Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Informatik
Professur für Automatentheorie

Wintersemester 2013/14

Formale Systeme

12. Übungsblatt

Hinweis

Folgende Aufgaben dienen der Selbstkontrolle und werden in der Übung nicht besprochen.

*) Prüfen Sie, ob die folgenden Äquivalenzen gelten.

a) $\Big(\big((a \to \neg b) \wedge (\neg a \to (b \wedge c))\big) \wedge \big((\neg b \vee c) \to d\big)\Big) \equiv$
$\Big(\big(\neg(a \leftrightarrow b) \wedge (a \vee c)\big) \wedge \neg\big((b \vee d) \to (c \wedge \neg d)\big)\Big)$

b) $\Big(\big((a \to b) \to a\big) \to a\Big) \equiv \Big(\big((a \to b) \wedge (b \to c)\big) \to \neg(\neg c \wedge a)\Big)$

c) $\Big(\big((b \wedge l) \to m\big) \wedge \big((a \wedge b) \to l\big) \wedge a \wedge b\Big) \equiv$
$\big((\neg b \wedge l \wedge \neg a \wedge b) \vee (\neg l \wedge l \wedge \neg a \wedge b) \vee (m \wedge l \wedge a \wedge b)\big)$

**) Bestimmen Sie Formeln φ_a, φ_b und φ_c mit $Var(\varphi_a) = Var(\varphi_b) = Var(\varphi_c) = \{p, q, r\}$, deren Auswertungen in folgender Wahrheitstafel gegeben sind.

p	q	r	φ_a	φ_b	φ_c
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1

Aufgabe 1

Gegeben sei eine endliche Menge E von Elementen und eine Menge V von Variablen für Mengen. Ein *Mengen-Constraintsystem* C über E und V ist eine endliche Menge von Constraints der Art:

$$\begin{aligned} a &\in X, \\ a &\notin X, \\ a &\in X \cup Y \quad \text{oder} \\ X &\subseteq Y \cup Z \quad \text{für } a \in E \text{ und } \{X, Y, Z\} \subseteq V. \end{aligned}$$

Eine Lösung L eines Mengen-Constraintsystems C über E und V ist eine Abbildung von $L : V \longrightarrow 2^E$, wobei

$$\begin{gathered} \text{wenn } (a \in X) \in C, \text{ dann ist } a \in L(X), \\ \text{wenn } (a \notin X) \in C, \text{ dann ist } a \notin L(X), \\ \text{wenn } (a \in X \cup Y) \in C, \text{ dann ist } a \in L(X) \cup L(Y), \\ \text{wenn } (X \subseteq Y \cup Z) \in C, \text{ dann ist } L(Z) \subseteq L(Y) \cup L(Z). \end{gathered}$$

a) Hat das folgende Mengen-Constraintsystem eine Lösung?

$$V = \{M_1, M_2, M_3, M_4\} \qquad E = \{a, b, c, d\}$$

$$\begin{aligned} C = \{&M_2 \subseteq M_1 \cup M_3,\ M_4 \subseteq M_3 \cup M_2,\ a \in M_1,\ a \notin M_3,\ b \in M_4,\ b \in M_1,\ b \notin M_3, \\ &c \in M_4,\ c \notin M_1,\ c \notin M_3,\ d \in M_4,\ d \notin M_1,\ d \notin M_2\} \end{aligned}$$

b) Geben Sie ein allgemeines Verfahren an, das Lösungen eines Mengen-Constraintsystems in polynomieller Zeit entscheidet.

Hinweis:
Übersetzen Sie C in eine endliche Menge von Hornformeln – entscheidend ist die Kodierung der Mengenzugehörigkeit von Elementen.

Aufgabe 2

Testen Sie mittels semantischer Tableaux die folgenden Formeln auf Erfüllbarkeit.

a) $\Big(\big(\neg(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \vee r)\big) \wedge r\Big)$

b) $\Big(\big(p \wedge (r \wedge \neg q)\big) \wedge \Big(\big(r \wedge (\neg p \vee q)\big) \vee (s \wedge p)\Big)\Big)$