TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Analysis I, II, III

Prof. Dr. Adolf Rhodius

Francesco Kriegel

TU Dresden

Fakultät Mathematik

Institut Analysis

WS 2005/2006, SS 2006, WS 2006/2007

Inhaltsverzeichnis

Teil I Analysis I

Teil II Analysis II

Teil III Analysis III

Vorwort

Dieses LaTeX-Skript wird von Francesco Kriegel auf Grundlage der hervorragenden Analysis-Vorlesung bei Prof. Dr. Rhodius erstellt. Es befindet sich derzeit in der Entwicklung und ich hoffe alsbald fertig zu werden. Des Weiteren möchte ich mich noch für die sehr gute Strukturierung der Vorlesung bedanken – dies erleichtert meine Arbeit erheblich.
Nicht zu vergessen an dieser Stelle ist Dr. Kayser, dessen stets sehr informative und lehrreiche Übung mein Wissen aus der Vorlesung gefestigt hat.
Andererseits möchte ich aber auch Dr. Rudl danken, der mir mit seinem LaTeX-Kurs eine souveräne Einführung gegeben hat.

Schließlich bitte ich alle aufmerksamen Leser, Fehler im Inhalt, die bemerkt wurden, oder Ergänzungen, die für nötig erachtet werden, an mich zu melden:

Francesco Kriegel ... Mr_ED@die-optimisten.net

Literaturempfehlungen

- *Analysis 1+2+3* von O. Forster (Vieweg Verlag)
- *Lehrbuch der Analysis 1+2* von H. Heuser (Teubner Verlag)
- *Gewöhnliche Differentialgleichungen* von H. Heuser (Teubner Verlag)
- *Formeln & Hilfen zur Höheren Mathematik* von G. Merziger u.a. (Binomi Verlag)
- *dtv-Atlas zur Mathematik 1+2* von F. Reinhardt und H. Soeder (Deutscher Taschenbuch Verlag)

Teil I

Analysis I

Kapitel 1

Reelle Zahlen

Im Folgenden werden die Grundeigenschaften für das Rechnen auf der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ axiomatisch eingeführt.

1.1 Algebraische Struktur

Sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen, auf $\mathbb{R}$ definieren wir die folgenden zweistelligen Operationen:

(1) $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : (a, b) \longmapsto a + b$ (Addition)

(2) $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : (a, b) \longmapsto a \cdot b$ (Multiplikation)

Auf der Menge $\mathbb{R}$ mit den Operationen $+, \cdot$ gelten die Axiome der Addition (A1),...,(A4) und der Multiplikation (M1),...,(M4) sowie das Distributivitätsaxiom (D),
also ist $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein kommutativer Körper.

Axiome der Addition

(A1) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) + z = x + (y + z)$ (Assoziativgesetz)

(A2) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$ (Kommutativgesetz)

(A3) $\exists 0 \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in \mathbb{R} : 0 + x = x$ (Existenz des Nullelements)

(A4) $\forall a \in \mathbb{R} \ \ \exists x \in \mathbb{R} : a + x = 0$ (Existenz des Negativen bzw. additiv-inversen Elements)

Satz 1.1
Zu dem Paar $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gibt es genau eine Zahl $y \in \mathbb{R}$, sodass dann $a + y = b$ gilt.
$\forall a, b \in \mathbb{R} \ \ \exists! y \in \mathbb{R} : a + y = b$

Beweis
Seien $a, b \in \mathbb{R}$.

(1) *Existenz*
Nach (A4) existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $a + x = 0$, dann gilt weiter
$a + (x + b) \underset{(A1)}{=} (a + x) + b = 0 + b \underset{(A3)}{=} b$, d.h. $y = x + b \in \mathbb{R}$

(2) *Einzigkeit*
Seien $a+y=a+z=b$. Nach (A4) und (A2) existiert ein $x\in\mathbb{R}$ mit $a+x=x+a=0$.
$x+b=x+(a+y)=x+(a+z)\underset{(M1)}{=}(x+a)+y=(x+a)+z\underset{(A3)}{\Longrightarrow}y=z$ □

Bemerkung 1.2

(1) Die Lösung $y=b-a$ heißt Differenz von b und a.

(2) Das Nullelement 0 ist eindeutig bestimmt.

(3) Das Negative bzw. additiv-inverse Element von a ist eindeutig durch $-a:=0-a$ definiert.

Folgerung 1.3

(1) $\forall x\in\mathbb{R}: -(-x)=x$

(2) $-0=0$

(3) $\forall x,y,u,v\in\mathbb{R}: y-x=v-u \iff y+u=v+x$

Beweis

(1) Nach (A2),(A4) gilt $x+(-x)=(-x)+x=0$, also ist x das Negative zu $-x$, d.h. $-(-x)=x$.

(2) Nach (A4) gilt $0+(-0)=0$, und mit (A3) folgt $0+(-0)=-0$, also gilt $-0=0$.

(3) (a) „$\Longrightarrow$"
Seien $x,y,u,v\in\mathbb{R}$ mit $y-x=v-u\ \ (*)$. Nun ist $y+u=x+v$ zu zeigen.

$$\begin{aligned}y+u&=(y+0)+u=[y+((-x)+x)]+u=[(y-x)+x]+u\underset{(*)}{=}[(v-u)+x]+u\\&=[x+(v-u)]+u=x+[(v-u)+u]=x+[v+((-u)+u)]=x+(v+0)=x+v\end{aligned}$$

(b) „$\Longleftarrow$" analog □

Axiome der Multiplikation

(M1) $\forall x,y,z\in\mathbb{R}: (x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$ (Assoziativgesetz)

(M2) $\forall x,y\in\mathbb{R}: x\cdot y=y\cdot x$ (Kommutativgesetz)

(M3) $\exists 1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\ \forall x\in\mathbb{R}: 1\cdot x=x$ (Existenz des Einselements)
Das Nullelement und das Einselement sind somit verschieden.

(M4) $\forall a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\ \exists x\in\mathbb{R}: a\cdot x=1$ (Existenz des Reziproken bzw. multiplikativ-inversen Elements)
Das Nullelement 0 hat folglich keinen Reziproken.

Die reellen Zahlen ohne 0, also $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ bilden eine kommutative Gruppe.

Axiom der Distributivität

(D) $\forall x,y,z\in\mathbb{R}: x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$

Satz 1.4

$\forall a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\ \exists! y\in\mathbb{R}: a\cdot y=b$

Beweis
Seien $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(1) *Existenz*
Nach (M4) existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot x = 1$, dann gilt weiter
$a \cdot (x \cdot b) \underset{(M1)}{=} (a \cdot x) \cdot b = 1 \cdot b \underset{(M3)}{=} b$, d.h. $y = x \cdot b \in \mathbb{R}$

(2) *Einzigkeit*
Seien $a \cdot y = a \cdot z = b$. Nach (M4) und (M2) existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot x = x \cdot a = 1$.
$x \cdot b = x \cdot (a \cdot y) = x \cdot (a \cdot z) \underset{(M1)}{=} (x \cdot a) \cdot y = (x \cdot a) \cdot z \underset{(M3)}{\implies} y = z$ □

Bemerkung 1.5
(1) Die Lösung $y = \frac{b}{a}$ heißt Quotient von b und a.

(2) Das Einselement 1 ist eindeutig bestimmt.

(3) Das Reziproke bzw. multiplikativ-inverse Element von a ist eindeutig durch $a^{-1} := \frac{1}{a}$ definiert.

Folgerung 1.6
(1) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : (x^{-1})^{-1} = x$

(2) $\forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 0 = 0$

(3) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = 0 \iff a = 0 \lor b = 0$

(4) $\forall x, y, u, v \in \mathbb{R} : \frac{y}{x} = \frac{v}{u} \iff y \cdot u = v \cdot x$

Beweis
(1) Nach (M2),(M4) gilt $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$, also ist x das Reziproke zu x^{-1}, d.h. $(x^{-1})^{-1} = x$.

(2) Nach (A3) gilt $0 + 0 = 0$, und mit (D) folgt weiter $x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$.
Schließlich liefert die Addition von $-x \cdot 0$ auf beiden Seiten mit (A4): $0 = x \cdot 0$.

(3) folgt aus (2) mit (M2).

(4) (a) „$\Longrightarrow$“
Seien $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ mit $\frac{y}{x} = \frac{v}{u}$ $(*)$. Nun ist $y \cdot u = x \cdot v$ zu zeigen.

$$\begin{aligned} y \cdot u &= (y \cdot 1) \cdot u = [y \cdot \tfrac{x}{x}] \cdot u = [\tfrac{y}{x} \cdot x] \cdot u \underset{(*)}{=} [\tfrac{v}{u} \cdot x] \cdot u \\ &= [x \cdot \tfrac{v}{u}] \cdot u = x \cdot [\tfrac{v}{u} \cdot u] = x \cdot [v \cdot \tfrac{u}{u}] = x \cdot (v \cdot 1) = x \cdot v \end{aligned}$$

(b) „$\Longleftarrow$“ analog □

Definition (Potenz und Wurzel)
Für eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ wird induktiv definiert:
- $a^0 := 1,\ a^1 := a$
- $a^{n+1} := a \cdot a^n \quad (n \in \mathbb{N})$

Dabei heißt a^n die n-te Potenz von $a \in \mathbb{R}$.

$\sqrt[n]{a} = c \ :\iff\ c^n = a \land a, c > 0$
Dann heißt $\sqrt[n]{a}$ die n-te Wurzel von $a \in \mathbb{R}$.

1.2 Natürliche, ganze und rationale Zahlen

Natürliche, ganze und rationale Zahlen sind spezielle reelle Zahlen, die nun charakterisiert werden.

Definition 1.7 (Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$)
Die Menge aller natürlichen Zahlen wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet, dabei gelten:

(N0) $0 \in \mathbb{N}$

(N1) $\forall n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \implies n+1 \in \mathbb{N}$ (Nachfolger)

(N2) $\forall n \in \mathbb{N} : n-1 \in \mathbb{N} \iff n \neq 0$ (Vorgänger)

(N3) Für eine Menge $M \subset \mathbb{N}$ mit $0 \in M$ und der gültigen Implikation $n \in M \implies n+1 \in M$ gilt $M = \mathbb{N}$. (Induktionsaxiom)
Dieses Axiom ist die Grundlage für die Beweisführung mittels vollständiger Induktion.

Satz 1.8
(1) $\forall m, n \in \mathbb{N} : m+n \in \mathbb{N}$

(2) $\forall m, n \in \mathbb{N} : m \cdot n \in \mathbb{N}$

Die Summe sowie das Produkt zweier natürlicher Zahlen sind stets auch natürliche Zahlen.

Beweis mittels vollständiger Induktion über n
Sei $m \in \mathbb{N}$.

(1) *Induktionsanfang ($n = 0$):* $m + 0 = m \in \mathbb{N}$ gilt wegen (A3).
Induktionsvorraussetzung: Es gelte $m + n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt ($n+1$): $m + (n+1) \underset{(A1)}{=} \underbrace{(m+n)}_{\in \mathbb{N}} + 1$
Mit der Induktionsvorraussetzung und (N1) folgt also $m + (n+1) \in \mathbb{N}$.

Nach dem Induktionsaxiom (N3) ist damit bewiesen, dass $m + n \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(2) *Induktionsanfang ($n = 0$):* $m \cdot 0 = 0 \in \mathbb{N}$ nach Satz 1.6(2) und (N0).
Induktionsvorraussetzung: Es gelte $m \cdot n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt ($n+1$): $m \cdot (n+1) \underset{(D)}{=} \underbrace{m \cdot n}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{m \cdot 1}_{=m \in \mathbb{N}}$
Mit der Induktionsvorraussetzung und (1) ist somit $m \cdot (n+1) \in \mathbb{N}$.

Nach dem Induktionsaxiom (N3) gilt nun $m \cdot n \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Definition 1.9 (Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$)
Eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt ganze Zahl $a \in \mathbb{Z}$
$:\iff \quad \exists\, n, m \in \mathbb{N} : a = n - m$
Die Menge aller ganzen Zahlen wird mit $\mathbb{Z}$ bezeichnet.

Definition 1.10 (Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$)
Eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt rationale Zahl $a \in \mathbb{Q}$
$:\iff \quad \exists\, u, v \in \mathbb{Z},\ v \neq 0 : a = \frac{u}{v}$
Die Menge aller rationalen Zahlen wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

Bemerkung
Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, dies folgt aus den Definitionen.

1.3 Vollständige Ordnung

$(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ ist ein vollständig geordneter Körper.
Auf $\mathbb{R}$ ist eine zweistellige Relation $<$ definiert, für die folgende Axiome gelten:

(O1) Die Ordnungsrelation $<$ ist irreflexiv, transitiv und konnex, d.h.

- $\forall a \in \mathbb{R} : \neg(a < a)$ (irreflexiv)
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \wedge b < c \implies a < c$ (transitiv)
- $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b \vee b < a \vee b = a$ (konnex)

(O2) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \iff a + c < b + c$ (Monotonie der Addition)

(O3) $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ c > 0 : a < b \iff a \cdot c < b \cdot c$ (Monotonie der Multiplikation)

(O4) Jede nach oben beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R},\ A \neq \emptyset$ hat ein Supremum. (Ordnungsvollständigkeit)

1.4 Ungleichungen und Beträge

Folgerung 1.11 (Rechnen mit Ungleichungen)

(1) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} : a < b \wedge c < d \implies a + c < b + d$

(2) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}_+ : a < b \wedge c < d \implies a \cdot c < b \cdot d$

(3) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b \iff -b < -a$

(4) $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ c < 0 : a < b \iff b \cdot c < a \cdot c$

(5) $\forall a, b \in \mathbb{R} : 0 < a < b \vee a < b < 0 \implies b^{-1} < a^{-1}$

Beweis

(1) $$\left.\begin{array}{l} a < b \underset{(O2)}{\implies} a + c < b + c \\ c < d \implies b + c < b + d \end{array}\right\} \underset{(O1)}{\implies} a + c < b + d$$

(2) $$\left.\begin{array}{l} a < b \underset{(O3)}{\implies} a \cdot c < b \cdot c \\ c < d \implies b \cdot c < b \cdot d \end{array}\right\} \underset{(O1)}{\implies} a \cdot c < b \cdot d$$

(3) $a < b \underset{(O2)}{\implies} a + (-b) < b + (-b) \implies a - b < 0 \implies a + (-a) - b < -a \implies -b < -a$

(4) $c = (-1) \cdot (\underbrace{-c}_{>0}),\ a < b \underset{(3)}{\iff} (-1) \cdot b = -b < -a = (-1) \cdot a \underset{(O3)}{\iff} (-1) \cdot (-c) \cdot b = b \cdot c < a \cdot c = (-1) \cdot (-c) \cdot a$

(5) $a < b \underset{(O3),(4)}{\implies} a \cdot a^{-1} = 1 \lessgtr b \cdot a^{-1} \underset{(O3),(4)}{\implies} b^{-1} < a^{-1} = b \cdot b^{-1} \cdot a^{-1}$ □

Folgerung 1.12

(1) $0 < 1$

(2) $\forall n \in \mathbb{N} : n < n + 1$

Beweis

(1) Nach (M3) gilt $0 \neq 1$, es kann folglich nur $0 < 1$ oder $1 < 0$ sein. Angenommen, es wäre $1 < 0$.
Dann wäre mittels Multiplikation beider Seiten mit 1 nach 1.11(4) auch $0 < 1$. Widerspruch!

(2) Die Gültigkeit für alle $n \in \mathbb{R} \supset \mathbb{N}$ folgt aus (1) mit (O2). □

Folgerung 1.13

(1) $\forall a, b \in \mathbb{R}_+,\ n \in \mathbb{N}_+ : a < b \iff a^n < b^n$

(2) $\forall a, b \in \mathbb{R}_+,\ n \in \mathbb{N}_+ : a < b \iff \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$

Beweis

(1) mittels vollständiger Induktion über n und 1.11(2).

(2) Sei $0 < a < b$. Angenommen, es gelte $\sqrt[n]{a} \geqslant \sqrt[n]{b}$.

- *Fall 1:* $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \implies a = b$ Widerspruch!
- *Fall 2:* $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \underset{(1)}{\implies} a > b$ Widerspruch! □

Satz 1.14 (Bernoulli'sche Ungleichung) (Jakob Bernoulli, 1654-1705)

$\forall n \in \mathbb{N},\ h \in \mathbb{R},\ h > -1 : (1+h)^n \geqslant 1 + n \cdot h$

Beweis

Nach dem Binomischen Satz gilt $(1+h)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot h^k = 1 + n \cdot h + \underbrace{\binom{n}{2} \cdot h^2 + \cdots + \binom{n}{n} \cdot h^n}_{>0\,?}$.

Für $-1 < h < 0$ jedoch ist nicht klar, ob der Rest positiv ist.
Daher erfolgt der Beweis nun mit vollständiger Induktion.

Induktionsanfang ($n = 0$): $(1+h)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot h$

Induktionsvorraussetzung: Es gelte $(1+h)^n \geqslant 1 + n \cdot h$.

Induktionsschritt ($n+1$): $(1+h)^{n+1} = (1+h)^n \cdot (1+h) \underset{IV}{\geqslant} (1 + n \cdot h) \cdot (1+h) = 1 + \underbrace{n \cdot h + h}_{=(n+1)\cdot h} + \underbrace{n \cdot h^2}_{\geqslant 0}$

Mit dem Induktionsaxiom (N3) gilt schließlich $(1+h)^n \geqslant 1 + n \cdot h$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Definition 1.15 (Absoluter Betrag)

Die reelle Zahl $|a| := \begin{cases} a & (a \geqslant 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$ heißt Betrag von $a \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 1.16

Es gilt $|a| = a \cdot \operatorname{sgn} a \ \ (a \in \mathbb{R})$ mit $\operatorname{sgn} a := \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$.

Folgerung 1.17

(1) $\forall a, b \in \mathbb{R} : |a - b| = |b - a|$

(2) $\forall a, b \in \mathbb{R} : |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

(3) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0 : |\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$

Satz 1.18 (Dreiecksungleichung)

(1) $\forall a, b \in \mathbb{R} : |a \pm b| \leqslant |a| + |b|$

(2) $\forall a, b \in \mathbb{R} : \big||a| - |b|\big| \leqslant |a - b|$

Beweis

(1) $\pm a \leqslant |a| \wedge \pm b \leqslant |b| \implies \pm(a+b) \leqslant |a|+|b| \implies |a+b| \leqslant |a|+|b|$

(2) $|a| = |(a-b)+b| \underset{(1)}{\leqslant} |a-b|+|b| \implies |a|-|b| \leqslant |a-b|$

$|b| = |(b-a)+a| \leqslant |b-a|+|a| \implies |b|-|a| \leqslant |a-b|$

$\implies \pm(|a|-|b|) \leqslant |a-b| \implies \big||a|-|b|\big| \leqslant |a-b|$ $\square$

Satz 1.19 (Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung) (A.L. Cauchy 1789-1857, H.A. Schwarz 1843-1921)

$\forall x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_+ : \left|\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Diese Ungleichung ist ein Spezialfall der Hölder'schen Ungleichung mit $p = q = 2$.

Beweis

Für $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \vee \sum_{i=1}^n y_i^2 = 0$ gilt ersichtlich die Gleichheit beider Seiten.

Sei nun $\sum_{i=1}^n x_i^2,\ \sum_{i=1}^n y_i^2 \neq 0$, dann gilt $\pm \sum_{i=1}^n \Bigg[\underbrace{\frac{x_i}{\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}}}_{=:a_i} \cdot \underbrace{\frac{y_i}{\left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right)^{\frac{1}{2}}}}_{=:b_i} \Bigg] \leqslant 1.$

Es gelten $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$ sowie $\sum_{i=1}^n b_i^2 = 1$ und damit folgt weiter

$\pm \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(a_i^2 + b_i^2) \leqslant 1$ wegen $\pm a \cdot b \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$. $\square$

1.5 Beschränkte Mengen

Definition 1.20 (Beschränktheit)

Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Menge reeller Zahlen.

(1) M heißt nach oben beschränkt und K heißt obere Schranke von M

$:\iff \quad \exists K \in \mathbb{R} : x \leqslant K \ \ (x \in M)$

M heißt nach unten beschränkt und k heißt untere Schranke von M

$:\iff \quad \exists k \in \mathbb{R} : x \geqslant k \ \ (x \in M)$

(2) K^* heißt obere Grenze / Supremum von M, $K^* = \sup M$

$:\iff \quad K^*$ ist obere Schranke $\wedge\ \forall \varepsilon > 0\ \exists y \in M : K^* - \varepsilon < y$

k^* heißt untere Grenze / Infimum von M, $k^* = \inf M$

$:\iff \quad k^*$ ist untere Schranke $\wedge\ \forall \varepsilon > 0\ \exists y \in M : k^* - \varepsilon > y$

(3) K_0 heißt Maximum von M, $K_0 = \max M$

$:\iff \quad K_0 = \sup M \ \wedge\ K_0 \in M$

k_0 heißt Minimum von M, $k_0 = \min M$

$:\iff \quad k_0 = \inf M \ \wedge\ k_0 \in M$

Beispiel $M = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_+\}$

Für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt trivialerweise $n \geqslant 1$, und damit folgt $0 < \frac{1}{n} \leqslant 1$.

Demnach ist 0 eine untere Schranke von M, sogar das Infimum aber nicht Minimum,

1 ist obere Schranke, Supremum und Maximum.

Definition 1.21 (Endlichkeit)
Eine Menge M heißt endlich
$:\Longleftrightarrow \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \wedge \exists$ bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N}_n := \{m \in \mathbb{N}_+ : m \leqslant n\} \longrightarrow M$
Die leere Menge $\emptyset$ ist auch endlich.
Wir sagen, die Menge M ist gleichmächtig zu $\mathbb{N}_n$ und schreiben $M = \{\varphi(1), \ldots, \varphi(n)\} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$.

Satz 1.22
Sei $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ eine endliche Menge reeller Zahlen.
Dann existieren $\min M$, $\max M$.

Beweis nur für $\min M$
Nach Vorraussetzung gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $M = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$.
Induktionsanfang ($n = 1$): $M = \{\varphi_1\}$, offensichtlich ist $\min M = \varphi_1$
Induktionsvorraussetzung: Für $\tilde{M} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ existiere $\min \tilde{M}$.
Induktionsschritt ($n + 1$): $M = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1}\}$, nach IV $\exists\, i \in \mathbb{N}_n$ mit $\varphi_i = \min\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$.
Im Falle $\varphi_{n+1} < \varphi_i$ gilt $\min M = \varphi_{n+1}$, für $\varphi_{n+1} \geqslant \varphi_i$ gilt $\min M = \varphi_i$.

Damit hat M immer ein Minimum. □

Satz 1.23 (Wohlordnungssatz)
Sei $M \subset \mathbb{N}$, $M \neq \emptyset$ eine Menge natürlicher Zahlen.
Dann existiert $\min M$, und man nennt die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ wohlgeordnet.

Beweis
O.E.d.A. sei M keine Einermenge, hat also mehr als 1 Element.
Für $i \in M$ ist die Menge $M \cap \mathbb{N}_i \neq \emptyset$ endlich. Folglich existiert $\min M \cap \mathbb{N}_i =: n_0$ mit $n_0 \in M$.
Für ein beliebiges $m \in M$ gilt:

- $m \leqslant i$, d.h. $m \in M \cap \mathbb{N}_i \implies n_0 \leqslant m$
- $m > i$, dann gilt erst recht $n_0 \leqslant m$ □

1.6 Archimedische Ordnung

$(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ ist ein archimedisch geordneter Körper.

Satz 1.24
Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt.

Beweis indirekt
Wäre $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt, dann existierte nach (O4) das $\sup \mathbb{N} =: K^*$,
also gäbe es insbesondere eine natürliche Zahl n_0 mit $K^* - \frac{1}{2} < n_0$.
Dann wäre $K^* < n_0 + \frac{1}{2} < n_0 + 1$ mit $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$. Widerspruch! □

Folgerung 1.25

(1) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x > 0\ \exists\, n \in \mathbb{N} : n \cdot x > y$ (Archimedisches Axiom)

(2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$

(3) $\forall k > 0\ \exists\, n \in \mathbb{N} : a^n > k \quad (a > 1)$

(4) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n \in \mathbb{N} : a^n < \varepsilon \quad (0 < a < 1)$

Beweis

(1) Da $\frac{y}{x}$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$ ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{y}{x} \implies n \cdot x > y$.

(2) folgt aus (1) mit $y = 1,\ x = \varepsilon$.

(3) $a > 1 \implies a = 1 + h,\ h > 0$, damit ist $a^n = (1+h)^n \geqslant 1 + n \cdot h \ (n \in \mathbb{N})$.
Nach (1) existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot h > k - 1$, damit gilt $a^n \geqslant 1 + n \cdot h > 1 + k - 1 = k$.

(4) Wegen $\frac{1}{a} > 1$ existiert zu $k = \frac{1}{\varepsilon}$ ein $n \in \mathbb{N}$, sodass mit (3) folgt: $\left(\frac{1}{a}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon} \implies a^n < \varepsilon$. $\square$

Kapitel 2

Reelle Zahlenfolgen

2.1 Konvergenz

Definition 2.1 (Reelle Zahlenfolge)
Jede eindeutige Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt reelle Zahlenfolge mit den Gliedern $a_n := f(n)$.
Symbole: $(a_n) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, \dots, a_n, \dots)$

Allgemeiner heißt $(a_n)_{n\geqslant k_0}$ mit $k_0 \in \mathbb{Z}$ auch reelle Zahlenfolge,
denn die Indexverschiebung $(a_n)_{n\geqslant k_0} = (a_{n+k_0})_{n\in\mathbb{N}}$ liefert stets die Indexmenge $\mathbb{N}$.

Definition 2.2 (Beschränktheit)
Eine reelle Zahlenfolge (a_n) heißt beschränkt

$$:\Longleftrightarrow \quad M = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ ist beschränkt}$$
$$\Longleftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leqslant k$$

(a_n) heißt nach $\begin{matrix}\text{oben}\\ \text{unten}\end{matrix}$ beschränkt $:\Longleftrightarrow$ M ist nach $\begin{matrix}\text{oben}\\ \text{unten}\end{matrix}$ beschränkt.

Beispiele

(1) $a_n = (-1)^n \ (n \in \mathbb{N}), \quad (a_n) = (1, -1, 1, -1, \dots)$
(a_n) ist beschränkt mit Schranke $k = 1$, denn es gilt $|a_n| \leqslant 1$.

(2) $a_n = 2^n \ (n \in \mathbb{N}), \quad (a_n) = (1, 2, 4, 8, \dots)$
(a_n) ist nicht nach oben beschränkt, aber nach unten beschränkt mit unterer Schranke $k = 1$.

Definition 2.3 (Konvergenz)
Seien (a_n) eine reelle Zahlenfolge und $a \in \mathbb{R}$.
(a_n) heißt konvergent gegen a

$$:\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon$$

Symbole: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, $a_n \longrightarrow a$
a heißt Grenzwert der Folge (a_n).

Es gilt $|a_n - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ und $U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$ ist die ε-Umgebung von a.
Dann folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geqslant n_0 \implies a_n \in U_\varepsilon(a)$,
d.h. $\forall \varepsilon > 0$ liegen nur endlich viele Glieder a_n nicht in $U_\varepsilon(a)$.

Satz 2.4
Jede konvergente Folge (a_n) besitzt genau einen Grenzwert a.

Beweis indirekt
Seien a, a' Grenzwerte von (a_n), $a \neq a'$. Wähle $\varepsilon = \frac{1}{3}|a' - a|$.
Dann liegen außerhalb der ε-Umgebung $U_\varepsilon(a)$ nur endlich viele Glieder a_n.
Weiterhin liegen wegen $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') = \emptyset$ nur endlich viele a_n in $U_\varepsilon(a')$. Widerspruch! □

Beispiele

(1) $(a_n) = (\frac{1}{n})$ ist eine Nullfolge, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
Beweis Es ist zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant n_0 \implies |\frac{1}{n}| < \varepsilon$.
Sei $\varepsilon > 0$. Es gilt $|\frac{1}{n}| < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$. $*$
Nach Satz 1.24 $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ und für dieses n_0 gilt: $n \geqslant n_0 \implies n > \frac{1}{\varepsilon} \underset{*}{\implies} |\frac{1}{n}| < \varepsilon$ □

(2) $(b_n) = (q^n)$ ist für $|q| < 1$ eine Nullfolge, also $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.
Beweis Es ist zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant n_0 \implies |q^n| < \varepsilon$ für $0 < |q| < 1$.
Sei $\varepsilon > 0$. Es ist $|q| = \frac{1}{1+x}$ für ein $x > 0$.
Dann folgt mit der Bernoulli'schen Ungleichung: $|q^n| = (\frac{1}{1+x})^n = \frac{1}{(1+x)^n} \leqslant \frac{1}{1+n\cdot x} < \frac{1}{n\cdot x}$. $*$
Außerdem gilt $\frac{1}{n\cdot x} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon\cdot x}$. $**$
Nach Satz 1.24 $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon\cdot x}$ für das gilt: $n \geqslant n_0 \implies n > \frac{1}{\varepsilon\cdot x} \underset{**}{\implies} \frac{1}{n\cdot x} < \varepsilon \underset{*}{\implies} |q^n| < \varepsilon$ □

(3) $(c_n) = (\sqrt[n]{n})$ hat den Grenzwert 1, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$.
Beweis Zu zeigen ist $\forall \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant n_0 \implies |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$.
$n = (1 + |\sqrt[n]{n} - 1|)^n = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |\sqrt[n]{n} - 1|^k \geqslant \binom{n}{2} |\sqrt[n]{n} - 1|^2 = \frac{n\cdot(n-1)}{2} \cdot |\sqrt[n]{n} - 1|^2 \implies |\sqrt[n]{n} - 1| \leqslant \sqrt{\frac{2n}{n\cdot(n-1)}}$ $*$
Desweiteren gilt $\sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon \iff n > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$. $**$
$\implies \forall \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant n_0 \implies n > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1 \underset{**}{\implies} \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon \underset{*}{\implies} |\sqrt[n]{n} - 1| \leqslant \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon$ □

2.2 Konvergente Zahlenfolgen

Satz 2.5
Jede konvergente Zahlenfolge ist beschränkt.

Beweis
Sei (a_n) konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \implies \forall \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon$
Sei speziell $\varepsilon = 1$, dann gilt mittels Dreiecksungleichung $|a_n| \leqslant |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$.
Andererseits ist die Menge $\{a_n : n < n_0\}$ endlich, also beschränkt, d.h. $\exists\, K_0 > 0 : |a_n| \leqslant K_0$ für $n < n_0$.
Damit folgt schließlich $|a_n| \leqslant \max\{K_0, 1 + |a|\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Satz 2.6 (Rechenregeln)
Es seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Zahlenfolgen.
Dann sind auch die Zahlenfolgen $(a_n \pm b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$, $(\frac{a_n}{b_n})$ $(\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0)$ konvergent und es gelten:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ $(\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0)$

Beweis Es seien $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

(1) zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant n_0 \implies |(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| < \varepsilon$
Sei $\varepsilon > 0$, dann $\exists\, n_1 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon \ \ (n \geqslant n_1)$ und $\exists\, n_2 \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon \ \ (n \geqslant n_2)$.
Für $n \geqslant n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ gilt $|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| = |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$.

(2) zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant n_0 \implies |a_n \cdot b_n - a \cdot b| < \varepsilon$
Mit der Dreiecksungleichung gilt $|a_n \cdot b_n - a \cdot b| = |a_n \cdot (b_n - b) + (a_n - a) \cdot b| \leqslant |a_n| \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b|$. $*$
Sei $\varepsilon > 0$. Da (a_n) konvergent ist, existiert $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = k$.
Setze $K = \max\{k, |b|, 1\}$, dann $\exists\, n_1 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2K} \ \ (n \geqslant n_1)$ und $\exists\, n_2 \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2K} \ \ (n \geqslant n_2)$.
Für $n \geqslant n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ folgt mit $*$ $|a_n \cdot b_n - a \cdot b| < K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2K} \cdot K = \varepsilon$.

(3) Nach (2) genügt es zu zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$.
Wegen $b \neq 0$ existiert ein $n_1 \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \ \ (n \geqslant n_1)$. Sei $\varepsilon > 0$, dann $\exists n_2 \geqslant n_1 : |b_n - b| < \frac{|b|^2}{2} \cdot \varepsilon \ \ (n \geqslant n_2)$.
Es ist $|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| = \frac{|b_n - b|}{|b_n| \cdot |b|}$. Weiterhin $\exists\, n_3 \geqslant n_1\ \forall n \geqslant n_3 : |b_n - b| \leqslant \frac{|b|}{2} \implies |b_n| \geqslant \frac{1}{2}|b|$.
Für $n \geqslant n_0 = \max\{n_2, n_3\}$ folgt also $|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| \leqslant \frac{2}{|b| \cdot |b|} \cdot |b_n - b| < \frac{2}{|b| \cdot |b|} \cdot \frac{|b|^2}{2} \cdot \varepsilon = \varepsilon$ □

Satz 2.7
Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ Zahlenfolgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$.

(1) $a_n < b_n \ \ (n \geqslant n_0) \implies a \leqslant b$

(2) $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n \ \ (n \geqslant n_0) \wedge a = b \implies \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a = b = c$ (Sandwichsatz)

Beweis

(1) Sei $a_n < b_n \ \ (n \geqslant n_0)$. Wäre nun $a > b$, so müsste es einen Index n_1 geben mit $a_n > b_n \ \ (n \geqslant n_1)$, denn in jeder Umgebung von a bzw. b liegen unendlich viele Glieder a_n bzw. b_n. Widerspruch!

(2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, sodass o.E.d.A. gilt: $|a_n - a| < \varepsilon \ \wedge\ |b_n - b| < \varepsilon$.
Für $n \geqslant n_0$ folgt also $a - \varepsilon < a_n \leqslant c_n \leqslant b_n < b + \varepsilon = a + \varepsilon \implies |c_n - a| < \varepsilon$ □

Beispiele

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^5 - 5n + 1}{3n^5 + 2n^2 - 4} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4 - 5n^{-4} + n^{-5}}{3 + 2n^{-3} - 4n^{-5}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 4 - 5n^{-4} + n^{-5}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + 2n^{-3} - 4n^{-5}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 4 - \lim\limits_{n\to\infty} 5n^{-4} + \lim\limits_{n\to\infty} n^{-5}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} 2n^{-3} - \lim\limits_{n\to\infty} 4n^{-5}} = \frac{4}{3}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \ \ (a > 0)$,
denn für ein hinreichend großes n gilt $1 \leqslant a \leqslant n$ und weiter $\sqrt[n]{1} \leqslant \sqrt[n]{a} \leqslant \sqrt[n]{n}$.
Mit dem Sandwichsatz folgt also $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für $a \geqslant 1$.
Sei nun $0 < a < 1$, dann ist $a = \frac{1}{b}$ für ein $b > 1$ und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}}$.

2.3 Bestimmte Divergenz / uneigentliche Grenzwerte

Definition 2.8 (Divergenz)
Sei (a_n) eine reelle Zahlenfolge.

(a_n) heißt bestimmt divergent gegen den uneigentlichen Grenzwert $\begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$

$:\iff \quad \forall \omega > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant n_0 \implies \begin{matrix} a_n > \omega \\ a_n < -\omega \end{matrix}$

Satz 2.9
Es seien $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = +\infty$

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \begin{cases} +\infty & (b>0) \\ -\infty & (b<0) \end{cases}$

Für $b = 0$ ist keine Aussage möglich.

Beweis

(1) Es gibt für jedes $\omega > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $a_n \pm b_n > \omega$ für alle $n \geqslant n_0$ gilt, denn (a_n) ist unbeschränkt und (b_n) ist beschränkt.

(2) $(a_n \cdot b_n)$ ist unbeschränkt, denn (a_n) ist unbeschränkt. Für $b > 0$ gilt $b_n > 0 \ (n \geqslant n_0)$ und analog für $b < 0$ gilt $b_n < 0 \ (n \geqslant n_0)$. Demnach ist dann auch $a_n \cdot b_n > 0$ bzw. < 0 für $n \geqslant n_1 \geqslant n_0$. □

2.4 Monotone Zahlenfolgen

Definition 2.10 (Monotonie)
Sei (a_n) eine reelle Zahlenfolge.

(1) (a_n) heißt monoton $\begin{matrix}\text{wachsend}\\ \text{fallend}\end{matrix}$ $:\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n \begin{matrix}\leqslant \\ \geqslant\end{matrix} a_{n+1}$

(2) (a_n) heißt streng monoton $\begin{matrix}\text{wachsend}\\ \text{fallend}\end{matrix}$ $:\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n \begin{matrix}< \\ >\end{matrix} a_{n+1}$

Falls (a_n) konvergent ist, so muss (a_n) notwendig beschränkt sein.
Ist die Folge nach oben beschränkt, so existiert das $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = K^*$ und es gelten:

(1) $a_n \leqslant K^* \quad (n \in \mathbb{N})$

(2) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, n_0 \in \mathbb{N} : K^* - \varepsilon < a_{n_0}$

Satz 2.11
Eine monotone Zahlenfolge ist konvergent $\Longleftrightarrow$ sie beschränkt ist.
Eine monotone Zahlenfolge ist divergent $\Longleftrightarrow$ sie unbeschränkt ist.

Beweis nur für (a_n) monoton wachsend

(a) Sei (a_n) monoton wachsend und beschränkt, damit existiert $K^* = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ und es gelten:

(1) $a_n \leqslant K^* \quad (n \in \mathbb{N})$

(2) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, n_0 \in \mathbb{N} : K^* - \varepsilon < a_{n_0}$

(3) $a_{n_0} \leqslant a_n \quad (n \geqslant n_0)$

Also folgt $K^* - \varepsilon \underset{(2)}{<} a_{n_0} \underset{(3)}{\leqslant} a_n \underset{(1)}{\leqslant} K^* < K^* + \varepsilon \quad (n \geqslant n_0)$.

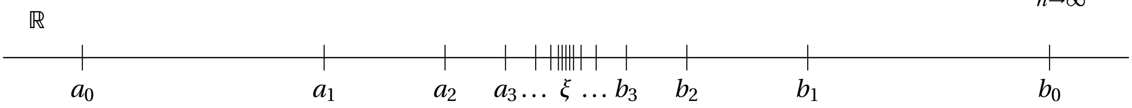
$\Longrightarrow \ |a_n - K^*| < \varepsilon \ (n \geqslant n_0) \ \Longrightarrow \ \lim_{n\to\infty} a_n = K^*$

(b) Sei (a_n) monoton wachsend und nicht beschränkt, dann gilt $\forall \omega > 0 \, \exists \, n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > \omega$

$\underset{(3)}{\Longrightarrow} \ a_n > \omega \ (n \geqslant n_0) \ \Longrightarrow \ \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. □

Definition 2.12 (Intervallschachtelung)
Eine Folge (I_n) abgeschlossener Intervalle $I_n = [a_n, b_n] := \{x \in \mathbb{R} : a_n \leqslant x \leqslant b_n\}$ mit $a_n \leqslant b_n$ heißt Intervallschachtelung
$:\Longleftrightarrow$ (1) $I_{n+1} \subset I_n \quad (n \in \mathbb{N})$
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$

Anschauliche Interpretation: $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \dots$
Sei $\mathscr{L}(I_n) = \operatorname{diam}(I_n) = \operatorname{diam}([a_n, b_n]) = b_n - a_n$ die Länge des n-ten Intervall, dann gilt $\mathscr{L}(I_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.



Satz 2.13 (Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$)
Zu jeder Intervallschachtelung (I_n) gibt es genau eine reelle Zahl ξ mit $\xi \in I_n \quad (n \in \mathbb{N})$.

Beweis
Mit $\mathscr{L}(I_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$, also ist der Grenzwert $\xi \in I_n \quad (n \in \mathbb{N})$.
Die Intervalllängenfolge $\big(\mathscr{L}(I_n)\big)$ ist eine Nullfolge, demnach ist ξ die einzige derartige Zahl. $\square$

Beispiel
Die Folgen $(a_n) = \left((1+\frac{1}{n})^n\right)$, $(b_n) = \left((1+\frac{1}{n})^{n+1}\right)$ mit $n \in \mathbb{N}_+$ bilden eine Intervallschachtelung $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}_+}$.
Damit existiert genau eine reelle Zahl a mit $a_n \leqslant a \leqslant b_n \quad (n \in \mathbb{N}_+)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Definition 2.14 (Euler'sche Zahl e)
$\mathrm{e} := \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$

Folgerung
Es gilt $(1 + \frac{1}{n})^n < \mathrm{e} < (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}_+)$, damit kann e beliebig genau bestimmt werden.
$2 < \mathrm{e} < 4 \quad (n = 1)$
$2{,}44 < \mathrm{e} < 3{,}05 \quad (n = 4)$
$\mathrm{e} = 2{,}718281828459\dots$, $\mathrm{e} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (irrational)

Beispiel (a_n) mit $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}}) \quad (n \in \mathbb{N}_+,\ A > 0)$ und $a_1 > 0$
Es ist nun die Konvergenz der Folge (a_n) zu zeigen sowie der Grenzwert zu bestimmen.

I. Aus $-2a_n a_{n-1} = -a_{n-1}^2 - A \quad \big| + a_n^2 + a_{n-1}^2$ folgt $0 \leqslant (a_n - a_{n-1})^2 = a_n^2 - A \implies A \leqslant a_n^2$.
Es gilt $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{A}{a_n}) \leqslant a_n \quad \big| \cdot 2a_n > 0 \iff a_n^2 + A \leqslant 2a_n^2 \iff A \leqslant a_n^2 \quad (n \in \mathbb{N}_+)$
$\implies$ (a_n) ist monoton fallend und beschränkt $\underset{2.11}{\implies}$ (a_n) ist konvergent.

II. (a_n) ist konvergent, also existiert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.
Aus $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}})$ folgt $2a_n a_{n-1} = a_{n-1}^2 + A$,
der Grenzwertübergang $n \to \infty$ liefert $2a^2 = a^2 + A \implies a^2 = A \implies a = \pm\sqrt{A}$.
Wegen $a_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N}_+)$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \geqslant 0 \implies a = \sqrt{A}$. $\square$

2.5 Teilfolgen und Häufungswerte

Definition 2.15 (Teilfolge)
Es seien (a_n) eine Zahlenfolge und (n_k) eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Die Folge (a_{n_k}) heißt dann Teilfolge der Folge (a_n).

Erklärung des Symbols $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$:
k zählt die Glieder der Teilfolge (a_{n_k}),
das n_k-te Glied der Ausgangsfolge (a_n) ist das k-te Glied der Teilfolge (a_{n_k}).

Satz 2.16
Sei (a_n) eine konvergente Zahlenfolge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
Dann gilt auch $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ für jede Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n).

Beweis

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad &\iff \quad \forall \varepsilon > 0 : a_n \notin U_\varepsilon(a) \text{ nur für endlich viele } n \in \mathbb{N}\\ &\implies \quad \forall \varepsilon > 0 : a_{n_k} \notin U_\varepsilon(a) \text{ nur für endlich viele } k \in \mathbb{N}\\ &\iff \quad \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a\end{aligned}$$ □

Beispiel $(a_n) = (\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
$(n_k) = (2k)_{k\in\mathbb{N}} = (2, 4, 6, \ldots)$
$\implies (a_{n_k}) = (a_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{2k+1})_{k\in\mathbb{N}} = (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots)$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$

Satz 2.17 (Bolzano-Weierstraß) (Bolzano 1781-1848, Weierstraß 1815-1897)
Jede beschränkte Zahlenfolge besitzt wenigstens eine konvergente Teilfolge.

