psi)$ |       |
| $\vdots$                  |       |
| $(\psi \rightarrow \pi)$  |       |
| $\phi$                    | (Hyp) |
| $\psi$                    | (MP)  |
| $\pi$                     | (MP)  |

Dies zeigt  $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \pi$ .

Das **Deduktionslemma** liefert nun  $\Gamma \vdash (\phi \rightarrow \pi)$ .



Lemma 18.7 zeigt, daß man **Hypothetischen Syllogismus** als **zusätzliche Ableitungsregel** verwenden kann, ohne die Menge der ableitbaren Formeln zu verändern:

$$(HS) \quad \frac{(\phi \rightarrow \psi) \quad (\psi \rightarrow \pi)}{(\phi \rightarrow \pi)}$$

### Beispiel 18.8

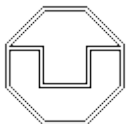
Es gilt  $\vdash ((\neg\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi)$

Mit **Beispiel 18.3 (4)** gilt  $\vdash (\neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi))$  für beliebige Formeln  $\phi, \psi$ , also auch

$$\vdash (\neg\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \neg(\phi \rightarrow \phi))).$$

Unter Verwendung von **(Ax2)** und **(MP)** erhalten wir daraus

$$(*) \quad \vdash ((\neg\phi \rightarrow \phi) \rightarrow (\neg\phi \rightarrow \neg(\phi \rightarrow \phi))).$$



Andererseits zeigt die folgende Ableitung

|   |                |
|---|----------------|
| $(\neg\phi \rightarrow \neg(\phi \rightarrow \phi))$  | (Hyp)          |
| $((\neg\phi \rightarrow \neg(\phi \rightarrow \phi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi))$ | (Ax3)          |
| $((\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi)$  | (MP)           |
| $(\phi \rightarrow \phi)$   | (Bsp. 8.3 (3)) |
| $\phi$  | (MP),          |

daß  $\{(\neg\phi \rightarrow \neg(\phi \rightarrow \phi))\} \vdash \phi$  gilt.

Das **Deduktionslemma** liefert nun

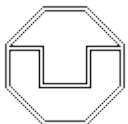
$$(**) \quad \vdash ((\neg\phi \rightarrow \neg(\phi \rightarrow \phi)) \rightarrow \phi).$$

Wir haben bereits gezeigt:

$$(*) \quad \vdash ((\neg\phi \rightarrow \phi) \rightarrow (\neg\phi \rightarrow \neg(\phi \rightarrow \phi))).$$

Mit **HS** erhalten wir aus (\*) und (\*\*)

$$\vdash ((\neg\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi).$$

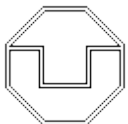


Wir wollen nun die **Umkehrung von Satz 18.5** zeigen, d.h.:

(\*) Aus  $\Gamma \models \phi$  folgt  $\Gamma \vdash \phi$ .

Dazu gehen wir wie folgt vor:

1. Wir führen den Begriff der **Konsistenz** einer Formelmenge ein: eine Formelmenge ist **konsistent**, wenn aus ihr **keine widersprüchlichen Formeln** herleitbar sind.
2. Wir zeigen, daß jede **konsistente Formelmenge** ein **Modell** hat:
  - (a) Jede konsistente Formelmenge kann zu einer **maximal konsistenten Formelmenge** erweitert werden.
  - (b) **Maximal konsistente Formelmengen** **definieren** ein **Modell**.
3. Aus 2. kann man dann (\*) **leicht folgern**.





### Definition 18.9 (Konsistenz)

Es sei  $\Gamma$  eine Menge von Formeln.

Dann ist  $\Gamma$  **inkonsistent** gdw. es eine Formel  $\psi$  gibt mit  $\Gamma \vdash \psi$  und  $\Gamma \vdash \neg\psi$ .

Ansonsten ist  $\Gamma$  **konsistent**.

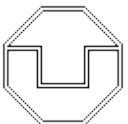
Aus einer **inkonsistenten Formelmenge** kann man **jede Formel ableiten**.

### Lemma 18.10

Es sei  $\Gamma$  eine Menge von Formeln.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1.  $\Gamma$  ist **inkonsistent**.
2. Für **jede Formel  $\phi$**  gilt  $\Gamma \vdash \phi$ .



