

Formale Systeme

11. Übungsblatt

Hinweis

Folgende Aufgaben dienen der Selbstkontrolle und werden in der Übung nicht besprochen.

*) Prüfen Sie mittels Wahrheitstabellen, welche der folgenden Formeln allgemeingültig, erfüllbar oder unerfüllbar sind.

- a) $(a \leftrightarrow ((a \wedge \neg a) \vee a))$
- b) $((a \rightarrow b) \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg b))$
- c) $((a \rightarrow b) \vee (c \rightarrow a)) \wedge (b \leftrightarrow a)$
- d) $((\neg a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)) \wedge \neg c$

***) Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Regeln:

- a) Distributivitätsregel: $(\varphi \vee (\psi \wedge \pi)) \equiv ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \pi))$
- b) Absorptionsregel: $(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \equiv \varphi$

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen gelten? Verwenden Sie zur Lösung die Äquivalenzen aus dem Satz 14. 5.

- a) $(\neg(\neg a \vee c) \wedge ((b \wedge c) \vee \neg a)) \equiv ((a \wedge (\neg c \wedge (b \vee \neg a))) \wedge (c \vee \neg a \vee (c \wedge b)))$
- b) $\neg(((b \wedge c) \vee \neg a) \rightarrow (\neg a \wedge b)) \equiv ((a \leftrightarrow b) \wedge (c \rightarrow a))$
- c) $(a \leftrightarrow \neg a) \equiv (((b \wedge c) \vee (\neg b \wedge \neg c)) \wedge (b \wedge \neg c))$

Aufgabe 2

Wir betrachten in dieser Aufgabe Formeln, die ausschließlich den Junktor \rightarrow verwenden.

- a) Gegeben eine Formel φ , die ausschließlich den Junktor \rightarrow verwendet. Zeigen Sie: Wenn $w(p_i) = 1$ für alle $p_i \in \text{Var}(\varphi)$ ist, dann ist der Wahrheitswert $w(\varphi) = 1$.
- b) Es sei φ eine allgemeine aussagenlogische Formel. Beweisen oder widerlegen Sie: φ ist äquivalent zu einer Formel, die ausschließlich den Junktor \rightarrow verwendet.

Aufgabe 3

Transformieren Sie die Formel $\varphi = \left((\neg(a \leftrightarrow b) \vee \neg(c \wedge a)) \vee \neg(c \rightarrow b) \right)$

- in konjunktive Normalform (KNF) und
- in disjunktive Normalform (DNF).

Aufgabe 4

Welche der folgenden Formeln sind erfüllbar? Welche der Formeln gehören zu dem Formeltyp, für den Erfüllbarkeit in polynomieller Zeit lösbar ist?

- $\left(\left(\left((p_1 \wedge p_2) \vee p_3 \right) \wedge p_4 \right) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_3) \right) \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_4)$
- $(\neg(\neg p_1 \wedge \neg(p_2 \wedge (\neg p_1 \rightarrow p_2)))) \wedge \neg p_2$
- $(\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3 \vee p_4) \wedge$
 $(\neg p_5 \vee \neg p_6) \wedge$
 $(\neg p_7 \vee \neg p_2 \vee p_6) \wedge$
 $(\neg p_6 \vee \neg p_2) \wedge$
 $(\neg p_6 \vee \neg p_3 \vee p_2) \wedge$
 $(\neg p_3 \vee \neg p_4 \vee p_5) \wedge$
 $(\neg p_1 \vee p_7) \wedge$
 $(\neg p_1 \vee \neg p_7 \vee p_4) \wedge$
 $p_3 \wedge p_1)$
- $(p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_3) \wedge$
 $(p_3 \vee \neg p_1) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge p_1)$