Beweis
Es ist zu zeigen, dass jede Zahlenfolge (a_n) eine monotone Teilfolge (a_{n_k}) besitzt, die beschränkt und damit nach Satz 2.11 auch konvergent ist, d.h. es existiert $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$.
l heiße Gipfelstelle der Folge (a_n), wenn $a_l \geqslant a_{l+j}$ $(j \in \mathbb{N})$ gilt.

(a) Die Menge M der Gipfelstellen von (a_n) bestehe aus unendlich vielen Elementen $l_0 < l_1 < l_2 < \ldots$.
Dann ist die Teilfolge $(a_{l_k})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.

(b) Die Menge M der Gipfelstellen sei endlich. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > \max M$,
dann existieren $n_1 > n_0$ mit $a_{n_0} < a_{n_1}$, $n_2 > n_1$ mit $a_{n_1} < a_{n_2}$ usw.
Also gibt es eine streng monoton wachsende Teilfolge von (a_n). □

Definition 2.18 (Häufungswert)
Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungswert der Zahlenfolge (a_n)
$:\iff$ (a_n) besitzt eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Satz 2.19
Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist Häufungswert der Zahlenfolge (a_n)
$\iff$ $\forall \varepsilon > 0 : a_n \in U_\varepsilon(a)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Definition 2.20 (Limes superior, Limes inferior)
Es sei (a_n) eine beschränkte Zahlenfolge.

(1) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n := \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geqslant n} a_k$
heißt Limes superior und ist der größte Häufungswert von (a_n).

(2) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n := \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geqslant n} a_k$
heißt Limes inferior und ist der kleinste Häufungswert von (a_n).

$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert, denn die Folge $\big(\sup\limits_{k\geqslant n} a_k\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und beschränkt, also konvergent.
$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert, denn die Folge $\big(\inf\limits_{k\geqslant n} a_k\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton steigend und beschränkt, also konvergent.

Bemerkung 2.21
Es gelten:

(1) $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$

(2) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant h \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ für jeden Häufungswert h von (a_n).

(3) (a_n) ist konvergent
$\iff$ (a_n) ist beschränkt $\wedge$ $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$

Beispiele

(1) $(a_n) = \big((-1)^n\big) = (1, -1, 1, -1, \dots)$
$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = -1 = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \min\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$
$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = 1 = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \max\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$

(2)
$$a_n = \begin{cases} 2^n & n \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \frac{1}{n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$
$a_{2k} = 2^{2k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty \implies (a_n)$ ist nicht nach oben beschränkt und daher nicht konvergent.
$a_{2k+1} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{2k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \implies 0$ ist Häufungswert von (a_n).

(3) $(a_n) = (1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \dots)$
Alle $h \in [-1, 1]$ sind Häufungswerte.

2.6 Cauchy'sches Konvergenzkriterium

Nach Definition 2.3 heißt eine Zahlenfolge (a_n) konvergent, wenn der Grenzwert a existiert und es gilt:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon$
Cauchy hatte die Erkenntnis, dass die Frage nach der Konvergenz unabhängig vom Grenzwertbegriff untersucht werden kann.

Definition 2.22 (Cauchy-Folge)
Eine Zahlenfolge (a_n) heißt Cauchy-Folge / Fundamentalfolge
$:\iff \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N} : m, n \geqslant n_0 \implies |a_m - a_n| < \varepsilon$

Bemerkung 2.23
Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge / Fundamentalfolge.

Beweis

Nach Vorraussetzung existiert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_m - a| < \frac{1}{2}\varepsilon$ sowie $|a_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für $m, n \geqslant n_0$.

Die Addition beider Ungleichungen sowie Anwendung der Dreiecksungleichung liefert

$|a_m - a_n| \leqslant |a_m - a| + |a_n - a| < \varepsilon$, also $|a_m - a_n| < \varepsilon$ für $m, n \geqslant n_0$. □

Satz 2.24 (Cauchy'sches Konvergenzkriterium) (Cauchy, 1789-1857)

Die Zahlenfolge (a_n) ist konvergent

$\iff$ (a_n) ist eine Cauchy-Folge / Fundamentalfolge.

Beweis

Nach 2.23 bleibt zu zeigen, dass jede Cauchy-Folge konvergent ist.

I. Es ist zunächst zu zeigen, dass jede Cauchy-Folge beschränkt ist. Dazu wählen wir $\varepsilon = 1$, dann gibt es nach Definition ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_m| - |a_n| \leqslant |a_m - a_n| < 1$ für $m, n \geqslant n_0$.
Es gilt also insbesondere $|a_m| < 1 + |a_{n_0}|$ $(m \geqslant n_0)$.
Folglich ist $|a_n| \leqslant \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a_{n_0}|\}$ für $n \in \mathbb{N}$ und damit ist (a_n) beschränkt.

II. Nun besitzt (a_n) nach Satz 2.17 (Bolzano-Weierstraß) eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert a.
Es ist zu zeigen, dass auch die gesamte Folge (a_n) gegen a konvergiert.
Für $\varepsilon > 0$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_m - a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für $m, n \geqslant n_0$, und weiterhin existiert ein Folgenglied a_N $(N \geqslant n_0)$ mit $|a_N - a| < \frac{1}{2}\varepsilon$, denn (a_n) enthält eine konvergente Teilfolge.
Insgesamt folgt schließlich $|a_n - a| \leqslant |a_n - a_N| + |a_N - a| < \varepsilon$ und (a_n) ist konvergent gegen a. □

Kapitel 3

Unendliche Reihen

3.1 Grundbegriffe & Allgemeine Sätze

Ausgehend von einer Zahlenfolge (a_n) betrachten wir die sogenannte Partialsummenfolge (s_n) mit $s_0 := a_0,\ s_{n+1} := s_n + a_{n+1}\ \ (n \in \mathbb{N})$. Die Folge (s_n) soll in Abhängigkeit von (a_n) untersucht werden. Das Paar $\big((a_n),(s_n)\big)$ heißt unendliche Reihe, als Symbol: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \ldots$.

a_n heißt allgemeines Glied der Reihe, $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ heißt n-te Partialsumme der Reihe.

Definition 3.1 (Konvergenz)
Eine unendliche Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt konvergent

$:\iff$ Die Partialsummenfolge (s_n) ist konvergent

$\iff$ Die Reihensumme $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ existiert.

Falls (s_n) divergent ist, so heißt auch die unendliche Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Bemerkung 3.2
Das Symbol $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ hat zwei Bedeutungen:
Einerseits wird es verwendet als Symbol für die Reihe.
Andererseits ist es auch ein Symbol für die Reihensumme s, falls sie gegen s konvergiert.

Beispiele

(1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k,\ a_n = (-1)^n\ \ (n \in \mathbb{N}), s_n = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$

Die Reihe ist unbestimmt divergent, denn (s_n) ist divergent mit den Häufungswerten 0 und 1.

(2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 1,\ a_n = 1\ \ (n \in \mathbb{N}),\ s_n = n+1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

Die Reihe ist also bestimmt divergent mit $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 1 = \infty$.

(3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(k+1)},\ a_n = \frac{1}{n\cdot(n+1)}\ \ (n \in \mathbb{N}_+,\ a_0 = 0)$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Die Reihe ist folglich bestimmt divergent mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(k+1)} = 1$.

Bemerkung 3.3 (Geometrische Reihe)
Die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a\cdot q^k$ mit $a,q\neq 0$ konvergiert genau für $|q|<1$ und hat die Summe $s=\frac{a}{1-q}$.
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a\cdot q^k = a+a\cdot q+a\cdot q^2+\dots+a\cdot q^n+\dots,\ a_n=a\cdot q^n\quad (n\in\mathbb{N},\ a,q\neq 0)$

Beweis
Aus den Beispielen (1),(2) folgt die Divergenz dieser Reihe für $q=\pm 1$.
Sei nun $|q|\neq 1$, die Partialsummenfolge ist $s_n=\sum\limits_{k=0}^{n} a\cdot q^k = a\cdot\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

$$\text{Mit } \lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & |q|<1 \\ \infty & q>1 \\ \text{unbestimmt divergent} & q<-1 \end{cases}$$

$$\text{folgt } \lim_{n\to\infty} s_n = a\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \begin{cases} a\cdot\frac{1}{1-q} & |q|<1 \\ \operatorname{sgn}(a)\cdot\infty & q>1 \\ \text{unbestimmt divergent} & q<-1 \end{cases} \qquad \square$$

Bemerkung 3.4 (Harmonische Reihe) (J. Bernoulli 1689)
Die harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ ist bestimmt divergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\infty$.
$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots,\ a_n=\frac{1}{n}\quad (n\in\mathbb{N})$

Beweis
Betrachte die Teilfolge $(H_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ der 2^n-ten Glieder der Partialsummenfolge $(s_n)=(H_n)$:

$$\begin{aligned} H_{2^n} &= (1+\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{5}+\dots+\tfrac{1}{8})+(\tfrac{1}{9}+\dots+\tfrac{1}{16})+\dots+(\tfrac{1}{2^{n-1}+1}+\dots+\tfrac{1}{2^n}) \\ &> \tfrac{1}{2}+\underbrace{2\cdot\tfrac{1}{4}}_{=\frac{1}{2}}+\underbrace{2^2\cdot\tfrac{1}{8}}_{=\frac{1}{2}}+\underbrace{2^3\cdot\tfrac{1}{16}}_{=\frac{1}{2}}+\dots+\underbrace{2^{n-1}\cdot\tfrac{1}{2^n}}_{=\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \qquad \square \end{aligned}$$

Bereits L. Euler (1707-1783) erkannte die Divergenz dieser Reihe, obwohl die Partialsummenfolge nur sehr langsam wächst. Beispielsweise ist $H_{1000}=7,48\dots$ und $H_{100000}=14,39\dots$.

Bemerkung 3.5
Die unendliche Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^r}$ ist für $r>1$ konvergent.
$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^r}=1+\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}+\dots+\frac{1}{n^r}+\dots,\ a_n=\frac{1}{n^r}\quad (n\in\mathbb{N},\ r>1)$
Insbesondere existieren die Summen für alle geraden r: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{6}\pi^2,\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{1}{90}\pi^4,\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}=\frac{1}{945}\pi^6,\ \dots$.

Beweis
Da $\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x^r}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{r+1}$ für $r>1$ ist, so folgt nach dem Integralkriterium die Konvergenz der Reihe für $r>1$.
Anders beweist man die Konvergenz, indem man zeigt, dass die Partialsummen beschränkt sind:
Zu beliebigen $n\in\mathbb{N}$ gibt es ein $m\in\mathbb{N}$ mit $n\leqslant 2^{m+1}-1$ und damit gilt

$$s_n\leqslant\sum_{k=1}^{2^{m+1}-1}\frac{1}{k^r}=1+(\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r})+\dots+(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}\frac{1}{k^r})\leqslant\sum_{i=0}^{m}2^i\cdot\frac{1}{(2^i)^k}=\sum_{i=0}^{m}(\frac{1}{2^{k-1}})^i\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}(2^{-k+1})^i=\frac{1}{1-2^{-k+1}} \qquad \square$$

3.2 Konvergenzkriterien

Satz 3.6 (Addition von Reihen)
Seien $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Dann ist auch die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (\lambda \cdot a_k + \mu \cdot b_k)$ konvergent und es gilt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (\lambda \cdot a_k + \mu \cdot b_k) = \lambda \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k + \mu \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$.

Beweis mittels Satz 2.6

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda \cdot a_k + \mu \cdot b_k) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (\lambda \cdot a_k + \mu \cdot b_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \lambda \cdot a_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu \cdot b_k \\ &= \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k + \mu \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k = \lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \mu \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_k\end{aligned}$$ □

Satz 3.7
Seien $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe mit Summe s
und (n_k) eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen.
Dann ist die Reihe $(a_0 + \dots + a_{n_0}) + (a_{n_0+1} + \dots + a_{n_1}) + \dots + (a_{n_k+1} + \dots + a_{n_{k+1}}) + \dots$ konvergent gegen s.

Beweis
Die Partialsummenfolge der Reihe $(a_0 + \dots + a_{n_0}) + \sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_{n_k+1} + \dots + a_{n_{k+1}})$
ist eine Teilfolge der Partialsummenfolge von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und deshalb ebenfalls konvergent gegen s. □

Bemerkung 3.8
In konvergenten Reihen dürfen beliebig Klammern gesetzt werden, ohne dass sich das Konvergenzverhalten ändert. Analoges gilt für das Entfernen von Klammern nicht.

Beispiel $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ ist unbestimmt divergent
Aber $(1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots$ wäre konvergent mit Summe 0
und $1 + (-1+1) + (-1+1) + \dots$ wäre konvergent gegen 1.

Satz 3.9 (Notwendiges Kriterium)
Falls die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent ist, so ist (a_n) eine Nullfolge.

Beweis
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n - \lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$ □

Beispiele

(1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent, also ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

(2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent, obwohl $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
Demnach ist das obige Kriterium nicht hinreichend.

Satz 3.10 (Cauchy'sches Konvergenzkriterium)
Eine Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ist konvergent

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \forall m, n \in \mathbb{N} : n \geqslant m \geqslant n_0 \implies |a_m + \cdots + a_n| = \Big| \sum_{k=m}^{n} a_k \Big| < \varepsilon$$

Beweis
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ist konvergent $\iff$ $\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \Big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge. Außerdem ist $|s_n - s_{m-1}| = |a_m + \cdots + a_n|$. □

3.3 Reihen mit nicht-negativen Gliedern

Satz 3.11 (Hauptkriterium für Reihen mit nicht-negativen Gliedern)
Eine unendliche Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_n \geqslant 0 \ \ (n \in \mathbb{N})$ ist konvergent

$\iff$ Die Partialsummenfolge $(s_n) = \Big(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \Big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Beweis
Aus $a_n \geqslant 0 \ \ (n \in \mathbb{N})$ folgt $s_n \leqslant s_{n+1}$, die Partialsummenfolge ist also monoton wachsend.
Weiter folgt die Behauptung aus Satz 2.11. □

Folgerung 3.12 (Vergleichskriterium)
Seien $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ Reihen mit nicht-negativen Gliedern.
Weiterhin existiere ein $n_0 \in \mathbb{N}$, für das $a_n \leqslant b_n \ \ (n \geqslant n_0)$ gilt.

(1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ ist konvergent
$\implies$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ist konvergent (Majorantenkriterium)

(2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ist divergent
$\implies$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ ist divergent (Minorantenkriterium)

Beweis
Beide Partialsummenfolgen sind monoton wachsend. Beide Behauptungen folgen mit Satz 3.11. □

Beispiele

(1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+n}}$ ist konvergent, denn es gilt $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^4+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^4}} = \frac{1}{n^2}$.
Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist eine konvergente majorante Reihe.

(2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ist divergent, denn es gilt $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{n}$.
Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist eine divergente minorante Reihe.

3.4 Reihen mit beliebigen Gliedern

Definition 3.13 (Absolute Konvergenz)
Eine Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent

$:\Longleftrightarrow$ Die Reihe der Beträge $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ ist konvergent.

Bemerkung
Eine Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent

$\Longrightarrow$ Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ist konvergent.

Beweis
Mit der Dreiecksungleichung gilt $\left|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k\right| = |a_m + \cdots + a_n| \leqslant \big||a_m| + \cdots + |a_n|\big| = \left|\sum\limits_{k=m}^{n} |a_k|\right|$.
Die Behauptung folgt mit dem Cauchy'schen Konvergenzkriterium Satz 3.10. □

Satz 3.14 (Majorantenkriterium)
Eine Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ mit $|a_n| \leqslant c_n \quad (n \geqslant n_0)$ ist konvergent

$\Longrightarrow$ Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.

Beweis
Dies folgt trivialerweise aus Folgerung 3.12.(1). □

Folgerung 3.15 (Cauchy'sches Wurzelkriterium) (Cauchy 1821)
Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ eine unendliche Reihe mit beliebigen Gliedern $a_n \in \mathbb{R}$.

$$C := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \;\begin{matrix} < \\ > \end{matrix}\; 1 \quad\Longrightarrow\quad \text{Die Reihe } \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ ist } \begin{matrix}\text{absolut konvergent} \\ \text{divergent}\end{matrix}.$$

Beweis
(a) Sei $C < 1$, dann existieren $q \in (0,1)$, $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant q \quad (n \geqslant n_0)$.
Mit $|a_n| \leqslant q^n$ ist die geometrische Reihe eine Majorante und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.

(b) Sei $C > 1$, dann existiert eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) mit $|a_{n_k}| > 1 \quad (k \in \mathbb{N})$.
Demnach kann nicht $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ gelten und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ist divergent. □

Bemerkung 3.16
Für $C = 1$ kann keine Aussage gemacht werden.

Beispiele

(1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent mit $C = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$.

(2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent mit $C = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$.

Folgerung 3.17 (d'Alembert'sches Quotientenkriterium) (d'Alembert, 1717-1789)

Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ eine unendliche Reihe mit beliebigen Gliedern $a_n \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{r} D_1 := \limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \\ D_2 := \liminf\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > \end{array} 1 \implies \text{Die Reihe } \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ ist } \begin{array}{l} \text{absolut konvergent} \\ \text{divergent} \end{array}.$$

Beweis

(a) Sei $D_1 < 1$, dann existieren $q \in (0,1)$, $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant q \quad (n \geqslant n_0)$.

Wegen $\left|\frac{a_n}{a_{n_0}}\right| = \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \cdot \left|\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right| \dots \left|\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\right| \leqslant q^{n-n_0}$ gilt $|a_n| \leqslant q^{n-n_0} \cdot |a_{n_0}| = \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}} \cdot q^n$,

also ist die geometrische Reihe eine Majorante und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.

(b) Sei $D_2 > 1$, dann gibt es einen Index n_0, ab dem die Absolutglieder $|a_n|$ streng monoton wachsen.

Demnach kann nicht $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ gelten und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ist divergent. □

3.5 Reihen mit alternierenden Gliedern

Satz 3.18 (Leibniz'sches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen)

Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ eine unendliche Reihe mit alternierenden Gliedern, d.h. es gilt $\forall n \in \mathbb{N} : a_{2n} \geqslant 0 \ \wedge\ a_{2n+1} \leqslant 0$.

Falls dann $(|a_n|)$ eine monoton fallende Nullfolge ist, so gelten:

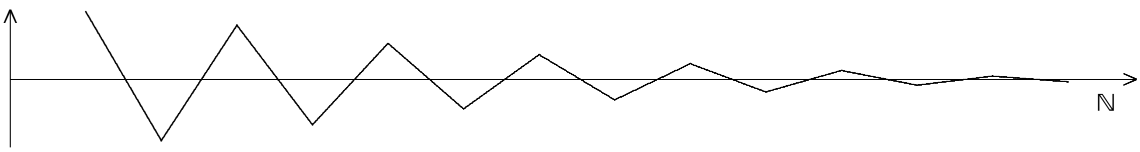
(1) Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ist konvergent gegen s.

(2) $|s - s_n| \leqslant |a_{n+1}| \ \wedge\ \operatorname{sgn}(s - s_n) = \operatorname{sgn}(a_{n+1}) \quad (n \in \mathbb{N})$

Beweis

Beispiel $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots = \ln 2$

Es gilt die Abschätzung $1 - \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.



3.6 Bedingte und unbedingte Konvergenz

Bekanntlich gilt nach dem Kommutativgesetz für Summen mit endlich vielen Gliedern $a_1 + \dots + a_n = a_n + \dots + a_1$. Aber gilt dies auch für Summen mit unendlich vielen Gliedern, d.h. für unendliche Reihen?

Beispiel $\sum a_n = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \pm \dots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k} + \dots = 0$

Wegen $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \infty$ (harmonische Reihe) existiert eine streng monoton wachsende Folge (n_k) aus $\mathbb{N}$ mit $\underbrace{(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n_0})}_{\geqslant 2} + \underbrace{(\frac{1}{n_0+1} + \dots + \frac{1}{n_1})}_{\geqslant 2} + \underbrace{(\frac{1}{n_1+1} + \dots + \frac{1}{n_2})}_{\geqslant 2} + \dots$.

Bilde nun $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n_0} - 1 + \frac{1}{n_0+1} + \dots + \frac{1}{n_1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n_1+1} + \dots + \frac{1}{n_2} - \frac{1}{3} + \dots$,

diese durch Umordnung entstandene Reihe ist divergent gegen ∞.

Definition 3.19 (Umordnung einer Reihe)
Seien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung von auf die natürlichen Zahlen.
Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} = a_{\varphi(0)} + a_{\varphi(1)} + \dots + a_{\varphi(k)} + \dots$ heißt dann eine Umordnung der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Definition 3.20 (Bedingte und unbedingte Konvergenz)
Eine Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt unbedingt konvergent,

$$:\Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \quad \wedge \quad \forall \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ bijektiv} : \sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} = s,$$

d.h. wenn sie konvergent gegen s ist und jede Umordnung auch konvergent gegen s ist.
Ist eine Reihe nicht unbedingt konvergent, so heißt sie bedingt konvergent.

Satz 3.21
Jede absolut konvergente Reihe ist unbedingt konvergent.

Beweis
Zu zeigen: Falls $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = s$ absolut konvergent ist, so gilt auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} = s$ für jedes $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bijektiv.
Sei $\varepsilon > 0$, dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$. $\quad *$
Weiter existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\varphi(m) > n_0$ für $m \geqslant m_0$.
Schließlich ist $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} a_{\varphi(k)} - s\right| \leqslant \underbrace{\left|\sum\limits_{k=0}^{n} a_{\varphi(k)} - \sum\limits_{j=0}^{n_0} a_j\right|}_{\underset{*}{<}\frac{1}{2}\varepsilon} + \underbrace{\left|\sum\limits_{j=0}^{n_0} a_j - s\right|}_{<\frac{1}{2}\varepsilon} < \varepsilon$ für $m, n \geqslant m_0$. $\square$

Bemerkung 3.22
Sei $\sum a_n$ eine Reihe in $\mathbb{R}$, dann gilt:
$\sum a_n$ ist unbedingt konvergent $\iff$ $\sum a_n$ ist absolut konvergent.

Beweis „$\Longleftarrow$" siehe Satz 3.21
B. Riemann (1856) hat gezeigt, dass für eine nicht absolut konvergente Reihe $\sum a_n$ für alle $a \in \mathbb{R}$ eine Umordnung $\sum a_{\varphi(n)}$ mit $\sum a_{\varphi(n)} = a$ existiert. (siehe Heuser, Analysis I)

3.7 Der große Umordnungssatz / Multiplikation von Reihen

3.8 Die Exponentialreihe

Kapitel 4

Komplexe Zahlen

Kapitel 5

Metrische Räume

Kapitel 6

Stetigkeit

Kapitel 7

Elementare Funktionen

7.1 Umkehrfunktionen

f sei eine reelle Funktion einer reellen Variablen, d.h. $D(f) \subset \mathbb{R}$, $W(f) \subset \mathbb{R}$
(andere Schreibweise: $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$)

$$f \text{ monoton } \begin{matrix} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{matrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, x_1, x_2 \in D:\ x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \begin{matrix} f(x_1) \le f(x_2) \\ f(x_1) \ge f(x_2) \end{matrix}$$

$$f \text{ streng monoton } \begin{matrix} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{matrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, x_1, x_2 \in D:\ x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \begin{matrix} f(x_1) < f(x_2) \\ f(x_1) > f(x_2) \end{matrix}$$

$\text{Graph}(f) = \big\{(x, y) : x \in D \wedge y = f(x)\big\}$

Falls f injektiv ist, so besitzt f die Umkehrfunktion f^{-1}.

$\text{Graph}(f^{-1}) = \big\{(y, x) : x \in D \wedge y = f(x)\big\}$

Satz 7.1

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton $\begin{matrix} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{matrix}$, stetig.

Dann gelten:

(1) f injektiv

(2) $f(I) = D$ ist ein Intervall

(3) $f^{-1} : D \to \mathbb{R}$ ist streng monoton $\begin{matrix} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{matrix}$

(4) f^{-1} stetig

Beweis

(1) klar

(2) mit Zwischenwertsatz (6.11) klar

(3) o.E.d.A. sei f streng monoton wachsend und seien $y_1, y_2 \in D$:

$$y_1 < y_2 \quad \text{und} \quad y_i = f(x_i) \quad (i = 1,2) \quad \big(\text{also } x_i = f^{-1}(y_i)\big)$$

Zu zeigen: $x_1 = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) = x_2$

Angenommen es sei für zwei Zahlen $y_1, y_2 \in D$ richtig. Dann gilt:

$$x_1 \geq x_2 \overset{f \text{ monoton}}{\underset{\text{wachsend}}{\Longrightarrow}} y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2 \implies \text{Widerspruch zur Voraussetzung } (y_1 < y_2)$$

(4) Seien $(y_n), y$ aus D, $y_n \to y$

Zu zeigen: $x_n := f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y) = x$

Weil $A = \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ abgeschlossen und beschränkt ist,

existieren $m := \min A$, $M := \max A$; also gelten: $m, M \in D$ und $m \leq y_n \leq M$.

Setze $a := f^{-1}(m)$ und $b := f^{-1}(M)$; dann gilt: $a \leq x_n \leq b$ (da f^{-1} monoton wachsend)

$g = f\big|[a,b]$ ist stetig und streng monoton wachsend $\overset{\text{F. 6.18}}{\Longrightarrow}$ $g^{-1} : [m, M] \to [a, b]$ stetig

Damit folgt mit $f^{-1}\big|[m, M] = g^{-1}$ aus $y_n \to y$ die Beziehung $x_n \to x$ $\big(g^{-1}(y_n) \to g^{-1}(y)\big)$.

Bemerkung 7.2 (Wurzelfunktion) Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.
Die Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = x^k$ $(x \geq 0)$, ist streng monoton wachsend, stetig und $W(f) = [0,\infty)$ (ZWS).

$$y = f(x) = x^k \iff x = \sqrt[k]{y} \qquad (0 \leq x < \infty,\ 0 \leq y < \infty)$$

D.h.: Die Funktion g mit $g(y) = \sqrt[k]{y}$ $(0 \leq y < \infty)$ ist die Umkehrfunktion von f.
Nach dem Satz 7.1 ist g streng monoton wachsend und stetig.

7.2 Logarithmus- und Exponentialfunktionen

7.2.1 Der natürliche Logarithmus

$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(x \in \mathbb{R}$, streng monoton wachsend)

exp ist stetig, denn:

I exp ist an $x_0 = 0$ stetig:

$$\big|\exp(x) - \underbrace{\exp(0)}_{=1}\big| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right| = |x| \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}\right| \leq |x| \cdot \mathrm{e}$$

o.B.d.A. $|x| \leq 1$

Damit gilt: $x \to 0 \implies \exp(x) \to \exp(0) = 1$

II exp ist an $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig:

$$\exp(x_0 + h) - \exp(x_0) = \exp(x_0) \cdot \exp(h) - \exp(x_0) = \exp(x_0)\big(\exp(h) - \exp(0)\big)$$

$h \to 0 \implies \exp(h) - \exp(0) \xrightarrow{\mathrm{I}} 0$

Damit gilt: $\lim\limits_{h\to 0} \exp(x_0 + h) = \exp(x_0)$

$W(\exp) = (0,\infty)$

$\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$, weil für $x > 0$ gilt: $\exp(x) \geq 1 + x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{\exp(-x)} = 0$

Definition 7.3 $y = \ln x \quad :\Longleftrightarrow \quad \exp(y) = x \quad (y \in \mathbb{R},\ x > 0)$

Nach Satz 7.1 ist $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und stetig.

Es gilt: $\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln x_1 + \ln x_2 \quad (x_1, x_2 > 0)$

Beweis Sei $y_i = \ln x_i$ $(i = 1,2)$. Dann gilt (nach Def. 7.3): $\exp(y_i) = x_i$
$x_1 \cdot x_2 = \exp(y_1) \cdot \exp(y_2) \overset{\text{S. 3.26}}{=} \exp(y_1 + y_2)$
$\Longrightarrow \ln(x_1 \cdot x_2) = y_1 + y_2 = \ln x_1 + \ln x_2$

7.2.2 Die Exponentialfunktionen

Definition 7.4 (Exponentialfunktion zur Basis $a > 0$)
Sei $a > 0$. Dann definiert man $a^x := \exp(x \cdot \ln a) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Problem Verträglichkeit mit den bekannten Festlegungen:

$$a^n = \prod_1^n a \quad (n \in \mathbb{N}^*), \qquad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \quad (p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*)$$

Bemerkung
Die Funktion $f(x) := \exp(x \cdot \ln a)$ mit $D(f) = \mathbb{R}$ ist stetig und
erfüllt die Funktionalgleichung $(*)$ $f(x + y) = f(x) \cdot f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$.
Denn: - Die Nacheinanderausführung stetiger Funktionen ist wieder stetig.
- $(*)$ gilt für exp

Bemerkung 7.5
Jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Funktionalgleichung $(*)$ erfüllt, hat die folgenden zwei Eigenschaften:

$$f(n) = f(1)^n \quad (n \in \mathbb{Z}) \qquad f\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{f(1)^p} \quad (q \in \mathbb{N}^*,\ p \in Z)$$

Damit ist insbesondere die obige Verträglichkeitsforderung erfüllt.

Beweis

Fall 1: Es existiere ein $x_0 \in \mathbb{R}$, sodass gilt: $f(x_0) = 0$
$\Longrightarrow f(x) \overset{(*)}{=} f(x - x_0) \cdot f(x_0) = 0$, d.h. $f(x) = 0$

Fall 2: $f(x) \neq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$

(a) Für $n = 0$ ist nach Definition $f(1)^0 = 1$.
Andererseits gilt: $f(0) = f(0 + 0) \overset{(*)}{=} f(0) \cdot f(0) \quad \big| : f(0)$
$\Longrightarrow f(0) = 1 = f(1)^0$

(b) Für $n \in \mathbb{N}^*$ gilt: $f(n) = f\left(\sum_1^n 1\right) \overset{(*)}{=} f(1)^n$

(c) Für $-m \in \mathbb{N}$ gilt: $f(m) \cdot f(-m) \overset{(*)}{=} f(0) \overset{(a)}{=} 1 \quad \Longrightarrow \quad f(m) = \frac{1}{f(-m)} \overset{(b)}{=} \frac{1}{(f(1))^{-m}} = f(1)^m$

(d) $f\left(\frac{p}{q}\right)^q = \underbrace{f\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \ldots \cdot f\left(\frac{p}{q}\right)}_{q\text{-mal}} \overset{(*)}{=} f\left(\sum_1^q \frac{p}{q}\right) = f\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = f(p) \overset{(a),(b),(c)}{=} f(1)^p$

$\Longrightarrow f\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{f(1)^p}$

Satz 7.6 Charakterisierung der Exponentialfunktionen durch ihre Funktionalgleichung
Eine stetige, nicht identisch verschwindende Funktion $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
ist eine Exponentialfunktion genau dann, wenn $F(x+y)=F(x)\cdot F(y) \quad (x,y\in\mathbb{R})$.
Es gelten dann $a:=F(1)>0$ und $F(x)=a^x \ (x\in\mathbb{R})$.

Beweis

I „F ist Exponentialfunktion $\implies \ldots$" (klar, bereits bewiesen)

II Sei F stetig, $F(x)\neq 0$ und F erfülle die Funktionalgleichung
$\overset{\text{Bm. 7.5}}{\implies} F(x)\neq 0 \ (x\in\mathbb{R})$ und $F(r)=a^r$ mit $a=F(1)>0 \quad \left(F(1)=F\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\overset{(*)}{=}\left(F(\frac{1}{2})\right)^2>0\right)$
Sei $x\in\mathbb{R}$, dann existiert (x_n) aus Q mit $x_n\to x$
$\overset{F\text{ stetig}}{\implies} F(x_n)\to F(x)$, d.h. $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}F(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a^{x_n}=a^x$

Bemerkung 7.7 (Potenzgesetze) Für alle $a,b>0$, $x,y\in\mathbb{R}$ gelten:

(a) $(a^x)^y=a^{xy}$

(b) $(a\cdot b)^x=a^x\cdot b^x$

(c) $\left(\frac{1}{a}\right)^x=a^{-x}$

Beweis nur von

(a) NR.: $p:=a^x \implies e^{x\cdot\ln a}\overset{\text{Def. 7.4}}{=}a^x=p=p^1\overset{\text{Def. 7.4}}{=}e^{1\cdot\ln p}=e^{\ln a^x}$
Also gilt: $e^{x\cdot\ln a}=e^{\ln a^x}$
$(a^x)^y\overset{\text{Def. 7.4}}{=}\mathrm{e}^{y\cdot\ln a^x}\overset{\text{NR.}}{=}\mathrm{e}^{(yx)\cdot\ln a}\overset{\text{Def. 7.4}}{=}a^{yx}=a^{xy}$

Bemerkung 7.8 Sei $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $f(x)=a^x$
Falls $\begin{matrix}a>1\\0<a<1\end{matrix}$, ist f streng monoton $\begin{matrix}\text{wachsend}\\\text{fallend}\end{matrix}$.
(z.B.: $\lim\limits_{x\to\infty}e^x=\infty$)

Satz 7.4 Sei $m\in\mathbb{N}$. Dann gelten:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^m}=\infty$
($\Rightarrow$ Die e-Funktion läuft rascher gegen unendlich, als jede Potenzfunktion.)

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{\left(\frac{1}{x^m}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x\cdot x^m=0$

Beweis

(a) $\mathrm{e}^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\geq\frac{x^{m+1}}{(m+1)!} \quad (x>0)$

$\implies \frac{\mathrm{e}^x}{x^m}\geq\frac{x}{(m+1)!}\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$

$\implies \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^m}=\infty$

(b) Zu zeigen: $|x^m\cdot\mathrm{e}^x|\xrightarrow[x\to-\infty]{}0$

$|x^m\cdot\mathrm{e}^x|=\left|\frac{x^m}{\mathrm{e}^{-x}}\right|=\frac{|x|^m}{\mathrm{e}^{|x|}}\overset{(a)}{\xrightarrow[x\to-\infty]{}}0 \quad (x<0)$

7.2.3 Die Logarithmusfunktion

Sei $a > 0,\ a \neq 1$.
Dann ist $f(x) = a^x \ \ (x \in \mathbb{R})$ streng monoton, $D(f) = \mathbb{R},\ W(f) = (0, \infty)$ stetig.

Definition 7.10 $y = \log_a x \iff a^y = x \quad (y \in \mathbb{R},\ x > 0)$

Nach dem Satz 6.1 ist $\log_a$ streng monoton, stetig.

Bemerkung Für $x,\ x_1,\ x_2,\ b > 0$ und $a > 0,\ a \neq 1$ gelten:

(1) $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

(2) $\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$

(3) $\log_a b^x = x \cdot \log_a b$

7.3 Trigonometrische Funktionen

Elementare Einführung

(1) Definition als Streckenverhältnis im Kreis (bei „Kenntnis“ der Zahl π)

(2) Beweis von Eigenschaften (z.B.: Additionstheoreme, Periodizität)
(Nutzung bei: Geometrie, Ähnlichkeitslehre)

(3) Nachweis von Stetigkeit/Differenzierbarkeit

(4) Darstellung von $\sin x$ als Reihensumme

Ziel: Einführung von sin und cos ohne Nutzung der Geometrie (oder gar der Anschauung)

Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kann ins Komplexe fortgesetzt werden:
$e^z = \exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathbb{C})$ $\big($Da die Reihe auf $\mathbb{C}$ konvergent ist (Bw. mit Quotientenkriterium).$\big)$
Es gilt: $(*)\quad \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2) \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C})$
(Da der große Umordnungssatz auch für Reihen mit komplexen Summen gilt.)

Definition 7.11 (Cosinus, Sinus)
$\cos x := \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot x}\right) \qquad \sin x := \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot x}\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$

Bemerkung 7.12 Für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten:

(1) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \cdot \sin x \quad (x \in \mathbb{R})$ (Eulersche Relation)

(2) $\cos x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$

(3) $\sin x = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$

Satz 7.13 (Additionstheoreme) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten:

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \\ \sin(x+y) &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \end{aligned}$$

Beweis Es gilt nach $(*)$: $e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}$

$$\begin{aligned} \overset{\text{Bm. 7.12(1)}}{\iff} \cos(x+y) + i \cdot \sin(x+y) &= (\cos x + i \cdot \sin x) \cdot (\cos y + i \cdot \sin y) \\ &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y + i \cdot (\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y) \end{aligned}$$

(Da 2 komplexe Zahlen genau dann gleich sind, wenn sie in Real- und Imaginärteil übereinstimmen, folgen daraus die Gleichungen.)

Folgerung 7.14 Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten:

(1) $\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1$

(2) $\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x$

(3) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

(4) $|\cos x| \leq 1, \quad |\sin x| \leq 1$

(5) $\cos x - \cos y = 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{y-x}{2} \qquad \left(= -2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}, \text{ da: } \sin(-x) = -\sin x \right)$

$\sin x - \sin y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$

Beweis

(1) $\overset{\text{Bm. 7.12(2)}}{\Longrightarrow}$
$$\begin{aligned} \cos 0 &= \tfrac{1}{2}\left(e^{i\cdot 0} + e^{-i\cdot 0}\right) = \tfrac{1}{2}(1+1) = 1 \\ \sin 0 &= \tfrac{1}{2i}\left(e^{i\cdot 0} - e^{-i\cdot 0}\right) = \tfrac{1}{2i}(1-1) = 0 \end{aligned}$$

(2) $\overset{\text{Bm. 7.12(2)}}{\Longrightarrow}$
$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \tfrac{1}{2}\left(e^{i(-x)} + e^{-i(-x)}\right) = \tfrac{1}{2}\left(e^{-ix} + e^{ix}\right) = \tfrac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \cos x \\ \sin(-x) &= \tfrac{1}{2i}\left(e^{i(-x)} - e^{-i(-x)}\right) = \tfrac{1}{2i}\left(e^{-ix} - e^{ix}\right) = -\tfrac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = -\sin x \end{aligned}$$

(3) $1 \overset{(1)}{=} \cos 0 = \cos(x + (-x)) \underset{y:=-x}{\overset{\text{Satz 7.13}}{=}} \cos x \cdot \underbrace{\cos(-x)}_{\overset{(2)}{=} \cos x} - \sin x \cdot \underbrace{\sin(-x)}_{\overset{(2)}{=} -\sin x} \overset{(2)}{=} \cos^2 x + \sin^2 x$

(4) Aus (3) folgt:
$$\begin{aligned} 1 \geq \cos^2 x &\overset{\sqrt{a^2}=|a|}{\Longrightarrow} 1 \geq |\cos x| \quad (x \in \mathbb{R}) \\ 1 \geq \sin^2 x &\Longrightarrow 1 \geq |\sin x| \end{aligned}$$

(5) folgt aus Satz 7.13

Bemerkung 7.15 Die Funktionen $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig (sogar Lipschitz-stetig).

Beweis nur für Sinus Seien $x, y \in \mathbb{R}$.

Betrachte: $|\sin x - \sin y| = 2 \cdot \underbrace{\left|\cos \frac{x+y}{2}\right|}_{\leq 1} \cdot \left|\sin \frac{x-y}{2}\right| \leq 2 \cdot \left|\sin \frac{x-y}{2}\right|$

Zu zeigen: $y \longrightarrow x \implies \sin y \longrightarrow \sin x$

NR.: $\sin u = 0 \quad + u - \frac{u^3}{3} + \ldots$

$\nwarrow$ hier abbrechen und abschätzen

$\Longrightarrow \quad |\sin u - 0| \leq |u| \;\Rightarrow\; \left|\sin \frac{x-y}{2}\right| \leq \left|\frac{x-y}{2}\right| \qquad \left(\text{für } |u| = \left|\frac{x-y}{2}\right| \leq 1\right)$

$|\sin x - \sin y| \;\leq\; 2 \cdot \left|\frac{x-y}{2}\right| = |x-y| \qquad \text{für} \quad |x-y| \leq 2$

Damit ist die Sinus-Funktion an x stetig.
Es gilt sogar $|\sin x - \sin y| \leq |x-y| \quad (x, y \in \mathbb{R})$, d.h. sie ist Lipschitz-stetig.

Aufgabenstellung Zeige, dass Sinus und Kosinus periodische Funktionen sind und definiere π.

Satz 7.16 cos besitzt im Intervall $[0,2]$ genau eine Nullstelle.

Beweis

(a) Wir zeigen, dass cos auf $[0,2]$ wenigstens eine Nullstelle hat:

$$\cos 2 \;=\; \underbrace{1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!}}_{=-\frac{1}{3}} - \underbrace{\left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\right)}_{>0} - \underbrace{\left(\frac{2^{10}}{10!} - \frac{2^{12}}{12!}\right)}_{>0} - \ldots \qquad \Longrightarrow \quad \cos 2 < 0$$

Da cos stetig ist, $\cos 0 = 1 > 0$ und $\cos 2 < 0$ gelten, folgt mit Satz 6.11 (ZWS), dass cos auf $[0,2]$ (wenigstens) eine Nullstelle hat.

(b) Wir zeigen, dass cos auf $[0,2]$ streng monoton fallend ist, d.h. cos hat dort höchstens eine Nullstelle:

Sei $0 \leq x_1 < x_2 \leq 2$. Zu zeigen: $\cos x_1 > \cos x_2$

Aus 7.14(5) folgt: $\cos x_2 - \cos x_1 \;=\; -2 \cdot \sin \underbrace{\frac{x_1 + x_2}{2}}_{=:\alpha} \cdot \sin \underbrace{\frac{x_2 - x_1}{2}}_{=:\beta}$

Dann gelten: $\alpha, \beta > 0$ und $\alpha, \beta < 2$

NR.: Betrachte $\sin x$ für $0 < x < 2$:

$$\begin{aligned} \sin x \;&=\; x - \tfrac{x^3}{3!} + \underbrace{\left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right)}_{>0} + \underbrace{(\ldots)}_{>0} + \ldots \\ &>\; x \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{3!}\right)}_{>0} \;>\; 0 \qquad (\text{da} \;\; 0 < x < 2) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad \cos x_2 - \cos x_1 < 0 \;\Rightarrow\; \cos x_2 < \cos x_1$

(c) Aus (a) und (b) folgt, dass cos auf $[0,2]$ genau eine Nullstelle besitzt.

Definition 7.17
Es sei $x_0 \in (0,2)$ und $\cos x_0 = 0$. Wir setzen: $\pi := 2x_0$

Ziel Zeige, dass 2π Periode für cos und sin ist $\big(\sin x = \sin(x + 2\pi)\big)$.