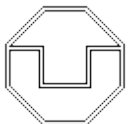
**Beweis:**

„ $2 \Rightarrow 1$ “ Gilt 2., so kann man aus  $\Gamma$  jede Formel ableiten,  
also insbesondere auch  $\Gamma \vdash p$  und  $\Gamma \vdash \neg p$ .

„ $1 \Rightarrow 2$ “ Es sei  $\psi$  eine Formel mit  $\Gamma \vdash \psi$  und  $\Gamma \vdash \neg\psi$ .

Mit **Beispiel 18.3 (4)** gilt für jede Formel  $\phi$  auch  $\vdash (\neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi))$   
und damit  $\Gamma \vdash (\neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi))$ .

Zweimaliges Anwenden von **(MP)** liefert  $\Gamma \vdash \phi$ .



Konsistente Formelmengen kann man stets um die Negation nicht-ableitbarer Formeln erweitern, ohne die Konsistenz zu zerstören.

Lemma 18.11

Es sei  $\Gamma$  eine konsistente Menge von Formeln und  $\phi$  eine Formel mit  $\Gamma \not\vdash \phi$ .

Dann ist  $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$  konsistent.

Beweis:

Angenommen,  $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$  ist inkonsistent.

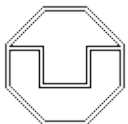
Dann gilt mit Lemma 18.10 auch  $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash \phi$ .

Das Deduktionslemma liefert  $\Gamma \vdash (\neg\phi \rightarrow \phi)$ .

Mit Beispiel 18.8 gilt  $\Gamma \vdash ((\neg\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi)$

und mit Modus Ponens auch  $\Gamma \vdash \phi$ .

Dies widerspricht der Wahl von  $\phi$ .



## Definition 18.12 (maximal konsistente Erweiterung)

Es seien  $\Gamma, \Delta$  Mengen von Formeln.

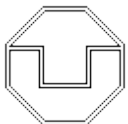
1.  $\Delta$  ist eine **Erweiterung** von  $\Gamma$  gdw.  $\Gamma \subseteq \Delta$ .
2.  $\Delta \supseteq \Gamma$  ist eine **maximal konsistente Erweiterung** von  $\Gamma$  gdw. für alle Formeln  $\psi$  gilt: entweder  $\Delta \vdash \psi$  oder  $\Delta \vdash \neg\psi$ .

↑  
exklusives oder,  
d.h. nicht beides!

Wir wollen nun zeigen, daß jede **konsistente Formelmenge** eine **maximal konsistente Erweiterung** hat.

Dazu überlegen wir uns zunächst, daß die **Menge aller Formeln abzählbar** ist, d.h. es gibt eine **Aufzählung** aller Formeln:

$$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots$$



## Einschub

Die Menge aller Formeln ist abzählbar.

**Beweis:**

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß

$$\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}.$$

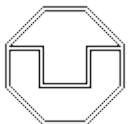
Für eine Formel  $\phi$  definieren wir ihr Gewicht  $g(\phi)$  induktiv:

- $g(p_n) := n$ ;
- $g(\neg\psi) := 1 + g(\psi)$ ;
- $g((\psi \rightarrow \pi)) := 1 + g(\psi) + g(\pi)$ .

Offenbar gibt es für jedes  $n$  nur endlich viele Formeln  $\phi$  mit  $g(\phi) = n$ .

Wir erhalten nun eine **Aufzählung** aller Formeln wie folgt:

zähle alle Formeln  $\phi$  mit  $g(\phi) = 1$  (in beliebiger Reihenfolge) auf,  
gefolgt von allen Formeln mit  $g(\phi) = 2, \dots$



### Lemma 18.13 (maximal konsistente Erweiterung)

Es sei  $\Gamma$  eine konsistente Menge von Formeln.

Dann hat  $\Gamma$  eine maximal konsistente Erweiterung.

**Beweis:**

Es sei  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots$  eine Aufzählung aller Formeln.

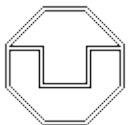
Wir definieren Erweiterungen  $\Delta_0 \subseteq \Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \dots$  von  $\Gamma$  induktiv:

$$\Delta_0 := \Gamma;$$

$$\Delta_{i+1} := \begin{cases} \Delta_i & \text{falls } \Delta_i \vdash \phi_{i+1} \\ \Delta_i \cup \{\neg\phi_{i+1}\} & \text{falls } \Delta_i \not\vdash \phi_{i+1} \end{cases}$$

Unter Verwendung von Lemma 18.11 zeigt man leicht, daß die Formelmengen  $\Delta_i$  für  $i \geq 0$  konsistent sind.

