

Formale Systeme

14. Übungsblatt

Hinweis

Folgende Aufgaben dienen der Selbstkontrolle und werden in der Übung nicht besprochen.

*) Prüfen Sie mittels Resolution die folgenden Formeln auf Erfüllbarkeit:

- a) $\left(a \wedge \left((c \wedge b) \wedge ((\neg c \vee \neg b) \vee (a \wedge (c \wedge b))) \right) \right)$
- b) $\left((\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (a \vee \neg c) \wedge (b \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee d) \wedge (\neg c \vee d) \wedge (c \vee \neg d) \right)$

**) Stimmen die folgenden Aussagen? Begründen Sie.

- (a) Wenn $\Gamma \models \psi$ und ψ eine Tautologie ist, dann ist Γ auch allgemeingültig.
- (b) Eine Formel ϕ ist eine Hornformel, wenn sie in NNF ist und aus Konjunktionen innerhalb von Disjunktionen von Literalen besteht, von denen jede höchstens ein positives Literal enthält.
- (c) Für $K_1 = \{a, b, c\}$ und $K_2 = \{\neg a, \neg b\}$ ist $\{c\}$ keine Resolvente.
- (d) Aus $\models \phi$ folgt, dass ϕ allgemeingültig ist.

Aufgabe 1

Wir nennen Klauseln, die maximal 2 Literale enthalten, *2-Klauseln*. Zeigen Sie, dass wenn M eine endliche Menge von 2-Klauseln ist, dann kann $Res^*(M)$ in polynomieller Zeit (in der Anzahl der Literale in M) berechnet werden.

Hinweis:

Zeigen Sie zuerst, dass $Res^*(M)$ nur 2-Klauseln mit Literalen aus M enthält. Wie viele verschiedene 2-Klauseln gibt es?

Aufgabe 2

Gegeben seien die Formeln ϕ, ψ und π sowie $\Gamma = \{(\neg\psi \rightarrow \neg\phi), (\psi \rightarrow \neg\pi)\}$. Welche der folgenden Ableitungen sind gültige Ableitungen des Hilbert-Kalküls? Kennzeichnen Sie jeden gültigen Schritt mit der verwendeten Hypothese aus Γ , dem verwendeten Axiom oder der Ableitungsregel Modus Ponens und kennzeichnen Sie alle fehlerhaften Schritte.

a)

- 1 $((\neg\psi \rightarrow \pi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \pi)))$
- 2 $((((\neg\psi \rightarrow \pi) \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\psi \rightarrow \pi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \pi))))$
- 3 $(\neg\psi \rightarrow (\pi \rightarrow \neg\psi))$
- 4 $((\neg\psi \rightarrow \pi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \pi))$
- 5 $(\neg\psi \rightarrow \neg\phi)$
- 7 $((\neg\psi \rightarrow \pi) \rightarrow (\neg\phi \rightarrow \pi))$
- 8 $(\psi \rightarrow \neg\pi)$
- 9 $(\neg\phi \rightarrow \pi)$

b)

- 1 $(\neg\psi \rightarrow \neg\phi)$
- 2 $(\psi \rightarrow \neg\pi)$
- 3 $((\neg\psi \rightarrow \neg\phi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi))$
- 4 $(\phi \rightarrow \psi)$
- 5 $((\psi \rightarrow \neg\pi) \rightarrow (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \neg\pi)))$
- 6 $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \neg\pi))$
- 7 $((\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \neg\pi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \neg\pi)))$
- 8 $((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \neg\pi))$
- 9 $(\phi \rightarrow \neg\pi)$

Aufgabe 3

Zeigen Sie mittels Hilbert-Kalkül, dass die aussagenlogische Formel

$$\left(((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\psi) \right)$$

eine Tautologie ist.