Es gilt: $\cos \frac{\pi}{2} \overset{\text{Def. 7.17}}{=} 0 \;\Longrightarrow\; \sin \frac{\pi}{2} = 1$

$\Big($Denn: Aus $\cos^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{2} \overset{\text{F. 7.14(3)}}{=} 1$, folgt $\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$.
Mit Hilfe der NR. von Beweis 7.16(b) gilt: $\sin x > 0$ (für $0 < x < 2$)
Aus $\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$ und $\sin \frac{\pi}{2} > 0$ folgt: $\sin \frac{\pi}{2} = 1\Big)$

Mittels des Satzes 7.13 folgen daraus:

$$\begin{aligned} &\cos \pi = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2}\right) \overset{\text{Satz 7.13}}{=} \left(\cos \tfrac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\sin \tfrac{\pi}{2}\right)^2 = -1 \\ &\sin \pi = \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2}\right) \overset{\text{Satz 7.13}}{=} 2 \cdot \sin \tfrac{\pi}{2} \cdot \cos \tfrac{\pi}{2} = 0 \\ &\cos 2\pi = 1, \quad \sin 2\pi = 0 \end{aligned}$$

Satz 7.18 Für $x \in \mathbb{R}$ gelten:

(a) $\cos(x+2\pi) = \cos x$
$\sin(x+2\pi) = \sin x$

(b) $\cos(x+\pi) = -\cos x$
$\sin(x+\pi) = -\sin x$

(c) $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$
$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

Beweis (mit den Additionstheoremen)
z.B.: $\cos(x+2\pi) = \cos x \cdot \cos 2\pi - \sin x \cdot \sin 2\pi = \cos x$

Bemerkung 7.19 (Geometrische Bedeutung von Cosinus und Sinus am Kreis)
Sei $r > 0$. Betrachte die Punkte (x, y) mit: $x = r \cdot \cos t, \quad y = r \cdot \sin t \qquad (0 \le t \le 2\pi)$
Damit gilt: $x^2(t) + y^2(t) = r^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = r^2$
D.h. alle Punkte liegen auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt $M(0,0)$ und dem Radius r.

Frage Welche Bedeutung hat t? $(\cos t = \frac{x}{r})$

$$t = \frac{\overset{\frown}{AP}}{r} \quad \ldots \text{ (Beweis später, siehe Integralrechnung)} \qquad (\overset{\frown}{AP} \cong \text{Länge des Bogens})$$

$\Longrightarrow$ Cosinus erfüllt alle wichtigen Eigenschaften

Definition 7.20

(1) $\tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right)$

(2) $\cot x := \frac{\cos x}{\sin x} \quad (x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$

Kapitel 8

Differentialrechnung

Kapitel 9

Integralrechnung

Teil II

Analysis II

Kapitel 10

Funktionsfolgen- und Reihen

Beispiel Es gilt $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ $(x \in \mathbb{R})$, dass heißt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = \mathrm{e}^x$ mit $s_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ $(x \in \mathbb{R})$.
Also ist (s_n) mit $s_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ eine Funktionenfolge mit dem Grenzwert $s(x) = \mathrm{e}^x$ $(x \in \mathbb{R})$.
Die Folge (s_n) konvergiert punktweise gegen die Funktion s.

Problem: $f_n \to f$ punktweise
Gesucht sind Bedingungen dafür, dass sich die Eigenschaften von f_n auf f übertragen
(Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit).

Beispiel $f_n(x) = x^n$ $(x \in [0,1])$

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Die Funktionenfolge f_n ist also auf $[0,1)$ stetig aber bei $x = 1$ unstetig.

Die Eigenschaft „$f_n \to f$ punktweise" muss verschärft werden,
der passende Begriff ist der der gleichmäßigen Konvergenz.

10.1 Gleichmäßige Konvergenz

Definition 10.1
Es seien $K \neq \emptyset$, $f_n : K \longrightarrow \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$, $f : K \longrightarrow \mathbb{C}$.

Die Funktionenfolge (f_n) heißt

(1) punktweise konvergent gegen f $(f_n \to f$ punktweise$)$

$$:\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad (x \in K)$$

$$:\Longleftrightarrow \quad \forall x \in K \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in N: \quad n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

(2) gleichmäßig konvergent gegen f (auf K)

$$:\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall x \in K \ \forall n \in N: \quad n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Bemerkung 10.2

(1) $f_n \to f$ gleichmäßig $\iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}:$

$$n \geqslant n_0 \implies \left\| f_n - f \right\|_K := \sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$\left\| f_n - f \right\|_K$ heißt Supremum-Norm von $f_n - f$ auf K.

(2) $f_n \to f$ gleichmäßig $\implies f_n \to f$ punktweise

Satz 10.3

Sei (K, d) metrischer Raum, $f_n : K \longrightarrow \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ stetig und $f : K \longrightarrow \mathbb{C}$.

$f_n \to f$ gleichmäßig konvergent
$\implies$ f stetig

Beweis

Sei $x_0 \in K$,
zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in K: \quad d(x, x_0) < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$, dann

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0) + f(x) - f_n(x)| \\ &\leqslant |f_n(x) - f_n(x_0)| + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{<\frac{1}{3}\varepsilon} + \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{<\frac{1}{3}\varepsilon} \end{aligned}$$

für $n \geqslant n_0$ (mit passendem n_0) für alle $x \in K$ (wegen gleichmäßiger Konvergenz)

Wähle $n_1 \geqslant n_0$ fest:

$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(x_0)| + \frac{2}{3}\varepsilon$

Wegen f_{n_1} stetig in x_0, existiert ein $\delta > 0$, sodass gilt:

$|f_{n_1}(x) - f_{n_1}(x_0)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ für $d(x, x_0) < \delta$

$|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon$ für $d(x, x_0) < \delta$ □

Satz 10.4 (Majorantenkriterium)

Seien $K \neq \emptyset$, (f_n) Funktionenfolge $f_n : K \longrightarrow \mathbb{C}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe mit $c_n \geqslant 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

$|f_n(x)| \leqslant c_n \quad (x \in K,\ n \in \mathbb{N}) \iff ||f_n||_K \leqslant c_n \quad (n \in \mathbb{N})$
$\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolut konvergent für alle $x \in K$ und gleichmäßig konvergent auf K

Beweis

Bekanntlich ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolut konvergent (Satz 3.14)

Seien $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) = s_n(x)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) = F(x)$ für $x \in K$, dann gilt $\|F - s_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$,

denn $|F(x) - s_n(x)| \leqslant \left| \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} c_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \implies s_n \longrightarrow F \quad (x \in K)$

d.h. (s_n) konvergiert gleichmäßig gegen F. □

Beispiel $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(\ln n)^2} = F(x)$

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ ist konvergente Majorante auf $\mathbb{R}$, denn $|f_n(x)| = \left| \frac{\sin nx}{n(\ln n)^2} \right| \leqslant \frac{1}{n(\ln n)^2} \quad (x \in \mathbb{R},\ n \geqslant 2)$

$\Longrightarrow \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(\ln n)^2}$ ist gleichmäßig konvergent gegen F
$\Longrightarrow F$ ist auf $\mathbb{R}$ definiert, stetig (Satz 10.3)

10.2 Potenzreihen (Konvergenzradius)

Definition 10.5
Sei (a_n) Folge in $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$

Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-z_0)^n$ heißt Potenzreihe mit dem Mittelpunkt z_0 und den Koeffizienten a_n.

Beispiele
(1) $\sum \frac{1}{n!} z^n$ ist Potenzreihe mit Mittelpunkt $z_0 = 0$, Konvergenzmenge $M = \mathbb{C}$

(2) $\sum \frac{1}{z^n}$ ist keine Potenzreihe, $z \in M \Longleftrightarrow \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Longleftrightarrow |z| > 1 \implies M = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$

<u>Ziel:</u> Untersuchung der Konvergenzmengen von Potenzreihen

Satz 10.6
Seien $z_1, z_0 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_0$. Die Potenzreihe (P) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-z_0)^n$ sei in z_1 konvergent.
Dann gelten:

(1) (P) konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$

(2) Sei $\rho \in \mathbb{R}$, $0 < \rho < |z_1 - z_0|$, $K := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant \rho\}$ (Kreisscheibe)

(2a) (P) konvergiert auf K gleichmäßig

(2b) (P') $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (z-z_0)^{n-1}$ konvergiert auf K gleichmäßig

Beweis Es genügt (2) zu zeigen: o.E.d.A. sei $z_0 = 0$

(I) $\sum |a_n| \rho^n$ ist konvergent, denn $|a_n| \rho^n = \left|a_n z_1^n \cdot \frac{\rho^n}{z_1^n}\right| = \left|a_n z_1^n\right| \cdot \left|\frac{\rho}{z_1}\right|^n$
$\exists \widetilde{M} > 0 : \left|a_n z_1^n\right| \leqslant \widetilde{M}$ $(n \in \mathbb{N})$, also $|a_n| \rho^n \leqslant \widetilde{M} \cdot \left|\frac{\rho}{z_1}\right|^n$ $(n \in \mathbb{N})$ und
$\sum \left(\frac{\rho}{|z_1|}\right)^n$ $\left(, \left|\frac{\rho}{z_1}\right| < 1\right)$ ist konvergente Majorante

(II) Wegen $|a_n \cdot (z-z_0)^n| \leqslant |a_n| \rho^n$ $(z \in K)$ ist $\sum |a_n| \rho^n$ eine konvergente Majorante für alle $z \in K$
$\overset{Satz\ 10.4}{\Longrightarrow} (2a)$

(III) Wegen $\left|n a_n (z-z_0)^{n-1}\right| \leqslant n \cdot \frac{\widetilde{M}}{|z_1 - z_0|} \cdot \left(\frac{\rho}{|z_1 - z_0|}\right)^{n-1}$ und
$\sum n \cdot \frac{\rho^{n-1}}{(z_1 - z_0)^{n-1}}$ konvergent (Quotientenkriterium), folgt $(2b)$. □

Folgerung 10.7
Sei M die Menge $M = \{z \in \mathbb{C} : \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-z_0)^n$ konvergent$\}$

Es gilt entweder M unbeschränkt ($\Longleftrightarrow M = \mathbb{C}$) oder
es existiert eine reelle Zahl $r \geqslant 0$ mit $r = \sup\{|z - z_0| : z \in M\}$.
Dann gilt: $|z - z_0| < r \implies z \in M$ (Reihe konvergent) sowie $|z - z_0| > r \implies z \notin M$ (Reihe divergent)

Definition 10.8 (Konvergenzradius)
Sei (P) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe.

Die Zahl $r = \sup\{|z-z_0| : z \in M\}$ heißt Konvergenzradius von (P).
Falls $M = \mathbb{C}$ gilt, so setzt man $r = \infty$.

Folgerung 10.9

(1) $(P), (P')$ haben denselben Konvergenzradius.

(2) $r = \sup\{\rho > 0 : \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \rho^n < \infty\} = \sup\{\rho > 0 : (a_n \cdot \rho^n) \text{ beschränkt}\}$

Beweis folgt aus Satz 10.6 (1),(2)

Beispiele

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ Mittelpunkt $z_0 = 0$, Konvergenzradius $r = 1$, denn nach Wurzelkriterium, Satz 3.15 gilt

$C = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z^n|} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z|^n} = \limsup\limits_{n\to\infty} |z| = |z|$

$$\left.\begin{array}{l} |z| < 1 \Longrightarrow \sum z^n \text{ absolut konvergent} \\ |z| > 1 \Longrightarrow \sum z^n \text{ divergent} \end{array}\right., \text{ d.h. } r = 1$$

Für $|z| = 1$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} |z^n| = 1 \neq 0$ (keine Nullfolge), also nicht konvergent. $\Longrightarrow$ $M = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ Mittelpunkt $z_0 = 0$, Konvergenzradius $r = 1$, denn

$C = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|z^n|}{n^2}} = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|z|}{\sqrt[n]{n^2}} = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|z|}{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}} = |z|$

$\sum \frac{z^n}{n^2}$ ist konvergent für $|z| = 1$ $\quad$ ($\sum \frac{1}{n^2} < \infty$)

$\Longrightarrow$ $M = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$

Satz 10.10 (Cauchy-Hadamard) (Cauchy, 1789-1857; Hadamard, 1865-1963)
Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-z_0)^n$ Potenzreihe.

Dann gilt für den Konvergenzradius $r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$. Es wird $\frac{1}{+0} = \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$ gesetzt.

Beweis mittels Wurzelkriterium

Bemerkung
Sei $r > 0$ der Konvergenzradius der reellen Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$.

Dann ist die Funktion $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ auf $(x_0 - r, x_0 + r)$ stetig,
denn nach den Sätzen 10.6 und 10.3 sind Potenzfunktionen der Partialsummen stetig.

Satz 10.11 (Abelscher Grenzwertsatz) (N.H. Abel, 1802-1829)
Die reelle Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$ habe den Konvergenzradius $r > 0$
und sei auf $I = (x_0 - r, x_0 + r]$ konvergent.

Dann ist die Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$ stetig.

Beweis Nur zu zeigen, dass f an $x_0 + r$ stetig ist, denn auf $(x_0 - r, x_0 + r)$ ist f bereits stetig
Seien o.E.d.A. $x_0 = 0,\ r = 1$:
$f(1) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \qquad s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \quad (s_n \to f(1))$

Es gilt: $f(x) \overset{(*)}{=} (1-x) \sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n x^n \quad (|x| < 1) \qquad (s_{n+1} - s_n = a_{n+1})$

Zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \ |1-x| < \delta \implies |f(1) - f(x)| < \varepsilon$

Für $|x| < 1$ gilt $\quad f(1) - f(x) = (1-x) \cdot f(1) \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n - \underbrace{(1-x) \sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n x^n}_{(*)} = (1-x) \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[f(1) - s_n \right] x^n$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|f(1) - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geqslant n_0$.
Für $0 < x < 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
|f(1) - f(x)| &\leqslant (1-x) \sum_{n=0}^{n_0 - 1} |f(1) - s_n| \cdot x^n + \frac{\varepsilon}{2}(1-x) \sum_{n=n_0}^{\infty} x^n \\
&\leqslant (1-x) \underbrace{\sum_{n=0}^{n_0-1} |f(1) - s_n|}_{\text{feste Zahl}} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für } |1-x| \text{ hinreichend klein}
\end{aligned}$$

Somit gilt schließlich $|1 - x| < \delta \implies |f(1) - f(x)| < \varepsilon$ □

Beispiel 10.12 $\arctan x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2x+1}$ für $|x| < 1$ (Beweis folgt im Abschnitt 10.3)
Ersichtlich ist $r = 1$ und die Potenzreihe ist in $x = 1$ konvergent.
$(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots) \overset{\text{Satz 10.11}}{\implies} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 < x \leqslant 1)$ an $x_1 = 1$ stetig
Bilde $\lim\limits_{x \nearrow 1} \arctan x$: $\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$

10.3 Differentiation und Integration von Grenzfunktionen

Satz 10.13
Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{R} \ (n \in \mathbb{N})$ stetig, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Falls $f_n \to f$ gleichmäßig, so gilt
$\left(\int\limits_a^b \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)\, \mathrm{d}x = \right) \int\limits_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_a^b f_n(x)\, \mathrm{d}x$

Beweis
Nach Satz 10.3 ist f stetig, somit existiert $\int\limits_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \ (a < b)$.

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x - \int_a^b f_n(x)\, \mathrm{d}x \right| &\overset{\substack{\text{Integral ist} \\ \text{ein Funktional}}}{\leqslant} \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\, \mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_a^b \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - f_n(x)|\, \mathrm{d}x = \|f - f_n\|_{[a,b]} \cdot (b-a)
\end{aligned}$$

Da gleichmäßige Konvergenz bedeutet $\|f - f_n\| \to 0$, gilt somit: $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_a^b f_n(x)\, \mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ □

Bemerkung
„$f_n \to f$ punktweise“ sichert u.a. das Vertauschen der Grenzprozesse nicht.

$f_n(x) \to f(x) = 0$ punktweise auf $[0,1]$, aber: $\int\limits_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1 \not\to \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

Bemerkung 10.14 (Differentiation)

$f_n \to f$ gleichmäßig; $f_n,\ f$ stetig differenzierbar $\not\Rightarrow$ $(f_n' \to f'$ punktweise$)$

Beispiel $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin nx,\ f(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$

$\|f_n - f\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\frac{1}{n}\sin nx| = \frac{1}{n} \to 0$, d.h. $f_n \to f$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$.

Jedoch $f_n'(x) = \cos nx \not\to f'(x) = 0$ z.B. für $x = \frac{\pi}{2}$

Satz 10.15

Die Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N})$ seien stetig differenzierbar.

Sei $f_n \to f$ punktweise, f_n' konvergiere gleichmäßig.

Dann ist f differenzierbar mit $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$

Beweis

Sei $g(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$

Zu zeigen: $g = f'$

Nach dem HS der D-I-R gilt $f_n(x) = f_n(a) + \int\limits_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t$ ($\lim\limits_{n\to\infty}$ mit Satz 10.13 bilden)

$\iff \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(a) + \int\limits_a^x \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(t)\,\mathrm{d}t$

$\iff f(x) = f(a) + \int\limits_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \quad \Big| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$

$\iff f'(x) = g(x)$ HS der D-I-R $(a \leqslant x \leqslant b)$ □

Folgerung 10.16

Sei $x_0 \in \mathbb{R},\ a_n \in \mathbb{R}\ (n \in \mathbb{N})$

Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ habe den Konvergenzradius $r > 0$.

Dann ist die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad I = (x_0 - r, x_0 + r)$

differenzierbar, und es gilt: $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$

Beweis

Wegen Folgerung 10.5 konvergiert die Reihe $\sum n a_n (x - x_0)^{n-1}$ gleichmäßig auf jedem kompakten Teilintervall von $(x_0 - r, x_0 + r)$. Damit ist f auf $(x_0 - r, x_0 + r)$ differenzierbar und

$f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$ (Satz 10.15) □

Beispiele

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (\,|x| < 1\,) \quad \overset{\text{F. 10.16}}{\Longrightarrow} \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{-(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (\,|x| < 1\,)$

(2) Integral-Sinus: $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \sin t = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (t \in \mathbb{R})$

$$\overset{\text{Satz ...}}{\Longrightarrow} \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int\limits_0^x \frac{t^{2n-2}}{(2n-1)!}\,\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!\,(2n-1)} - 0\right] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!\,(2n-1)} \quad (x \in \mathbb{R})$$

(3) Potenzreihe für arctan

$f(x) = \arctan x \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)}$

$f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad$ für $|x| < 1,\ r = 1$

$\arctan x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^x (-1)^n t^{2n}\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (\,|x| < 1\,)$

Folgerung 10.17

Die Potenzreihe $(P)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ habe den Konvergenzradius $r > 0$.

Dann ist die Funktion $f : (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ beliebig oft differenzierbar, und es gilt: $\quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \quad (n \in \mathbb{N})$

Beweis

Nach Folgerung 10.16 ist f beliebig oft differenzierbar und

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x-x_0)^{n-1} \\ f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n \cdot (x-x_0)^{n-2} \\ f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot a_n \cdot (x-x_0)^{n-k} \quad (k = 0,1,\ldots) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow f^{(k)}(x_0) = k(k-1)(k-2) \cdot \ldots \cdot 1 \cdot a_k \;=\; k! \cdot a_k$

$\Longrightarrow a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \quad (k = 0,1,\ldots)$ □

Bemerkung 10.18

Eine Funktion f ist in der Umgebung $U(x_0)$ höchstens auf eine Weise als Potenzreihe darstellbar. Diese Reihe ist die Taylorreihe von f mit dem Entwicklungspunkt x_0 (siehe Def. 10.19).

10.4 Taylorsche Formel / Taylorreihen

Definition 10.19

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar.

Dann heißt die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ Taylorreihe von f mit dem Entwicklungspunkt a.

Bemerkung 10.20

Die Taylorreihe stellt die Funktion f dar $\left(\text{d.h. } f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n,\ (x \in I)\right) \Longleftrightarrow \quad \mathrm{R}_{n+1}(x) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (x \in I)$

Satz 10.21 (Taylorsche Formel)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar, seien $a, x \in I$.

Dann existiert ein $\xi \in (a, x)$, sodass

$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \mathrm{R}_{n+1}(x)$

mit $\quad \mathrm{R}_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad$ Lagrangesche Form des Restgliedes.

Beweis

Hilfsfunktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(y) = \sum\limits_{n=0}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}\,(x-y)^k + c \cdot (x-y)^{n+1}$ einführen

und c so bestimmen, dass φ auf $[a,x]$ die Voraussetzungen des Satzes von Rolle (Satz 8.17) erfüllt.

$\big(\varphi(a) = \varphi(x),\ \varphi$ auf $[a,x]$ differenzierbar $\implies \exists \xi \in (a,x) : \varphi'(\xi) = 0\big)$

$\varphi(x) = f(x) \quad \implies \quad \varphi(a) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + c \cdot (x-a)^{n+1} = f(x)$

$\implies \quad c = \dfrac{\mathrm{R}_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}$

Dann existiert ein $\xi \in (a,x)$ und $\varphi'(\xi) = 0$, sodass gilt:

$\varphi'(y) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(y)}{k!}\,(x-y)^k - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{(k-1)!}\,(x-y)^{k-1} - (n+1) \cdot c \cdot (x+y)^n$

$$\begin{aligned} \text{Für } l = k-1: \quad \varphi'(y) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(y)}{k!}\,(x-y)^k - \sum_{l=0}^{n-1} \frac{f^{(l+1)}(y)}{l!}\,(x-y)^l - (n+1) \cdot c \cdot (x+y)^n \\ &= \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}\,(x-y)^n - (n+1) \cdot c \cdot (x-y)^n \end{aligned}$$

$\varphi'(\xi) = 0 \implies c = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

$\implies \quad \mathrm{R}_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}$ □

Bemerkung 10.22

Die Formel $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + \mathrm{R}_{n+1}(x)$ mit $\mathrm{R}_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}$

heißt Taylorsche Formel für f mit dem Entwicklungspunkt a,

$p_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k$ Taylorsches Näherungspolynom und R_{n+1} heißt Restglied.

Beispiel $f(x) = \mathrm{e}^x$ ist an $a = 0$ zu entwickeln und das Restglied ist anzugeben.

$f'(x) = \mathrm{e}^x,\ f''(x) = \mathrm{e}^x, \ldots, f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x \quad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}),\quad f^{(n)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1$

$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \mathrm{R}_{n+1}(x)$

$\mathrm{R}_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,x^{n+1}$ mit passendem $\xi \in (0,x)$

$f^{(n+1)}(\xi) = \mathrm{e}^\xi$

$\implies f(x) = \mathrm{e}^x = 1 + \frac{1}{1!}\,x + \frac{1}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{1}{k!}\,x^k + \ldots + \frac{1}{n!}\,x^n + \frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)!}\,x^{n+1}$

Wegen $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (Def. 3.25 / Satz 3.26) muss gelten $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{R}_n(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Beispielaufgabe Berechnen Sie e auf 4 Dezimalen genau.

$\mathrm{e} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} + \frac{\mathrm{e}^{\xi_n}}{(n+1)!}$ mit $\xi_n \in (0,1)$

Suche $n \in \mathbb{N}$ mit $|\mathrm{R}_{n+1}| < 0{,}5 \cdot 10^{-4}$, desshalb

$|\mathrm{R}_{n+1}| < \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!} < \underbrace{\frac{3}{(n+1)!} < 0{,}5 \cdot 10^{-4}}$ $(2 < \mathrm{e} < 3)$

$\iff (n+1)! > 6 \cdot 10^4 = 60.000 \quad \iff \quad n < 9 \qquad (9! = 362.880)$

$\implies \quad \mathrm{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{8!} \approx 2{,}7183$

Bemerkung 10.23

(1) Der Mittelwertsatz (Satz 8.13) ist ein Spezialfall des Taylorschen Satzes:
f sei auf $[a,x]$ differenzierbar
$\implies \exists \xi \in (a,x) : f(x) = f(a) + \frac{f'(\xi)}{1!} \cdot (x-a)$

(2) $R_{n+1}(x)$ misst die Güte der Approximation der Funktionwerte $f(x)$ durch $p_n(x)$
Voraussetzungen wie in Satz 10.21, aber $f^{(n+1)}$ außerdem stetig. Dann gelten:

(a) $R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in I)$
Integralform des Restgliedes

(b) Es existiert ein $\xi \in (a,x)$ mit $\quad R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-\xi)^n \cdot (x-a)$
Restglied von Cauchy

Beweis nur (2a), durch vollständige Induktion

IA: $n=0: \; f(x) = f(a) + \int\limits_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ richtig nach dem HS der DIR

IV: Sei $R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \left(f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)\right)$

IS:
$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &\overset{\text{part. Int.}}{=} -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\Big|_a^x - \int\limits_a^x -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int\limits_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$(2b)$ folgt aus $(2a)$ mit MWS der IR (F. 9.18) □

Bemerkung 10.24 (Taylorreihe)
Sei $I \in \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar

(1) $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \iff R_{n+1}(x) \longrightarrow 0 \quad (x \in I)$

(2) Es gibt Funktionen mit konvergenter Taylorreihe, die nicht durch ihre Taylorreihe dargestellt werden. Beispiel:
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$
f beliebig oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$, $f^{(n)}(0) = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$, also gilt für die Taylorreihe:
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$ konvergent auf $\mathbb{R}$, aber $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \neq f(x) \quad (x > 0)$

(3) Ist $f : I \to \mathbb{R}$ durch eine Potenzreihe definiert, d.h. $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \quad (x \in I)$,
so ist diese Potenzreihe die Taylorreihe von f an a. (siehe F. 10.17)

Beispiel 10.25 Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ als Potenzreihe darstellbar?
Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$\begin{aligned} &f(x) = \ln(1+x) && f(0) = 0 \\ &f'(x) = (1+x)^{-1} && f'(0) = 1 \\ &f''(x) = (-1)\cdot(1+x)^{-2} && \vdots \\ &\quad\vdots && \vdots \\ &f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}(k-1)!\,(1+x)^{-k} && f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)! \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$

$\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k} + R_{n+1}(x) \quad (x > -1)$

Es gilt: $(*)\ \ln(1+x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{x^k}{k} \iff \lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{R}_{n+1}(x)=0$

Notwendig für $(*)$: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{x^k}{k}$ ist konvergent.

Konvergenzradius: $r=\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\left|\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right|}}=1$

$\implies \sum$ konvergiert für alle $x\in(-1,1]$

Behauptung: $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}$ gilt genau für $x\in(-1,1]$

Beweis

(a) Sei $0\leqslant x\leqslant 1$

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= (-1)^{n+2}\cdot n!\cdot(1+x)^{-(n+1)}\\
\mathrm{R}_{n+1}(x) &= \tfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}\cdot\tfrac{1}{(1+\vartheta x)^{n+1}}\cdot x^{n+1}\quad(0<\vartheta<1)\\
|\mathrm{R}_{n+1}(x)| &= \left|\tfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right|\cdot\left|\tfrac{x^{n+1}}{(1+\vartheta x)^{n+1}}\right|\\
|\mathrm{R}_{n+1}(x)| &\leqslant \tfrac{1}{n+1}\cdot\left(\tfrac{x}{1+\vartheta x}\right)^{n+1}\leqslant\tfrac{1}{n+1}\cdot\left(\tfrac{x}{1+0}\right)^{n+1}\\
&\leqslant \tfrac{1}{n+1}\quad(0\leqslant x\leqslant 1)
\end{aligned}$$

(b) Sei $-1<x<0$ Cauchysches Restglied

$$\begin{aligned}
|\mathrm{R}_{n+1}(x)| &= \left|\tfrac{1}{(1+\vartheta x)^{n+1}}\cdot(x-\vartheta x)^n\cdot x\right|_{0<\vartheta=\vartheta_n<1}\\
|\mathrm{R}_{n+1}(x)| &= \tfrac{|x|^{n+1}}{|1+\vartheta x|}\cdot\left(\tfrac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^n
\end{aligned}$$

Es gelten: $0<\frac{1}{1+\vartheta x}<\frac{1}{1+x}$

$0<1-\vartheta<1+\vartheta x \implies \left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^n<1,$

sodass $|\mathrm{R}_{n+1}(x)|\leqslant\frac{1}{1+x}\,|x|^{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ □

Satz 10.26
Falls f auf dem Intervall $I[c,d]$; $c,d\in\mathbb{R}$, beliebig oft differenzierbar ist und
$\exists K>0\ \forall n\in\mathbb{N}:\ \sup\limits_{x\in I}|f^{(n)}(x)|\leqslant K^n$,
so gilt für $a\in I$:
$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(a)\cdot\frac{(x-a)^n}{n!}\quad(x\in I)$

Beweis Zu zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{R}_{n+1}(x)=0\quad(x\in I)$

Es gilt: $\mathrm{R}_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}$ für ein passendes $\xi\in(a,x)$ mit $a,x\in I$

$$\begin{aligned}
\implies\quad |\mathrm{R}_{n+1}(x)| &= \tfrac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}\cdot|x-a|^{n+1}\\
&\leqslant \tfrac{K^{n+1}}{(n+1)!}\,(d-c)^{n+1}\xrightarrow{(*)}0
\end{aligned}$$

Weil $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{K^{n+1}}{(n+1)!}\,(d-c)^{n+1}$ konvergent ist (e-Reihe), gilt: $(*)\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{K^{n+1}}{(n+1)!}\,(d-c)^{n+1}=0$ □

10.5 Weitere Anwendungen

(1) **Binomische Reihe**

Es gilt $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ nach dem Binomischen Satz $(n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R})$.

Satz 10.27 (Binomische Reihe)
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, dann gilt: $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (|x|<1)$

Beweis

(I) Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n =: B_\alpha(x)$ ist konvergent für $|x|<1$ (nach Quotientenregel) und genügt der folgenden Differentialgleichung:
$(1+x)\cdot B'_\alpha(x) = \alpha \cdot B_\alpha(x) \quad (|x|<1)$

(II) Zu zeigen $B_\alpha(x) = (1+x)^\alpha \quad (|x|<1)$
Es gilt $B_\alpha(0)=1$. Wegen B_α stetig, existiert ein δ $(0<\delta\leqslant 1)$ mit $B_\alpha(x)>0 \quad (|x|<\delta)$.
Also $\frac{B'_\alpha(x)}{B_\alpha(x)} = \frac{\alpha}{1+x} \quad (|x|<\delta)$

$\Longrightarrow \ln B_\alpha(x) = \alpha\cdot\ln(1+x) + C \qquad (C=0, \text{ da } B_\alpha(0)=1)$
$\Longrightarrow (*)\ B_\alpha(x) = (1+x)^\alpha \quad (|x|<\delta)$
$(*)$ gilt auch für $\delta=1$, denn sonst existierte ein δ_0 $(|\delta_0|<1)$ mit
$B_\alpha(x) = (1+x)^\alpha \quad (|x|<\delta_0)$ und $B_\alpha(\delta_0)=0$
für $x\to\delta_0 \overset{\text{Stetigkeit von}}{\underset{B_\alpha \text{ an } \delta_0}{\Longrightarrow}} 0 = B_\alpha(\delta_0) = (1+\delta_0)^\alpha \neq 0$ Widerspruch! □

(2) **Berechnung des Umfangs der Ellipse**

Für die Punkte auf der Ellipse gilt: $x = a\cdot\cos t,\ \ y = b\cdot\sin t \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$

$$s = 4\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\dot{x} = -a\cdot\sin t,\quad \dot{y} = b\cdot\cos t$$

$$\begin{aligned}\dot{x}^2+\dot{y}^2 &= b^2\left(\cos^2 t + \tfrac{a^2}{b^2}\sin^2 t\right)\\ &= b^2\left(1+\left(\tfrac{a^2}{b^2}-1\right)\sin^2 t\right)\\ &= b^2\Big(1-\underbrace{\tfrac{b^2-a^2}{b^2}}_{\varepsilon^2}\sin^2 t\Big)\end{aligned}$$

$0<\varepsilon<1$ Numerische Exzentrizität (Abweichung vom Kreis)

$$s = 4\cdot b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varepsilon^2\cdot\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{(nicht elementar auswertbar)}$$

$\sqrt{1-u} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n}\cdot \underbrace{(-u)^n}_{(-1)^n\cdot u^n}$ gilt für $|u|<1$ und es folgt weiter

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \varepsilon^{2n}$ absolut konvergent mit $u=\varepsilon^2<1$

(b) $\sqrt{1-\varepsilon^2\cdot\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^n\,\varepsilon^{2n}\cdot\sin^{2n} t}_{u_n(t)}$

Falls die Reihe auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ gleichmäßig konvergent ist, so darf gleicherweise integriert werden (Satz 10.13), wir nutzen den Satz 10.14

$|u_n(t)| = \left|\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^n\,\varepsilon^{2n}\,\sin^{2n}t\right| \leqslant \left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\,\varepsilon^{2n}\right| \quad (0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2})$

$\Longrightarrow$ Da $\sum\binom{\frac{1}{2}}{n}\varepsilon^{2n}$ konvergente Majorante für alle Reihen $(*)$ $\sum\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^n\,\varepsilon^{2n}\cdot\sin^{2n}t$ ist, sind die Reihen $(*)$ gleichmäßig konvergent

$$\Longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^n\,\varepsilon^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t$$

$$\text{NR:}\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t = \begin{cases}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}\cdot\frac{\pi}{2} & n=1,2,\ldots\\ \frac{\pi}{2} & \text{für } n=0\end{cases}$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot\frac{1}{2n-1}\quad(\text{für } n=1,2,\ldots)$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{0} = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\cdot\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}\right]^2\cdot\frac{\varepsilon^{2n}}{2n-1}$$

$$s = 2\pi b\left(1-\frac{\varepsilon^2}{4}-\frac{3}{64}\varepsilon^4-\frac{5}{256}\varepsilon^6-\ldots\right)$$

(z.B. $a=1,\ b=\sqrt{2},\ x^2+\frac{y^2}{2}=1,\ \varepsilon^2=\frac{1}{2},\ s\approx 7{,}6$)

(3) **Lokale Extrema**

Seien $f: D\to\mathbb{R}$, D eine offene Menge in $\mathbb{R}$ und $\xi\in U$ (innerer Punkt).

f hat an ξ ein lokales $\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}$, wenn $U(\xi)$ existiert mit $f(x) \begin{matrix}\leqslant\\ \geqslant\end{matrix} f(\xi)\quad \big(x\in U(\xi)\big)$

Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema:

f ist an ξ 2-mal differenzierbar, $f'(\xi)=0, f''(\xi)\neq 0$

$\Longrightarrow$ f hat an ξ ein lokales Extremum

Kriterium nur hinreichend, dann: (am Beispiel $f(x)=x^4$)

$f(x)=x^4,\ f'(x)=4x^3,\ f''(x)=12x^2$

f hat an $\xi=0$ sogar ein globales Minimum, aber $f''(0)=0$.

Satz 10.28

Seien $f: D\to\mathbb{R}$, D offen, $m\geqslant 2$, f sei m-mal stetig differenzierbar und $\xi\in D$.

Es gelte: $f'(\xi)=f''(\xi)=\ldots=f^{(m-1)}(\xi)=0$ und $f^{(m)}(\xi)\neq 0$

(a) Falls m gerade ist, so hat f in ξ ein lokales Extremum,
für $f^{(m)}(\xi)<0$ ein lokales Maximum
für $f^{(m)}(\xi)>0$ ein lokales Minimum

(b) Falls m ungerade ist, so hat f in ξ kein Extremum.

Beweis

Mit dem Taylorschen Satz (10.21) gilt für $x\in U(\xi)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}\,(x-\xi) + \ldots + \frac{f^{(m-1)}(\xi)}{(m-1)!}\,(x-\xi)^{m-1} + \frac{f^{(m)}\big(\xi+\vartheta(x-\xi)\big)}{m!}\,(x-\xi)^m \\ &\quad \text{mit einem passendem } \vartheta,\ 0<\vartheta<1. \\ &= f(\xi) + \frac{f^{(m)}\big(\xi+\vartheta(x-\xi)\big)}{m!}\,(x-\xi)^m \end{aligned}$$

(a) Sei m gerade, o.E.d.A. $f^{(m)}(\xi)>0$. (für $f^{(m)}(\xi)<0$ analog)
Wegen der Stetigkeit $f^{(m)}$ existiert $U(\xi)$ mit
$f^{(m)}(\eta)>0 \quad \big(\eta\in U(\xi)\big)$, d.h. $f(x)<f(\xi) \quad \big(x\in U(\xi)\setminus\{\xi\}\big)$,
also liegt an ξ ein striktes Maximum vor.

(b) Für m ungerade wechselt das Restglied an ξ das Vorzeichen.
Damit hat f an ξ kein Extremum. $\square$

Kapitel 11

Abbildungen in normierten / metrischen Räumen

11.1 Normierter Raum

Definition 11.1
Seien $\mathbb{K} = \mathbb{R} \ \vee \ \mathbb{K} = \mathbb{C}$, E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Eine Abbildung $||\cdot|| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Norm auf E, falls gelten:

(1) $||x|| \geqslant 0$ und $||x|| = 0 \iff x = 0 \quad (x \in E)$

(2) $||\alpha \cdot x|| = |\alpha| \cdot ||x|| \quad (x \in E, \alpha \in \mathbb{K})$

(3) $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y|| \quad (x, y \in E)$ (Dreiecksungleichung)

$\big(E, ||\cdot||\big)$ heißt normierter Raum.

Bemerkung 11.2

(1) Für den normierten Raum $\big(E, ||\cdot||\big)$ ist durch $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto ||y - x||$ eine Metrik auf E definiert und $\big(E, d\big)$ heißt metrischer Raum.

(2) Alle in metrischen Räumen verwendete Begriffe und Sätze werden im Sinne von (1) genutzt.
Falls $\big(E, ||\cdot||\big)$ vollständig ist, so heißt $\big(E, ||\cdot||\big)$ Banachraum.

Beispiele 11.3

(1) $\big(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2\big)$ ist ein Banach-Raum, d.h. vollständig.
Die Konvergenz im $\mathbb{R}^n$ ist die koordinatenweise Konvergenz.
Für alle Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt: A ist folgenkompakt $\iff$ A ist beschränkt $\wedge$ abgeschlossen.
$||x||_2 := \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$ heißt euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1, \ldots, n\}\}$.
$||x||_p := \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$ mit $p \geqslant 1$ heißt p-Norm auf $\mathbb{R}^n$.
$||x||_\infty := \max\limits_{i \in \{1,\ldots,n\}} |x_i|$ heißt Maximum-Norm auf $\mathbb{R}^n$.

Nachweis der Normeigenschaften: (1),(2) klar, es bleibt (3) zu zeigen:

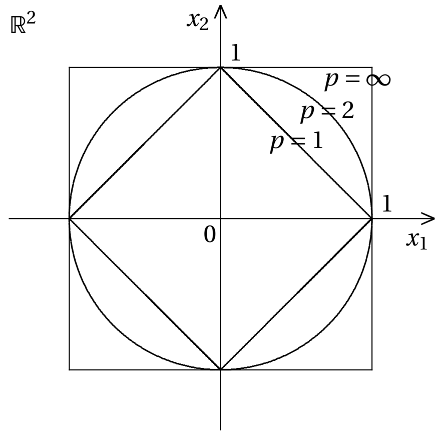
$$\begin{aligned}
||x+y||_p^p &= \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|\cdot|x_i+y_i|^{p-1} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|\cdot|x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i|\cdot|x_i+y_i|^{p-1} \\
&\underset{*}{\leqslant} ||x||_p\cdot\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{(p-1)\cdot q}\Big)^{\frac{1}{q}} + ||y||_p\cdot\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{(p-1)\cdot q}\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= \big(||x||_p+||y||_p\big)\cdot||x+y||_p^{\frac{p}{q}}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad ||x+y||_p \leqslant ||x||_p + ||y||_p$ (Minkowski'sche Ungleichung)

$*\quad \sum_{i=1}^{n} |a_i\cdot b_i| \leqslant ||a||_p\cdot||b||_q \quad (a,b\in\mathbb{R}^n)$ (Hölder'sche Ungleichung)

Dabei gilt: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \iff (p-1)\cdot q = p \iff p-\frac{p}{q}=1$ □

Einheitskugeln $K_1[0] := \{x\in\mathbb{R}^n : ||x||_p\leqslant 1,\ p\geqslant 1\}$



Die Menge der in der Kugel enthaltenen Punkte des $\mathbb{R}^n$ ist abhängig von der Wahl der Norm, denn nach Bemerkung 11.2 (1) wird mit der Norm eine Metrik definiert und es gilt dann $d(0,x)=||x||_p$.
Verschiedene Normen erzeugen also auch verschiedene Einheitskugeln. Für $\mathbb{R}^2$ wird dies durch die Abbildung auf der rechten Seite verdeutlicht.

(2) Der Vektorraum der auf $[a,b]$ stetigen reellwertigen Funktionen $\mathscr{C}[a,b]$
wird mit der Norm $||x|| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$ zu einem normierten Raum, der sogar vollständig ist.
$\big(\mathscr{C}[a,b], ||\cdot||\big)$ ist also ein Banach-Raum.
Die Konvergenz in $\mathscr{C}[a,b]$ ist die gleichmäßige Konvergenz.
Die Existenz von $\max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$ ist gesichert, da $x:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ stetig und somit auch beschränkt ist.
Die Einheitskugel $K_1[0] = \{x\in\mathscr{C}[a,b] : ||x||\leqslant 1\} = \{x\in\mathscr{C}[a,b] : x(t)\in[-1,1],\ t\in[a,b]\}$
ist die Menge aller stetigen Funktionen, deren Funktionswerte über $[a,b]$ nur in $[-1,1]$ liegen.

Definition 11.4
Seien E ein Vektorraum, $||\cdot||_\alpha, ||\cdot||_\beta$ Normen auf E.

$||\cdot||_\alpha, ||\cdot||_\beta$ heißen äquivalent
$:\iff \quad \exists\, m,M>0 : m\cdot||x||_\beta \leqslant ||x||_\alpha \leqslant M\cdot||x||_\beta \quad (x\in E)$

Satz 11.5
Seien $||\cdot||_\alpha, ||\cdot||_\beta$ Normen auf dem Vektorraum E.