Wir definieren nun  $\Delta_\infty := \bigcup_{i \geq 0} \Delta_i$ .



1. Offenbar ist  $\Delta_\infty$  eine Erweiterung von  $\Gamma$ .

2.  $\Delta_\infty$  ist konsistent:

Wäre  $\Delta_\infty$  inkonsistent, so gäbe es eine Formel  $\phi$  mit

$\Delta_\infty \vdash \phi$  und  $\Delta_\infty \vdash \neg\phi$ .

Die zugehörigen Ableitungen verwenden nur endlich viele Hypothesen.

Daher gibt es ein  $k \geq 0$  mit  $\Delta_k \vdash \phi$  und  $\Delta_k \vdash \neg\phi$ .

Dies widerspricht der Tatsache, daß  $\Delta_k$  konsistent ist.

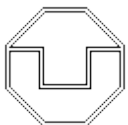
3. Maximalität von  $\Delta_\infty$ :

Es sei  $\phi$  eine beliebige Formel.

Dann gibt es ein  $i \geq 1$  mit  $\phi = \phi_i$ .

Nach Definition der Menge  $\Delta_i$  gilt  $\Delta_i \vdash \phi_i$  oder  $\Delta_i \vdash \neg\phi_i$ .

Damit gilt auch  $\Delta_\infty \vdash \phi_i$  oder  $\Delta_\infty \vdash \neg\phi_i$ .



## Lemma 18.14 (Konsistenz impliziert Erfüllbarkeit)

Jede konsistente Formelmeng e hat ein Modell.

**Beweis:**

Es sei  $\Gamma$  eine konsistente Formelmeng e und  $\Delta$  eine maximal konsistente Erweiterung von  $\Gamma$ .

Wir definieren die Wertzuweisung  $w_\Delta$  wie folgt:

$$w_\Delta(p) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \Delta \vdash p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wegen  $\Gamma \subseteq \Delta$   
damit auch von  $\Gamma$ .

Wir zeigen nun, daß  $w_\Delta$  ein Modell von  $\Delta$  ist.

Genauer zeigen wir für alle Formeln  $\phi$

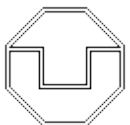
$$\Delta \vdash \phi \text{ gdw. } w_\Delta(\phi) = 1$$

durch Induktion über den Formelaufbau:

Ist  $\phi \in \Delta$ ,

so gilt dann  $\Delta \vdash \phi$

und somit  $w_\Delta(\phi) = 1$ .





$\phi = p \in \mathcal{P}$ :

Es gilt  $\Delta \vdash p$  gdw.  $w_\Delta(p) = 1$  nach Definition von  $w_\Delta$ .

$\phi = \neg\psi$ :

Es gilt  $\Delta \vdash \neg\psi$  gdw.  $\Delta \not\vdash \psi$  gdw.  $w_\Delta(\psi) = 0$  gdw.  $w_\Delta(\neg\psi) = 1$ .

$\Delta$  maximal  
konsistent

Induktion

Semantik  
von  $\neg$

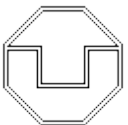
$\phi = (\psi \rightarrow \pi)$ :

$w_\Delta((\psi \rightarrow \pi)) = 0$  gdw.  $w_\Delta(\psi) = 1$  und  $w_\Delta(\pi) = 0$  gdw.

$\Delta \vdash \psi$  und  $\Delta \not\vdash \pi$  gdw.  $\Delta \vdash \psi$  und  $\Delta \vdash \neg\pi$ .

Es bleibt zu zeigen:

$\Delta \vdash \psi$  und  $\Delta \vdash \neg\pi$  gdw.  $\Delta \not\vdash (\psi \rightarrow \pi)$ .



Es bleibt zu zeigen:

$\Delta \vdash \psi$  und  $\Delta \vdash \neg\pi$  gdw.  $\Delta \not\vdash (\psi \rightarrow \pi)$ .

1. Angenommen,  $\Delta \vdash \psi$  und  $\Delta \vdash \neg\pi$ , aber  $\Delta \vdash (\psi \rightarrow \pi)$ .

Modus Ponens liefert  $\Delta \vdash \pi$ , im Widerspruch zur Konsistenz von  $\Delta$ .

2. Es gelte  $\Delta \not\vdash (\psi \rightarrow \pi)$ .

(a) Angenommen  $\Delta \not\vdash \psi$ .

