Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Informatik
Professur für Automatentheorie

Wintersemester 2013/14

Formale Systeme

15. Übungsblatt

Aufgabe 1

Ein *Graph* $G = (V, E)$ besteht aus einer abzählbaren Knotenmenge V und einer Kantenmenge $E \subseteq V \times V$. Weiterhin ist $G' = (V', E')$ *Teilgraph* von G, wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ gelten.

Sei C eine k-elementige Menge von *Farben*. Eine *k-Färbung* von G ist eine Funktion $f\colon V \to C$ derart, dass alle Kanten verschieden gefärbte Knoten verbinden, d. h. für alle $(v, w) \in E$ gilt $f(v) \neq f(w)$. Nun heißt G *k-färbbar*, falls es eine k-Färbung von G gibt.

Beweisen Sie die folgende Aussage:
Ein Graph G ist genau dann k-färbbar, wenn jeder endliche Teilgraph von G k-färbbar ist.

Aufgabe 2

Gegeben sei $\Gamma = \{(\phi \to \psi)\} \vdash (\neg\psi \to \pi)$. Ist die folgende Ableitung eine gültige Ableitung des Hilbert-Kalküls? Kennzeichnen Sie jeden gültigen Schritt mit der verwendeten Hypothese aus Γ, dem verwendeten Axiom oder der Ableitungsregel Modus Ponens und kennzeichnen Sie alle fehlerhaften Schritte.

1 $((\phi \to (\psi \to \phi)) \;\to\; ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \pi)))$
2 $((\neg\phi \to \neg(\psi \to \pi)) \;\to\; ((\psi \to \pi) \to \neg\phi))$
3 $(\phi \to (\psi \to \phi))$
4 $((\phi \to \psi) \;\to\; (\phi \to \pi))$
5 $(\phi \to \psi)$
6 $(\phi \to \pi)$
7 $((\neg(\neg\psi \to \pi) \to \neg(\phi \to \pi)) \;\to\; ((\phi \to \pi) \to (\neg\psi \to \pi)))$
8 $((\phi \to \pi) \to (\neg\psi \to \pi))$
9 $(\neg\psi \to \pi)$

Aufgabe 3

Sei $\mathcal{P}$ eine Menge von aussagenlogischen Variablen, und ϕ eine beliebige aussagenlogische Formel über $\mathcal{P}$. Welche Implikationen oder Äquivalenzen gelten zwischen den folgenden Aussagen? Begründen Sie Ihre Antworten.

a) Für alle Wahrheitswertzuordnungen $w\colon \mathcal{P} \to \{0,1\}$ gilt $w(\phi) = 0$.

b) ϕ ist äquivalent zu einer unerfüllbaren Formel.

c) Eine disjunktive Normalform von ϕ enthält ein Disjunkt ohne komplementäre Literale.

d) ϕ ist eine Hornformel und enthält ein Konjunkt ohne positive Literale, dessen Variablen in V_k liegen.

e) Es existiert ein offenes vollständiges semantisches Tableau für die Negationsnormalform von ϕ.

f) Bei der Resolution von ϕ entsteht die leere Klausel, d. h. $\square \in \mathrm{Res}^*(M)$.

g) $\{\phi\}$ ist konsistent.

Aufgabe 4

Sei $\mathcal{P}$ eine Menge von aussagenlogischen Variablen. Die aussagenlogische Formel ϕ über $\mathcal{P}$ ist definiert als

$$\phi := (\neg(a \wedge (b \vee \neg c)) \wedge ((b \wedge c) \to a) \wedge a).$$

a) Bestimmen Sie je eine Negations-, Konjunktions- und Disjunktionsnormalform von ϕ. Benennen Sie angewendete Regeln.

b) Untersuchen Sie ϕ auf Erfüllbarkeit, indem Sie folgende Daten erstellen und untersuchen bzw. folgende Methoden anwenden.

   i) Wahrheitstafel

   ii) Disjunktive Normalform

   iii) Klauselmenge

   iv) Semantisches Tableau

   v) Resolution