$||\cdot||_\alpha, ||\cdot||_\beta$ sind äquivalent
$\iff \quad \forall\,(x_n)\in E\ \forall\, x\in E : x_n \xrightarrow{||\cdot||_\alpha} x \iff x_n \xrightarrow{||\cdot||_\beta} x$

Beweis

I. „$\Longrightarrow$"
Aus $m \cdot ||x_n - x||_\beta \leqslant ||x_n - x||_\alpha \leqslant M \cdot ||x_n - x||_\beta \ \ (m, M > 0)$
folgt $||x_n - x||_\beta \longrightarrow 0 \implies ||x_n - x||_\alpha \longrightarrow 0 \implies ||x_n - x||_\beta \longrightarrow 0$

II. „$\Longleftarrow$"
Es mögen $||\cdot||_\alpha, ||\cdot||_\beta$ denselben Konvergenzbegriff erzeugen,
die beiden Normen seien jedoch nicht äquivalent, d.h. O.E.d.A. $\nexists M > 0 : ||x||_\alpha \leqslant M \cdot ||x||_\beta$.
Dann existierte eine Folge (x_n) in E mit $||x_n||_\alpha > n \cdot ||x_n||_\beta \ \ *$
Für die Folge (y_n) definiert durch $y_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{x_n}{||x_n||_\beta}$ gelten dann:
$||y_n - 0||_\beta = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{||x_n||_\beta} \cdot ||x_n||_\beta = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$
$||y_n - 0||_\alpha = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{||x_n||_\beta} \cdot ||x_n||_\alpha \underset{*}{>} 1 \not\longrightarrow 0$
Es gelte also $x_n \xrightarrow{||\cdot||_\beta} x$, jedoch nicht $x_n \xrightarrow{||\cdot||_\alpha} x$,
d.h. die Folge (y_n) wäre konvergent bezüglich $||\cdot||_\beta$, aber divergent bezüglich $||\cdot||_\alpha$.
Widerspruch! $\square$

Satz 11.6
Seien $||\cdot||_\alpha, ||\cdot||_\beta$ Normen auf $\mathbb{R}^n$
$\Longrightarrow \quad ||\cdot||_\alpha, ||\cdot||_\beta$ sind äquivalent

Beweis Es genügt zu zeigen, dass jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent zur euklidischen Norm $||\cdot||_2$ ist.
Mit $\mathrm{e}_i = \big(0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, 0, \ldots, 0\big) = \big(\delta_{ij}\big)_{j \in \{1,\ldots,n\}}$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: $x = (x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \mathrm{e}_i$.
Sei $||\cdot||$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$, dann ist $||x|| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| \cdot ||e_i|| \leqslant \underbrace{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} ||e_i||^2\Big)^{\frac{1}{2}}}_{=M>0} \cdot \underbrace{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}}_{=||x||_2}$
und es folgt $\exists M > 0 : ||x|| \leqslant M \cdot ||x||_2 \ \ *$
Betrachte $f(x) := ||x||$ für $x \in S = \{z \in \mathbb{R}^n : ||z||_2 = 1\} = \partial K_1(0)$ (Sphäre um 0 mit Radius 1).
Die Menge S ist folgenkompakt in $\big(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2\big)$, denn sie ist abgeschlossen und beschränkt.
Andererseits ist $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, sogar Lipschitz-stetig, denn es gilt:
$|f(x) - f(y)| = \big|||x|| - ||y||\big| \leqslant ||x - y|| \underset{*}{\leqslant} M \cdot ||x - y||_2$
Dann existiert ein m mit $m := \min\limits_{x \in S} f(x) > 0$, d.h. $||x|| \geqslant m$ gilt für alle $x \in S$.
Sei nun $z \in \mathbb{R}^n$, $z \neq 0$, dann folgt $||\frac{z}{||z||_2}|| \geqslant m \implies ||z|| \geqslant m \cdot ||z||_2$.
Insgesamt ergibt sich also $m \cdot ||x||_2 \leqslant ||x|| \leqslant M \cdot ||x||_2 \ \ (m, M > 0)$ und $||\cdot||, ||\cdot||_2$ sind äquivalent. $\square$

11.2 Abbildungen und Funktionen

11.2.1 Funktionen mehrerer Variablen

Definition (Funktion mehrerer Variablen)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n,\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$.
Die Abbildung $f : U \longrightarrow \mathbb{R} : (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f(x_1, \ldots, x_n)$ heißt eine Funktion von n Variablen.
Der Graph von f ist definiert durch $\operatorname{graph} f = \{(x, y) \in U \times \mathbb{R} : y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Nach Definition 6.1 gilt für eine Norm $||\cdot||$ auf $\mathbb{R}^n$ und $a \in U$:
f ist stetig in a

$$\begin{aligned} &\iff \big[||x-a|| \longrightarrow 0 \implies |f(x) - f(a)| \longrightarrow 0\big] \\ &\iff \Big[\big(x_1^{(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a_1, \ldots, x_n^{(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a_n\big) \implies f(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(a_1, \ldots, a_n)\Big] \end{aligned}$$

Der Begriff der Stetigkeit kann also auch für Abbildungen des Typs $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ auf die Folgenstetigkeit zurückgeführt werden.

Definition (Niveaumenge)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n,\ f : U \longrightarrow \mathbb{R}$.
$N_f(c) := \{x \in U : f(x) = c\} \subset \mathbb{R}^n$ heißt Niveaumenge von f zum Funktionswert c.

Die Niveaumenge $N_f(c)$ ist also die Menge aller Punkte, in denen f den Wert c annimmt. In $\mathbb{R}^2$ nennt man die Niveaumengen auch Höhenlinien. Man beachte jedoch, dass für eine beliebige Funktion zweier Veränderlichen die Niveaumengen keine Linien im anschaulichen Sinn zu sein brauchen.

Es gilt $\bigcup\limits_{c \in f(U)} N_f(c) = U$, d.h. die Vereinigung aller Niveaumengen ergibt die Definitionsmenge,
und weiterhin ist $\bigcup\limits_{c \in f(U)} \{(x, c) \in U \times \mathbb{R} : x \in N_f(c)\} = \operatorname{graph} f$.

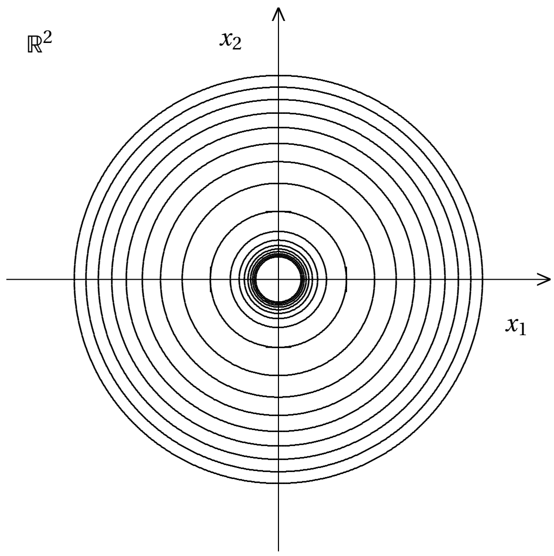
Beispiel *Rotationsparaboloid*
$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2) \longmapsto x_1^2 + x_2^2$

$$\begin{aligned} \operatorname{graph} f &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_1^2 + x_2^2\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_1^2 + x_2^2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Die Niveaumengen bzw. Höhenlinien $N_f(c)$ sind hier stets Kreise mit Radius $\sqrt{c}$ für $c \geqslant 0$, also ist

$$\begin{aligned} N_f(c) &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : f(x) = x_1^2 + x_2^2 = c\} \\ &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d(0, x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{c}\} \\ &= \partial K_{\sqrt{c}}(0). \end{aligned}$$

Ersichtlich gilt nun $\bigcup\limits_{c \in f(\mathbb{R}^2)} N_f(c) = \bigcup\limits_{c \geqslant 0} \partial K_{\sqrt{c}}(0) = \mathbb{R}^2$.
Die Abbildung rechts zeigt zur Verdeutlichung die Niveaumengen für $c \in \{\frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{2}, 1, 2, \ldots, 9\}$.



Definition (Vektorfunktion)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.
Die Abbildung $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heißt Vektorfunktion auf U.

Satz 11.7
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit $f = \left(f_1, \ldots, f_m\right)^T$, $f_j : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$
Die Vektorfunktion f ist stetig in a
$\iff$ Die Komponentenfunktionen f_j sind in a stetig

Beweis folgt aus Satz 5.4

Beispiele 11.8

(1) $v = \left(v_1, v_2, v_3\right)^T$, $v_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i \in \{1,2,3\})$, $U \subset \mathbb{R}^4$
$v = v(t,x,y,z)$, $v_i = v_i(t,x,y,z)$ $(i \in \{1,2,3\})$
v ist z.B. die Geschwindigkeit einer Flüssigkeit zur Zeit t am Ort (x,y,z).

(2) *Polarkoordinatenabbildung*
$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (r,\varphi) \longmapsto (r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi)$, $U = (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \subset \mathbb{R}^2$
f ist stetig auf U und außerdem mit der Einschränkung $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \leqslant 0\}$ surjektiv.

11.2.2 Abbildung $A : \mathscr{C}[a,b] \longrightarrow \mathscr{C}[a,b]$

Wir betrachten den Banachraum $\left(\mathscr{C}[a,b], ||\cdot||\right)$ mit der Norm $||x|| = \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t)|$,

und definieren die Abbildung $A : \mathscr{C}[a,b] \longrightarrow \mathscr{C}[a,b] : x \longmapsto \int\limits_a^t x(s)\,\mathrm{d}s$.

A ist stetig, denn es gilt:

$$
\begin{aligned}
||A(x) - A(y)|| &= \max_{t \in [a,b]} \left| \int_a^t \left[x(s) - y(s)\right] \mathrm{d}s \right| \quad (x, y \in \mathscr{C}[a,b]) \\
&\leqslant \max_{t \in [a,b]} \int_a^t \underbrace{\left|x(s) - y(s)\right|}_{\leqslant ||x-y||} \mathrm{d}s \\
&\leqslant ||x-y|| \cdot \max_{t \in [a,b]} \int_a^t 1\,\mathrm{d}s \\
&= ||x-y|| \cdot \max_{t \in [a,b]} (t-a) \\
&= \underbrace{(b-a)}_{=L} \cdot ||x-y||
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \quad \underbrace{d(A(x), A(y))}_{=||A(x)-A(y)||} \leqslant L \cdot \underbrace{d(x,y)}_{=||x-y||}
$$

Somit ist A sogar Lipschitz-stetig und als Lipschitz-Konstante L kann $(b-a)$ gewählt werden.

11.3 Kurven im $\mathbb{R}^n$

Definition 11.9

(1) Eine Kurve im $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (mit $I \subset \mathbb{R}$ Intervall), d.h. $f = \left(f_1, \dots, f_n\right)^T$ mit $f_j : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ($j \in \{1, \dots, n\}$)

(2) Die Kurve f heißt (stetig) differenzierbar
$:\Longleftrightarrow$ alle Komponentenfunktionen f_j sind (stetig) differenzierbar
Es gilt dann $f' := \left(f_1', \dots, f_n'\right)^T$.

(3) Die Kurve f heißt glatt / regulär
$:\Longleftrightarrow$ f ist stetig differenzierbar $\wedge$ $\forall\, a \in I : f'(a) \neq 0$

(4) Die Menge $\{f(t) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^n$ heißt Spur / Träger der Kurve f.

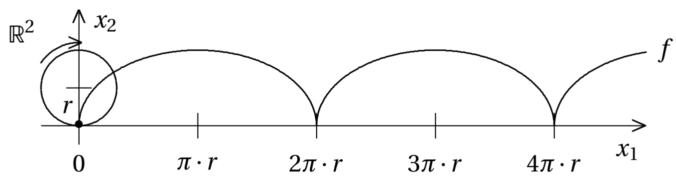
Bemerkung 11.10

(1) Die Spur / der Träger einer Kurve ist eine wegzusammenhängende Menge, dies folgt aus der definierten Stetigkeit aller Kurven.

(2) Eine glatte / reguläre Kurve f hat in jedem Punkt eine Tangente, $f'(t) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ heißt der Tangentenvektor von f in t.

Beispiele

(1) *Gewöhnliche Zykloide*
$f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto \left(x_1, x_2\right) = \left(r \cdot (t - \sin t), r \cdot (1 - \cos t)\right) \quad (I \subset \mathbb{R},\ r > 0)$
Eine Zykloide ist eine Kurve, die ein Punkt auf der Peripherie eines Kreises mit dem Radius r beschreibt, wenn dieser Kreis auf einer Geraden abgerollt wird.



$f'(t) = \left(\dot{x}_1, \dot{x}_2\right) = \left(r \cdot (1 - \cos t), r \cdot \sin t\right)$
$\|f'(t)\|_2^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = r^2 \cdot (1 - 2\cos t + \cos^2 t) + r^2 \cdot \sin^2 t = 2r^2 \cdot (1 - \cos t) = 0 \iff t = k \cdot 2\pi \;\; (k \in \mathbb{Z})$
Die Zykloide ist also nicht glatt / nicht regulär bzw. singulär für $t = k \cdot 2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

(2) *Verbindungsgerade zweier Punkte* $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$
$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto \left(x_1, x_2\right) = \left(a_1 + t \cdot (b_1 - a_1), a_2 + t \cdot (b_2 - a_2)\right)$
Diese Kurve ist glatt, hat also keine singulären Punkte, denn es gilt:
$f'(t) = \left(b_1 - a_1, b_2 - a_2\right) \neq 0 \iff (a_1 \neq b_1) \vee (a_2 \neq b_2) \impliedby a \neq b$

(3) *Parametrisierung eines Graphen*
Für eine stetige Abbildung $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist auch die Abbildung $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto \left(t, \varphi(t)\right)$ stetig.
Die Kurve f nennt man eine Parametrisierung des Graphen φ.
Ist φ weiterhin differenzierbar, so ist auch f differenzierbar mit $f'(t) = \left(1, \varphi'(t)\right) \neq 0 \Longrightarrow f$ ist glatt.

Ziele: Definition und Berechnung der Bogenlänge
Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Zu jeder Zerlegung Z des Intervalls $[a,b]$ mit $Z[a,b] : a = t_0 < \dots < t_m = b$ gehört ein Polygonzug mit den Eckpunkten $f(t_0), \dots, f(t_m)$ und der Länge $s(f,Z) = \sum\limits_{i=1}^{m} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|_2$.
Mit der Dreiecksungleichung folgt für $Z \subset Z'$: $s(f,Z) \leq s(f,Z')$.

Definition 11.11 (Rektifizierbarkeit)
Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve.
Die Kurve f heißt rektifizierbar
$:\Longleftrightarrow$ Die Menge $\{s(f,Z) : Z = Z[a,b]\}$ ist beschränkt
Die reelle Zahl $s = \sup\limits_{Z=Z[a,b]} s(f,Z)$ heißt dann Länge der Kurve f.

Bemerkung
Es gibt Kurven, die nicht rektifizierbar sind, z.B.
$f = \big(f_1, f_2\big) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f_1 = \mathrm{id}$, $f_2(t) = \begin{cases} 0 & (t=0) \\ t \cdot \sin\frac{\pi}{t} & (t \neq 0) \end{cases}$

Satz 11.12
Die Kurve $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist Lipschitz-stetig
$\Longrightarrow$ f ist rektifizierbar

Beweis
Nach Vorraussetzung existiert ein $L > 0$, für das gilt:
$||f(t) - f(t')||_2 \leqslant L \cdot |t - t'| \quad (t, t' \in [a,b])$
$\Longrightarrow \quad s(f,Z) \leqslant L \cdot \sum\limits_{i=1}^{m} |t_i - t_{i-1}| = L \cdot (b-a)$
$\Longrightarrow \quad s \leqslant L \cdot (b-a)$ $\square$

Satz 11.13
Die Kurve $x : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist stetig differenzierbar
$\Longrightarrow$ x ist rektifizierbar
Für die Länge der Kurve $x = x(t) = \big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big)$ mit $t \in [a,b]$ gilt: $s = \int\limits_a^b ||\dot{x}(t)||_2 \,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \dot{x}_i^2(t)}\,\mathrm{d}t$

Beweis für $\mathbb{R}^2$, allgemein analog
Setze $I := \int\limits_a^b \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_1^2(t)}\,\mathrm{d}t$, $\;s := \sup\limits_{Z=Z[a,b]} s(f,Z)$, $\;s_Z := s(f,Z)$, $\;\lambda_Z := \max\limits_{i\in\{1,\dots,m\}} (t_i - t_{i-1})$.
Zu zeigen ist $s = I$.

I. Wir zeigen: $\forall \varepsilon > 0 \,\exists \delta > 0 : \lambda_Z < \delta \implies |s_Z - I| < \varepsilon \quad *$
Es gilt $s_Z = \sum\limits_{i=1}^{m} \Big[\big(x_1(t_i) - x_1(t_{i-1})\big)^2 + \big(x_2(t_i) - x_2(t_{i-1})\big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}$.
Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existieren $\xi_i, \eta_i \in (t_{i-1}, t_i)$ mit
$x_1(t_i) - x_1(t_{i-1}) = \dot{x}_1(\xi_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) \quad \wedge \quad x_2(t_i) - x_2(t_{i-1}) = \dot{x}_2(\eta_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$
Damit ist $s_Z = \sum\limits_{i=1}^{m} (t_i - t_{i-1}) \cdot \sqrt{\dot{x}_1^2(\xi_i) + \dot{x}_2^2(\eta_i)}$ und weiter

$$\begin{aligned} \Big|s_Z - \underbrace{\sum_{i=1}^{m} (t_i - t_{i-1}) \cdot \sqrt{\dot{x}_1^2(\xi_i) + \dot{x}_2^2(\xi_i)}}_{=:S(Z)}\Big| &\leqslant \sum_{i=1}^{m} (t_i - t_{i-1}) \cdot \Big|\sqrt{\dot{x}_1^2(\xi_i) + \dot{x}_2^2(\eta_i)} - \sqrt{\dot{x}_1^2(\xi_i) + \dot{x}_2^2(\xi_i)}\Big| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{m} (t_i - t_{i-1}) \cdot \big|\dot{x}_2(\eta_i) + \dot{x}_2(\xi_i)\big| \end{aligned}$$

Wegen $\dot{x}_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig nach Satz 6.20
existiert ein $\delta_1 > 0$ mit $\big|\dot{x}_2(\eta_i) + \dot{x}_2(\xi_i)\big| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ für $\lambda_Z < \delta_1$.
Daraus folgt $\exists \delta_1 > 0 : |s_Z - S(Z)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für $\lambda_Z < \delta_1$,

und mit Satz 9.11 gilt $\exists \delta_2 > 0 : |S(Z) - I| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für $\lambda_Z < \delta_2$.
Insgesamt ergibt sich $|s_Z - I| \leqslant |s_Z - S(Z)| + |S(Z) - I| < \varepsilon$ für $\lambda_Z < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, also ist $*$ erfüllt.

II. Es gilt $s_Z \leqslant I$ für alle Zerlegungen Z,
denn sei $I < s_{Z_0}$ für eine Zerlegung Z_0, dann wäre $I < s_{Z_0} \leqslant s_Z$ für alle $Z \supset Z_0$. Widerspruch!

Insgesamt kann man aus I.,II. schlussfolgern, dass $s = I = \int\limits_a^b \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{2} \dot{x}_i^2(t)}\,\mathrm{d}t$ gilt. □

Beispiele

(1) *Länge eines Zyklodidenbogens*

$f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = \big(r\cdot(t - \sin t), r\cdot(1-\cos t)\big)$, $f'(t) = \big(r\cdot(1-\cos t), r\cdot \sin t\big)$ $\quad (r > 0)$

$$s = \int\limits_0^{2\pi} ||f'(t)||_2 \,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{f_1'^2(t) + f_2'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2r^2\cdot(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{4r^2\cdot \sin^2 \tfrac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = 2r\cdot \int\limits_0^{2\pi} \left|\sin \tfrac{t}{2}\right| \mathrm{d}t = -4r\cdot \cos \tfrac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8r$$

(2) *Länge des Graphen einer Funktion*

Für eine Funktion $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathscr{C}^1$ ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto \big(t, \varphi(t)\big)$ eine Kurve mit $f \in \mathscr{C}^1$.
Die Länge des Graphen über $[a,b]$ lässt sich nun so berechnen:

$$s = \int\limits_a^b ||f'(t)||_2\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b \sqrt{f_1'^2(t) + f_2'^2(t)}\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \varphi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

Definition 11.14
Seien $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $g : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbare Kurven.
f, g heißen äquivalent
$:\Longleftrightarrow \quad \exists \varphi : [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b]$ bijektiv, $\varphi, \varphi^{-1} \in \mathscr{C}^1 : g = f \circ \varphi$
φ heißt eine $\mathscr{C}^1$-Parametertransformation.

Bemerkung 11.15

(1) Äquivalente Kurven haben dieselbe Spur / denselben Träger.

(2) *Orientierungstreue und orientierungsumkehrende Parametertransformationen*

Sei $\varphi : [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b]$ eine $\mathscr{C}^1$-Parametertransformation.
Dann wegen $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_{[a,b]}$ und der Kettenregel:
$\varphi'(\varphi^{-1}(t)) \cdot (\varphi^{-1}(t))' = 1 \;\; (t \in [a,b]) \quad \Longrightarrow \quad \varphi'(\tau) \neq 0 \;\; (\tau \in [\alpha,\beta])$

(a) $\varphi'(\tau) > 0 \;\; (\tau \in [\alpha,\beta])$
Die Parametertransformation φ ist orientierungstreu (φ ist streng monoton wachsend).

(b) $\varphi'(\tau) < 0 \;\; (\tau \in [\alpha,\beta])$
Die Parametertransformation φ ist orientierungsumkehrend (φ ist streng monoton fallend).

(3) Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve
und $\varphi : [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b]$ eine orientierungstreue $\mathscr{C}^1$-Parametertransformation mit $g = f \circ \varphi$.
Dann gilt $g'(\tau) = f'(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau)$ und $g(\tau) = f(\varphi(\tau)) \;\; (\tau \in [\alpha,\beta])$,
d.h. die Tangenteneinheitsvektoren an f in $t = \varphi(\tau)$ und an g in τ stimmen überein.

(4) Unter den Vorraussetzungen von (3) haben die Kurven f, g dieselbe Länge, denn es gilt:

$$\int\limits_\alpha^\beta ||g'(\tau)||_2\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_\alpha^\beta ||f'(\varphi(\tau))||_2 \cdot \varphi'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_a^b ||f'(t)||_2\,\mathrm{d}t \quad \text{(Substitution } t = \varphi(\tau))$$

11.4 Lineare Abbildungen in normierten Räumen

Definition (Lineare Abbildung)
Seien X, Y normierte Räume.
Eine Abbildung $A : X \longrightarrow Y$ heißt linear
$:\iff \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}\ \forall x, y \in X : A(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot A(x) + \mu \cdot A(y)$

Beispiel 11.16
Sei $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine $m \times n$-Matrix über dem Körper $\mathbb{R}$.
Durch $A(x) := \mathbf{A} \cdot x \ \ (x \in \mathbb{R}^n)$ wird eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definiert, die stetig ist (Satz 11.7).
$A(x) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i} \cdot x_i, \ldots, \sum\limits_{i=1}^{n} a_{mi} \cdot x_i \right)$

Bemerkung 11.17
(1) $A : X \longrightarrow Y$ linear, $\dim X, \dim Y < \infty$
$\Longrightarrow \quad A$ ist stetig

(2) Sei $\mathscr{C}^1[0,1]$ der Vektorraum der auf [0,1] einmal stetig differenzierbaren Funktionen $x : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$.
Als Norm wird $||x|| = \max\limits_{t \in [0,1]} |x(t)|$ gewählt.
Der Operator $A : \mathscr{C}^1[0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x'(0)$ ist linear, jedoch nicht stetig,
denn für $x_n(t) = \frac{1}{n} \cdot \sin(n^2 \cdot t)$ gilt: $||x_n - 0|| = \max\limits_{t \in [0,1]} |\frac{1}{n} \cdot \sin(n^2 \cdot t)| = \frac{1}{n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, d.h. x_n ist eine Nullfolge.
Mit $x_n'(t) = n \cdot \cos(n^2 \cdot t)$ folgt $A(x_n) = x_n'(0) = n$, d.h. $A(x_n)$ ist divergent.
Somit ist A in 0 unstetig,
und als lineare Abbildung folglich auch unstetig in jedem Punkt des Raumes $\mathscr{C}^1[0,1]$.

Satz 11.18
Für eine lineare Abbildung $A : X \longrightarrow Y$ zwischen den normierten Räumen X, Y gilt:
(1) A ist stetig.
$\iff$ (2) A ist in 0 stetig.
$\iff$ (3) $\exists K \geqslant 0 : ||A(x)||_Y \leqslant K \cdot ||x||_X \ \ (x \in X)$
$\iff$ (4) $||A|| := \sup\limits_{x \in X, ||x||_X = 1} ||A(x)||_Y < \infty$

Beweis
(1)$\Longrightarrow$(2): trivial.

(2)$\Longrightarrow$(3): Wegen (2) $\exists \delta > 0 : ||x - 0||_X \leqslant \delta \ \Longrightarrow \ ||A(x) - \underbrace{A(0)}_{=0}||_Y < 1 \ \ (x \in X)$
Für $x \neq 0$ folgt $||A(x)||_Y = \frac{||x||_X}{\delta} \cdot ||A(\underbrace{\frac{\delta}{||x||_X}}_{\leqslant 1} \cdot x)|| \leqslant \frac{||x||_X}{\delta}$
Also gilt (3) mit $K = \frac{1}{\delta}$.

(3)$\Longrightarrow$(4): gilt ersichtlich, denn $||A|| \leqslant K$.

(4)$\Longrightarrow$(1): Nach (4) gilt für $(x \neq 0)$: $||A(x)||_Y \leqslant ||A|| \cdot ||x||_X$,
denn $||A(x)||_Y = ||x||_X \cdot ||A(\frac{x}{||x||_X})||_Y \leqslant ||A|| \cdot ||x||_X$
Damit folgt $||A(x) - A(y)||_Y = ||A(x - y)||_Y \leqslant \underbrace{||A||}_{=L} \cdot ||x - y||_X \ \ (x, y \in X)$,
und A ist sogar Lipschitz-stetig. □

Definition 11.19 (Operatornorm)
Seien $(X, ||\cdot||_X), (Y, ||\cdot||_Y)$ normierte Räume und $A \in \mathrm{L}(X,Y)$, d.h. $A : X \longrightarrow Y$ ist linear und stetig.
$||A|| := ||A||_{X\to Y} = \sup\limits_{x\in X, ||x||_X = 1} ||A(x)||_Y$
heißt die zu den Vektornormen $||\cdot||_X, ||\cdot||_Y$ gehörige Operatornorm von A.

Bemerkung 11.20 (Maximumsnorm, Zeilensummennorm)
Seien $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $A \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \longmapsto \mathbf{A}\cdot x = \left(\sum\limits_{i=1}^n a_{1i}\cdot x_i, \dots, \sum\limits_{i=1}^n a_{ni}\cdot x_i\right)$.
$||x|| := ||x||_\infty = \max\limits_{i\in\{1,\dots,n\}} |x_i|$ heißt Maximumsnorm.
Da A stetig ist, gilt $||A|| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n, ||x||_\infty = 1} ||A(x)||_\infty < \infty$,
und weiterhin gilt $||A|| = \max\limits_{i\in\{1,\dots,n\}} \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|$ (Zeilensummennorm).

Beweis Setze $z := \max\limits_{i\in\{1,\dots,n\}} \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|$

I. $||A(x)||_\infty = \max\limits_{i\in\{1,\dots,n\}} \left|\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}\cdot x_j\right| \leq \max\limits_{i\in\{1,\dots,n\}} \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|\cdot \underbrace{|x_j|}_{\leq ||x||_\infty} \leq z\cdot ||x||_\infty$

$\Longrightarrow$ $||A|| \leq z$

II. O.E.d.A sei $z = \sum\limits_{j=1}^n |a_{1j}|$. Wähle $\tilde{x} = (\operatorname{sgn} a_{11}, \dots, \operatorname{sgn} a_{1n})$

(a) $\tilde{x} = 0 \Longrightarrow z = 0 \underset{(1)}{\Longrightarrow} ||A|| = 0$

(b) $\tilde{x} \neq 0 \Longrightarrow ||\tilde{x}|| = 1 \Longrightarrow ||A|| \geq ||A(\tilde{x})||_\infty \geq \left|\sum\limits_{j=1}^n \underbrace{a_{1j}\cdot \tilde{x}_j}_{=|a_{1j}|}\right| = \sum\limits_{j=1}^n |a_{1j}| = z$

$\Longrightarrow$ $||A|| \geq z$ □

Bemerkung 11.21 (Spektralnorm)
Falls im Beispiel 11.20 statt der Maximumsnorm $||\cdot||_\infty$ die euklidische Norm $||\cdot||_2$ gewählt wird, so gilt:
$||A||_{\mathrm{sp}} := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n, ||x||_2 = 1} ||A(x)||_2 = \sqrt{\lambda_0}$ (Spektralnorm)
Dabei ist λ_0 der größte Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A}$.

11.5 Banach'scher Fixpunktsatz

Viele Aufgaben bei der Behandlung von Gleichungen (lineare und nicht-lineare Gleichungssysteme, Differential- und Integralgleichungen, implizite Funktionen etc.) können als Fixpunktaufgaben formuliert werden.
Die Frage nach den Lösungen x einer Gleichung ist äquivalent zur Frage nach den Fixpunkten x mit $T(x) = x$ einer geeigneten Abbildung $T : E \longrightarrow E$. Beispielsweise kann die Gleichung $x - \sin x = 10$ in die Fixpunktaufgabe $10 + \sin x = x$ umgeformt werden. Dabei ist $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 10 + \sin x$.

Definition 11.22 (Kontraktion)
Sei (E, d) ein metrischer Raum.
$T : E \longrightarrow E$ heißt Kontraktion
$:\Longleftrightarrow \quad \exists\, L \in [0,1) : d(T(x), T(y)) \leqslant L \cdot d(x, y)$
Eine Kontraktion ist stets Lipschitz-stetig.

Satz 11.23 (Banach'scher Fixpunktsatz) (Stefan Banach, 1892-1945)
Seien (E, d) ein Banachraum (vollständiger metrischer Raum) und $T : E \longrightarrow E$ eine Kontraktion.
$\Longrightarrow \quad \exists!\, x \in E : T(x) = x$
Eine kontrahierende Selbstabbildung eines Banachraums hat also stets genau einen Fixpunkt.

Beweis

I. *Existenz*
Sei $x_0 \in E$.
Die rekursiv definierte Folge (x_n) mit $x_{n+1} = T(x_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ ist eine Cauchyfolge, denn zunächst gilt:
$d(x_n, x_{n+1}) = d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \leqslant L \cdot d(x_{n-1}, x_n) \leqslant L^2 \cdot d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leqslant \cdots \leqslant L^n \cdot d(x_0, x_1)$ $(L \in [0,1))$
Sei nun $m > n$, dann gilt:
$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leqslant d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leqslant L^n \cdot d(x_0, x_1) + L^{n+1} \cdot d(x_0, x_1) + \cdots + L^{m-1} \cdot d(x_0, x_1) \\ &= d(x_0, x_1) \cdot L^n \cdot (1 + L + L^2 + \cdots + L^{m-n-1}) \\ &\leqslant d(x_0, x_1) \cdot L^n \cdot \tfrac{1}{1-L} \end{aligned}$$
$\Longrightarrow$ (x_n) ist eine Cauchyfolge.
Aufgrund der Vollständigkeit des Banachraums E existiert ein $x \in E$ mit $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
Dieses x ist Fixpunkt von T, denn $d(x_{n+1}, T(x)) = d(T(x_n), T(x)) \leqslant L \cdot d(x_n, x) \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = T(x)$, und ausserdem gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, also ist der Grenzpunkt x der gesuchte Fixpunkt mit $T(x) = x$.

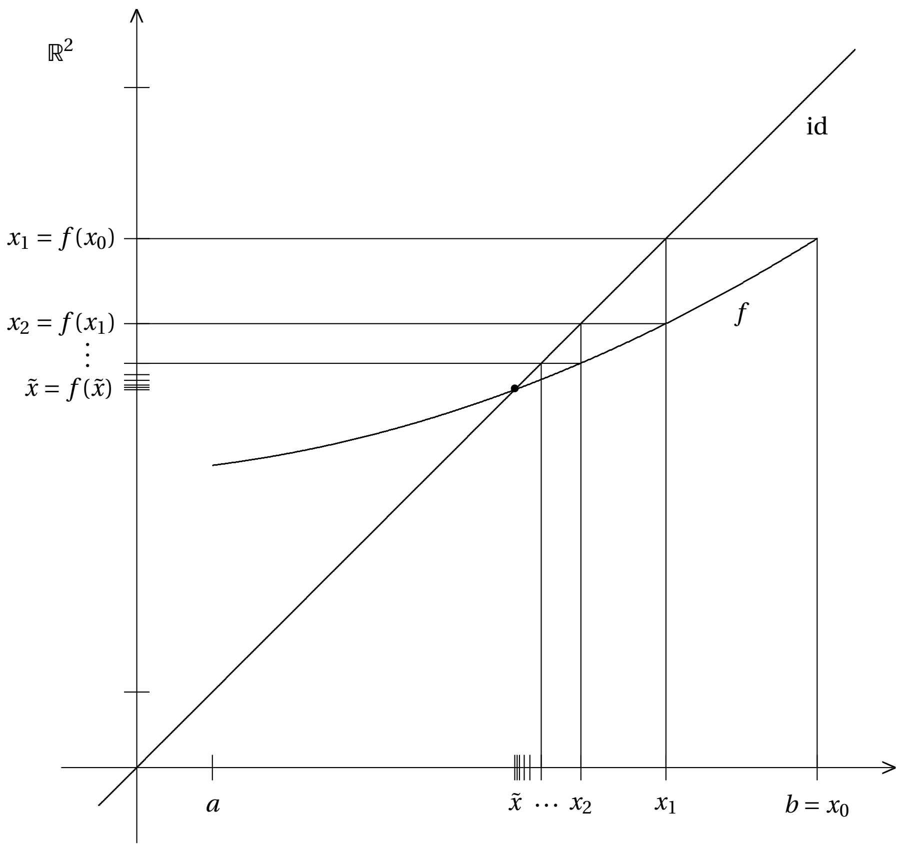
II. *Einzigkeit*
Seien $x, y \in E,\ x \neq y$ Fixpunkte von T, also $T(x) = x,\ T(y) = y$.
Dann gilt $d(x, y) = d(T(x), T(y)) \leqslant L \cdot d(x, y)$,
und weiter $\underbrace{(1 - L)}_{\in (0,1]} \cdot d(x, y) \leqslant 0 \iff d(x, y) = 0 \iff x = y$. □

Bemerkung 11.24

(1) Der Beweis des Banach'schen Fixpunktsatzes ist konstruktiv:
Ausgehend von einem beliebigen Startpunkt $x_0 \in E$ konvergiert die durch sukzessive Approximation definierte Folge mit $x_{n+1} = T(x_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ stets gegen den einzigen Fixpunkt des Operators T.

(2) $d(x_n, x) \leqslant d(x_0, x_1) \cdot \frac{L^n}{1-L}$ $(n \in \mathbb{N})$
ist eine Fehlerabschätzung für die Genauigkeit der Approximation.

Beispiel
Sei $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ differenzierbar mit $|f'(x)| \leqslant L < 1$ $(x \in [a,b])$.
Das Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}^1$ ist abgeschlossen, also ist der metrische Raum $\big([a,b], d\big)$ mit $d(x,y) = |x-y|$ vollständig. Somit ist f eine Selbstabbildung des Banachraums $\big([a,b], d\big)$.
Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert für $x, y \in [a,b]$, $x < y$ ein $\xi \in (x,y)$ mit $|f'(\xi)| = \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leqslant L$, also ist $d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| \leqslant L \cdot |x-y| = L \cdot d(x,y)$.
f ist damit eine Kontraktion und besitzt einen Fixpunkt.
Die einzige Lösung der Fixpunktaufgabe $f(y) - y = 0$ kann durch sukzessive Approximation bestimmt werden.
Die folgende Abbildung veranschaulicht dies für $0 \leqslant f'(x) \leqslant L < 1$ $(x \in [a,b])$.



Kapitel 12

Differentialrechnung für vektorvertige Funktionen

12.1 Partielle Ableitungen

Wir kennen bereits die Differentialrechnung bei Funktionen des Typs $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die lässt sich im Sinne des letzten Kapitels auf Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ übertragen. In diesem einleitenden Abschnitt in die Differentiation vektorwertiger Funktionen betrachten wir zunächst den Spezialfall $m = 1$ und bilden eine n-dimensionale reelle Argumentmenge auf reelle Werte ab.

Definition 12.1
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathrm{e}_j = \big(0,\dots,0,\overset{\overset{j}{\downarrow}}{1},0,\dots,0\big) = \big(\delta_{ij}\big)_{i\in\{1,\dots,n\}}$.

(1) f heißt in a partiell differenzierbar in Richtung e_j (bzw. der j-ten Koordinatenachse)

$$:\Longleftrightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h\cdot \mathrm{e}_j)-f(a)}{h} =: \partial_j f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

(2) f heißt (stetig) partiell differenzierbar
$:\Longleftrightarrow$ die partiellen Ableitungen $\partial_j f(x)$ existieren für alle $x \in U$, $j \in \{1,\dots,n\}$
(und sind stetig sowie f stetig)

Wir nehmen also einen beliebigen Koordinateneinheitsvektor e_j und versuchen das Verhalten des Funktionswerts zu analysieren, wenn wir die Argumente entlang einer beliebigen Koordinatenrichtung j an eine Stelle annähern.

Beispiel $\quad f(x,y) := x^2 + y^3$
Die Funktion soll auf ihre partiellen Ableitungen hin untersucht werden. Wie man sieht, gibt es in diesem Fall zwei Koordinatenrichtungen, ergo müssen wir auch nach zwei solchen Richtungen differenzieren. Zunächst wählen wir den Einheitsvektor $\mathrm{e}_1 = (1,0)$ und sehen uns den Fall an, dass wir uns aus x-Richtung einem beliebigen Punkt, hier mit (a,b) bezeichnet annähern:

$$\begin{aligned}\partial_1 f(a,b) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{f((a,b)+h\cdot(1,0))-f(a,b)}{h} = \lim_{h\to 0} \tfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \tfrac{((a+h)^2+b^3)-(a^2+b^3)}{h} = \lim_{h\to 0} \tfrac{(h^2+2ah)}{h} = \lim_{h\to 0}(h+2a) = 2a\end{aligned}$$

Diese Ableitung gleicht also der Ableitung der Funktion $\widetilde{f}(a) = a^2 + b^3$ mit $\widetilde{f}'(a) = 2a$. Für die Ableitung nach der zweiten Koordinate folgt dann analog $\partial_2 f(a,b) = 3b^2$. Unter der partiellen Ableitung können wir also die übliche Ableitung reeller Funktionen verstehen, bei der nach einer Variablen abgeleitet wird, und die anderen als Parameter fungieren. Das wird durch die folgende Bemerkung noch einmal illustriert.

Bemerkung 12.2
f in $(a_1,\dots,a_n)$ in Richtung e_j differenzierbar
$\iff$ g definiert durch $g(t) = f(a_1,\dots,a_{j-1},t,a_{j+1},\dots,a_n)$,
g in $t = a_j$ differenzierbar und $\partial_j f(a) = \dfrac{\partial g}{\partial t}(a_j)$

Beispiel $f(x_1,x_2) = x_1^{x_2}$ auf $U = \{(x_1,x_2) : x_1 \in \mathbb{R}_+, x_2 \in \mathbb{R}\}$
$\partial_1 f = x_2 \cdot x_1^{x_2-1}$
$\partial_2 f = \partial_2 \mathrm{e}^{x_2 \cdot \ln x_1} = \mathrm{e}^{x_2 \cdot \ln x_1} \cdot \ln x_1 = x_1^{x_2} \cdot \ln x_1$

Wenn wir die Differentiation von Funktionen mehrerer Variablen nun auf die normale Differentialrechnung im Bereich der reellen Zahlen zurückführen können, wäre es doch zu vermuten, dass sich auch die Eigenschaften der reellen Differentiation auf diesen Fall hier übertragen lassen. Dass dem aber leider nicht immer so ist, zeigt die folgende Bemerkung über die Stetigkeit.

Bemerkung 12.3
Es gibt Funktionen $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, die partiell differenzierbar, aber nicht stetig sind, zum Beispiel:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Diese Funktion auf ganz $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar, jedoch in $(0,0)$ nicht stetig.

(1) Existiert die partielle Ableitung $\partial_x f(0,0)$ überhaupt?
Betrachte $\frac{f((0,0)+h\cdot(1,0))-f(0,0)}{h} = \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 \quad (h \neq 0)$
damit $f_x(0,0) = 0$, analog $f_y(0,0) = 0$

(2) Aber existiert auch der Grenzwert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?
Wir wählen dazu zwei Folgen, $(x_{1n}, y_{1n}) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \longrightarrow 0$ und $(x_{2n}, y_{2n}) = (0, \frac{1}{n}) \longrightarrow 0$. Nach der Stetigkeit müssten beide eingesetzt in f den gleichen Grenzwert der Funktionswerte liefern. Jedoch:
$f(x_{1n}, y_{1n}) = \frac{x_{1n}\cdot y_{1n}}{x_{1n}^2+y_{1n}^2} = \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}^2+\frac{1}{n}^2} = \frac{1}{2} \not\longrightarrow 0$
$f(x_{2n}, y_{2n}) = \frac{x_{2n}\cdot y_{2n}}{x_{2n}^2+y_{2n}^2} = \frac{0\cdot\frac{1}{n}}{0^2+\frac{1}{n}^2} = 0 \longrightarrow 0$

Für die Untersuchung komplizierterer Vorgänge benötigen wir neben der einfachen partiellen Ableitung unter Umständen noch weitere, höhere Ableitungen. Die können wir per rekursiver Definition einführen.

Definition 12.4 (Partielle Ableitungen höherer Ordnung)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

(1) f heißt zweimal partiell differenzierbar
$:\Longleftrightarrow$ f ist partiell differenzierbar
und alle $\partial_j f$ sind partiell differenzierbar für $j \in \{1, \ldots, n\}$

Symbol: $\partial_k \partial_j f$, $f_{x_j x_k}$ $(j, k \in \{1, \ldots, n\})$

(2) f heißt $(m+1)$-mal partiell differenzierbar
$:\Longleftrightarrow$ f ist m-mal partiell differenzierbar
und alle $\partial_{j_m}, \ldots, \partial_{j_1}$ sind partiell differenzierbar

(3) f heißt m-mal stetig differenzierbar
$:\Longleftrightarrow$ f ist m-mal partiell differenzierbar
und alle Ableitungen der Ordnung $\leqslant m$ sind stetig

Symbol: $f \in \mathscr{C}^m :\Longleftrightarrow f$ ist m-mal stetig differenzierbar

Und das sehen wir uns jetzt noch einmal im Konkreten an. Es gilt, eine Funktion zweimal partiell abzuleiten, wobei wir uns aber auf die Ableitungen nach unterschiedlichen Variablen konzentrieren, und $\partial_i \partial_i f$ zunächst außer Acht lassen.

Beispiel $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$ auf $U = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R}_+, x_2 \in \mathbb{R}\}$

$$\partial_1 f = x_2 \cdot x_1^{x_2 - 1} \qquad \partial_2 f = x_1^{x_2} \cdot \ln x_1$$

$$\partial_2 \partial_1 f = x_1^{x_2-1} + x_2 \cdot x_1^{x_2-1} \cdot \ln x_1 \quad = \quad \partial_1 \partial_2 f = x_2 \cdot x_1^{x_2-1} \cdot \ln x_1 + x_1^{x_2} \cdot \tfrac{1}{x_1} = (1 + x_2 \cdot \ln x_1) \cdot x_1^{x_2-1}$$

Wir sehen also, die beiden partiellen Ableitungen sind gleich. Aber dem ist leider nicht immer so. Alles weitere kann der folgende Satz zeigen.

Satz 12.5 (H.A. Schwarz, 1843-1921)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar (auf U), $j, k \in \{1, \ldots, n\}$.

Falls $\partial_j \partial_k f$ und $\partial_k \partial_j f$ in a stetig sind, so gilt $\partial_j \partial_k f(a) = \partial_k \partial_j f(a)$.