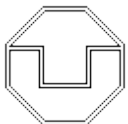
Dann gilt  $\Delta \vdash \neg\psi$  und wegen  $\vdash (\neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \pi))$  auch

$\Delta \vdash (\psi \rightarrow \pi)$ , was einen Widerspruch liefert.

(b) Angenommen  $\Delta \not\vdash \neg\pi$ .

Dann gilt  $\Delta \vdash \pi$  und wegen  $\vdash (\pi \rightarrow (\psi \rightarrow \pi))$  auch

$\Delta \vdash (\psi \rightarrow \pi)$ , was einen Widerspruch liefert.



### Satz 18.15 (Vollständigkeit)

Es sei  $\Gamma$  eine Menge von Formeln und  $\phi$  eine Formel.  
Dann folgt aus  $\Gamma \models \phi$  auch  $\Gamma \vdash \phi$ .

**Beweis:**

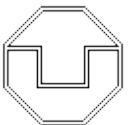
Es gelte  $\Gamma \models \phi$ , d.h. in jedem Modell  $w$  von  $\Gamma$  gilt  $w(\phi) = 1$ .

Angenommen  $\Gamma \not\vdash \phi$ .

Mit Lemma 18.11 ist dann  $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$  konsistent

und mit Lemma 18.14 hat  $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$  damit ein Modell  $w$ .

Damit gibt es aber ein Modell  $w$  von  $\Gamma$  mit  $w(\phi) = 0$ . *Widerspruch!*



### Korollar 18.16 (Korrektheit und Vollständigkeit)

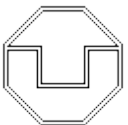
Es sei  $\Gamma$  eine Menge von Formeln und  $\phi$  eine Formel.

Dann gilt  $\Gamma \models \phi$  gdw.  $\Gamma \vdash \phi$ .

### Korollar 18.17 (Tautologien)

Es sei  $\phi$  eine Formel.

Dann gilt  $\models \phi$  gdw.  $\vdash \phi$ .



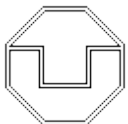
Der Hilbert-Kalkül liefert aber **kein effektives Verfahren**, um für eine Formel zu entscheiden, ob sie eine Tautologie ist oder nicht:

- Es ist nicht klar, wie man für eine gegebene Formel  $\phi$  mit  $\vdash \phi$  **automatisch eine Ableitung** erzeugen kann.
- Man muß also systematisch **alle Ableitungen erzeugen** und darauf warten, ob eine für  $\phi$  dabei ist.
- Dadurch kann man aber  $\not\vdash \phi$  **nicht nach endlich vielen Schritten erkennen**.

**Tableau- und Resolutionskalkül** sind für die **Automatisierung** besser geeignet:

- Um zu überprüfen, ob  $\phi$  eine **Tautologie** ist, testet man, ob  $\neg\phi$  **unerfüllbar** ist.

Der **Hilbert-Kalkül** kann aber dazu verwendet werden, **formale Eigenschaften der Aussagenlogik** zu zeigen.



### Satz 18.18 (Kompaktheitssatz, Endlichkeitssatz)

Es sei  $\Gamma$  eine Menge von Formeln.

Dann hat  $\Gamma$  genau dann ein Modell, wenn jede endliche Teilmenge von  $\Gamma$  ein Modell hat.

Beweis:

„ $\Rightarrow$ “: Jedes Modell von  $\Gamma$  ist offenbar auch Modell jeder Teilmenge von  $\Gamma$ .

„ $\Leftarrow$ “: Angenommen  $\Gamma$  hat kein Modell.

Zu zeigen: Es gibt eine endliche Teilmenge von  $\Gamma$ , die kein Modell hat.

Hat  $\Gamma$  kein Modell, so ist  $\Gamma$  inkonsistent, d.h.

es gibt eine Formel  $\phi$  mit  $\Gamma \vdash \phi$  und  $\Gamma \vdash \neg\phi$ .

Die Ableitungen  $\Gamma \vdash \phi$  und  $\Gamma \vdash \neg\phi$  verwenden nur endlich viele Hypothesen,

d.h. es gibt eine endliche Menge  $\Delta \subseteq \Gamma$  mit  $\Delta \vdash \phi$  und  $\Delta \vdash \neg\phi$ .

Damit gibt eine endliche Menge  $\Delta \subseteq \Gamma$ , die inkonsistent ist,

also kein Modell hat.