Beweis Wir beweisen den Satz unter Verwendung der Daten $n = 2$, $j = 1$, $k = 2$ und $a = (0, 0)$.
Wie man sehen wird, erfolgt der Beweis für den allgemeinen Fall analog.
Zu zeigen ist also: $\partial_2 \partial_1 f(0,0) = \partial_1 \partial_2 f(0,0)$
Die Konvergenz im $\mathbb{R}^n$ ist bekanntlich die koordinatenweise Konvergenz. Daher betrachten wir gemäß der Definition der Stetigkeit ein Paar von Vektoren (h, k) mit $\|h\|, \|k\| < \delta$.

$$\begin{aligned}
\partial_1\partial_2 f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{\partial_2 f(0+h,0)-\partial_2 f(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} \tfrac{1}{h}\cdot\big(\tfrac{f(h,0+k)-f(h,0)}{k} - \tfrac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}\big) \\
&= \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} \tfrac{1}{k}\cdot\big(\tfrac{f(h,k)-f(0,k)}{h} - \tfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}\big) \\
&= \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} \tfrac{1}{k}\cdot\big(\partial_1 f(\theta_1,k)-\partial_1 f(\theta_1,0)\big) \quad \text{(MWS mit } \theta_1\in(0,h)) \\
&= \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} \partial_2\partial_1 f(\theta_1,\theta_2) \quad \text{(MWS mit } \theta_2\in(0,k)) \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \partial_2\partial_1 f(\theta_1,\theta_2) \\
&= \partial_2\partial_1 f(0,0)
\end{aligned}$$

Durch Hintereinanderausführung dieses Satzes lässt sich schlussfolgern, dass für jede m-mal stetig differenzierbare vektorwertige Funktion f gilt: $\partial_{i_1}\dots\partial_{i_m} f(x_1,\dots,x_n) = \partial_{j_1}\dots\partial_{j_m} f(x_1,\dots,x_n)$,
wobei die Indexmengen über i bzw j die gleichen Werte aus $\{1\dots n\}$ in gleicher Anzahl enthalten, d.h. es existiert eine Permutation $\pi(i_k) = j_k$. □

12.2 Differenzierbarkeit / Jacobi-Matrix

Die partiellen Ableitungen als solches haben noch kein allzu großes Anwendungsspektrum. In dem Sinne, dass wir Funktionen des Typs $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ untersuchen wollen, benötigen wir daher eine genauere Struktur, in der der Spezialfall $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unter anderem enthalten ist. Erstrebenswert wäre es doch, Eigenschaften wie die Stetigkeit auch in diesem komplexeren Fall aus der Differenzierbarkeit herleiten zu können (allein das zeigt schon, dass die partielle Ableitung dazu nicht ausreichen kann).

Wiederholung
Sei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$, $U \subset \mathbb{R}^1$ offen.

f in a differenzierbar
$$:\Longleftrightarrow \quad \exists\, c \in \mathbb{R}\ \exists\, \varphi : U \longrightarrow \mathbb{R} :$$
$$f(x) = f(a) + c \cdot (x-a) + |x-a| \cdot \varphi(x) \text{ mit } \lim_{x \longrightarrow a} \varphi(x) = 0$$

Betrachten wir doch einfach nochmal die Funktionen des Typus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
d.h. $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$, $U \subset \mathbb{R}^1$ offen. f soll im weiteren Sinne in a differenzierbar sein.
Betrachten wir doch jetzt einfach mal die Differenz der Ableitung und eines beliebigen Differenzenquotienten an der Stelle a und bezeichnen diese mit einer Abstandsfunktion φ, d.h. für alle $x \in U$ gilt:
$\varphi(x) := \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$ mit $\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0$
Durch Umstellung der Gleichung erhalten wir dann
$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \varphi(x) \cdot (x-a)$
Man könnte es also auch so ausdrücken: Eine Funktion ist an der Stelle a differenzierbar, wenn eine solche Ableitung $f'(a)$ existiert und die Abstandsfunktion $\varphi(x)$ zwischen Differenzenquotienten und Ableitung für $x \to a$ gegen 0 strebt, schematisch:
f ist in a differenzierbar $\Longleftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}\ \exists\, \varphi : U \longrightarrow \mathbb{R} : f(x) = f(a) + c \cdot (x-a) + |x-a| \cdot \varphi(x)$ mit $\lim_{x \longrightarrow a} \varphi(x) = 0$
(manchem genauen Leser wird hier möglicherweise der Betrag um das zweite $(a-x)$ Verdruss bereiten. Dem können wir aber Abhilfe schaffen, indem wir uns folgendes vor Augen führen: Wenn es eine Funktion φ multipliziert mit $(x-a)$ gibt, die diese Beziehung erfüllt, dann gibt es sicher auch eine Funktion φ', die unter Zuhilfenahme von Beträgen oder Ähnlichem mit $|x-a|$ multipliziert diese Beziehung ebenfalls erfüllt!)
Und das wollen wir jetzt auf Tupel von reellen Zahlen übertragen. Nehmen wir also mal an, es handelt sich hier stattdessen um eine Funktion aus dem $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$. Dann ist $f(x)$ sowie $f(a)$ ein m-stelliger Vektor, und x bzw a ein n-stelliger Vektor. Der Einfachheit halber fassen wir beide als Spaltenvektoren auf. Um jetzt herauszufinden, von welcher Art φ und c in obiger Gleichung sein müssen, sollten wir einfach daran denken, dass sowohl das Produkt $c \cdot (x-a)$ als auch $(x-a) \cdot \varphi(x)$ insgesamt einen m-stelligen Spaltenvektor ergeben müssen.
Was könnte man nun als das c festlegen? Genau! Eine $(m \times n)$-Matrix, die von links multipliziert mit einem n-stelligen Vektor einen m-stelligen Vektor ergibt. Interessanterweise symbolisiert eine solche Matrix auch gleich eine lineare Abbildung, was ja dann doch irgendwo an Geraden erinnert (man denke an die Tangenten in der reellen Differentialrechnung).
Der zweite Summand dürfte etwas schwieriger zu fassen sein. Die erste Frage ist, wie man mit dem $|x-a|$ im Reellen verfährt. Gibt es dafür eine anerkannte Verallgemeinerung? Ja, die gibt es! Man denke nur an die Norm, die den Abstand zweier Vektoren als reelle Zahl interpretiert. Das $\varphi(x)$ ist darüber hinaus eine Funktion des Typs $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
Die folgende Definiton fasst diese Überlegungen noch einmal zusammen.

Definition 12.6
Sei $a \in U \subset \mathbb{R}^n$, U offen.
Die Abbildung $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heißt in a differenzierbar (Fréchet-differenzierbar, total differenzierbar)
$:\Longleftrightarrow \quad \exists\, A \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)\ \exists\, \varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m :$

$$\lim_{x \longrightarrow a} \varphi(x) = 0 \quad \Longrightarrow f(x) = f(a) + A \cdot (x-a) + ||x-a|| \cdot \varphi(x)$$

A heißt Fréchet-Ableitung von f in a.
Symbol: $A = f'(a) = \partial f(a) = (\mathrm{D}f)(a)$

Wie man sieht, ergibt sich für den Fall $n = m = 1$ genau die Beziehung von oben, die in der reellen Differentialrechnung gilt. A ist dann eine (1×1)-Matrix und $||x-a||$ ist für $x, a \in \mathbb{R}$ identisch mit $|x-a|$.

Bemerkung 12.7
Falls f in a (Fréchet-)differenzierbar ist, so gelten:

(1) Die Ableitung in einem Punkt a ist eine Matrix, also ist eine lineare Abbildung.

(2) f ist in a stetig,
denn die lineare Abbildung A ist stetig in jedem Punkt. Dies folgt daraus, dass die Matrizenmultiplikation $A \cdot (x-a)$ in Additionen und Multiplikationen reeller Zahlen zerfällt, die für sich jeweils stetig sind. Daraus folgt nun also:
$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a} \big[f(a) + A \cdot (x-a) + ||x-a|| \cdot \varphi(x)\big] = f(a) + 0 + 0 = f(a)$$

(3) Die Ableitung ist eindeutig bestimmt.

Beweis Angenommen, es existieren zwei Ableitungen $A, A' \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ und zwei Funktionen $\varphi, \varphi' : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \varphi(x) = 0$, $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \varphi'(x) = 0$, für die gilt:
$f(x) = f(a) + A \cdot (x-a) + ||x-a|| \cdot \varphi(x)$
$f(x) = f(a) + A' \cdot (x-a) + ||x-a|| \cdot \varphi'(x)$
Dann folgt daraus: $A \cdot (x-a) + ||x-a|| \cdot \varphi(x) = A' \cdot (x-a) + ||x-a|| \cdot \varphi'(x)$
Da die Urbildmenge U offen ist, lässt sich die Differenz von $(x-a)$ mit $|\lambda| \cdot y$ beschreiben, d.h. $x - a = |\lambda| \cdot y$, für ein $y \in \mathbb{R}^n$ mit einem ausreichend kleinen Faktor $|\lambda| < \delta$. Da das x in der Urbildmenge beliebig gewählt werden darf, ist demnach auch das y beliebig in $\mathbb{R}^n$ wählbar (anschaulich: Da das $(x-a)$ jede Richtung annehmen kann, nimmt demnach auch das y jede beliebige Richtung an, das λ verkürzt es dann entsprechend). Damit folgt nun:
$$\begin{aligned} \forall\, y \in U :\ A \cdot (|\lambda| \cdot y) + ||\,|\lambda| \cdot y|| \cdot \varphi(a + |\lambda| \cdot y) &= A' \cdot (|\lambda| \cdot y) + ||\,|\lambda| \cdot y|| \cdot \varphi'(a + |\lambda| \cdot y) \\ |\lambda| \cdot A(y) + |\lambda| \cdot ||y|| \cdot \varphi(a + |\lambda| \cdot y) &= |\lambda| \cdot A'(y) + |\lambda| \cdot ||y|| \cdot \varphi'(a + |\lambda| \cdot y) \\ A(y) + ||y|| \cdot \varphi(a + |\lambda| \cdot y) &= A'(y) + ||y|| \cdot \varphi'(a + |\lambda| \cdot y) \end{aligned}$$
Wenden wir den Grenzprozess $x \to a$ auf die Gleichung an:
Da y fest ist, und aus $x \to a$ folgt, dass $||y|| \cdot \varphi(a + |\lambda| \cdot y) \to 0$ und $||y|| \cdot \varphi'(a + |\lambda| \cdot y) \to 0$, ergibt sich:
$A \cdot y = A' \cdot y$ für alle $y \in \mathbb{R}^n \implies A = A'$ □

(4) Falls $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ linear mit der Abbildungsmatrix A ist,
so ist f differenzierbar in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ mit $f'(a) = A$ und $\varphi(x) = 0$, denn:
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + ||x-a|| \cdot \varphi(x) = A \cdot a + A \cdot (x-a) + ||x-a|| \cdot 0 = A \cdot a + A \cdot x - A \cdot a = A \cdot x$$

Beispiel 12.8 (Reelle Funktionen mehrerer Variablen, $m = 1$)
Gegeben sei eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, sowie eine Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, die in $a = \left(a_1, \dots, a_n\right)^T$ total differenzierbar ist. Nach Definition existiert also eine $(1 \times n)$-Matrix $\alpha = \left(\alpha_1, \dots, \alpha_n\right)$ und eine Funktion $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \varphi(x) = 0$, sodass für alle $x \in U$ gilt:
$f(x) = f(a) + \alpha \cdot (x - a) + ||x - a|| \cdot \varphi(x) = f(a) + \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot (x_k - a_k) + ||x - a|| \cdot \varphi(x)$
Wir betrachten nun speziell $x = a + h \cdot \mathrm{e}_k$, dann gilt:

$$\begin{aligned} f(a + h \cdot \mathrm{e}_k) &= f(a) + \alpha_1 \cdot (a_1 - a_1) + \ldots + \alpha_k \cdot (a_k + h - a_k) + \ldots + \alpha_n \cdot (a_n - a_n) + ||h \cdot \mathrm{e}_k|| \cdot \varphi(a + h \cdot \mathrm{e}_k) \\ &= f(a) + \alpha_k \cdot h + |h| \cdot ||\mathrm{e}_k|| \cdot \varphi(a + h \cdot \mathrm{e}_k) \end{aligned}$$

Umstellung nach $\alpha_k = \frac{f(a+h\cdot \mathrm{e}_k) - f(a)}{h} - \underbrace{\frac{|h|}{h} \cdot ||\mathrm{e}_k|| \cdot \varphi(a + h \cdot \mathrm{e}_k)}_{\longrightarrow 0}$
Mittels Grenzwertbetrachtung für $h \to 0$ und demnach $x \to a$ folgt mit $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$ also $\alpha_k = \partial_k f(a)$

Resultat f differenzierbar $\Longrightarrow f$ in a partiell differenzierbar
mit $f'(a) = \left(\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a)\right)$
Die Ableitung $f'(a) : \mathbb{R}^n \ni x \longmapsto f'(a)(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \partial_k f(a) \cdot x_k$ (lineare Abbildung)
und der Vektor $\left(\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a)\right)$ werden identifiziert (Isomorphismus)

Es gibt also einen Zusammenhang zwischen den partiellen Ableitungen und der totalen Ableitung bei den reellwertigen Funktionen. Diese Erkenntnis kann man nun auch auf die vektorwertigen Funktionen ausdehnen.

Satz 12.9
Seien $a \in U \subset \mathbb{R}^n$, U offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit $f = \left(f_1, \dots, f_m\right)^T$, $f_j : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $j \in \{1, \dots, m\}$.
Dann gelten:

(1) f in a differenzierbar
$\Longleftrightarrow$ Die Koordinatenfunktionen $f_1, \dots, f_m$ sind in a differenzierbar

(2) f in a differenzierbar
$\Longrightarrow$ $f_1, \dots, f_m$ sind in a partiell differenzierbar und es gilt:

$$f'(a) = \left(\partial_k f_j(a)\right)_{\substack{j \in \{1,\dots,m\} \text{ Zeilen} \\ k \in \{1,\dots,n\} \text{ Spalten}}} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \dots & \partial_n f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m & \dots & \partial_n f_m \end{pmatrix}_{|a}$$

Die Matrix $J_f(a) = \left(\partial_i f_j\right)$ heißt Jacobi- oder Funktionalmatrix von f in a.

Beweis

(1) Eigentlich handelt es sich hier im Wesentlichen nur um eine Verallgemeinerung des Beispiels 12.8. „$\Longrightarrow$" Wenn f differenzierbar ist, existiert eine Matrix A, die die Definition der Differenzierbarkeit erfüllt. Die i-te Koordinatenfunktion ist eine Funktion von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$. Als Ableitung wählen wir die i-te Zeile der Matrix. Im Umkehrschluss setzen wir die Matrix aus den Ableitungen der Koordinatenfunktionen zusammen.

(2) Folgt unter anderem aus (1). Ist f differenzierbar, so auch die Koordinatenfunktionen von f, und aus deren Differenzierbarkeit folgt nach Beispiel 12.8., dass f auch partiell differnzierbar ist. $\square$

Folgerung 12.10

Sei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ in a differenzierbar,

(1) f wird in der Umgebung von a linear approximiert durch die Funktion

$\mathrm{T}f(x,a) := f(a) + \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(a) \cdot (x_k - a_k) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$

Das lässt sich leicht vor Augen führen, indem wir den Bildraum dieser Funktion als affinen Untervektorraum auffassen. Der wird allgemein dargestellt durch $w + f(u)$, wobei $w = f(a)$ ein Element aus dem affinen Raum ist und $f(u) = f'(a) \cdot u$ für $u = x - a$ einen Untervektorraum aufspannt.

(2) Wir definieren $x_{n+1} := \mathrm{T}f(x,a)$.

Damit bildet die Menge aller Vektoren (x, x_{n+1}) mit $x \in \mathbb{R}^n$ eine Hyperebene im Raum $\mathbb{R}^{n+1}$, die als Tangentialebene an den Graphen $\{(x, f(x)) : x \in U\}$ im Punkt $(a, f(a))$ bezeichnet wird.

Na, das war jetzt doch ziemlich theoretisch. Wir wollen das Ganze einmal in einem Beispiel illustrieren. Gesucht ist eine Gleichung für die Tangentialebene an eine Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ an einer bestimmten Stelle im Urbildraum.

Beispiel 12.11 $z := f(x,y) := x^2 - 5y^2$

Wir suchen eine Tangentialebene der Funktion an der Stelle $(2,1)$. Dazu ermitteln wir zunächst die Ableitung der Funktion an einer beliebigen Stelle. Die Jacobi-Matrix ist nach den vorangehenden Sätzen und Beispielen in diesem Fall eine (1×2)-Matrix der Form $(\partial_x f(x,y), \partial_y f(x,y))$. Wir ermitteln also die partiellen Ableitungen:

$\partial_x f(x,y) = 2x$ und $\partial_y f(x,y) = -10y \implies J_f(a) = (2x, -10y)$.

Nach 12.11. ist $z = \mathrm{T}f(x,a) = f(a) + f'(a) \cdot ((x,y)^T - (a_1,a_2)^T)$ für $a = (2,1)^T$, d.h. $z = f(2,1) + (2 \cdot 2, -10 \cdot 1) \cdot ((x,y)^T - (2,1)^T) = -1 + 4x - 10y + 2$. Also wird die Hyperebene durch all jene Vektoren $(x,y,z)^T$ gebildet, für die gilt: $4x - 10y - z + 1 = 0$.

Eine Alternative sei durch die folgende Rechnung gegeben: Wir fassen die Funktion als eine Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^3$ auf, wobei gilt: $g(x,y) = (x,y,f(x,y))^T = (x,y,x^2-5y^2)^T$. Die Jacobi-Matrix ist in diesem Fall eine (3×2)-Matrix der Form $\begin{pmatrix} \partial_x g_1(x,y) & \partial_y g_1(x,y) \\ \partial_x g_2(x,y) & \partial_y g_2(x,y) \\ \partial_x g_3(x,y) & \partial_y g_3(x,y) \end{pmatrix}$, wobei $g_1(x,y) = x$, $g_2(x,y) = y$ und $g_3(x,y) = x^2 - 5y^2$ die drei Koordinatenfunktionen darstellen. Rechnen wir das aus, erhalten wir die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & -10y \end{pmatrix}$. Gesucht ist eine lineare Abbildung, die an der Stelle $(2,1)^T$ die Funktion berührt.

Eingesetzt in unsere jetzt ermittelte Jacobi-Matrix ergibt sich an dieser Stelle die Ableitung $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$.

Jetzt wissen wir, dass eine lineare Abbildung an jeder Stelle den gleichen Anstieg besitzt, und fassen ihr Bild demnach als einen affinen Untervektorraum im $\mathbb{R}^3$ auf. Der hat im Allgemeinen die Form $w + h(u)$, wobei $w = (w_1, w_2, w_3)^T$, der „Stützvektor“, gesucht ist und der Untervektorraum $h(u)$ durch das Bild von $J_g(x,y) \cdot (x,y)^T = (x, y, 4x - 10y)$ beschrieben wird. Es ergibt sich die folgende Gleichung:

$(x,y,z)^T = (w_1,w_2,w_3)^T + (x,y,4x-10y)^T$

Offensichtlich ist $w_1 = w_2 = 0$. Zur Ermittlung von w_3 ziehen wir den gegebenen Punkt $(2,1,-1)^T$ zurate, der uns die Beziehung $-1 = w_3 + 4 \cdot 2 - 10 \cdot 1 \implies w_3 = 1$ liefert. Demnach gilt $z = 1 + 4x - 10y$.

Satz 12.12 (Hauptkriterium für Differenzierbarkeit)
Sei $a \in U \subset \mathbb{R}^n$, U offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, f in U partiell differenzierbar und alle $\partial_j f$ in a stetig.

Dann ist f in a (Fréchet-)differenzierbar.

Beweis
Seien $x = a + \sum_{k=1}^{n} h_k \cdot \mathrm{e}_k = a + h \;\; (h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n)$ sowie $F(h) := f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(a) \cdot h_j$.
Es ist zu zeigen: $\frac{1}{||h||} F(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$

$$\begin{aligned}
f(a+h) - f(a) = \;& f(a + \sum_{k=1}^{n} h_k \cdot \mathrm{e}_k) - f(a + \sum_{k=1}^{n-1} h_k \cdot \mathrm{e}_k) \\
& + f(a + \sum_{k=1}^{n-1} h_k \cdot \mathrm{e}_k) - f(a + \sum_{k=1}^{n-2} h_k \cdot \mathrm{e}_k) \\
& + \;\ldots \\
& + f(a + h_1 \cdot \mathrm{e}_1) - f(a) \\
= \;& \partial_n f(a + \sum_{k=1}^{n-1} h_k \cdot \mathrm{e}_k + \vartheta_n \cdot h_n \cdot \mathrm{e}_n) \cdot h_n \\
& + \partial_{n-1} f(a + \sum_{k=1}^{n-2} h_k \cdot \mathrm{e}_k + \vartheta_{n-1} \cdot h_{n-1} \cdot \mathrm{e}_{n-1}) \cdot h_{n-1} \\
& + \;\ldots \\
& + \partial_1 f(a + \vartheta_1 \cdot h_1 \cdot \mathrm{e}_1) \cdot h_1
\end{aligned}$$

Dies gilt nach dem Mittelwertsatz mit $\vartheta_i \in (0,1)$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Setze $l_j := \partial_j f(a + \sum_{k=1}^{j-1} h_k \cdot \mathrm{e}_k + \vartheta_j \cdot h_j \cdot \mathrm{e}_j) \;\; (j \in \{1, \ldots, n\})$,
dann gilt $F(h) = f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(a) \cdot h_j = \sum_{j=1}^{n} l_j \cdot h_j$,
und weiter $||F(h)|| = |F(h)| = \big| \sum_{j=1}^{n} l_j \cdot h_j \big| \leqslant \big(\sum_{j=1}^{n} l_j^2 \big)^{\frac{1}{2}} \cdot ||h||_2$.
Schließlich ist $\frac{|F(h)|}{||h||_2} \leqslant \big(\sum_{j=1}^{n} l_j^2 \big)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0$, denn alle $\partial_j f$ sind stetig in a. □

12.3 Kettenregel

Bemerkung 12.13

Seien $a \in U \subset \mathbb{R}^n$, U offen und $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ in a differenzierbar.
Dann sind auch die Abbildungen $f+g$, $\lambda \cdot f$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ in a differenzierbar mit
$(\lambda \cdot f)'(a) = \lambda \cdot f'(a)$
$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

Satz 12.14

Seien die Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ und $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^l$ differenzierbar in $a \in \mathbb{R}^n$ bzw. in $b = f(a) \in \mathbb{R}^m$.
Dann ist $g \circ f$ in a differenzierbar und es gilt $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$.

Beweis

Setze $A := f'(a)$, $B := g'(f(a))$, nach Vorraussetzung $\exists\, \varphi, \psi$ mit $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$, $\lim\limits_{y \to f(a)} \psi(y) = 0$ und

$f(x) = f(a) + A \cdot (x-a) + ||x-a|| \cdot \varphi(x)$, $\qquad *$
$g(y) = g(f(a)) + B \cdot (y - f(a)) + ||y - f(a)|| \cdot \psi(y)$.

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(a)) + B \cdot (f(x) - f(a)) + ||f(x) - f(a)|| \cdot \psi(f(x)) \\ &\underset{*}{=} g(f(a)) + B \cdot A \cdot (x-a) + \underbrace{||x-a|| \cdot B \cdot \varphi(x) + \big|\big|A \cdot (x-a) + ||x-a|| \cdot \varphi(x)\big|\big| \cdot \psi(f(x))}_{=||x-a|| \cdot \omega(x)}\end{aligned}$$

Nun ist zu zeigen, dass $\lim\limits_{x \to a} \omega(x) = 0$ gilt.
Es gilt $\omega(x) = B \cdot \varphi(x) + \big|\big|A \cdot \frac{x-a}{||x-a||} + \varphi(x)\big|\big| \cdot \psi(f(x))$ sowie $||\omega(x)|| \leqslant ||B \cdot \varphi(x)|| + \big|\big|A \cdot \frac{x-a}{||x-a||} + \varphi(x)\big|\big| \cdot ||\psi(f(x))||$.
Nun führen wir den Grenzübergang $x \longrightarrow a$ durch:

(1) $||B \cdot \varphi(x)|| \longrightarrow 0$, denn B ist linear und $\varphi(x) \longrightarrow 0$.

(2) $\big|\big|A \cdot \frac{x-a}{||x-a||} + \varphi(x)\big|\big| \leqslant ||A|| + ||\varphi(x)||$ ist beschränkt wegen $||\varphi(x)|| \longrightarrow 0$.

(3) $||\psi(f(x))|| \longrightarrow 0$, da $f(x) \longrightarrow f(a)$ und somit $\psi(f(x)) \longrightarrow 0$. □

Bemerkung 12.15 (Kettenregel)

(1) $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$
d.h. Komposition, dann Linearisierung
= Linearisierung, dann Komposition

Dies ist auch aus dem Diagramm rechts ersichtlich.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[rr, "f", "f'(a)"'] \arrow[drr, "(g \circ f)'(a)", "g \circ f"'] & & \mathbb{R}^m \arrow[d, "g", "g'(f(a))"'] \\ & & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

(2) Sei $f = (f_1, \dots, f_m)^T$, $g = (g_1, \dots, g_k)^T$.
Nach den Sätzen 12.10, 12.14 hat $g \circ f$ in a die Funktionalmatrix

$$\begin{aligned} J_{g \circ f}(a) &= \big(\partial_i g_j(f(a))\big)_{\substack{j \in \{1,\dots,k\} \\ i \in \{1,\dots,m\}}} \cdot \big(\partial_p f_q(a)\big)_{\substack{q \in \{1,\dots,m\} \\ p \in \{1,\dots,n\}}} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_1 g_1 & \dots & \partial_m g_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 g_k & \dots & \partial_m g_k \end{pmatrix}_{|f(a)} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \dots & \partial_n f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m & \dots & \partial_n f_m \end{pmatrix}_{|a} = J_g(f(a)) \cdot J_f(a) \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für $y = f(x)$ und $h = g \circ f$: $\frac{\partial h_i}{\partial x_l}(x_1, \dots, x_n) = \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_l}(x)$

Beispiel 12.16
Sei $f : I \longrightarrow U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, f sei eine stetig differenzierbare Kurve im $\mathbb{R}^n$,
ferner sei $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar.

Dann ist die Bildkurve $g \circ f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar.

$(g \circ f)'(t_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(f)(t_0) = g'(f(t_0)) \cdot f'(t_0)$
d.h. der Tangentenvektor $f'(t_0)$ wird durch die Jacobi-Matrix $J_g(f(t_0))$ abgebildet.

12.4 Richtungsableitung und Gradient

Definition 12.17 (Gradient)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar in $x \in U$.
Der Vektor $\operatorname{grad} f(x) = \big(\partial_1 f(x), \ldots, \partial_n f(x)\big)$ heißt Gradient von f in x.
Die partielle Ableitung $\partial_j f(x)$ misst die Änderung von f an x in Richtung der j-ten Koordinatenachse.

Definition 12.18 (Richtungsableitung)
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$ mit $||v||_2 = 1$.
Falls der Grenzwert $\partial_v f(x) := \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(x+t\cdot v)-f(x)}{t}$ existiert,
so heißt $\partial_v f(x)$ die Richtungsableitung von f an x in Richtung des Vektors v.

Bemerkung 12.19

(1) Für $v = \mathrm{e}_j = \big(0, \ldots, 0, \overset{\overset{j}{\downarrow}}{1}, 0, \ldots, 0\big)^T$ gilt $\partial_v f(x) = \partial_j f(x)$ (partielle Ableitung)

(2) Falls f in x differenzierbar ist,
so existieren die Richtungsableitungen von f in jede Richtung v ($||v||_2 = 1$)
mit $\partial_v f(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \partial_j f(x) \cdot v_j = \langle \operatorname{grad} f(x), v\rangle \quad (v = \big(v_1, \ldots, v_n\big))$

Beweis mittels Kettenregel
Es ist $\partial_v f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x + t \cdot v)\big|_{t=0}$.
Seien $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $t \overset{k}{\longmapsto} x+t\cdot v \overset{f}{\longmapsto} f(x+t\cdot v)$ und $k'(0) = v$, $f'(k(0)) = (\partial_1 f, \ldots, \partial_n f)\big|_{k(0)}$.
Dann ist $f \circ k$ in $t = 0$ differenzierbar, dabei entspricht die Frechét-Ableitung der gewöhnlichen Ableitung. Folglich ist $\partial_v f(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \partial_j f(x) \cdot v_j$. □

(3) $\partial_v f(x)$ beschreibt also die Änderung von f an x in Richtung des Vektors v mit $||v||_2 = 1$.
Existiert eine Richtung v, für die f am stärksten ansteigt?
$\partial_v f(x) = \langle \operatorname{grad} f(x), v\rangle \leqslant ||\operatorname{grad} f(x)||_2 \cdot ||v||_2 = ||\operatorname{grad} f(x)||_2$
Da $\partial_{\frac{\operatorname{grad} f}{||\operatorname{grad} f||_2}} f(x) = \frac{\langle \operatorname{grad} f(x), \operatorname{grad} f(x)\rangle}{||\operatorname{grad} f(x)||_2} = ||\operatorname{grad} f(x)||_2$ gilt,
ist $\operatorname{grad} f(x)$ die Richtung des stärksten Anstiegs von f in x.

(4) Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $\gamma : I \longrightarrow U$ eine glatte Kurve, die in einer Niveaumenge (z.B. Höhenlinie) von f verläuft, d.h. $f(\gamma(t)) = \text{const.} \quad (t \in I)$
Dann gilt: $\operatorname{grad} f(\gamma(t)) \perp \dot\gamma(t) \quad (t \in I)$
Dabei ist $\dot\gamma(t)$ der Tangentialvektor von γ in t.

Beweis Differenziert man die Gleichung $f(\gamma(t)) = \text{const.}$ $(t \in I)$ mittels Kettenregel nach t, so gilt:
$f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0 \iff \langle \operatorname{grad} f(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle = 0 \iff \operatorname{grad} f(\gamma(t)) \perp \dot\gamma(t)$ □

12.5 Mittelwertsätze und Lipschitz-Stetigkeit

Satz 12.20 (Mittelwertsatz)
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, d.h. $f \in \mathscr{C}^1$.
Ferner seien $x, y \in U$ mit $\{(1-\lambda)\cdot x + \lambda \cdot y : \lambda \in [0,1]\} \subset U$, d.h. U konvex.
Dann existiert ein $\vartheta \in (0,1)$ mit
$f(y) - f(x) = f'[(1-\vartheta)\cdot x + \vartheta \cdot y]\cdot(y-x) = \langle \operatorname{grad} f|_{(1-\vartheta)\cdot x+\vartheta\cdot y}, y-x\rangle$

Beweis
Die Abbildung $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto f(x + t\cdot(y-x))$ sei stetig differenzierbar.
Mit der Kettenregel folgt $\varphi'(t) = f'(x+t\cdot(y-x))\cdot(y-x)$.
Der Mittelwertsatz (für $\mathbb{R}^1$) sichert die Existenz eines $\vartheta \in (0,1)$ mit $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\vartheta)\cdot(1-0)$.
Es folgt $f(y) - f(x) = f'((1-\vartheta)\cdot x + \vartheta\cdot y)\cdot(y-x)$. □

Satz 12.21 (Schrankensatz, „Mittelwertsatz" für $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, d.h. $f \in \mathscr{C}^1$.
Ferner seien $x, y \in U$ mit $\{(1-\lambda)\cdot x + \lambda\cdot y : \lambda \in [0,1]\} \subset U$, d.h. U konvex.
Dann gilt $||f(y) - f(x)||_{\mathbb{R}^m} \leqslant \underbrace{\sup_{\vartheta\in[0,1]} ||\underbrace{f'[(1-\vartheta)\cdot x + \vartheta\cdot y]}_{\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}||}_{\text{Operatornorm zu } ||\cdot||_{\mathbb{R}^n} \text{ und } ||\cdot||_{\mathbb{R}^m}} \cdot ||y-x||_{\mathbb{R}^n}$

Beweis
Setze $\gamma(t) = x + t\cdot(y-x) \quad (t \in [0,1])$.
$L := \sup_{t\in[0,1]} ||f'(\gamma(t))||$ existiert, denn f' ist linear und stetig auf der kompakten Menge $[x,y]$.
Sei $\varphi_\varepsilon(t) = ||f(\gamma(t)) - f(x)|| - t\cdot(L+\varepsilon)\cdot||y-x|| \quad (\varepsilon > 0,\ t\in[0,1]\})$.
Es ist zu zeigen, dass $\varphi_0(1) \leqslant 0$ gilt – Wir zeigen $\varphi_\varepsilon(1) \leqslant 0 \quad (\varepsilon > 0)$ indirekt.
Angenommen, es gäbe ein $\varepsilon > 0$ mit $\varphi_\varepsilon(1) > 0$.
Wähle c mit $0 = \varphi_\varepsilon(0) < c < \varphi_\varepsilon(1)$ und $t_0 = \sup\{t \in [0,1] : \varphi_\varepsilon(t) \leqslant c\}$.
Aufgrund der Stetigkeit von φ_ε gilt $\varphi_\varepsilon(t_0) = c$ und weiter $\varphi_\varepsilon(t) > c$ für alle $t \in (t_0, 1]$.
Es folgt $\psi(t) := \frac{\varphi_\varepsilon(t)-\varphi_\varepsilon(t_0)}{t-t_0} > 0 \quad (t \in (t_0,1])$ $*$
Andererseits gilt $\psi(t) \leqslant \left|\left|\frac{f(\gamma(t))-f(\gamma(t_0))}{t-t_0}\right|\right| - (L+\varepsilon)\cdot||y-x||$ für $t \in (t_0, 1]$.
Mit der Kettenregel folgt $\lim_{t\searrow t_0} \left|\left|\frac{f(\gamma(t))-f(\gamma(t_0))}{t-t_0}\right|\right|_{\mathbb{R}^m} \leqslant ||f'(\gamma(t_0))||_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m}\cdot||y-x||_{\mathbb{R}^n} \leqslant L\cdot||y-x||$.
Es ist also $\psi(t) \leqslant 0$ in einer rechtsseitigen Umgebung von t. Widerspruch zu $*$! □

Folgerung 12.22 (Lipschitz-Stetigkeit)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ konvex und kompakt, $f \in \mathscr{C}^1$, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig.
Dann ist f Lipschitz-stetig, d.h. $\exists L > 0 : ||f(y) - f(x)||_{\mathbb{R}^m} \leqslant L\cdot||y-x||_{\mathbb{R}^n} \quad (x, y \in M)$
Speziell kann gewählt werden $L = \sup_{z\in M} ||f'(z)||$

12.6 Taylor'sche Formel

Bezeichnungen (Multi-Indizes)

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ heißt Multiindex

$|\alpha| := \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j$ heißt Ordnung von α

$\alpha! := \prod\limits_{j=1}^{n} \alpha_j!$ heißt Fakultät von α

$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \partial_{x_n}^{\alpha_n}} f = (\partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}) f$

$\partial_1^{\alpha_1} = \underbrace{\partial_1 \dots \partial_1}_{\alpha_1\text{-mal}}$

$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (x = \big(x_1, \dots, x_n\big) \in \mathbb{R}^n)$

Beispiel $n = 3$

$\alpha = (1, 0, 2) \in \mathbb{N}^3$

$|\alpha| = 1 + 0 + 2 = 3$

$\alpha! = 1! \cdot 0! \cdot 2! = 2$

$\partial^\alpha f = \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial^2 x_3} f$

$x^\alpha = (7, 2, 3)^{(1,0,2)} = 7^1 \cdot 2^0 \cdot 3^2 = 63$

Satz 12.23 (Taylor'sche Formel)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$ mit $x + t \cdot h \in U \quad (t \in [0,1])$

Die Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sei $(k+1)$-mal stetig differenzierbar, d.h $f \in \mathscr{C}^{k+1}$.

Dann gilt $f(x+h) = \sum\limits_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f(x) \cdot h^\alpha + \mathrm{R}_{k+1}(x+h)$

mit $\mathrm{R}_{k+1}(x+h) = \sum\limits_{|\alpha|=k+1} \frac{1}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f(x + \vartheta \cdot h) \cdot h^\alpha \quad (\vartheta \in [0,1])$

Beweis

Betrachte $F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto f(x + t \cdot h)$, $F \in \mathscr{C}^{k+1}$. Nach dem Taylor'schen Satz 10.21 gilt:

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2!} \cdot F''(0) + \dots + \frac{1}{k!} \cdot F^{(k)}(0) + \mathrm{R}_{k+1} \text{ mit } \mathrm{R}_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} \cdot F^{(k+1)}(\vartheta) \qquad *$$

$$F(t) = f(x + t \cdot h) \quad \Longrightarrow \quad F(0) = \sum_{|\alpha|=0} \frac{1}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f(x) \cdot h^\alpha$$

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x + t \cdot h) \cdot h_i \quad \Longrightarrow \quad F'(0) = \sum_{|\alpha|=1} \frac{1}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f(x) \cdot h^\alpha$$

$$F''(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \partial_j \partial_i f(x + t \cdot h) \cdot h_i \cdot h_j = \underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{n} h_i \cdot \partial_i \Big)^2}_{\text{Operator}} f(x + t \cdot h) \quad \Longrightarrow \quad F''(0) = 2! \cdot \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f(x) \cdot h^\alpha$$

$$\vdots$$

$$F^{(k)}(t) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \dots \sum_{i_k=1}^{n} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f(x + t \cdot h) \cdot h_{i_1} \dots h_{i_k} = \underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{n} h_i \cdot \partial_i \Big)^k}_{\text{Operator}} f(x + t \cdot h)$$

$$= \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \cdot h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n} \cdot \partial^\alpha f(x + t \cdot h)$$

$$= \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \cdot h^\alpha \cdot \partial^\alpha f(x + t \cdot h) \quad \Longrightarrow \quad F^{(k)}(0) = k! \cdot \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f(x) \cdot h^\alpha$$

Hierbei kam der Satz von Schwarz zur Anwendung.

Weiter gilt noch $F^{(k+1)}(\vartheta) = (k+1)! \cdot \sum\limits_{|\alpha|=k+1} \frac{1}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f(x + \vartheta \cdot h) \cdot h^\alpha$.

Einsetzen aller Ableitungen in $*$ liefert die Behauptung. □

Folgerung 12.24 (Qualitative Taylor'sche Formel)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$, $f \in \mathscr{C}^k$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sei k-mal stetig differenzierbar.

Dann gilt $f(x+h) = \sum\limits_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f(x) \cdot h^\alpha + \mathrm{R}_{k+1}(x+h)$ mit $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{||h||^k} \mathrm{R}_{k+1}(x+h) = 0$.

$\mathrm{T}_k(x,h) = \sum\limits_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f(x) \cdot h^\alpha$ heißt das k-te Taylor'sche Näherungspolynom

Beweis

Nach dem Taylor'schen Satz 12.23 existiert ein $\vartheta \in [0,1]$, für das gilt:

$f(x+h) = \mathrm{T}_{k-1}(x,h) + \sum\limits_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f(x+\vartheta \cdot h) \cdot h^\alpha = \mathrm{T}_k(x,h) + \sum\limits_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \cdot \big(\partial^\alpha f(x+\vartheta \cdot h) - \partial^\alpha f(x)\big) \cdot h^\alpha$

Für $\tau_\alpha(h) := \frac{1}{\alpha!} \cdot \big(\partial^\alpha f(x+\vartheta \cdot h) - \partial^\alpha f(x)\big)$ gilt $\tau_\alpha(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, denn $\partial^\alpha f$ ist stetig für $|\alpha| = k$.

Nun ist zu zeigen: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{||h||^k} \cdot \sum\limits_{|\alpha|=k} \tau_\alpha(h) \cdot h^\alpha = 0$ für eine, und damit für jede Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$.

Wähle $||h|| = ||h||_\infty = \max\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}} |h_i|$, dann gilt mit $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = k$:

$$\Big|\frac{1}{||h||_\infty^k} \cdot \tau_\alpha(h) \cdot h^\alpha\Big| = \frac{|h_1^{\alpha_1}|\ldots|h_n^{\alpha_n}|}{||h||_\infty^k} \cdot |\tau_\alpha(h)| \leqslant \underbrace{\frac{||h||_\infty^{\sum_{i=1}^n \alpha_i}}{||h||_\infty^k}}_{=1} \cdot \underbrace{|\tau_\alpha(h)|}_{\longrightarrow 0} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$ □

Bemerkung 12.25

(1) Für $\varphi(h) := \frac{1}{||h||^k} \cdot \mathrm{R}_{k+1}(x+h)$ mit $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$
gilt $f(x+h) = \mathrm{T}_k(x,h) \; + \; ||h||^k \cdot \varphi(h)$

(2) $k=2$, $T_2(x,h)$ ist ein Taylor'sches Polynom zweiter Ordnung.

$T_2(x,h) = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant 2} \frac{1}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f(x) \cdot h^\alpha$

$\sum\limits_{|\alpha|=0} \frac{1}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f(x) \cdot h^\alpha = f(x)$

$\sum\limits_{|\alpha|=1} \frac{1}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f(x) \cdot h^\alpha = \frac{1}{1!} \cdot (\partial_1 f(x) \cdot h_1 + \cdots + \partial_n f(x) \cdot h_n) = \langle \mathrm{grad} f(x), h\rangle$

$\sum\limits_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f(x) \cdot h^\alpha = \frac{1}{2!} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \partial_j \partial_i f(x) \cdot h_j \cdot h_i$ ($\longrightarrow$ *quadratische Form*)

Definition (Hesse'sche Matrix)

$\mathrm{Hess} f(x) := \big(\partial_j \partial_i f(x)\big)_{\substack{j\in\{1,\ldots,n\}\\ i\in\{1,\ldots,n\}}}$ heißt Hesse'sche Matrix von f an x.

$\mathrm{Hess} f(x)$ ist symmetrisch. ($\longrightarrow$ Satz von Schwarz)

Somit ist $\sum\limits_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f(x) \cdot h^\alpha = \frac{1}{2}\langle(\mathrm{Hess} f(x)) \cdot h, h\rangle$

und insgesamt ergibt sich

$f(x+h) = f(x) \; + \; \langle \mathrm{grad} f(x), h\rangle \; + \; \frac{1}{2}\langle(\mathrm{Hess} f(x)) \cdot h, h\rangle \; + \; ||h||^2 \cdot \varphi(h) \quad (\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0)$

Folgerung 12.26

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}^2$, $x \in U$.

Dann existiert eine Funktion $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$

mit $f(x+h) = f(x) \; + \; \langle \mathrm{grad} f(x), h\rangle \; + \; \frac{1}{2}\langle(\mathrm{Hess} f(x)) \cdot h, h\rangle \; + \; ||h||^2 \cdot \varphi(h)$

für $(x+h) \in U$ und $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$.

12.7 Lokale Extrema

Definition 12.27
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$.
Die Funktion f hat in x_0 ein lokales $\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}$,
wenn eine Umgebung $V \subset U$ von x_0 existiert mit $f(x) \underset{\geqslant}{\overset{\leqslant}{}} f(x_0) \quad (x \in V)$.

Satz 12.28
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $\xi \in U$, f besitze in ξ ein lokales $\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}$.

(1) Falls f in ξ partiell differenzierbar ist, so gilt $\operatorname{grad} f(\xi) = 0$.

(2) Falls $f \in \mathscr{C}^2$, so gilt $\operatorname{grad} f(\xi) = 0 \ \wedge \ \langle(\operatorname{Hess} f(\xi)) \cdot h, h\rangle \underset{\geqslant}{\overset{\leqslant}{}} 0 \quad (h \in \mathbb{R}^n)$.

Dieser Satz zeigt, dass die quadratische Form $\langle(\operatorname{Hess} f(\xi)) \cdot h, h\rangle$ für die Untersuchung auf Extrema bedeutsam ist.

Beweis nur für Maximum (für Minimum analog)

(1) Sei $0 < |t| < \delta$. Setze $F_j(t) := f(\xi + t \cdot \mathrm{e}_j)$ für $j \in \{1, \dots, n\}$.
Nach Vorraussetzung hat F_j in $t = 0$ ein lokales Extremum, damit folgt nach Satz 8.11:
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_j\big|_{t=0} = \partial_j f(\xi) = 0 \implies \operatorname{grad} f(\xi) = 0$

(2) Sei $0 < |t| < \delta$, $h \in \mathbb{R}^n$, dann gilt:
$0 \geqslant f(\xi + t \cdot h) - f(\xi) = \frac{1}{2} \cdot \langle(\operatorname{Hess} f(\xi)) \cdot t \cdot h, t \cdot h\rangle + ||t \cdot h||^2 \cdot \varphi(t \cdot h)$
$0 \geqslant \frac{1}{2} \cdot \langle(\operatorname{Hess} f(\xi)) \cdot h, h\rangle + \underbrace{||h||^2 \cdot \varphi(t \cdot h)}_{\longrightarrow 0 \text{ für } t, h \to 0} \implies \frac{1}{2} \cdot \langle(\operatorname{Hess} f(\xi)) \cdot h, h\rangle \leqslant 0$ □

Definition 12.29
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch.
A heißt
(1) $\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}$ definit $:\Longleftrightarrow \quad \langle Ax, x\rangle \underset{<}{\overset{>}{}} 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

(2) $\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}$ semidefinit $:\Longleftrightarrow \quad \langle Ax, x\rangle \underset{\leqslant}{\overset{\geqslant}{}} 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n)$

(3) indefinit $:\Longleftrightarrow \quad \langle Ax, x\rangle$ nimmt sowohl positive als auch negative Werte an für $x \in \mathbb{R}^n$

Bemerkung 12.30
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, bekanntlich sind dann alle Eigenwerte λ_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) von A reell.
A heißt

(1) $\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}$ definit $:\Longleftrightarrow \quad \forall\, i \in \{1, \dots, n\} : \lambda_i \underset{<}{\overset{>}{}} 0$

(2) $\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}$ semidefinit $:\Longleftrightarrow \quad \forall\, i \in \{1, \dots, n\} : \lambda_i \underset{\leqslant}{\overset{\geqslant}{}} 0$

(3) indefinit $:\Longleftrightarrow \quad \exists\, i \in \{1, \dots, n\}\, \exists j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\} : \lambda_i < 0 \wedge \lambda_j > 0$

Bemerkung 12.31
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}^2$, $\xi \in U$ mit $\operatorname{grad} f(\xi) = 0$.
Dann gelten

(1) $\operatorname{Hess} f(\xi)$ $\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}$ definit $\Longrightarrow$ f hat in ξ ein striktes lokales $\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}$

(2) $\operatorname{Hess} f(\xi)$ indefinit $\Longrightarrow$ f hat in ξ kein lokales Extremum

Beweis

(1) Sei $A = \operatorname{Hess} f(\xi)$ positiv definit.
Da $h \longmapsto \langle A \cdot h, h\rangle$ auf der kompakten Menge $S_1 = \{h \in \mathbb{R}^n : ||h|| = 1\} = \partial K_1(0)$ stetig ist, existiert $\alpha := \min\limits_{h \in S} \langle A \cdot h, h\rangle > 0$. Somit gilt $\langle A \cdot h, h\rangle \geqslant \alpha \cdot ||h||^2 \quad (h \in \mathbb{R}^n)$, und weiter
$f(\xi + h) = f(\xi) + \frac{1}{2} \cdot \langle A \cdot h, h\rangle + ||h||^2 \cdot \varphi(h) \geqslant f(\xi) + \underbrace{(\tfrac{1}{2}\alpha + \varphi(h))}_{\longrightarrow \frac{1}{2}\alpha} \cdot \underbrace{||h||^2}_{\longrightarrow 0} \xrightarrow[h \to 0]{} f(\xi)$
Wegen $\varphi(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$, $\alpha > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass $\frac{1}{2}\alpha + \varphi(h) > 0$ für $||h|| < \delta$ gilt.
Es folgt $f(\xi + h) > f(\xi) \quad (h \neq 0)$, also hat f an ξ ein striktes lokales Minimum.
Der Beweis für Maxima ist analog mit $-f$ zu führen.

(2) Hätte f in ξ ein lokales Extremum, dann wäre $\operatorname{Hess} f(\xi)$ nicht indefinit, also semidefinit. □

Beispiele

(1) $f(x, y) = x^2 + y^2$ (Rotationsparaboloid)
$f \in \mathscr{C}^2$, globales Minimum in $\xi = (0, 0)$
stationäre Punkte: $\operatorname{grad} f = (f_x, f_y) = (2x, 2y) = 0 \iff x = y = 0$
$\Longrightarrow$ nur $\xi = (0, 0)$ extremwertverdächtig
$\operatorname{Hess} f(\xi) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}(\xi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = A$
$\operatorname{Hess} f(\xi)$ ist positiv definit, denn $\langle A \cdot h, h\rangle = \langle (2h_1, 2h_2), (h_1, h_2)\rangle = 2(h_1^2 + h_2^2) \geqslant 0 \quad (h \neq 0)$
Also hat f in $\xi = (0, 0)$ ein striktes Minimum.

(2) $f(x, y) = 2 + x^2 - y^2$ (Sattelfläche)
stationäre Punkte: $\operatorname{grad} f = (f_x, f_y) = (2x, -2y) = 0 \iff x = y = 0$
$\Longrightarrow$ nur $\xi = (0, 0)$ extremwertverdächtig
$\operatorname{Hess} f(\xi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ indefinit $\Longrightarrow$ ξ kein Extremum

12.8 Diffeomorphismen und Lokale Invertierbarkeit

Der Gegenstand dieses Kapitels ist die Untersuchung bijektiver Abbildungen im n-dimensionalen Raum. Von besonderer Bedeutung ist dabei die Differenzierbarkeit bzw. die Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung. Sind die Ableitungsmatrizen der Funktion bzw. der Umkehrfunktion dazu noch stetig (in Abhängigkeit der Stelle), dann spricht man in diesem Fall von einem Diffeomorphismus.

Definition 12.32 (Diffeomorphismus)
Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen.
$f : U \longrightarrow V$ heißt Diffeomorphismus
$:\Longleftrightarrow$ f ist bijektiv und sowohl f als auch f^{-1} sind stetig differenzierbar ($f, f^{-1} \in \mathscr{C}^1$)

Da es sich hierbei um eine neue und damit für den ein oder anderen schwer vorstellbare Struktur handelt, wollen wir sie kurz anhand von Beispielen erklären:

Beispiele

(1) $(u,v)^T = f(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)^T$ für $(x,y) \in (0,\infty)\times(0,\infty)$
Offensichtlich ist der Bildraum der Funktion die Menge aller Paare (u,v), für die $u \geqslant v$ gilt.

Wir ermitteln zunächst die Umkehrabbildung:
$u = x^2 + y$
$v = x^2 - y$
$\Longrightarrow x = \sqrt{\frac{u+v}{2}}$ und $y = \sqrt{\frac{u-v}{2}}$
$\Longrightarrow (x,y)^T = f^{-1}(u,v) = (\sqrt{\frac{u+v}{2}}, \sqrt{\frac{u-v}{2}})^T$

Und nun die Ableitungsmatrix der Funktion in Abhängigkeit der beiden Variablen:
$\partial_x f_u(x,y) = 2x$
$\partial_y f_u(x,y) = 2y$
$\partial_x f_v(x,y) = 2x$
$\partial_y f_v(x,y) = -2y$
$$\Longrightarrow \partial f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f_u(x,y) & \partial_y f_u(x,y) \\ \partial_x f_v(x,y) & \partial_y f_v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$$
Diese Matrix ist offensichtlich stetig abhängig von den beiden Variablen. Nähern sich nämlich x und y einem bestimmten Wert an, so nähert sich die gesamte Matrix der Matrix mit den Funktionswerten an.

Kommen wir noch zur Ableitungsmatrix der Umkehrabbildung:
$\partial_u f_x^{-1}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{u+v}}$
$\partial_v f_x^{-1}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{u+v}}$
$\partial_u f_y^{-1}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{u-v}}$
$\partial_v f_y^{-1}(u,v) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{u+v}}$
$$\Longrightarrow \partial f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_u f_x^{-1}(u,v) & \partial_v f_x^{-1}(u,v) \\ \partial_u f_y^{-1}(u,v) & \partial_v f_y^{-1}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{u+v}} & \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{u+v}} \\ \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{u-v}} & -\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{u-v}} \end{pmatrix}$$
Auch diese Matrix ist offenbar stetig abhängig von den beiden Variablen. Auch hier gilt: Wenn sich u und v einem bestimmten Wert annähern, so nähert sich die gesamte Matrix der Matrix mit ihren Funktionswerten an. Das sieht man hier, da die partiellen Ableitungen stetig sind.

(2) *Polarkoordinatenabbildung*

Hierbei handelt es sich um ein etwas praktischeres Beispiel, die Umsetzung verschiedener Darstellungsweisen von Punkten in Koordinatensystemen.

$f : U \longrightarrow V : (r,\varphi) \longmapsto (x, y) = (r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi)$ für $U = (0,\infty) \times (-\pi,\pi)$

Der Bildraum der Funktion ist $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \leqslant 0\}$,

und die Umkehrfunktion ist $f^{-1} : V \longrightarrow U : (x, y) \longmapsto (r, \operatorname{sgn} y \cdot \arccos \frac{x}{r})$ mit $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

f ist auf U differenzierbar mit $J_f(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & r \cdot \sin\varphi \\ \sin\varphi & r \cdot \cos\varphi \end{pmatrix}$

f^{-1} ist auf V differenzierbar mit $J_{f^{-1}}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{1}{r} \cdot \sin\varphi & \frac{1}{r} \cdot \cos\varphi \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ f ist ein Diffeomorphismus

Wir setzen einfach mal die Abbildungsvorschriften für x und y in die Matrix ein. Dann erhalten wir:

$J_{f^{-1}}\big(f(r,\varphi)\big) \cdot J_f(r,\varphi) = \mathrm{E} \iff \big(J_f(r,\varphi)\big)^{-1} = J_{f^{-1}}\big(f(r,\varphi)\big)$

Multiplizieren wir also die beiden Matrizen, erhalten wir die Einheitsmatrix. Das ist kein Zufall.

Bemerkung 12.33

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$.

Für einen Diffeomorphismus $f : U \longrightarrow V$ gilt dann:

(1) $m = n$

(2) Die linearen Abbildungen $f'(a)$ sind injektive Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{R}^n$ für alle $a \in U$.

Hierbei gilt: Die inverse Ableitungs-Matrix ist die Ableitung der inversen Funktion:

$(f'(a))^{-1} = (f^{-1})'(f(a))$

$(J_f(a))^{-1} = J_{f^{-1}}(f(a))$

Beweis

Da f bijektiv ist, existiert f^{-1} und es gelten die Beziehungen $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m} = f \circ f^{-1}$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.

Wir können beide Gleichungen für beliebiges $a \in U$ und $b = f(a) \in V$ differenzieren. Die Ableitung der (linearen) identischen Abbildung ist die identische Abbildung selbst (nach Bemerkung 12.7.(4)), und wir erhalten somit:

$f'(f^{-1}(b)) \circ (f^{-1})'(b) = \mathrm{E}_m$

$(f^{-1})'(f(a)) \circ f'(a) = \mathrm{E}_n$

$(f^{-1})'(b) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ist injektiv, denn:

$(f^{-1})'(b) \cdot x = (f^{-1})'(b) \cdot y \iff f'(f^{-1}(b)) \cdot (f^{-1})'(b) \cdot x = (f^{-1})'(b) \cdot f'(f^{-1}(b)) \cdot y \iff \mathrm{E}_m \cdot x = \mathrm{E}_m \cdot y \iff x = y$

Nach den Erkenntnissen der linearen Algebra ist bei einer injektiven Abbildung die Dimension des Bildraums größer als die Dimension des Urbildraums, woraus folgt, dass $m \leqslant n$ gilt.

Für $f'(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ergeben sich analoge Überlegungen, und wir erhalten die Beziehung $m \geqslant n$.

Es folgt also insgesamt: (1) $m = n$.

Demnach sind die Ableitungsmatrizen invertierbar und es gilt: $(f'(a))^{-1} = (f^{-1})'(f(a))$ □

Wie wir also sehen, sind die Diffeomorphismen eben wegen der recht einfachen Berechenbarkeit der Jacobi-Matrizen aus den Matrizen der Umkehrabbildungen durchaus nicht ohne Bedeutung. Wir wollen jetzt einige Indikatoren für Diffeomorphismen kennenlernen.

Satz 12.34 (Diffeomorphie)
Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \longrightarrow V$ eine bijektive $\mathscr{C}^1$-Abbildung.
Falls dann

(1) die Abbildungen $\partial f(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bijektiv für alle $a \in U$ sind
$\iff$ $f'(a)$ injektiv
$\iff$ $\det J_f(a) \neq 0$

(2) $f^{-1} : V \longrightarrow U$ stetig ist,

so ist f ein Diffeomorphismus.

Beweis

(1) Wir haben nun zweierlei zu zeigen: Zum einen, dass die Umkehrfunktion f^{-1} in y differenzierbar ist, und zum anderen, dass die Ableitungen stetig abhängig von y sind.

(2) Wir wählen $y \in V$ beliebig. Zu zeigen ist, dass $g = f^{-1}$ in y differenzierbar ist
Wir betrachten deshalb $g(y+k) - g(y)$ für $k \in \mathbb{R}^n$ mit $y + k \in V$.
Wir setzen $x = g(y)$ und $h = g(y+k) - x$.
Da f in x differenzierbar ist, gilt $f(x+h) = f(x) + \partial f(x) \cdot h + \|h\| \cdot \varphi(h)$ mit $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$ $\quad *$
so dass folgt $h = (\partial f(x))^{-1}[y + k - y - \|h\| \cdot \varphi(h)]$ $\quad **$
Also ergibt sich $g(y+k) - g(y) = (\partial f(x))^{-1} k - (\partial f(x))^{-1} \|h\| \cdot \varphi(h)$ $\quad ***$
(die Matrix $\partial f(x)$ ist invertierbar, weil als bijektiv, d.h. $\det J_f(a) \neq 0$ vorrausgesetzt)
Die Differenzierbarkeit von g in y ist somit bewiesen, wenn $\lim\limits_{k\to 0} \frac{\|h\|}{\|k\|}(\partial f(x))^{-1})\varphi(h)] = 0$ gezeigt ist.
Wegen $h = g(y+k) - g(y)$, g stetig, $\varphi(h) \to 0$ für $h \to 0$ genügt es zu zeigen, dass $\frac{\|h\|}{\|k\|}$ beschränkt ist.
Wir setzen $\|(\partial f(x))^{-1}\| = c$. Wegen $*$ existiert $r > 0$ mit $\|\varphi(h)\| < \frac{1}{2c}$ für $\|h\| \leqslant r$.
Die Stetigkeit von g impliziert die Existenz eines $\delta > 0$ mit $\|h\| = \|g(y+k) - g(y)\| \leqslant r$ für $\|k\| < \delta$.
Damit folgt $\|h\| \cdot \|(\partial f(x))^{-1}\| \cdot \|\varphi(h)\| \leqslant \|h\| \cdot c \cdot \frac{1}{2c}$ für $\|k\| < \delta$.
Also folgt mit $**$ und der Matrizen-Beziehung $\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|$ (11.17)

$$\begin{aligned}
\|h\| &= \|(\partial f(x))^{-1} \cdot [k - \|h\| \cdot \varphi(h)]\| \\
&\leqslant \|(\partial f(x))^{-1} \cdot k\| + \|(\partial f(x))^{-1} \cdot |h\| \cdot \varphi(h)]\| \\
&\leqslant \|(\partial f(x))^{-1}\| \cdot \|k\| + \|(\partial f(x))^{-1}\| \cdot \|\varphi(h)]\| \cdot \|h\| \\
&\leqslant c \cdot \|k\| + (1/2)\|h\|
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \frac{\|h\|}{\|k\|} \leqslant 2c$ (für $\|k\| < \delta$) Damit ist $\frac{\|h\|}{\|k\|}$ beschränkt, woraus die Existenz der Ableitung folgt.

(3) Es ist noch zu zeigen, dass $\partial(f^{-1})(y)$ stetig in $y \in V$ ist.
Mit $***$ folgt, dass die inverse Abbildung die inverse Matrix als Jacobi-Matrix besitzt, d.h.
$\partial(f^{-1})(y) = (\partial f(x))^{-1} = [\partial f(f^{-1}(y))]^{-1}$,
Da außerdem $y \longmapsto f^{-1}(y)$ und ∂f nach Vorraussetzung stetig sind, und eine Abbildung, die eine Matrix auf ihr Inverses abbildet auch stetig ist, haben wir in dem obigen Term eine Verknüpfung dreier stetiger Funktionen, die nach den Stetigkeitssätzen in ihrer Gesamtheit auch stetig ist. □

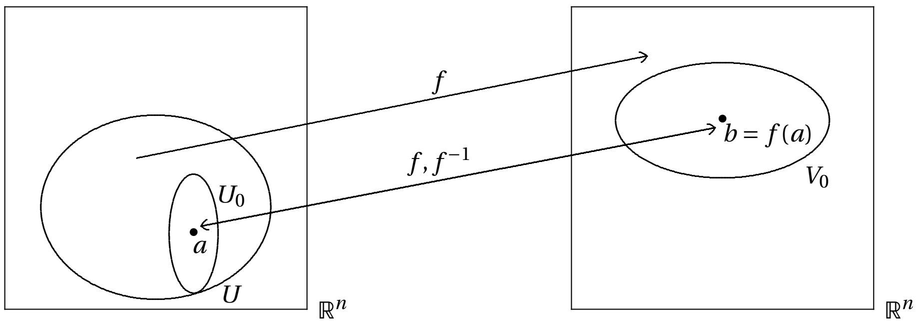
Dieser Satz bildet die Grundlage für den folgenden Satz der lokalen Invertierbarkeit.

Satz 12.35 (lokale Umkehrbarkeit)
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in \mathscr{C}^1$, $f'(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bijektiv.
Dann existiert eine offene Umgebung $U_0 \subset U$ von a mit

(1) $V_0 := f(U_0)$ ist eine offene Umgebung von $b := f(a)$,

(2) $f|U_0$ ist ein Diffeomorphismus von U_0 auf V_0,

(3) $(f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1} \quad (x \in U_0)$.



$$\exists\, V_0\ \forall\, y \in V_0\ \exists!\, x \in U_0 : f(x) = y$$

Beweis Der Beweis wird etwas umfangreicher ausfallen. Der Grundgedanke ist, dass wir mittels Banach'schen Fixpunktsatz zeigen, dass

I. es eine offene Umgebung U_0 von a gibt, die auf eine offene Umgebung V_0 von $f(a)$ abgebildet wird,

II. die Abbildung reduziert auf diese Umgebung U_0 injektiv ist,

III. die inverse Abbildung auf der Bildmenge $f(U_0)$ stetig ist und

IV. die linearen Abbildungen $f'(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ allesamt bijektiv sind.

Damit sind die Vorraussetzungen für den letzten Satz 12.34 erfüllt und f ist ein Diffeomorphismus.
Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $a = 0$, $f(a) = 0$ und $f'(0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.

Bemerkung (Satz 12.35 für $\mathbb{R}^1$)
Vorraussetzung: $f'(a)$ bijektiv $\Longleftrightarrow$ $f'(a) \neq 0$ ($f'(a)$ linear),
d.h. o.E.d.A. $\exists \delta > 0\ \forall x \in (a-\delta, a+\delta) : f'(x) > 0$
$\Longrightarrow$ f ist streng monoton auf dem Intervall $(a-\delta, a+\delta)$
$f\big|(a-\delta, a+\delta)$ bildet auf $\big(f(a-\delta), f(a+\delta)\big)$ ab,
$\Longrightarrow$ $f\big|(a-\delta, a+\delta)$ ist ein Diffeomorphismus mit $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$

Satz 12.36 (Offenheit des Bildes)
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in \mathscr{C}^1$ mit $\det J_f(x) \neq 0$ $(x \in U)$.

Dann ist $f(U)$ offen.
Falls f außerdem injektiv ist, so ist f ein Diffeomorphismus von U auf $f(U)$.

12.9 Implizite Funktionen und Lokale Lösbarkeit

Sei $f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$ (obere Hälfte des Einheitskreis),
dann gilt $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ für alle $(x,y) \in \operatorname{graph} f = \{(x, f(x)) : x \in (-1,1)\}$

Umgekehrt: Seien $W \in \mathbb{R}^2$, $F : W \longrightarrow \mathbb{R}$, $G := \{(x,y) \in W : F(x,y) = 0\}$.
Existieren ein Intervall I und eine Funktion $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, sodass $\operatorname{graph} g \subset G$ *gilt?*
Die Funktion g wäre dann implizit durch $F(x,y) = 0$ definiert.

Allgemein
Sei $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen, $F : W \longrightarrow \mathbb{R}^m : (x,y) \longmapsto F(x,y)$, wobei $(x,y) \in W$ mit $x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m$.
Mit $F = (F_1, \ldots, F_m)^T$ sowie $F(x,y) = 0$ erhalten wir ein Gleichungssystem:
$F_1(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) = 0$
$\vdots$
$F_m(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) = 0$

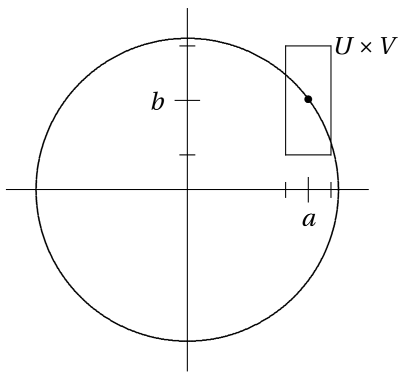
Vereinbarung: $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \left(\dfrac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)_{\substack{j\in\{1,\ldots,m\}\\ i\in\{1,\ldots,m\}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$ und analog $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{j\in\{1,\ldots,n\}\\ i\in\{1,\ldots,m\}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

Bemerkung 12.37
Die Frage, ob durch $F(x,y) = 0$ eine Funktion $y = g(x)$ implizit definiert wird,
ist äquivalent zu dem Problem, ob das Gleichungssystem $F(x,y) = 0$ nach y auflösbar ist.

Sei $(a,b) \in W$ mit $F(a,b) = 0$,
existiert eine Umgebung U von a in $\mathbb{R}^n$, sodass $F(x,y) = 0$ für alle $x \in U$ eindeutig nach y auflösbar ist?

(1) Es gibt Umgebungen U von a, V von b, sodass die Gleichung $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ auf $U \times V$ eindeutig nach y aufgelöst werden kann.

(2) Für $(a,b) \in \{(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)\}$ existieren keine derartigen Umgebungen, denn keine Auflösung wäre eindeutig.



Die Abbildung rechts macht dies deutlich.

Satz 12.38 (Implizite Funktionen)
Sei $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen, $F \in \mathscr{C}^1$, $F : W \longrightarrow \mathbb{R}^m : (x,y) \longmapsto F(x,y)$.
Ferner sei $(a,b) \in W$ und $F(a,b) = 0$ sowie $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$ invertierbar.
Dann gibt es offene Umgebungen U von a in $\mathbb{R}^n$, V von b in $\mathbb{R}^m$, $U \times V \subset W$
und eine Abbildung $f : U \longrightarrow V$ mit

(1) $F(x, f(x)) = 0 \quad (x \in U)$,

(2) $\forall (x,y) \in U \times V : F(x,y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = f(x)$,

(3) f ist eine $\mathscr{C}^1$-Abbildung mit $J_f(x) = -\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right]^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))$ für alle $x \in U$.

Beweis analog zum Beweis über lokale Invertierbarkeit (siehe Forster I) oder mit Hilfe des Satzes über den inversen Operator (Königsberger II)

Beispiel 12.39 (implizit definierte Funktionen einer Variablen)
Seien W eine offene Umgebung von $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$,
$F \in \mathscr{C}^1$, $F : W \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $(x_0, y_0) \in \{(x, y) \in W : F(x, y) = 0\}$ und $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.
Dann existiert genau eine Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, die in einer gewissen Umgebung U von x_0 definiert ist mit $f(x_0) = y_0 \wedge F(x, f(x)) = 0 \ \ (x \in U)$ und $f \in \mathscr{C}^1$, $f'(x) = -\frac{1}{F_y(x, f(x))} \cdot F_x(x, f(x)) \ \ (x \in U)$.

12.10 Extrema unter Nebenbedingungen

Beispiel Für die Ellipse $g(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 5 = 0$ sind die Punkte (ξ,η) gesucht, deren Abstand vom Nullpunkt $(0,0)$ extremal ist. Um dieses Problem zu lösen, bestimmen wir die Extremalpunkte von $f(x,y) = x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$.

Definition 12.40
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g_1,\dots,g_m : U \longrightarrow \mathbb{R}$, ferner sei $M = \{x \in U : g_1(x) = \dots = g_m(x) = 0\}$.
$a \in M$ heißt lokales $\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}$ von f unter der Nebenbedingung M,
wenn eine Umgebung $V \subset U$ von a existiert mit $f(x) \begin{matrix}\leqslant\\ \geqslant\end{matrix} f(a) \quad (x \in V \cap M)$.

Satz 12.41 (Lagrange-Multiplikatoren)
Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f, g_1,\dots,g_m : U \longrightarrow \mathbb{R}$ seien $\mathscr{C}^1$-Funktionen, $M = \{x \in U : g_1(x) = \dots = g_m(x) = 0\}$, $m \leqslant n$, $a \in M$ und die Vektoren $\operatorname{grad} g_1(a),\dots,\operatorname{grad} g_m(a)$ seien linear unabhängig.
Falls dann a eine lokale Extremstelle von f unter der Nebenbedingung M ist,
so existiert ein $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ mit $\operatorname{grad} f(a) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \operatorname{grad} g_j(a)$.

Beweis
Setze $g = (g_1, g_2, ..., g_m)^T$. Dann hat die Jacobi-Matrix $\begin{pmatrix} \partial_1 g_1 & \dots & \partial_n g_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 g_m & \dots & \partial_n g_m \end{pmatrix}$ den Rang m.
Wir setzen $x = (x_1,\dots,x_n) := (x_1,\dots,x_{n-m}; y_1,\dots,y_m) = (\tilde{x}, y)$ und entsprechend dieser Vorschrift $a = (\tilde{a}, b)$. Dann gilt $g(a) = g(\tilde{a}, b) = 0$ und o.E.d.A. $\frac{\partial g}{\partial y}(a) \neq 0$.
Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren offene Umgebungen $\tilde{U}$ von $\tilde{a}$ in $\mathbb{R}^{n-m}$ und V von b in $\mathbb{R}^m$ sowie eine Abbildung $h : \tilde{U} \to V$ mit $g(\tilde{x}, h(x)) = 0$ für $\tilde{x} \in U,\ h(\tilde{a}) = b$.
Mit der Kettenregel ergibt sich

$$\frac{\partial g}{\partial \tilde{x}}(a) + \frac{\partial g}{\partial y}(a) \cdot J_h(\tilde{a}) = 0$$

Da die Funktion $\tilde{x} \longmapsto f(\tilde{x}, h(x))$ in $\tilde{x} = \tilde{a}$ nach Voraussetzung ein lokales Extremum hat, gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}}(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot J_h(\tilde{a}) = 0$$

Damit ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a)(\frac{\partial g}{\partial y}(a))^{-1} \frac{\partial g}{\partial \tilde{x}}(a)$$

Wir setzen

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) := \frac{\partial f}{\partial y}(a)(\frac{\partial g}{\partial y}(a))^{-1}$$

Da außerdem offensichtlich $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(a)$ gilt, folgt die Behauptung

$$\operatorname{grad} f(a) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \operatorname{grad} g_j(a).$$

□

Beispiel Um unser Beispiel weiterzuführen, betrachten wir die Nebenbedingung $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x) = x^2 + xy + y^2 - 5 = 0\}$. Diese Menge ist kompakt und die Funktion $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, also existieren $\max\limits_{x \in M} f(x)$, $\min\limits_{x \in M} f(x)$ und müssen notwendig lokale Extrema sein.
$\operatorname{grad} g(x,y) = (2x+y, 2y+x) = 0 \iff (x,y) = (0,0)$, aber $(0,0) \notin M$
Wir bilden die Lagrange'sche Hilfsfunktion $L(x,y,\lambda) = f - \lambda \cdot g$, weiterhin gilt $\operatorname{grad} L = \operatorname{grad} f - \lambda \cdot \operatorname{grad} g = (2x, 2y) - \lambda \cdot (2x+y, 2y+x) = (0,0)$ und damit erhalten wir ein (nicht-lineares) Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
&2x - \lambda \cdot (2x+y) = 0 \quad | \cdot y \\
&2y - \lambda \cdot (2y+x) = 0 \quad | \cdot (-x) \\
&x^2 + xy + y^2 - 5 = 0 \quad (*)
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow \; -\lambda \cdot (y^2 - x^2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y^2 - x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = y \;\; (1) \;\; \vee \;\; x = -y \;\; (2)$
Einsetzen von (1) in $(*)$ liefert mit $3x^2 - 5 = 0$ die Minimalstellen $(\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}})$ und $(-\sqrt{\frac{5}{3}}, -\sqrt{\frac{5}{3}})$
Setzen wir (2) in $(*)$ ein, so erhalten wir $x^2 - 5 = 0$ und somit die Maximalstellen $(\sqrt{5}, -\sqrt{5})$ und $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$

Kapitel 13

Topologie metrischer Räume

Themen: Zusammenhang von Mengen, Kompaktheit

Wiederholung

Sei (X,d) ein metrischer Raum.

$A \subset X$ ist offen

$\iff \quad \forall x \in A\, \exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(x) \subset A \quad$ (d.h. $A \subset \operatorname{int} A$)

$\iff \quad X \setminus A$ abgeschlossen

$\iff \quad \partial A \subset X \setminus A$

$B \subset X$ ist abgeschlossen

$\iff \quad \left[\forall (x_n) \text{ Folgen in } B \text{ mit } x_n \to x \implies x \in B\right]$

13.1 Zusammenhängende Mengen

Definition 13.1

Sei X ein metrischer Raum.

(1) X heißt zusammenhängend

$:\iff \quad \nexists U, V \neq \emptyset \text{ offen} : X = U \cup V \ \wedge\ U \cap V = \emptyset$

(2) X heißt wegzusammenhängend

$:\iff \quad \forall x, y \in X\, \exists$ stetige Kurve $\alpha : [\xi, \eta] \longrightarrow X$ mit $\alpha(\xi) = x,\ \alpha(\eta) = y$

Beispiele 13.2

(1) $X = K_r[0] = \{z \in E : ||z|| \leqslant r\}$ im normierten Raum $\big(E, ||\cdot||\big)$ ist wegzusammenhängend,
denn für $x, y \in X$ und $t \in [0,1]$ ist $(x + t\cdot(y-x)) \in X$ mit $||(1-t)\cdot x + t\cdot y|| \leqslant (1-t)\cdot||x|| + t\cdot||y|| \leqslant r$.
Also ist $\alpha : [0,1] \longrightarrow X : t \longmapsto \big(x + t\cdot(y-x)\big)$ eine stetige Kurve in X, die x, y verbindet.

(2) Jedes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist wegzusammenhängend,
denn sei $x, y \in I$, o.E.d.A. $x < y$, wähle $\alpha(t) = x + t\cdot(y-x) \quad (t \in [0,1])$.

(3) $X = [-3,0] \cup (1,2) \subset \mathbb{R}$ ist nicht zusammenhängend,
denn $U = [-3,0]$ und $V = (1,2)$ sind offen in X mit $X = U \cup V \ \wedge\ U \cap V = \emptyset$.

Satz 13.3
Sei $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$.

X ist zusammenhängend
$\iff$ X ist ein Intervall

Beweis

I. „$\Longrightarrow$"
Sei $X \subset \mathbb{R}$ kein Intervall, dann $\exists\, x, y \in X, s \notin X : x < s < y$.
Setze $U := X \cap (-\infty, s)$, $V := X \cap (s, \infty)$,
dann gelten $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, $U, V \neq \emptyset$ offen in X.
Damit ist X nicht zusammenhängend.

II. „$\Longleftarrow$"
Sei X ein nicht zusammenhängendes Intervall,
dann $\exists\, U, V \neq \emptyset$ offen in X mit $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$.
Wegen $X = U \cup V$ wären die Mengen U, V offen und abgeschlossen.
Wäre $x \in U$, $y \in V$, o.E.d.A. $x < y$, dann gelte $[x, y] \subset X$, denn X ist ein Intervall.
Setze $s := \sup\big([x, y] \cap U\big)$, es gelte $s \in U$, da U abgeschlossen wäre.
Mit $(s, y] \subset V$ folge $s \in V$, denn auch V wäre abgeschlossen.
Insgesamt ergäbe sich $s \in U \cap V$. Widerspruch! □

Satz 13.4
Sei X ein metrischer Raum.

X ist wegzusammenhängend
$\Longrightarrow$ X ist zusammenhängend

Beweis
Sei X wegzusammenhängend, jedoch nicht zusammenhängend.
Dann $\exists\, U, V \neq \emptyset$ offen mit $U \cap V = \emptyset$, $X = U \cup V$
und $\exists$ eine stetige Kurve $\alpha : [\xi, \eta] \longrightarrow X$ mit $\alpha(\xi) = u \in U$, $\alpha(\eta) = v \in V$.
Offensichtlich gelte $[\xi, \eta] = \alpha^{-1}(U) \cup \alpha^{-1}(V)$ mit $\alpha^{-1}(U), \alpha^{-1}(V) \neq \emptyset$ offen und $\alpha^{-1}(U) \cap \alpha^{-1}(V) = \emptyset$.
Widerspruch! □

Definition 13.5 (Gebiet)
E sei ein normierter Raum, $X \subset E$.

X heißt Gebiet
$:\iff$ X ist offen und zusammenhängend

Satz 13.6
Jedes Gebiet X ist wegzusammenhängend,
d.h. je zwei Punkte $x, y \in X$ können durch einen in X liegenden Streckenzug verbunden werden.

Beweis
Sei $a \in X$, setze $U := \{y \in X : \exists$ Streckenzug in X von a nach $y\}$.
Wir zeigen:

I. U ist offen,
II. $V := X \setminus U$ ist offen.

Dann ist $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ $(U \neq \emptyset)$, sodass $U = X$, $V = \emptyset$ sein muss, denn X ist zusammenhängend.

I. Sei $x \in U$, $K_\varepsilon(x) \subset X$ $(\varepsilon > 0)$,
dann existiert für alle $y \in K_\varepsilon(x)$ ein Streckenzug von a nach y,
genauer ein Streckenzug von a nach x mit der Strecke von x nach y, d.h. U ist offen.

II. Sei $x \in V$, $K_\varepsilon(x) \subset X$ $(\varepsilon > 0)$, dann gilt $K_\varepsilon(x) \subset V$,
denn für $y \in K_\varepsilon(x)$ mit $y \in U$ (d.h. $y \notin V$) existiert ein Streckenzug von a nach y
und damit auch von a nach x, d.h. $x \notin V$, also ist V offen in X. □

Definition 13.7 (sternförmige Menge)
Sei M eine Menge in dem normierten Raum E.

M heißt sternförmig
$:\Longleftrightarrow \quad \exists\, a \in M\ \forall x \in M : [a,x] = \{y = a + t\cdot(x-a),\ t \in [0,1]\} \subset M$

13.2 Kompakte Mengen

Definition 13.8 (Kompaktheit)
Sei (X,d) ein metrischer Raum, $A \subset X$.

(1) Eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ offener Teilmengen von X heißt offene Überdeckung von A
$:\Longleftrightarrow \quad A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$

(2) A heißt kompakt
$:\Longleftrightarrow$ Zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von A existiert eine endliche Überdeckung,
d.h. es existieren endlich viele Indizes $i_1,\dots,i_n \in J$, sodass $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$

Beispiele $X = \mathbb{R}$

(1) $A = [0,1)$ ist nicht kompakt,
denn für die offenen Intervalle $U_n = (-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n})$ $(n \in \mathbb{N}_+)$ gilt $A \subset \bigcup_{n=2}^{\infty} U_n$,
d.h. $(U_n)_{n=2}^{\infty}$ ist eine offene Überdeckung von A. Es existiert jedoch keine endliche Überdeckung.

(2) $A = [0,1]$ ist kompakt,
denn sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von A, die keine endliche Teilüberdeckung von A besitzt.
Dann existiert eine Intervallschachtelung (I_n) von Intervallen $I_n = [a_n, b_n] \subset A$, sodass keines der Intervalle I_n durch endlich viele U_i überdeckt wird.
Nach dem Satz 2.13 über Intervallschachtelungen existiert ein $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ mit $a \in A$. Es exitiert also ein Index $i_0 \in I$ für den $a \in U_{i_0}$ ist.
Wegen der Offenheit von U_{i_0} existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(a) \subset U_{i_0}$ und mit $I_n \subset K_\varepsilon(a)$ für hinreichend große n folgt der Widerspruch zur Aussage *„I_n kann nicht durch endlich viele U_i überdeckt werden“*.

Satz 13.9
(X,d) ist kompakt
$\iff$ (X,d) ist folgenkompakt

Beweis

I. „$\Longrightarrow$"
Sei X kompakt, aber nicht folgenkompakt. Damit existiere eine Folge (x_n),
die keine konvergente Teilfolge, also auch keinen Häufungswert besitze.
$\Longrightarrow$ $\forall a \in X \, \exists \, r_a > 0$, sodass $K_{r_a}(a)$ nur endlich viele Folgenglieder enthalte.
Ersichtlich gelte $\bigcup\limits_{a\in X} K_{r_a}(a) \supset X$, und mit der Kompaktheit von X folge:
$\exists \, a_1,\ldots,a_m \in X : \bigcup\limits_{i=1}^{m} K_{r_{a_i}}(a_i) \supset X$,
sodass wenigstens eine der Kugeln $K_{r_{a_i}}(a_i)$ unendlich viele Folgenglieder enthalten müsste.
Widerspruch!

II. „$\Longleftarrow$"
Seien X folgenkompakt und $\left(U_i\right)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X.

(a) Dann $\exists \, \lambda > 0$ (Lebesgue-Zahl der Überdeckung), sodass $\forall x \in X \, \exists \, i \in I : K_\lambda(x) \subset U_i$,
denn sonst existiere eine Folge (x_n) in X, für die $K_{\frac{1}{n}}(x_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ in keinem U_i liege $*$
(x_n) besitze eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.
Wegen $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \supset X$ existieren $i_0 \in I,\ n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $K_{\frac{2}{n_0}}(x) \subset U_{i_0}$.
Für ein geeignet großes k wäre $n_k \geqslant n_0$ und $x_{n_k} \in K_{\frac{1}{n_0}}(x)$, also $K_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subset K_{\frac{1}{n_0}}(x) \subset U_{i_0}$.
Widerspruch zu $*$!

(b) Sei λ eine Lebesgue-Zahl der Überdeckung, dann $\exists \, a_1,\ldots,a_m \in X$ mit $\bigcup\limits_{i=1}^{m} K_\lambda(a_i) \supset X$,
denn sonst $\exists$ eine Folge (y_k) aus X mit $d(y_i,y_j) \geqslant \lambda$ $(i \neq j)$
und keine Teilfolge wäre damit konvergent.

(a),(b) impliziert $\bigcup\limits_{i=1}^{m} U_i \supset X$ $\square$

Kapitel 14

Das Riemann'sche Integral im $\mathbb{R}^n$

14.1 Definition des Riemann'schen Integrals

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stets als beschränkt vorrausgesetzt.

14.1.1 Riemann'sches Integral für kompakte Intervalle

Begriffs-Definitionen

(1) **n-dimensionales Intervall**
Seien $a = (a_1, \dots, a_n),\ b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.
Die Menge $[a, b] := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \in [a_i, b_i],\ i \in \{1, \dots, n\}\right\}$
heißt n-dimensionales kompaktes Intervall.

(2) **Zerlegung eines n-dimensionalen Intervalls**
Mit den Zerlegungen $a_k = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \cdots < x_{m_k}^{(k)} = b_k$ der Intervalle $[a_k, b_k]$ $(k \in \{1, \dots, n\})$ entsteht eine Zerlegung $Z[a, b]$ des n-dimensionalen Intervalls $[a, b]$, die die Menge aller Quader Q der Form $Q = \left[x_{j_1}^{(1)}, x_{j_1+1}^{(1)}\right] \times \cdots \times \left[x_{j_n}^{(n)}, x_{j_n+1}^{(n)}\right]$ $\quad (0 \leqslant j_k \leqslant m_k - 1,\ k \in \{1, \dots, n\})$ darstellt.

Z, Z' seien Zerlegungen von $[a, b]$
Z' heißt feiner als Z $\;:\Longleftrightarrow\;$ Jeder Quader von Z' ist Teil eines Quaders von Z.

(3) **Untersumme $\underline{S}(f, Z)$ und Obersumme $\overline{S}(f, Z)$**
$\underline{S}(f, Z) := \sum\limits_{Q \subset Z} \inf\limits_{x \in Q} f(x) \cdot |Q|$ heißt Untersumme von f bei Z.
$\overline{S}(f, Z) := \sum\limits_{Q \subset Z} \sup\limits_{x \in Q} f(x) \cdot |Q|$ heißt Obersumme von f bei Z.
$|Q| := \prod\limits_{i=1}^{n} (q_i - p_i)$ für $Q = [p, q],\ p = (p_1, \dots, p_n),\ q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$.

Für Ober- und Untersummen gelten folgende Eigenschaften:

(1) $\underline{S}(f, Z) \leqslant \overline{S}(f, Z)$

(2) $\underline{S}(f, Z) \leqslant \underline{S}(f, Z')$
$\overline{S}(f, Z) \geqslant \overline{S}(f, Z')$ $\quad$ für Z' feiner als Z

(3) $\underline{S}(f, Z) \leqslant \overline{S}(f, Z')$ $\quad$ für beliebige Zerlegungen Z, Z' von $[a, b]$
denn $\underline{S}(f, Z) \underset{(2)}{\leqslant} \underline{S}(f, Z \cup Z') \underset{(1)}{\leqslant} \overline{S}(f, Z \cup Z') \underset{(2)}{\leqslant} \overline{S}(f, Z')$

(4) $s = \sup\{\underline{S}(f,Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\}$
$S = \inf\{\overline{S}(f,Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\}$
mit $s \leqslant S$ (folgt aus (3))

Definition 14.1 (Darbaux'sches Integral)
Sei $A = [a,b]$ ein kompaktes Intervall.

(1) $\underline{\int}_A f(x)\,\mathrm{d}x := s$
heißt unteres Darbaux'sches Integral von f über A.

(2) $\overline{\int}_A f(x)\,\mathrm{d}x := S$
heißt oberes Darbaux'sches Integral von f über A.

Definition 14.2 (Integrierbarkeit)
Sei $A = [a,b] \subset \mathbb{R}^n$ ein kompaktes Intervall, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ sei beschränkt.

f heißt auf A Riemann-integrierbar
$:\Longleftrightarrow \quad \underline{\int}_A f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int}_A f(x)\,\mathrm{d}x =: \int_A f(x)\,\mathrm{d}x$

Der gemeinsame Wert $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x$ heißt Riemann-Integral von f auf A.
Symbole: $\int_A f\,\mathrm{d}x = \int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_A f\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n)$

14.1.2 Integral für beschränkte Mengen

Ziel: Definition des Integrals $\int_B f(x)\,\mathrm{d}x$ für eine beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^n$

Seien $B \subset \mathbb{R}^n$ sowie $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und $f|\mathbb{R}^n \setminus B$ sei die Nullfunktion.
Falls nun $B \subset A, \tilde{A}$ kompakte Intervalle sind, so gelten $\underline{\int}_A f\,\mathrm{d}x = \underline{\int}_{\tilde{A}} f\,\mathrm{d}x \ \wedge\ \overline{\int}_A f\,\mathrm{d}x = \overline{\int}_{\tilde{A}} f\,\mathrm{d}x$.
Dann ist die folgende Definition korrekt:

Definition 14.3 (Integrierbarkeit)
Seien $B \subset \mathbb{R}^n$ sowie $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, $f|\mathbb{R}^n \setminus B$ sei Nullfunktion und $B \subset A, \tilde{A}$ kompakte Intervalle

f heißt Riemann-integrierbar
$:\Longleftrightarrow \quad \exists \int_A f(x)\,\mathrm{d}x$
mit $\int_B f(x)\,\mathrm{d}x := \int_A f(x)\,\mathrm{d}x =: \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x$

$\mathrm{R}(B)$ heißt die Menge der auf B Riemann-integrierbaren Funktionen, $\mathrm{R}(B)$ ist ein Vektorraum.

Satz 14.4
Seien $f, g \in \mathrm{R}(B)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Dann gelten analog wie für das Riemann-Integral im $\mathbb{R}^1$:

- $\lambda \cdot f \in \mathrm{R}(B)$
- $f + g \in \mathrm{R}(B)$

und

(1) $\int_B \lambda \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \cdot \int_B f(x)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int_B (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_B f(x)\,\mathrm{d}x + \int_B g(x)\,\mathrm{d}x$

(3) $f \leqslant g \implies \int_B f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_B g(x)\,\mathrm{d}x$

14.2 Riemann'sches Integrabilitätskriterium

Satz 14.5
Seien $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, $B \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $f\big|\mathbb{R}^n \setminus B = 0$, ferner sei $B \subset [a, b]$.

$f \in \mathrm{R}(B)$
$\iff \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists\, Z = Z[a, b] : \overline{S}(f, Z) - \underline{S}(f, Z) < \varepsilon$

Beweis

I. „$\Longrightarrow$"
Seien $f \in \mathrm{R}(B)$, $\varepsilon > 0$, dann $\exists\, Z', Z'' : \overline{S}(f, Z') < \int\limits_B f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\varepsilon \ \wedge\ \underline{S}(f, Z'') > \int\limits_B f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\varepsilon$.
Sei $Z \subset Z', Z''$, d.h. Z ist eine feinere Zerlegung als Z', Z'', damit folgt:
$\int\limits_B f\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\varepsilon < \underline{S}(f, Z'') \leqslant \underline{S}(f, Z) \leqslant \overline{S}(f, Z) \leqslant \overline{S}(f, Z') < \int\limits_B f\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\varepsilon$.
$\Longrightarrow \quad \overline{S}(f, Z) - \underline{S}(f, Z) < \varepsilon$.

II. „$\Longleftarrow$"
Es gelte $\forall \varepsilon > 0\, \exists\, Z = Z[a, b] : \overline{S}(f, Z) - \underline{S}(f, Z) < \varepsilon$.
Mit $\underline{S}(f, Z) \leqslant \underline{\int} f\,\mathrm{d}x \leqslant \overline{\int} f\,\mathrm{d}x \leqslant \overline{S}(f, Z)$ folgt $\underline{\int} f\,\mathrm{d}x = \overline{\int} f\,\mathrm{d}x$, also ist $f \in \mathrm{R}(B)$. □

14.3 Jordan-Messbarkeit & Volumen / Mengen vom Lebesgue-Maß 0

(C. Jordan 1838-1922, H. Lebesgue 1875-1941)

Sei $B \subset R^n$, die Indikatorfunktion $1_B : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ wird definiert durch $1_B(x) = \begin{cases} 1 & (x \in B) \\ 0 & (x \notin B) \end{cases}$.

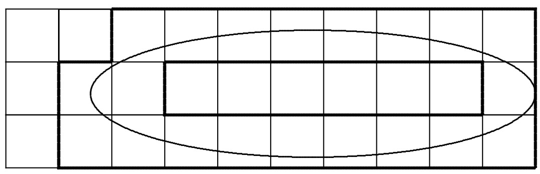
Definition 14.6 (Volumen)
Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt.

B heißt Jordan-messbar (Riemann-messbar)
$:\iff \quad 1_B \in \mathrm{R}(B)$

$\lambda(B) = \lambda^n(B) := \int_B 1_B\,\mathrm{d}x$ heißt n-dimensionaler Jordan'scher Inhalt von B.
Der Jordan'sche Inhalt $\lambda^2(B)$ von $B \subset \mathbb{R}^2$ heißt auch Fläche, $\lambda^3(B)$ von $B \subset \mathbb{R}^3$ heißt auch Volumen.

Bemerkung 14.7
Sei $Z = Z[a, b]$ eine Zerlegung des n-dimensionalen Intervalls $[a, b]$, $B \subset [a, b]$.

$$\underline{S}(1_B, Z) = \sum_{B \subset Z} \inf_{x \in Q} 1_B(x) \cdot |Q| = \sum_{Q \subset B} |Q|$$
$$\overline{S}(1_B, Z) = \sum_{B \subset Z} \sup_{x \in Q} 1_B(x) \cdot |Q| = \sum_{Q \subset B} |Q|$$



Der Inhalt von B wird mittels $1_B(x)$ von innen und von aussen gemessen, d.h. es gilt $\underline{S} \leqslant \lambda^n(B) \leqslant \overline{S}$.
Die Approximation ist besser, wenn die Zerlegung verfeinert wird.
Die Menge B hat nach Definition 14.6 genau dann einen Inhalt, wenn $\sup \underline{S}(1_B, Z) = \inf \overline{S}(1_B, Z)$, d.h. wenn der äussere Inhalt mit dem inneren Inhalt übereinstimmt.

Bemerkung 14.8

(1) $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt Jordan'sche Nullmenge
$$:\Longleftrightarrow \quad \lambda^n(A) = 0$$

(2) *Kriterium zur Jordan'schen Nullmenge:*

$A \subset \mathbb{R}^n$ ist Jordan'sche Nullmenge
$$\Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists \text{ endlich viele } n\text{-dimensionale Quader } Q_1, \dots, Q_m : A \subset \bigcup_{k=1}^{m} Q_k \ \wedge \ \sum_{k=1}^{m} |Q_k| < \varepsilon$$

Definition 14.9 (Menge vom Maß 0)
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$.

A heißt vom (Lebesgue-)Maß 0
$$:\Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists \text{ abzählbar viele } n\text{-dimensionale Quader } Q_1, \dots : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \ \wedge \ \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| < \varepsilon$$

Bemerkung 14.10

(1) Jede Jordan'sche Nullmenge ist vom Lebesgue-Maß 0.

(2) Die Menge $\{(r_1, \dots, r_n) \subset [0,1]^n : r_i \in \mathbb{Q},\ i \in \{1, \dots, n\}\}$
ist nicht Jordan-messbar, hat jedoch das Lebesgue-Maß 0.

(3) $A \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakte Menge vom Lebesgue-Maß 0
$$\Longrightarrow \quad A \text{ ist Jordan'sche Nullmenge}$$

(4) $A_k \subset \mathbb{R}^n \quad (k \in \mathbb{N})$ sind vom Lebesgue-Maß 0
$$\Longrightarrow \quad \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \text{ ist vom Lebesgue-Maß 0}$$

14.4 Lebesgue'sches Integrabilitätskriterium

Bemerkung 14.11
Es seien $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $U \subset \mathbb{R}^n$.

(1) Wir setzen $\operatorname{osc}(h\big|U) := \sup\limits_{x_1,x_2 \in U} |h(x_1) - h(x_2)|$,
$\omega(h, x_0) := \inf\{\operatorname{osc}(h\big|U) : U \text{ ist Umgebung von } x_0\}$ heißt Oszillation von h in x_0.

(2) h in x_0 stetig $\iff$ $\omega(h, x_0) = 0$

(3) Die Menge $\Delta_\varepsilon(h) := \{x \in \mathbb{R}^n : \omega(h, x) \geqslant \varepsilon\}$ ist abgeschlossen ($\varepsilon > 0$).

(4) Für die Menge $\Delta(h)$ aller Unstetigkeiten von h gilt: $\Delta(h) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \Delta_{\frac{1}{m}}(h)$.

Satz 14.12 (Lebesgue, 1904)
Seien $B = [a, b] \subset \mathbb{R}^n$ ein kompaktes Intervall und $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

$f \in \mathrm{R}(B)$
$\iff$ $\Delta(f)$ hat das Maß 0

$\Delta(f)$ ist dabei die Menge der Unstetigkeitsstellen von f.

Beweis
Nach Bemerkung 14.11 ist $\overline{S}(f, Z) - \underline{S}(f, Z) = \sum\limits_{Q\subset Z} \sup\limits_{x\in Q} f(x) \cdot |Q| - \sum\limits_{Q\subset Z} \inf\limits_{x\in Q} f(x) \cdot |Q| = \sum\limits_{Q\subset Z} \operatorname{osc}(f\big|Q) \cdot |Q|$

I. „$\Longrightarrow$"
Sei $f \in \mathrm{R}(B)$.
Dann ist wegen $\Delta(f) = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}_+} \Delta_{\frac{1}{m}}(f)$ zu zeigen, dass alle $\Delta_{\frac{1}{m}}(f) =: \Delta_{\frac{1}{m}}$ vom Maße Null sind.
Nach Satz 14.5 gilt $f \in \mathrm{R}(B)$ $\iff$ $\forall \varepsilon > 0\, \exists Z : \sum\limits_{Q\subset Z} \operatorname{osc}(f\big|Q) \cdot |Q| < \varepsilon^* := \frac{\varepsilon}{m}$.
$$\Delta_{\frac{1}{m}} = \underbrace{\{x \in \Delta_{\frac{1}{m}} : x \in \partial Q \text{ für ein } Q \in Z(B)\}}_{\text{ist vom Maße Null}} \cup \underbrace{\{x \in \Delta_{\frac{1}{m}} : x \in \operatorname{int} Q \text{ für ein } Q \in Z(B)\}}_{:=\tilde{\Delta}_{\frac{1}{m}}}$$
Es bleibt also nun zu zeigen, dass die Mengen $\tilde{\Delta}_{\frac{1}{m}}$ alle vom Maße Null sind.
Es gilt $\tilde{\Delta}_{\frac{1}{m}} \subset \bigcup\limits_{\{Q\subset Z : \Delta_{\frac{1}{m}} \cap \operatorname{int} Q \neq \emptyset\}} Q$, betrachte $\sum\limits_{\{Q\subset Z : \Delta_{\frac{1}{m}} \cap \operatorname{int} Q \neq \emptyset\}} |Q|$.
Für Q mit $\Delta_{\frac{1}{m}} \cap \operatorname{int} Q \neq \emptyset$ gilt $\operatorname{osc}(f\big|Q) \geqslant \frac{1}{m}$.
Es gilt also $\sum\limits_{\{Q\subset Z : \Delta_{\frac{1}{m}} \cap \operatorname{int} Q \neq \emptyset\}} |Q| \leqslant \sum\limits_{\{Q\subset Z : \Delta_{\frac{1}{m}} \cap \operatorname{int} Q \neq \emptyset\}} m \cdot \operatorname{osc}(f\big|Q) \cdot |Q| < m \cdot \varepsilon^* = \varepsilon$,
und alle $\tilde{\Delta}_{\frac{1}{m}}$ sind schließlich vom Maße Null.

II. „$\Longleftarrow$"
Seien $\varepsilon > 0$ und $\Delta(f)$ eine Menge mit Maß Null.
Es ist nun die Existenz einer Zerlegung $Z(B)$ mit $\overline{S}(f, Z) - \underline{S}(f, Z) < \varepsilon$ zu zeigen.
Wähle $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{|B|+2M}$ für $M > \sup\limits_{x\in B} |f(x)|$, nach Vorraussetzung ist die Menge $\Delta_{\varepsilon^*}(f)$ vom Maße Null.
Aufgrund der Kompaktheit von $\Delta_{\varepsilon^*}(f)$ existieren endlich viele Quader $B_1, \ldots, B_k$
mit $\Delta_{\varepsilon^*}(f) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} B_i \;\wedge\; \sum\limits_{i=1}^{k} |B_i| < \varepsilon^*$.
Weiterhin gibt es eine Zerlegung $\tilde{Z}(B)$, sodass für $Q \subset \tilde{Z}(B)$ gilt
$Q \cap \Delta_{\varepsilon^*}(f) = \emptyset \;\vee\; Q \subset B_l$ für ein $l \in \{1, \ldots, k\}$.

Setze $\tilde{Z}_1 = \{Q \subset \tilde{Z}(B) : Q \cap \Delta_{\varepsilon^*}(f) = \emptyset\}$ sowie $\tilde{Z}_2 = \{Q \subset \tilde{Z}(B) : Q \subset B_l$ für ein $l \in \{1,\ldots,k\}\}$.
Es gilt nun $\overline{S}(f,\tilde{Z}) - \underline{S}(f,\tilde{Z}) \leq \sum\limits_{Q\subset\tilde{Z}_1} \operatorname{osc}(f\big|Q)\cdot|Q| + \underbrace{\sum\limits_{Q\subset\tilde{Z}_2} \operatorname{osc}(f\big|Q)\cdot|Q|}_{\leq 2M\cdot\sum_{l=1}^{k}|B_l|}$.

Dies gilt auch für jede Verfeinerung Z von $\tilde{Z}$: $\overline{S}(f,Z) - \underline{S}(f,Z) \leq \sum\limits_{Q\subset Z_1} \operatorname{osc}(f\big|Q)\cdot|Q| + 2M\cdot\varepsilon^*$.

Sei $x \in \bigcup\limits_{Q\subset\tilde{Z}_1} Q$, dann existiert eine Umgebung U_x von x mit $\operatorname{osc}(f\big|U_x) < \varepsilon^*$. $\quad *$

Weil $\bigcup\limits_{Q\subset\tilde{Z}_1} Q$ kompakt ist, existieren endlich viele U_x, sodass deren Vereinigung $\bigcup\limits_{Q\subset\tilde{Z}_1} Q$ überdeckt.

Damit gibt es also eine Verfeinerung $Z = Z_1 \cup Z_2$ von $\tilde{Z}$ mit $\sum\limits_{Q\subset Z_1} \operatorname{osc}(f\big|Q)\cdot|Q| \underset{*}{<} \sum\limits_{Q\subset Z_1} \varepsilon^*\cdot|Q| \leq \varepsilon^*\cdot|B|$.

Schließlich folgt $\overline{S}(f,Z) - \underline{S}(f,Z) < \varepsilon^*\cdot|B| + 2M\cdot\varepsilon^* = \varepsilon$. □

Folgerung 14.13
Seien $B \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.
Ferner sei $f^* : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f^*\big|B = f$ sowie $f^*\big|\mathbb{R}^n \setminus B = 0$.

$f \in \mathrm{R}(B)$
$\iff \quad f^* \in \mathrm{R}(\mathbb{R}^n)$
$\iff \quad \Delta(f^*) = \Delta(f) \cup \big(\Delta(f^*) \cap \partial B\big)$ hat das Maß 0

Folgerung 14.14 (Jordan-Messbarkeit)
Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) B ist Jordan-messbar

(2) $1_B \in \mathrm{R}(B)$

(3) ∂B ist vom Maß 0

(4) ∂B ist Jordan'sche Nullmenge

Beweis
(1) $\iff$ (2): nach Definition.
(2) $\iff$ (3): denn $\partial B = \Delta(1_B)$.
(3) $\iff$ (4): da ∂B kompakt. □

Folgerung 14.15 (Integrierbarkeit von Jordan-messbaren Mengen)
Seien B beschränkt und Jordan-messbar sowie $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

$f \in \mathrm{R}(B)$
$\iff \quad \Delta(f)$ ist vom Maß 0

14.5 Satz von Fubini

Satz 14.16 (Fubini) (Fubini, 1879-1943)

Seien $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakte Intervalle sowie $f : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar.

Falls $g(x) := \int\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad (x \in A)$ existiert, so ist g auf A integrierbar und es gilt:

$$\int\limits_{A\times B} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_A \left(\int\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Beweis

I. Der Beweis ist erbracht, wenn $\overline{\int}_{A\times B} f\,\mathrm{d}(x,y) \geqslant \overline{\int}_A g\,\mathrm{d}x$ sowie $\underline{\int}_A g\,\mathrm{d}x \geqslant \underline{\int}_{A\times B} f\,\mathrm{d}(x,y)$ gezeigt sind. Wir zeigen die zweite Ungleichung, der Beweis für die erste erfolgt analog.

II. Falls $Z(A)$ eine Zerlegung in Quader Q^A und $Z(B)$ eine Zerlegung in Quader Q^B sind, so bilden die Quader $Q^A \times Q^B$ eine Zerlegung $Z(A\times B)$, und umgekehrt kann jede Zerlegung $Z(A\times B)$ auf diese Weise erzeugt werden.

III. Seien $Z(A\times B)$ eine Zerlegung von $A\times B$ und $Z(A), Z(B)$ die zugehörigen Zerlegungen von A, B.

$$\underline{S}(f, Z(A\times B)) = \sum_{\substack{Q^A\subset Z(A)\\ Q^B\subset Z(B)}} \inf_{\substack{x\in Q^A\\ y\in Q^B}} f(x,y)\cdot|Q^A\times Q^B| = \sum_{Q^A\subset Z(A)} \underbrace{\sum_{Q^B\subset Z(B)} \inf_{\substack{x\in Q^A\\ y\in Q^B}} f(x,y)\cdot|Q^B|}_{\text{Betrachte bei festem } x\in Q^A \text{ diesen Ausdruck}} \cdot|Q^A|$$

$$\sum_{Q^B\subset Z(B)} \inf_{\substack{x\in Q^A\\ y\in Q^B}} f(x,y)\cdot|Q^B| \leqslant \inf_{x\in Q^A} \left(\sum_{Q^B\subset Z(B)} \inf_{y\in Q^B} f(x,y)\cdot|Q^B| \right)$$

Setze ${}^{(x)}f^*(y) := f(x,y) \quad (y \in B)$, dann gilt weiter

$$\inf_{x\in Q^A} \left(\sum_{Q^B\subset Z(B)} \inf_{y\in Q^B} f(x,y)\cdot|Q^B| \right) \leqslant \inf_{x\in Q^A} \underline{S}({}^{(x)}f^*, Z(B)) \leqslant \inf_{x\in Q^A} g(x)$$

Also ist $\underline{S}(f, Z(A\times B)) \leqslant \sum\limits_{Q^A\subset Z(A)} \inf\limits_{x\in Q^A} g(x)\cdot|Q^A| = \underline{S}(g, Z(A))$.

Schließlich folgt $\underline{\int}_{A\times B} f\,\mathrm{d}(x,y) = \sup\limits_{Z(A\times B)} \underline{S}(f, Z(A\times B)) \leqslant \underline{\int}_A g\,\mathrm{d}x$. □

14.6 Berechnung von Integralen

Folgerung 14.17
Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ mit $D = \{(x,y) : x \in [a,b],\ y \in [\varphi(x), \psi(x)]\}$ sowie $\varphi, \psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $\varphi \leqslant \psi$.

Falls $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, so gilt:

$$\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x$$

Beweis
Wähle Quader $Q = [a,b] \times [c,d]$ mit $D \subset Q$ und sei $f^*(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & ((x,y) \in D) \\ 0 & ((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D) \end{cases}$.
Setze im Satz von Fubini $A = [a,b],\ B = [c,d]$.
Die Menge ∂D ist vom Maß 0, damit ist $f\big|A \times B$ integrierbar. Aufgrund der Stetigkeit von f existiert das Integral $\int_B f^*(x,y)\,\mathrm{d}y$ für alle $x \in A$, und mit dem Satz von Fubini folgt:

$$\int_D f\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{A\times B} f^*\,\mathrm{d}(x,y) = \int_a^b \Big(\int_c^d f^*\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x \qquad \square$$

Folgerung 14.18
Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ der Normalbereich $D = \{(x,y,z) : x \in [a,b],\ y \in [u(x), v(x)],\ z \in [g(x,y), h(x,y)]\}$
mit $a, b \in \mathbb{R}\ (a < b),\ u, v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig $(u \leqslant v)$ und $g, h : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig $(g \leqslant h)$
mit $D_1 = \{(x,y) : x \in [a,b],\ y \in [u(x), v(x)]\}$.

Für $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig gilt dann:

$$\int_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_a^b \Big(\int_{u(x)}^{v(x)} \Big[\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \Big]\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x$$

Beweis analog 14.17

Beispiel Volumenbestimmung des Körpers $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 1 \leqslant z \leqslant 0\}$
$\Longrightarrow D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [-1,1],\ y \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}],\ z \in [x^2+y^2-1, 0]\}$

$$\begin{aligned}
V &= \int_D 1\,\mathrm{d}(x,y,z) \\
&\underset{14.18}{=} \int_{-1}^{1} \Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \Big[\int_{x^2+y^2-1}^{0} \mathrm{d}z \Big]\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \Big(\big[y - x^2 y - \tfrac{1}{3} y^3 \big]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x \\
&= 2 \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \cdot \tfrac{2}{3}(1-x^2)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Substitution: $x = \sin u,\ \mathrm{d}x = \cos u\,\mathrm{d}u,\ u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\begin{aligned}
&= \tfrac{4}{3} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u \cdot \cos^2 u \cdot \cos u\,\mathrm{d}u \\
&= \tfrac{4}{3} \cdot \big[\tfrac{3}{8} u + \tfrac{1}{4} \sin 2u + \tfrac{1}{32} \sin 4u \big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \tfrac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

14.7 Volumenberechnung / Satz des Cavalieri

Satz 14.19

Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f \in \mathrm{R}(D)$, dann gelten:

(1) Der $\mathrm{graph}(f) = \{(x, f(x)) : x \in D\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine Jordan'sche Nullmenge.

(2) Falls ausserdem $f(x) \geqslant 0 \ (x \in D)$ gilt, so ist die Ordinatenmenge
$A = \{(x,y) : x \in D,\ y \in [0, f(x)]\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ Jordan-messbar mit $\lambda^{n+1}(A) = \int\limits_D f(x)\,\mathrm{d}x$.

Beweis

(1) Seien $[a,b] \subset \mathbb{R}^n$ ein kompaktes Intervall mit $D \subset [a,b]$
und $f^* : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ die durch $f^*\big|D = f$ und $f^*\big|[a,b] \setminus D = 0$ definierte Abbildung.
Weiter sei $\varepsilon > 0$, dann existiert wegen $f \in \mathrm{R}(D)$ eine Zerlegung $Z = Z[a,b]$ mit $\overline{S}(f^*, Z) - \underline{S}(f^*, Z) < \varepsilon$.
Es folgt $\sum\limits_{Q \subset Z} \big(\sup\limits_{x \in Q} f^*(x) - \inf\limits_{x \in Q} f^*(x)\big) \cdot |Q| < \varepsilon$,
und die endliche Vereinigung $\bigcup\limits_{Q \subset Z} Q \times [\inf\limits_{x \in Q} f^*(x), \sup\limits_{x \in Q} f^*(x)] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ überdeckt den $\mathrm{graph} f^* \supset \mathrm{graph} f$.

(2) zu zeigen: ∂A ist eine Jordan'sche Nullmenge, d.h. A ist Jordan-messbar, d.h. $\lambda^{n+1}(A)$ existiert.
Sei $M = \sup\limits_{x \in D} f(x)$ mit $f(x) \leqslant M$, dann gilt mit dem Satz von Fubini:

$$\lambda^{n+1}(A) = \int\limits_{[a,b] \times [0,M]} 1_A \,\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_{[a,b]} \Big(\int\limits_0^M 1_A \,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{[a,b]} \Big(\int\limits_0^{f^*(x)} 1 \,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{[a,b]} f^*(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_D f(x)\,\mathrm{d}x \quad \square$$

Satz 14.20 (Cavalieri)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar mit $x_1 \in [a,b]$ für alle $x = (x_1, \dots, x_n) \in M$.
Für alle $\xi \in [a,b]$ existiere der $(n-1)$-dimensionale Jordan-Inhalt $\lambda^{n-1}(M \cap \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = \xi\}}_{\text{Hyperebene}}) =: q(\xi)$.
Dann gelten:

(1) $q \in \mathrm{R}[a,b]$

(2) $\lambda^n(M) = \int\limits_a^b q(\xi)\,\mathrm{d}\xi$

Beweis

Nach Vorraussetzung gilt $\lambda^n(M) = \int\limits_{[a,b] \times B} 1_M \,\mathrm{d}x$ für ein kompaktes Intervall $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ mit $M \subset [a,b] \times B$.

Mit dem Satz von Fubini folgt die Existenz des Integrals $\int\limits_a^b q(\xi)\,\mathrm{d}\xi$

sowie $\lambda^n(M) = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_B 1_M(\xi, x_2, \dots, x_n)\,\mathrm{d}(x_2, \dots, x_n)\Big)\,\mathrm{d}\xi = \int\limits_a^b q(\xi)\,\mathrm{d}\xi$. $\square$

Folgerung 14.21 (Prinzip des Cavalieri)

Die Punktmengen $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^3$ seien Jordan-messbar und liegen zwischen zwei parallelen Ebenen E_1, E_2.

Stimmen für jede zu E_1 parallelen Ebene die Inhalte der Schnittflächen überein,
so haben M_1 und M_2 gleiches Volumen.

Bemerkung

Nach dem Prinzip des Cavalieri kann aus der Volumenformel für gerade Pyramiden eine Volumenformel für schiefe Pyramiden und sogar eine Volumenformel für Kegel gewonnen werden.
Die Volumenformeln für Zylinder und Kegel liefern eine Volumenformel für Kugeln.

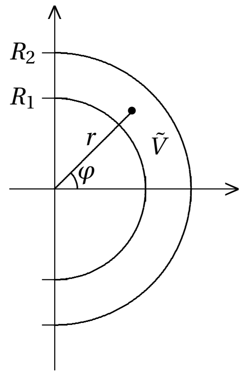
14.8 Transformationsformel / Substitutionsregel

Beispiel (Problemstellung)

Es soll das Integral $\int\limits_{\tilde{V}} f \,\mathrm{d}(x,y)$ berechnet werden.

Dabei ist $\tilde{V} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : R_1^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R_2^2,\ x \geqslant 0\}$.
Mit Polarkoordinaten gilt
$\tilde{V} = \{(r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi) : R_1 \leqslant r \leqslant R_2,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\}$.
Der zugehörige Parameterbereich mit Polarkoordinaten ist dann
$\tilde{U} = \{(r,\varphi) : R_1 \leqslant r \leqslant R_2,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\}$.
Die Frage ist nun, ob analog wie im $\mathbb{R}^1$ nach Satz 9.25 gilt:

$$\int\limits_{\tilde{V}} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_{\tilde{U}} f(r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi)\ldots\,\mathrm{d}(r,\varphi)$$



Satz 14.22 (Transformationsformel)

Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\phi : U \longrightarrow V$ ein Diffeomorphismus.
Dann gelten:

(1) $A \subset U$ ist kompakt $\wedge$ Jordan-messbar
$\Longrightarrow$ $\phi(A)$ ist kompakt $\wedge$ Jordan-messbar.

(2) Sei $f : \phi(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann existieren die folgenden Integrale und es gilt:

$$\int\limits_{\phi(A)} f(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{A} f(\phi(x)) \cdot |\det J_\phi(x)|\,\mathrm{d}x \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

Bemerkung

(1) Die Existenz der Integrale ist aufgrund der Vorraussetzungen und der Folgerung 14.16 klar.

(2) Der Beweis von (2) erweist sich für den $\mathbb{R}^n$ als kompliziert,
für $\mathbb{R}^1$ folgt er schnell aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Beispiel (siehe oben)

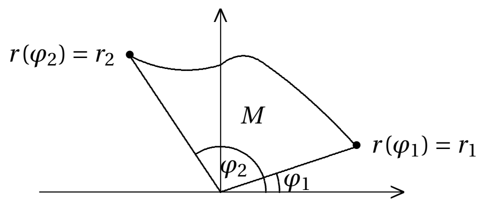
$\phi : U \longrightarrow V : (r,\varphi) \longmapsto \begin{pmatrix} r\cdot\cos\varphi \\ r\cdot\sin\varphi \end{pmatrix}$ ist Diffeomorphismus von $U = (0,\infty)\times(-\pi,\pi)$ auf $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0),\ x \leqslant 0\}$.
Nach Definition 12.32 ist $\det J_\phi(x) = r$.
Wir setzen $A := \tilde{U}$, dies impliziert $\phi(A) = \tilde{V}$ und für f stetig gilt damit:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\tilde{V}} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int\limits_{\tilde{U}} f(r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi)\,\mathrm{d}(r,\varphi)\\ &= \int\limits_{R_1}^{R_2} r \cdot \Bigg(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\Bigg)\,\mathrm{d}r\\ &= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Bigg(\int\limits_{R_1}^{R_2} r\cdot f(r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi)\,\mathrm{d}r\Bigg)\,\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

Hierbei wurde wurde zuerst die Transformationsformel angewendet und danach der Satz von Fubini.

Bemerkung 14.23 (Leibniz'sche Sektorformel)

Sei $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \tilde{r}\cdot\cos\varphi,\ y = \tilde{r}\cdot\sin\varphi$
$0 \leqslant \tilde{r} \leqslant r(\varphi),\ \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2\}$.
Hierbei ist $r = r(\varphi)$ eine stetige Funktion auf $[\varphi_1, \varphi_2]$ mit $-\pi < \varphi_1 < \varphi_2 < \pi$.
Dann ist M Jordan-messbar, denn ∂M ist vom Maße Null.



Sei $A = \{(\tilde{r},\varphi) : 0 \leqslant \tilde{r} \leqslant r(\varphi),\ \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2\}$, dann ist $\phi(A) = M$ und es gilt:

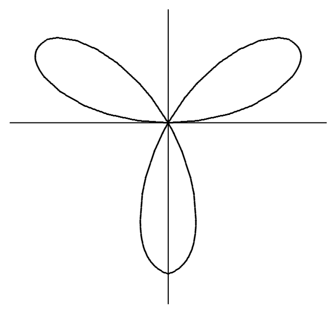
$$\lambda(M) = \int_M 1_M \,\mathrm{d}(x,y) = \int_A \tilde{r}\,\mathrm{d}(\tilde{r},\varphi) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(\int_0^{r(\varphi)} \tilde{r}\,\mathrm{d}\tilde{r}\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\cdot\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

Beispiel (3-blättrige Rosette) $r(\varphi) = a\cdot\sin 3\varphi \quad (a > 0)$

Wir berechnen den Flächeninhalt A des Gebietes, das von der Kurve $r(\varphi)$ eingeschlossen wird.
Zuerst untersuchen wir die Kurve, um uns die Berechnung zu vereinfachen:

$$\begin{array}{lllcl} r \geqslant 0 & \Longrightarrow \quad \sin 3\varphi \geqslant 0 & \Longrightarrow & 0 \leqslant 3\varphi \leqslant \pi & \Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{1}{3}\pi \\ & & \vee & 2\pi \leqslant 3\varphi \leqslant 3\pi & \Longleftrightarrow \quad \frac{2}{3}\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi \\ & & \vee & 4\pi \leqslant 3\varphi \leqslant 5\pi & \Longleftrightarrow \quad \frac{4}{3}\pi \leqslant \varphi \leqslant \frac{5}{3}\pi \end{array}$$

Außerdem ist die Kurve rotationssymmetrisch, daher genügt es $r = r(\varphi)$ für $\varphi \in [0, \frac{1}{3}\pi]$ zu betrachten.



$$A = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{3}} a^2 \sin^2 3\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= 3\cdot\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(3\varphi - \frac{1}{2}\sin 6\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4}a^2\cdot\pi$$

mit $\int \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(t - \frac{1}{2}\sin 2t) + C$

Bemerkung 14.24 (Gauß'sches Fehlerintegral)

$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ mit $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ heißt Gauß'sches Fehlerintegral.
Die Existenz des Integrals ist gesichert, denn es gilt:

$$\mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t} \text{ für } t \geqslant 1 \quad\wedge\quad \int_1^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-t}\Big|_1^{\infty} = \lim_{a\to\infty}(-\mathrm{e}^{-a}) + \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

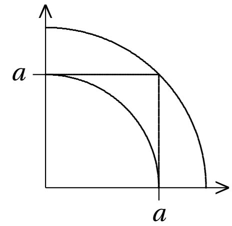
Ersichtlich gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Zur Berechnung setzen wir $I_a := \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \int_{[0,a]^2}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y) \quad (a > 0)$.

Weiterhin genügt I_a folgender Beziehung:

$$\int_{K_a}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y) \leqslant I_a \leqslant \int_{K_{a\cdot\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y).$$

$Q_a = [0,a]^2$
$K_a = \{(r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi) : r \in [0,a],\ \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$
$M = \{(r,\varphi) : r \in [0,a],\ \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$



Wir betrachten nun $\int_{K_a}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y)$ und wenden die Transformationsformel sowie Fubini an:

$\int\limits_{K_a} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_M \mathrm{e}^{-r^2}\cdot r\,\mathrm{d}(r,\varphi) = \int\limits_0^a \Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-r^2}\cdot r\,\mathrm{d}\varphi\Big)\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\cdot\int\limits_0^a \mathrm{e}^{-r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-\mathrm{e}^{-a^2})$
Hierbei wurde im letzten Schritt $u = r^2$ substituiert.
Mit der Grenzwertbetrachtung $a\to\infty$ folgt $\lim\limits_{a\to\infty}\int\limits_{K_a} = \frac{\pi}{4} = \lim\limits_{a\to\infty}\int\limits_{K_{a\cdot\sqrt{2}}}$,
damit ist $\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ und schließlich folgt $\int\limits_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

Satz 14.25 (Volumen bei affin-linearen Transformationen)
Sei $\phi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n : x\longmapsto B\cdot x+b$ eine affin-lineare Transformation
mit $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ regulär (d.h. $\det B\neq 0$) und $b\in\mathbb{R}^n$.
Dann gelten:

(1) $K\subset\mathbb{R}^n$ ist kompakt $\wedge$ Jordan-messbar
$\Longrightarrow$ $\phi(K)$ ist kompakt $\wedge$ Jordan-messbar.

(2) $\lambda^n(\phi(K)) = |\det B|\cdot\lambda^n(K)$
Bei Bewegungen ist das Volumen invariant,
denn die zugehörige Matrix B ist orthogonal und hat damit $|\det B| = 1$.

Beweis
Mit $U = V = \mathbb{R}^n$ ist ϕ ein Diffeomorphismus von U auf V mit der Jacobi-Matrix $J_\phi(x) = B$.
Dann folgt nach Satz 14.22 mit $f = 1$:
$\lambda^n(\phi(K)) = \int\limits_{\phi(K)} 1\,\mathrm{d}y = \int\limits_K 1\cdot|\det B|\,\mathrm{d}x = |\det B|\cdot\lambda^n(K)$. □

Folgerung 14.26

(1) Sei $K_n(r) = \{x\in\mathbb{R}^n : ||x||_2\leqslant r\}$ $(r>0)$, dann gilt mit $\phi(x) = r\cdot x = \begin{pmatrix} r & & \\ & \ddots & \\ & & r\end{pmatrix}\cdot x$
$K_n(r) = \phi(K_n(1))$ und somit $\mathrm{Vol}(K_n(r)) = r^n\cdot\mathrm{Vol}(K_n(1))$.

(2) Wir setzen $\kappa_n := \mathrm{Vol}(K_n(1))$, dann gilt für das Ellipsoid $E = \{x\in\mathbb{R}^n : \sum\limits_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i^2}\leqslant 1\}$ $(a_i>0)$
die Beziehung $\mathrm{Vol}(E) = \kappa_n\cdot\prod\limits_{i=1}^n a_i$.
Hierfür nutzen wir den Diffeomorphismus $\phi(x) = \big(a_1\cdot x_1,\dots,a_n\cdot x_n\big)^T = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n\end{pmatrix}\cdot x$.

Beispiel 14.27 (Volumen einer Kugel)
Sei $\kappa_n := \mathrm{Vol}(K_n(1))$ $(n\in\mathbb{N}_+)$ das Volumen der n-dimensionalen Kugel $K_n(1) = \{x\in\mathbb{R}^n : \sum\limits_{i=1}^n x_i^2\leqslant 1\}$.
Dann folgt mit dem Satz vom Cavalieri und obiger Folgerung 14.26:
$\kappa_n = \int\limits_{-1}^1 \mathrm{Vol}(K_{n-1}(\sqrt{1-\xi^2}))\,\mathrm{d}\xi = \kappa_{n-1}\cdot\int\limits_{-1}^1 (\sqrt{1-\xi^2})^{n-1}\,\mathrm{d}\xi$
$c_n := \int\limits_{-1}^1 (1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}}\,\mathrm{d}\xi = 2\cdot\int\limits_0^1 (1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}}\,\mathrm{d}\xi \underset{\xi=\cos t}{=} 2\cdot\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 (\sin^2 t)^{\frac{n-1}{2}}\cdot(-\sin t)\,\mathrm{d}t = 2\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,\mathrm{d}t$
Partielle Integration liefert $c_{2k} = \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2k)}\cdot\pi$ sowie $c_{2k+1} = \frac{2\cdot4\cdot6\ldots(2k)}{1\cdot3\cdot5\ldots(2k+1)}\cdot 2$.
Daraus folgt $c_{2k+1}\cdot c_{2k} = \frac{2\pi}{2k+1}$ und $c_{2k}\cdot c_{2k-1} = \frac{2\pi}{2k}$ und weiter $c_n\cdot c_{n-1} = \frac{2\pi}{n}$.
Damit lässt sich nun folgende Rekursionsformel aufstellen: $\kappa_n = c_n\cdot\kappa_{n-1} = c_n\cdot c_{n-1}\cdot\kappa_{n-2} = \frac{2\pi}{n}\cdot\kappa_{n-2}$.
Hierbei benötigen wir die ersten beiden Glieder der Zahlenfolge (κ_n): $\kappa_1 = 2$ und $\kappa_2 = \pi$.
Schließlich lassen sich noch folgende zwei Formeln ableiten:

$\kappa_{2k} = \frac{\pi}{k} \cdot \kappa_{2k-2} = \frac{\pi}{k} \cdot \frac{\pi}{k-1} \cdot \kappa_{2k-4} = \cdots = \frac{\pi^{k-1}}{k!} \cdot \kappa_2 = \frac{\pi^k}{k!} \quad (k \in \mathbb{N}_+)$
$\kappa_{2k+1} = \frac{2^{k+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k+1)} \cdot \pi^k \quad (k \in \mathbb{N})$

Folgerung (Paradoxon?)
$\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Vol}(K_n(1)) = 0$

14.9 Ausblick

Das Integral für Mengen im $\mathbb{R}^n$ wird zur Definition der Integration über Untermannigfaltigkeiten genutzt.

Beispiel
Gegeben sei eine Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ im Raum sowie eine Funktion $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$.
Die Frage ist nun, ob das Oberflächenintegral $\int\limits_S f \, \mathrm{d}o$ existiert.

Definition (Parameterdarstellung einer Fläche)
Es seien $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi \in \mathscr{C}^1(U)$.
Die Jacobi-Matrix $J_\phi(u, v)$ habe für alle $(u, v) \in U$ den Rang 2.
Dann heißt $\phi(U)$ eine Fläche, und $(x, y, z) = \phi(u, v)$ ist eine Parameterdarstellung der Fläche.

Bemerkung
(1) Die Abbildung ϕ wirft eine zusammenhängende Fläche aus der Ebene $\mathbb{R}^2$ in den Raum $\mathbb{R}^3$.
Dabei bleibt die Fläche zusammenhängend, ihre Form kann allerdings variieren.

(2) $\phi(K)$ heißt Flächenstück
$:\Longleftrightarrow \quad K \subset U$ ist kompakt und Jordan-messbar.

Definition (Oberflächenintegral)
Es sei $S = \phi(K)$ ein Flächenstück mit dem Parameterbereich K, und $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig.
Dann heißt $\int\limits_S f \, \mathrm{d}o$ das Oberflächenintegral von f über S und ist folgendermaßen definiert:
$\int\limits_S f \, \mathrm{d}o := \int\limits_K f(\phi(u, v)) \cdot |\phi_u \times \phi_v| \, \mathrm{d}(u, v)$

Teil III

Analysis III

Kapitel 15

Gewöhnliche Differentialgleichungen

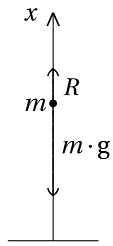
15.1 Einleitung

15.1.1 Einleitende Beispiele

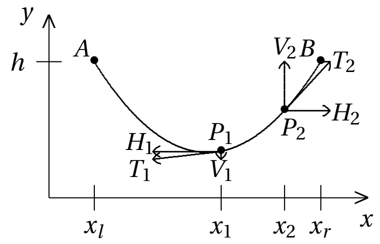
Bei den folgenden vier Beispielen handelt es sich um mathematische Modelle, die reale Zusammenhänge beschreiben.

(1) *Freier Fall eines Massenpunktes*
Ein Massenpunkt m fällt unter dem Einfluss der Schwerkraft $m \cdot \mathrm{g}$ und des Luftwiderstandes R. Gesucht ist der Bewegungsablauf, d.h. eine Funktion $x = x(t)$ die den Ort zur Zeit t bestimmt.

$m \cdot \ddot{x} = -m \cdot \mathrm{g} + R$ (Newton'sches Grundgesetz)
Es ist $R \sim \dot{x}^2$ mit Proportionalitätsfaktor $r > 0$.
Daraus entsteht die Differentialgleichung $m \cdot \ddot{x} = -m \cdot \mathrm{g} + r \cdot \dot{x}^2$
mit den Anfangsbedingungen $x(t_0) = x_0$ und $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$.
Insgesamt ist dies eine Anfangswertaufgabe (AWA).



(2) *Kettenlinie*
Eine gleichmäßig dichte Kette wird in A und B aufgehängt.
Gesucht ist eine Funktion $y = y(x)$, die die Form der Kette beschreibt.
γ sei das Gewicht pro Längeneinheit.
Das Gesamtgewicht des Stückes $\widehat{P_1P_2}$ ist dann



$$V_2 - V_1 = \gamma \cdot \widehat{P_1P_2} = \gamma \cdot \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \gamma \cdot \sqrt{1 + (y'(\xi))^2} \cdot (x_2 - x_1) \quad (\xi \in (x_1, x_2))$$

Hieraus entsteht $\frac{V_2 - V_1}{x_2 - x_1} = \gamma \cdot \sqrt{1 + (y'(\xi))^2}$ und für $x_2 \longrightarrow x_1$ folgt $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \gamma \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2}$.
Außerdem ist $y'(x) = \frac{V}{H}$ bzw. $V = H \cdot y'(x)$ und demnach $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = H \cdot y''(x)$.
Insgesamt ergibt sich die Differentialgleichung $H \cdot y'' = \gamma \cdot \sqrt{1 + y'^2}$
mit den Randbedingungen $y(x_l) = h = y(x_r)$.
Es handelt sich hierbei um eine Randwertaufgabe (RWA).

(3) *Organisches Wachstum*
Sei $N = N(t)$ die Anzahl der Bakterien einer Population zum Zeitpunkt t.
Annahme: $N(t+\Delta t) - N(t) \sim N(t)\cdot\Delta t$ mit Proportionalitätsfaktor α.
Daraus ergibt sich also die Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \alpha\cdot N$.
Dieses Modell ist allerdings nicht exakt, eine Verbesserung stellt die Logistische DGL dar:
$\dot N(t) = \alpha\cdot N(t) - \beta\cdot N^2(t) \quad (\beta > 0)$
Hierbei handelt es sich um eine nicht-lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.

(4) *Räuber-Beute-Modell (Volterra-Lotka-Modell)*
Zwei Populationen seien beschrieben durch folgende beiden Funktionen:
$x(t)$ sei die Anzahl der Beutetiere zur Zeit t, und $y(t)$ sei die Anzahl der Raubtiere zur Zeit t.
Dann lässt sich folgendes System von Differentialgleichungen aufstellen:
$\dot x = (\alpha - \beta\cdot y)\cdot x$
$\dot y = (\delta\cdot x - \gamma)\cdot y \quad (\alpha,\beta,\gamma,\delta > 0)$
Gesucht sind hier zwei Funktionen $x = x(t)$ und $y = y(t)$.

15.1.2 Differentialgleichungen und deren Lösung

Definition 15.1.1

(1) Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$ und $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$.
Die Gleichung $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$
heißt gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung für eine gesuchte Funktion $y = y(x)$.

(2) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion der Klasse $\mathscr{C}^n(I)$.
Die Funktion $y = y(x)$ heißt Lösung der Differentialgleichung,
falls $F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$ für alle $x \in I$ gilt.

Beispiel (3)

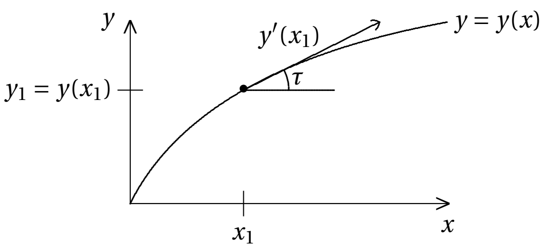
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \alpha\cdot y \iff \alpha\cdot y - y' = 0 \iff F(x, y, y') = 0$
Damit ist $F(x, y, y') = \alpha\cdot y - y' = 0$ eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung.
Die Funktion $y = y(x) = \mathrm{e}^{\alpha\cdot x}$ ist Lösung auf $I = \mathbb{R}$, denn $y' = y'(x) = \alpha\cdot\mathrm{e}^{\alpha\cdot x}$.
Schließlich ist $F(x, y(x), y'(x)) = \alpha\cdot\mathrm{e}^{\alpha\cdot x} - \alpha\cdot\mathrm{e}^{\alpha\cdot x} = 0 \ (x \in \mathbb{R})$.

15.1.3 Differentialgleichungen 1. Ordnung (Richtungsfeld)

Gegeben sei die explizite Differentialgleichung 1. Ordnung $y' = f(x, y)$.

Die Funktion $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sei Lösung auf dem Intervall I, d.h. es gilt $y'(x) = f(x, y(x))$ für alle $x \in I$.

Wir betrachten speziell $x_1 \in I$:
$y'(x_1) = f(x_1, y(x_1)) = f(x_1, y_1) = \tan\tau$
$\tan\tau$ ist der Anstieg der Lösung $y = y(x)$ in x_1.



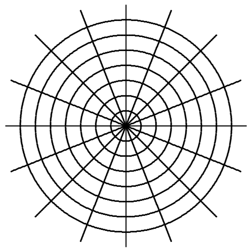
Definition 15.1.2

(1) Sei $(x_1, y_1) \in \mathrm{D}(f)$.
Das Tripel $(x_1, y_1, f(x_1, y_1))$ heißt Linienelement der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$.

(2) Die Menge aller Linienelemente heißt Richtungsfeld der Differentialgleichung.

Bemerkung
$y = y(x)$ ist Lösung der Differentialgleichung
$\iff$ $y = y(x)$ „passt" in das Richtungsfeld der Differentialgleichung.

Beispiel $y' = -\frac{x}{y}$
$y' = f(x,y) = -\frac{x}{y}$ mit $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{(x,y) : y = 0\}$
Zur Lösung dieser DGL bestimmen wir zunächst die Isoklinen (Kurven gleicher Richtung):



$-\frac{x}{y} = \alpha = \text{const.}$
(1) $\alpha = 0 \implies x = 0 \wedge y \neq 0$
(2) $\alpha \neq 0 \implies y = -\frac{1}{\alpha}\cdot x$
Mit $\tan\tau = \alpha$ ist $(\tan\tau)\cdot(-\frac{1}{\alpha}) = -1$,
d.h. Richtung $\perp$ Isokline.
Dies lässt die Lösung $y = \sqrt{c^2 - x^2}$ vermuten.
Bilden wir nun die Ableitung
$y' = \frac{1}{2}(c^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}} = -\frac{x}{y}$,
so sehen wir, dass die vermutete Lösung y die DGL für alle $x \in (-c, c)$ erfüllt.

15.2 Elementar integrierbare Differentialgleichungen 1. Ordnung

15.2.1 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

Definition
Ist eine DGL $y' = f(x,y)$ als Produkt zweier Funktionen $g(x)\cdot h(y)$ darstellbar,
d.h. $y' = f(x,y) = g(x)\cdot h(y)$, dann heißt sie DGL mit getrennten Variablen.

Unser Ziel ist es nun, eine Lösungsmethode für diese Art von DGL zu finden.
Dazu seien $I_{1,2} \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle und $g : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, $h : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $h(y) \neq 0$ $(y \in I_2)$.
Sei weiter $y = y(x)$ eine Lösung auf I_1 und $W(y) \subset I_2$, d.h. $y'(x) = g(x)\cdot h(y(x))$ $(x \in I_1)$.
$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)\cdot h(y(x)) \implies \frac{1}{h(y(x))}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x) \quad \big|\int \mathrm{d}x$
$\implies \int \frac{1}{h(y(x))}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int g(x)\,\mathrm{d}x \implies \int \frac{1}{h(y)}\,\mathrm{d}y\Big|_{y=y(x)} = \int g(x)\,\mathrm{d}x$ $\quad *$
Die Lösung $y = y(x)$ genügt damit notwendig der Integralgleichung $\int \frac{1}{h(y)}\,\mathrm{d}y = \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

Genügt nun umgekehrt die differenzierbare Funktion $y = y(x)$ der IGL $*$, dann folgt
$\int \frac{1}{h(y)}\,\mathrm{d}y\Big|_{y=y(x)} = \int g(x)\,\mathrm{d}x \quad \Big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$
$\implies \frac{1}{h(y(x))}\cdot y'(x) = g(x) \implies y'(x) = g(x)\cdot h(y(x))$
und $y = y(x)$ ist somit eine Lösung der DGL.
Die Methode der Trennung der Variablen führt also zum Ziel, falls man zeigen kann, dass die IGL $*$ stets eine Lösung hat.

Satz 15.2.1
Seien $g : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, $h : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $h(y) \neq 0$ $(y \in I_2)$ und $x_0 \in I_1$, $y_0 \in I_2$.
Dann hat das Anfangswertproblem (AWP) $y' = g(x)\cdot h(y)$ mit $y(x_0) = y_0$
in einer Umgebung $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ genau eine Lösung $y = y(x)$.

Beweis

I. Wir zeigen: Das AWP $y' = g(x) \cdot h(y)$ mit $y(x_0) = y_0$ ist äquivalent zur IGL $\int\limits_{y_0}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}\eta}{h(\eta)} = \int\limits_{x_0}^{x} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ $\quad *$

i. „$\Longrightarrow$“

Sei $y'(\xi) = g(\xi) \cdot h(y(\xi))$ mit $y(x_0) = y_0$ für $|\xi - x_0| < \delta$.

$\Longrightarrow \int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{h(y(\xi))} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi = \int\limits_{x_0}^{x} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi \underset{\eta := y(\xi)}{\Longrightarrow} \int\limits_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{h(\eta)}\,\mathrm{d}\eta = \int\limits_{x_0}^{x} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi \quad (x \in U_\delta(x_0))$

ii. „$\Longleftarrow$“

Sei umgekehrt $*$ erfüllt.

Differenzieren wir die Gleichung $*$ nach x, so erhalten wir nach dem HS-DIR und Kettenregel $\frac{1}{h(y(x))} \cdot y'(x) = g(x) \quad (x \in U_\delta(x_0))$, die DGL ist also erfüllt.

Um die Anfangsbedingung zu erhalten, setzen wir in $*$ $x = x_0$, also folgt $\int\limits_{y_0}^{y(x_0)} \frac{1}{h(\eta)}\,\mathrm{d}\eta = 0$.

Stets ist $h(y) \neq 0 \ (y \in I_2)$ und h ist stetig, also muss entweder $h(y) < 0$ oder $h(y) > 0$ gelten.

Demnach ist schließlich $y(x_0) = y_0$, die Anfangsbedingung ist erfüllt.

II. Wir zeigen nun, dass die IGL $*$ in einer Umgebung von x_0 genau eine Lösung hat.

Dazu betrachten wir $F(x,y) = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}\eta}{h(\eta)} - \int\limits_{x_0}^{x} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ für $(x,y) \in I_1 \times I_2$, ersichtlich gilt $F(x_0,y_0) = 0$ und partielles Ableiten liefert $F_x(x,y) = -g(x)$ stetig sowie $F_y(x,y) = \frac{1}{h(y)}$ stetig mit $F_y(x_0,y_0) \neq 0$.

Es gilt demnach $F \in \mathscr{C}^1(I_1 \times I_2)$ und F erfüllt nun die Vorraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen, d.h. es existieren eine Umgebung $U_\delta(x_0)$ und auf $U_\delta(x_0)$ genau eine $\mathscr{C}^1$-Funktion $y(x)$ mit $F(x,y(x)) = 0$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$. Dieses $y = y(x)$ löst dann die IGL $*$. □

Folgerung

Ist $y = y(x)$ eine Auflösung von $F(x,y) = 0$ auf $I \subset I_1$, so löst $y = y(x)$ das AWP auf I.

Beispiel $\quad y' = \frac{y}{1+4x^2}$ mit $x_0 = 0,\ y(0) = y_0$

Ist $y_0 = 0$, dann löst $y = y(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ dieses AWP.

Sei also $y_0 \neq 0$. Wir wenden nun die *Methode der Trennung der Variablen* an.

Aus dem AWP lässt sich die IGL $\int\limits_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}\eta}{\eta} = \int\limits_{0}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{1+4\xi^2}$ aufstellen.

Die Integration liefert $\ln\left|\frac{y}{y_0}\right| = \frac{1}{2}\arctan(2x)$ und weiter $|y| = |y_0| \cdot e^{\frac{1}{2}\arctan(2x)}$.

Ist nun $y_0 > 0$, so gilt auch $y(x) > 0$ für $x \in U_\delta(x_0)$; analog folgt aus $y_0 < 0$ auch $y(x) < 0$ für $x \in U_\delta(x_0)$.

Demnach gilt $y = y_0 \cdot e^{\frac{1}{2}\arctan(2x)}$ für $x \in U_\delta(x_0)$.

Als Ableitung ergibt sich $y'(x) = \frac{y(x)}{1+4x^2}$, und diese stimmt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit der DGL überein.

Schließlich ist also $y = y(x) = y_0 \cdot e^{\frac{1}{2}\arctan(2x)}$ für $x \in \mathbb{R}$ für alle y_0 Lösung des AWP.

Definition 15.2.2 (Ähnlichkeitsdifferentialgleichung)

Eine DGL $y' = \varphi(\frac{y}{x})$, die nur vom Quotienten $\frac{y}{x}$ abhängt, heißt Ähnlichkeitsdifferentialgleichung.
φ ist dabei homogen vom Grade 0, d.h. $\varphi(\frac{\lambda \cdot y}{\lambda \cdot x}) = \lambda^0 \cdot \varphi(\frac{y}{x})$.

Um solche eine DGL zu lösen, führen wir sie auf eine DGL mit getrennten Variablen zurück.

Dazu substituieren wir $u = \frac{y}{x}$, d.h. $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, dann ist $y = u \cdot x$.

Weiter ergibt sich $u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{y' \cdot x - y}{x^2} = \frac{y' - u}{x} = \frac{\varphi(u) - u}{x}$.

Schließlich ist $u' = \frac{\varphi(u)-u}{x}$ eine DGL mit getrennten Variablen.

Zum Lösen einer Ähnlichkeitsdifferentialgleichung bestimmt man also zuerst $u = u(x)$ und $y = x \cdot u$ ist dann Lösung.

Beispiel $x^2 \cdot y' = 3y^2 + y \cdot x \quad (x \neq 0)$
Ähnlichkeits-DGL: $y' = 3(\frac{y}{x})^2 + \frac{y}{x} \underset{u:=\frac{y}{x}}{=} 3u^2 + u = \varphi(u)$
DGL mit getrennten Variablen: $u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\varphi(u)-u}{x} = \frac{3u^2+u-u}{x} = \frac{3u^2}{x}$
$\implies \frac{1}{3u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \implies -\frac{1}{3u} = \ln|x| + c \implies u = -\frac{1}{3\ln|x|+\tilde{c}}$
Lösung ist also $y = u \cdot x = -\frac{x}{3\ln|x|+\tilde{c}} \quad (x \neq 0)$.

Bemerkung
Zur Lösung einer DGL der Gestalt $y' = f\left(\frac{a_1\cdot x+b_1\cdot y+c_1}{a_2\cdot x+b_2\cdot y+c_2}\right)$ mit $a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \neq 0$
bestimmt man (x_0, y_0) als eindeutige Lösung des Gleichungssystems
$a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = 0$
$a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = 0$,
setzt $u := x - x_0,\ v := y - y_0$ und erhält eine ÄhnlichkeitsDGL für v, betrachtet als Funktion von u.

Beispiel $x - 2y + 5 + (2x - y + 4) \cdot y' = 0$
Umstellen liefert $y' = -\frac{x-2y+5}{2x-y+4}$, Lösung des Gleichungssystems ist $(x_0, y_0) = (-1, 2)$.
Wir verwenden daher die Transformation $u = x + 1,\ v = y - 2$ und damit ergibt sich $y' = \frac{2v-u}{2u-v} = v'$.
Als ÄhnlichkeitsDGL haben wir also $v' = \frac{2\frac{v}{u}-1}{2-\frac{v}{u}} = \varphi(\frac{v}{u})$.
Wir substituieren $w := \frac{v}{u}$ und haben mit $w' = \frac{\varphi(w)-w}{u}$ eine DGL mit getrennten Variablen.
$w' = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u} = f(u, w) = g(u) \cdot h(w)$ mit $g(u) = \frac{1}{u}$ und $h(w) = \varphi(w) - w = \frac{w^2-1}{2-w}$.
$\int g(u)\,\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u|$

$$\int \frac{\mathrm{d}w}{h(w)} = \int \frac{w-2}{1-w^2}\,\mathrm{d}w = -\frac{1}{2}\ln|1-w^2| - 2\begin{cases} \operatorname{artanh} w & |w| < 1 \\ \operatorname{arcoth} w & |w| > 1 \end{cases} + C$$

$$\implies 2\ln|u| = -\left(\ln|1-w^2| + 2\begin{cases} \ln\frac{1+w}{1-w} & |w| < 1 \\ \ln\frac{w+1}{w-1} & |w| > 1 \end{cases}\right) + C$$

Als Auflösung ergibt sich $u^2 = C \cdot \frac{1-w}{(1+w)^3}$ für $|w| \neq 1$, weiter ist dann $v = w \cdot u = w \cdot C \cdot \sqrt{\frac{1-w}{(1+w)^3}}$.
Schließlich liefern nun die Rücksubstitutionen $w = \frac{v}{u},\ u = x + 1,\ v = y - 2$ und einige Umformungen die Lösungsschar $C \cdot (x - y + 3) = (x + y - 1)^3$.

15.2.2 Exakte Differentialgleichungen

Definition 15.2.3
Gegeben sei die DGL $g(x, y) + h(x, y) \cdot y' = 0$ mit $g, h : U \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $U \subset \mathbb{R}^2$ offen,
wir schreiben dann auch $g\,\mathrm{d}x + h\,\mathrm{d}y = 0$.
Die DGL $g(x, y) + h(x, y) \cdot y' = 0$ heißt exakt
$:\Longleftrightarrow$ das Vektorfeld (g, h) ist ein Gradientenfeld
$\Longleftrightarrow$ $\exists F : U \longrightarrow \mathbb{R} : F_x = g \ \wedge\ F_y = h$

Im Folgenden zeigen wir, dass die DGL $g(x, y) + h(x, y) \cdot y' = 0$ gelöst ist, wenn F bekannt ist.

Bemerkung 15.2.4
Es sei $U = I_1 \times I_2 = \mathscr{R}$ mit $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ offen ein Rechteck und $g, h \in \mathscr{C}^1(\mathscr{R})$.
Die DGL $g(x, y) + h(x, y) \cdot y' = 0$ exakt
$\Longleftrightarrow$ $g_y = h_x$

Beweis

I. „$\Longrightarrow$“
(g,h) sei ein Gradientenfeld, d.h. es existiert $F:\mathscr{R}\longrightarrow\mathbb{R}: F_x = g \;\wedge\; F_y = h$.
Dann folgt wegen $g,h\in\mathscr{C}^1(\mathscr{R})$, dass $F\in\mathscr{C}^2(\mathscr{R})$ gilt
und weiterhin ist mit dem Satz von Schwarz $F_{xy} = F_{yx} \iff g_y = h_x$.

II. „$\Longleftarrow$“
Sei $g_y = h_x$ auf $\mathscr{R}$.
Zu zeigen ist die Existenz von $F:\mathscr{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ mit $F_x = g \;\wedge\; F_y = h$ auf $\mathscr{R}$.
Wir wählen $(a,b)\in\mathscr{R}$ und definieren $F(x,y) = \int\limits_a^x g(\xi,b)\,\mathrm{d}\xi + \int\limits_b^y h(x,\eta)\,\mathrm{d}\eta$ für $(x,y)\in\mathscr{R}$.
Partielles Ableiten liefert $F_y(x,y) = h(x,y)$
sowie $F_x(x,y) = g(x,b) + \int\limits_b^y h_x(x,\eta)\,\mathrm{d}\eta = g(x,b) + \int\limits_b^y g_y(x,\eta)\,\mathrm{d}\eta = g(x,b) + g(x,y) - g(x,b) = g(x,y)$.
Schließlich ist also $\mathrm{grad}F = (g,h)$. □

Beispiel $(x\cdot y^2-1)\,\mathrm{d}x + (x^2\cdot y - 1)\,\mathrm{d}y = 0$
Dies ist die DGL $\underbrace{(x\cdot y^2-1)}_{=g(x,y)} + \underbrace{(x^2\cdot y-1)}_{=h(x,y)}\cdot y' = 0$
und sie ist nach obigen Satz exakt wegen $g_y(x,y) = 2x\cdot y = h_x(x,y)$ für $(x,y)\in\mathscr{R}=\mathbb{R}^2$.

Nun wollen wir herausfinden, unter welchen Vorraussetzungen Lösungen existieren und wie wir diese bestimmen können.

(1) Sei $g(x,y)+h(x,y)\cdot y' = 0$ eine exakte DGL auf dem Rechteck $\mathscr{R} = I_1\times I_2$,
F sei eine Stammfunktion der DGL und $y = y(x)$ sei Lösung auf Intervall $I\subset I_1$.
Betrachte $F(x,y(x)) = z = z(x)$ für $x\in I$, dann folgt
$z'(x) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = F_x(x,y(x))\cdot 1 + F_y(x,y(x))\cdot y'(x) = g(x,y(x)) + h(x,y(x))\cdot y'(x) = 0$, denn y ist Lösung.
$F(x,y(x))$ ist also konstant auf I.

(2) Sei $(x_0,y_0)\in\mathscr{R}$. Betrachte $F(x,y) = F(x_0,y_0) = \text{const.}$, ist diese Gleichung nach y auflösbar?
Bilde $G(x,y) = F(x,y) - F(x_0,y_0)$, dann gilt $G(x_0,y_0) = 0$, $G_x = F_x = g$, $G_y = F_y = h$.
Sei zusätzlich $h(x_0,y_0)\neq 0$, dann existiert nach dem Satz über implizite Funktionen eine Umgebung $U_\delta(x_0)$ und genau eine Funktion $y = y(x)$ mit $G(x,y(x)) = F(x,y(x)) - F(x_0,y_0) = 0$ für $x\in U_\delta(x_0)$ und $y(x_0) = y_0$, d.h. $F(x,y(x)) = \text{const}$.
Weiterhin ist $y = y(x)$ differenzierbar mit $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x(x,y(x))}{F_y(x,y(x))} = -\frac{g(x,y(x))}{h(x,y(x))}$ $(x\in U_\delta(x_0))$.
Damit gilt also $g(x,y(x)) + h(x,y(x))\cdot y'(x) = 0$ $(x\in U_\delta(x_0))$, d.h. $y = y(x)$ löst die DGL.

Satz 15.2.5

(1) Die Lösungen der exakten DGL $g(x,y)+h(x,y)\cdot y' = 0$ sind genau die $y = y(x)$ mit $F(x,y(x)) = \text{const}$.

(2) Falls außer den oben genannten Vorraussetzungen zusätzlich $h(x_0,y_0)\neq 0$ gilt,
so hat das AWP $g(x,y)+h(x,y)\cdot y' = 0$ mit $y(x_0) = y_0$ (lokal) genau eine Lösung.

Beispiel $\underbrace{(x\cdot y^2-1)}_{=g}\,\mathrm{d}x + \underbrace{(x^2\cdot y-1)}_{=h}\,\mathrm{d}y = 0$
Wie wir gesehen haben, ist dies eine exakte DGL auf $\mathbb{R}^2$, da $g_y = h_x$ gilt.
Es gilt $F_x = g = x\cdot y^2 - 1$ sowie $F_y = h = x^2\cdot y - 1$, folglich ist eine Stammfunktion $F = \frac{1}{2}x^2\cdot y^2 - x + C(y)$.

Dann gilt also $F_y = x^2 \cdot y + C'(y) \implies C'(y) = -1 \implies C(y) = -y + c$
und insgesamt ergibt sich $F(x,y) = \frac{1}{2}x^2 \cdot y^2 - x - y + c$
Zum Finden der Lösungen betrachten wir $\frac{1}{2}x^2 \cdot y^2 - x - y = \text{const.}$, wir erhalten eine Schar von Lösungen.
Wir schreiben für die allgemeine Lösung $\frac{1}{2}x^2 \cdot y^2 - x - y = C$.
Nehmen wir die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ hinzu, so ist $x^2 \cdot y^2 - 2x - 2y = 0$ bzw. $y^2 - \frac{2}{x^2} \cdot y - \frac{2}{x} = 0$.
Es existiert nun genau eine Lösung, denn es gilt $h(x_0, y_0) = h(0,0) = -1 \neq 0$.
$y_{1,2} = \frac{1}{x^2} \pm \sqrt{\frac{1}{x^4} + \frac{2}{x}} = \frac{1}{x^2} \pm \frac{1}{x^2} \cdot \sqrt{1+2x^3}$
Notwendig muss $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = 0$ gelten, also ist $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \sqrt{1+2x^3} \quad (x \neq 0)$
Schließlich lautet die Lösung für dieses AWP also $y = y(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \sqrt{1+2x^3} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$.
Für den Anfangswert $y(1) = 1$ ist die DGL nicht eindeutig auflösbar, denn dann ist $h(x_0, y_0) = h(1,1) = 0$.

Bemerkung 15.2.6 (Integrierender Faktor)
Die DGL $g\,\mathrm{d}x + h\,\mathrm{d}y = 0$ sei nicht exakt.
Gesucht ist ein Faktor $M = M(x,y)$ derart, dass $M \cdot g\,\mathrm{d}x + M \cdot h\,\mathrm{d}y = 0$ exakt ist.
Notwendig und hinreichend für die Exaktheit muss $(M \cdot g)_y = (M \cdot h)_x$ gelten.
$\implies \quad M_y \cdot g + M \cdot g_y = M_x \cdot h + M \cdot h_x \quad \implies \quad M_y \cdot g - M_x \cdot h + M \cdot (g_y - h_x) = 0$
Dies ist dann eine partielle DGL für M, die durch verschiedene Ansätze gelöst werden kann,
z.B. $M = M(x),\ M = M(y),\ M = M(x \cdot y),\ M = M(\frac{x}{y}), \ldots$

Beispiel $\underbrace{(x \cdot y - 1) \cdot y}_{=g}\,\mathrm{d}x + \underbrace{x \cdot (x \cdot y - 3)}_{=h}\,\mathrm{d}y = 0$
Dies ist eine nicht exakte DGL.
Um einen geeigneten integrierenden Faktor zu finden, wählen wir den Ansatz $M = M(x \cdot y)$.
$(M \cdot g)_y = M' \cdot x \cdot g + M \cdot g_y = M' \cdot x \cdot (x \cdot y^2 - y) + M \cdot (2x \cdot y - 1) = M' \cdot (x^2 \cdot y^2 - x \cdot y) + M \cdot (2x \cdot y - 1)$
$(M \cdot h)_x = M' \cdot y \cdot h + M \cdot h_x = M' \cdot y \cdot (x^2 \cdot y - 3x) + M \cdot (2x \cdot y - 3) = M' \cdot (x^2 \cdot y^2 - 3x \cdot y) + M \cdot (2x \cdot y - 3)$
Die DGL $M \cdot g\,\mathrm{d}x + M \cdot h\,\mathrm{d}y = 0$ ist dann exakt $\iff \quad (M \cdot g)_y = (M \cdot h)_x \iff \quad M' \cdot 2\underbrace{x \cdot y}_{=:z} + M \cdot 2 = 0$,
wir erhalten also für M die DGL $z \cdot M' = -M$.
Die Methode der Variablentrennung liefert uns nun $M = \frac{1}{z} = \frac{1}{x \cdot y}$.
Schließlich ist also $(y - \frac{1}{x})\,\mathrm{d}x + (x - \frac{3}{y})\,\mathrm{d}y = 0$ eine exakte DGL mit allgemeiner Lösung $x \cdot y - \ln(x \cdot y^3) = C$.

Bemerkung
Die DGL $g\,\mathrm{d}x + h\,\mathrm{d}y = 0$ sei nicht exakt, dabei seien g, h homogen vom gleichen Grad n,
d.h. es gelten $g(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = \lambda^n \cdot g(x,y)$ und $h(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = \lambda^n \cdot h(x,y) \quad (\lambda > 0)$.
Dann ist $M(x,y) := \frac{1}{x \cdot g(x,y) + y \cdot h(x,y)}$ ein integrierender Faktor der DGL.

Beweis
Es gilt $g(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = \lambda^n \cdot g(x,y)$, Differentiation dieser Gleichung nach λ mittels Kettenregel liefert uns
$x \cdot g_x(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) + y \cdot g_y(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = n \cdot \lambda^{n-1} \cdot g(x,y)$.
Setzen wir nun $\lambda = 1$ ein, so erhalten wir $x \cdot g_x + y \cdot g_y = n \cdot g$. Analog gilt $x \cdot h_x + y \cdot h_y = n \cdot h$.
Wir zeigen nun, dass die DGL $M \cdot g\,\mathrm{d}x + M \cdot h\,\mathrm{d}y = 0$ exakt ist, d.h. $(M \cdot g)_y = (M \cdot h)_x$.
Um also $\left(\frac{g}{x \cdot g(x,y) + y \cdot h(x,y)}\right)_y = (M \cdot g)_y = (M \cdot h)_x = \left(\frac{h}{x \cdot g(x,y) + y \cdot h(x,y)}\right)_x$ zu zeigen,
so genügt es nach der Quotientenregel die Gleichheit der Zähler der Ableitungen zu zeigen:

$$(n \cdot g) \cdot h = (n \cdot h) \cdot g$$

$$(x \cdot g_x + y \cdot g_y) \cdot h = (x \cdot h_x + y \cdot h_y) \cdot g$$
$$y \cdot g_y \cdot h - y \cdot g \cdot h_y = x \cdot g \cdot h_x - x \cdot g_x \cdot h$$
$$x \cdot g \cdot g_y - x \cdot g \cdot g_y - g \cdot h + y \cdot g_y \cdot h - y \cdot g \cdot h_y = x \cdot g \cdot h_x - x \cdot g_x \cdot h + y \cdot h \cdot h_x - y \cdot h \cdot h_x - g \cdot h$$
$$g_y \cdot (x \cdot g + y \cdot h) - g \cdot (x \cdot g_y + h + y \cdot h_y) = h_x \cdot (x \cdot g + y \cdot h) - h \cdot (g + x \cdot g_x + y \cdot h_x)$$

Es gilt also schließlich $(M \cdot g)_y = (M \cdot h)_x$. □

15.2.3 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Definition
Seien $g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $I \subset \mathbb{R}$ sei ein Intervall.
Die DGL $y' + g \cdot y = h$ heißt lineare DGL 1. Ordnung.
Für $h \equiv 0$ heißt sie homogene lineare DGL 1. Ordnung, sonst inhomogene lineare DGL 1. Ordnung.

Achtung: Homogene lineare DGL sind auf keinen Fall zu verwechseln mit homogenen DGL.

I. Homogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung $y' + g \cdot y = 0$

Falls G eine Stammfunktion von g ist,
so hat die homogene lineare DGL $y' + g \cdot y = 0$ die Lösung $y(x) = C \cdot \mathrm{e}^{-G(x)}$ mit $C \in \mathbb{R}$.
Das ist richtig, denn es gilt $y'(x) = C \cdot \mathrm{e}^{-G(x)} \cdot (-g(x)) = y(x) \cdot (-g(x))$.
Jede Lösung hat diese Gestalt, denn sei $z = z(x)$ Lösung auf I, d.h. $z'(x) = z(x) \cdot (-g(x))$.
Bilde nun auf I die Hilfsfunktion $w(x) = \mathrm{e}^{G(x)} \cdot z(x)$.
Dann ist $w'(x) = \mathrm{e}^{G(x)} \cdot g(x) \cdot z(x) + \mathrm{e}^{G(x)} \cdot (-g(x) \cdot z(x)) = 0$.
Demnach ist $w(x) = \text{const.}$, also $\exists\, C \in \mathbb{R} : w(x) = C$ und schließlich ist $z(x) = C \cdot \mathrm{e}^{-G(x)}$.

Die allgemeine Lösung ist also $y_{\text{hom.}}^{\text{allg.}} = C \cdot \mathrm{e}^{-G(x)} \quad (x \in I,\ C \in \mathbb{R})$.

II. Inhomogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung $y' + g \cdot y = h$

Wir betrachten die inhomogene lineare DGL $y' + g \cdot y = h$.
Für das Finden einer Lösung wählen wir den Ansatz $y(x) = C(x) \cdot \mathrm{e}^{-G(x)}$.
Wir gehen also nicht mehr von einem konstanten C aus, sondern gehen über zu einer Funktion $C(x)$, dies nennt man die Methode der Variation der Konstanten.
Differentiation liefert $y'(x) = C'(x) \cdot \mathrm{e}^{-G(x)} - C(x) \cdot \mathrm{e}^{-G(x)} \cdot g(x)$. Dies setzen wir in unsere DGL ein und erhalten $C'(x) \cdot \mathrm{e}^{-G(x)} - C(x) \cdot \mathrm{e}^{-G(x)} \cdot g(x) + C(x) \cdot \mathrm{e}^{-G(x)} \cdot g(x) = C'(x) \cdot \mathrm{e}^{-G(x)} = h(x)$.
Notwendig ist dann $C' = h \cdot \mathrm{e}^{G}$ stetig auf I, also existiert $C(x) = \int h(x) \cdot \mathrm{e}^{G(x)}\, \mathrm{d}x$.
Insgesamt gilt nun $y(x) = \mathrm{e}^{-G(x)} \cdot (c + \int\limits_{\xi}^{x} h(t) \cdot \mathrm{e}^{G(t)}\, \mathrm{d}t) = \underbrace{c \cdot \mathrm{e}^{-G(x)}}_{= y_{\text{hom.}}^{\text{allg.}}} + \underbrace{\mathrm{e}^{-G(x)} \cdot \int\limits_{\xi}^{x} h(t) \cdot \mathrm{e}^{G(t)}\, \mathrm{d}t}_{\substack{= y_{\text{inh.}}^{\text{part.}} \\ \text{(partikuläre Lösung)}}}$. $\quad *$

Die allgemeine Lösung ist also $y_{\text{inh.}}^{\text{allg.}} = y_{\text{hom.}}^{\text{allg.}} + y_{\text{inh.}}^{\text{part.}} \quad (x \in I)$.

Beispiel $y' + y \cdot \underbrace{\tan x}_{=g(x)} = \underbrace{\sin(2x)}_{=h(x)}$

g, h sind stetig auf $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, also existiert auf I eine Lösungsschar der Form $*$.

I. $y' + y \cdot \tan x = 0$ (homogenes DGL)
$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int -\tan x\, \mathrm{d}x = \int \frac{-\sin x}{\cos x}\, \mathrm{d}x = \ln|\cos x| + c$

Es folgt $\ln|y| = \ln|\cos x| + c$ und weiter $|y| = e^c \cdot |\cos x|$.
Die allgemeine homogene Lösung auf I ist demnach $y_{\text{hom.}}^{\text{allg.}} = C \cdot \cos x \quad (C \in \mathbb{R})$.

II. Variation der Konstanten (Ansatz für inhomogenes DGL)
Es sind $y = C(x) \cdot \cos x$ und $y' = C'(x) \cdot \cos x + C(x) \cdot (-\sin x)$.
Einsetzen in Ausgangs-DGL liefert $C' \cdot \cos x + \underbrace{C \cdot (-\sin x) + C \cdot \cos x \cdot \tan x}_{=0} = \sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$.
Also ist $C'(x) = 2\sin x$ mit $C(x) = -2\cos x + \tilde{c}$ und als partikuläre Lösung ergibt sich $y_{\text{inh.}}^{\text{part.}} = -2\cos^2 x$.
Die allgemeine Lösung ist also $y_{\text{inh.}}^{\text{allg.}} = y_{\text{hom.}}^{\text{allg.}} + y_{\text{inh.}}^{\text{part.}} = C \cdot \cos x - 2\cos^2 x \quad (C \in \mathbb{R},\ x \in I)$.

Definition 15.2.7 (Bernoulli'sche Differentialgleichung)
Seien $f, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $I \subset \mathbb{R}$ sei ein Intervall, $\alpha \neq 1$.
Eine DGL der Form $y' + f(x) \cdot y + h(x) \cdot y^\alpha = 0$ heißt Bernoulli'sche Differentialgleichung.

Diese DGL kann durch Substitution auf eine lineare DGL zurückgeführt werden:
$u = y^{1-\alpha}$, $u' = (1-\alpha) \cdot y^{-\alpha} \cdot y'$ und damit $y = u \cdot y^\alpha$, $y' = u' \cdot \frac{y^\alpha}{1-\alpha}$
$\Longrightarrow \quad u' \cdot \frac{y^\alpha}{1-\alpha} + f \cdot u \cdot y^\alpha + h \cdot y^\alpha = 0$
Das liefert die lineare inhomogene DGL $\frac{u'}{1-\alpha} + f \cdot u + h = 0$.

Beispiel $\quad y' - y + x \cdot y^2 = 0$
Das ist eine Bernoulli'sche DGL mit $f(x) = -1$, $h(x) = x$ und $\alpha = 2$.
Wir substituieren $u = y^{1-\alpha} = y^{-1}$, dann ist $y = \frac{1}{u}$ und weiter $y' = -\frac{u'}{u^2}$.
Durch Einsetzen in die DGL erhalten wir $-\frac{u'}{u^2} - \frac{1}{u} + x \cdot \frac{1}{u^2} = 0$, das liefert die lineare DGL $u' + u = x$.
Die allgemeine homogene Lösung ist $u_{\text{hom.}}^{\text{allg.}} = C \cdot e^{-x}$,
mit Variation der Konstanten ergibt sich die partikuläre inhomogene Lösung $u_{\text{inh.}}^{\text{part.}} = x - 1$.
Die allgemeine inhomogene Lösung ist also $u_{\text{inh.}}^{\text{allg.}} = C \cdot e^{-x} + x - 1$.
Nicht zu vergessen ist die Rücksubstitution $y = \frac{1}{u}$, die Lösung lautet schließlich $y = y(x) = \frac{1}{C \cdot e^{-x} + x - 1}$.

15.2.4 Riccat'sche Differentialgleichungen

Definition
Seien $f, g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $I \subset \mathbb{R}$ sei ein Intervall.
Eine DGL der Form $y' + f(x) \cdot y + h(x) \cdot y^2 = g(x)$ heißt Riccat'sche Differentialgleichung.

Diese DGL sind meist nicht elementar lösbar (d.h. nicht durch Quadraturen von Funktionen).
Für $h \equiv 0$ ergibt sich eine lineare DGL, für $g \equiv 0$ ergibt sich eine Bernoulli'sche DGL mit $\alpha = 2$.

Satz 15.2.8
(1) Die allgemeine Lösung der Riccat'schen DGL hat die Form $y = \frac{c \cdot \varphi_1(x) + \psi_1(x)}{C \cdot \varphi(x) + \psi(x)}$.

(2) Falls eine spezielle Lösung $y_1(x)$ bekannt ist,
so kann die allgemeine Lösung durch zwei Quadraturen bestimmt werden.

Beweis
I. Sei $y = y(x)$ eine beliebige Lösung mit $y(x) \neq y_1(x) \quad (x \in I)$.
Setze $u(x) = \frac{1}{y(x) - y_1(x)}$ mit $u'(x) = \frac{y_1'(x) - y'(x)}{(y(x) - y_1(x))^2}$, dann ist $y(x) = \frac{1}{u(x)} + y_1(x)$.
Da y, y_1 Lösungen sind, folgt
$u' = \frac{(g - f \cdot y_1 - h \cdot y_1^2) - (g - f \cdot y - h \cdot y^2)}{(y - y_1)^2} = \frac{f + h \cdot (y + y_1)}{y - y_1} = u \cdot (f + h \cdot (y + y_1)) \underset{y = \frac{1}{u} + y_1}{=} u \cdot (f + 2h \cdot y_1) + h$.

Wir erhalten eine lineare DGL für u: $u' = u\cdot(f + 2h\cdot y_1) + h$,
und diese hat die allgemeinen Lösung $u = C\cdot\varphi(x) + \psi(x)$.

II. Die allgemeine Lösung $y = y(x)$ ist dann elementar darstellbar:
$y = y(x) = \frac{1}{u(x)} + y_1(x) = \frac{1}{C\cdot\varphi(x)+\psi(x)} + y_1(x) = \frac{C\cdot y_1\cdot\varphi + y_1\cdot\psi + 1}{C\cdot\varphi+\psi}$ □

Bemerkung 15.2.9
Das Doppelverhältnis von 4 Lösungen ist konstant,
d.h. falls y_1, y_2, y_3, y_4 Lösungen der Riccat'schen DGL sind, so gilt $\frac{y_4-y_2}{y_4-y_1} : \frac{y_3-y_2}{y_3-y_1} = c = \text{const.}$
Sind 3 partikuläre Lösungen bekannt, so erhält man mit obiger Formel die allgemeine Lösung ohne Quadraturen, indem man alle möglichen Konstanten $c \in \mathbb{R}$ betrachtet.

Beweis
Wir zeigen dazu, dass die Ableitung des Doppelverhältnisses $DV' = 0$ ist, denn dann ist $DV = \text{const.}$
$DV = \frac{Z}{N} = \frac{(y_4-y_2)\cdot(y_3-y_1)}{(y_4-y_1)\cdot(y_3-y_2)} = \text{const.} \iff DV' = 0 \iff Z'\cdot N - Z\cdot N' = 0.$
Da y_m, y_n für $m,n \in \{1,2,3,4\}$ Lösungen der DGL sind, gilt $y_m' - y_n' = -(y_m - y_n)\cdot(f(x) + (y_m + y_n)\cdot h(x)).*$

$$\begin{aligned}
Z'\cdot N - Z\cdot N' &= \left[(y_4-y_2)'\cdot(y_3-y_1) + (y_4-y_2)\cdot(y_3-y_1)'\right]\cdot\left[(y_4-y_1)\cdot(y_3-y_2)\right]\\
&\quad - \left[(y_4-y_2)\cdot(y_3-y_1)\right]\cdot\left[(y_4-y_1)'\cdot(y_3-y_2) + (y_4-y_1)\cdot(y_3-y_2)'\right]\\
&\underset{*}{=} \left[-(y_4-y_2)\cdot(y_3-y_1)\cdot(f(x)+(y_4+y_2)\cdot h(x)) - (y_4-y_2)\cdot(y_3-y_1)\cdot(f(x)+(y_3+y_1)\cdot h(x))\right]\\
&\qquad\cdot\left[(y_4-y_1)\cdot(y_3-y_2)\right]\\
&\quad - \left[-(y_4-y_1)\cdot(y_3-y_2)\cdot(f(x)+(y_4+y_1)\cdot h(x)) - (y_4-y_1)\cdot(y_3-y_2)\cdot(f(x)+(y_3+y_2)\cdot h(x))\right]\\
&\qquad\cdot\left[(y_4-y_2)\cdot(y_3-y_1)\right]\\
&= \left[(y_4-y_1)\cdot(y_3-y_2)\cdot(y_4-y_2)\cdot(y_3-y_1)\cdot(2f(x)+(y_1+y_2+y_3+y_4)\cdot h(x))\right]\\
&\quad - \left[(y_4-y_2)\cdot(y_3-y_1)\cdot(y_4-y_1)\cdot(y_3-y_2)\cdot(2f(x)+(y_1+y_2+y_3+y_4)\cdot h(x))\right]\\
&= 0
\end{aligned}$$
□

Beispiel $4y' + y^2 + \frac{4}{x^2} = 0 \quad (x > 0)$
Ansatz: $y_1 = \frac{a}{x}$ mit $y_1' = -\frac{a}{x^2}$
$\implies -4\frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{4}{x^2} = 0 \iff a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2 = 0 \implies a = 2 \implies y_1 = \frac{2}{x}$ mit $y_1' = -\frac{2}{x^2}$
Substitution: $y(x) = \frac{1}{u(x)} + \frac{2}{x} = \frac{1}{u(x)} + y_1(x)$ mit $y' = -\frac{u'}{u^2} + y_1'$
$\implies 4(-\frac{u'}{u^2} + y_1') + (\frac{1}{u^2} + \frac{2y_1}{u} + y_1^2) + \frac{4}{x^2} = 0$
$\implies -4\frac{u'}{u^2} - \frac{8}{x^2} + \frac{1}{u^2} + \frac{4}{x\cdot u} + \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^2} = -4\frac{u'}{u^2} + \frac{1}{u^2} + \frac{4}{x\cdot u} = 0 \;\Big|\cdot\frac{u^2}{-4}$
Wir erhalten eine inhomogene lineare DGL 1. Ordnung: $u' - \frac{1}{x}\cdot u - \frac{1}{4} = 0$

I. Homogene lineare DGL $u' + \underbrace{(-\tfrac{1}{x})}_{=g}\cdot u = 0$

$G = -\ln|x| \underset{x>0}{=} -\ln x \implies u_{\text{hom.}}^{\text{allg.}} = C\cdot e^{-G} = C\cdot x$

II. Inhomogene lineare DGL $u' + \underbrace{(-\tfrac{1}{x})}_{=g}\cdot u = \underbrace{\tfrac{1}{4}}_{=h}$, Variation der Konstanten $u_{\text{inh.}}^{\text{part.}} = C(x)\cdot x$

$C(x) = \int h(x)\cdot e^{G(x)}\,dx = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x} = \frac{1}{4}\ln|x| \implies u_{\text{inh.}}^{\text{part.}} = \frac{1}{4}x\cdot\ln|x|$

Schließlich ist $u_{\text{inh.}}^{\text{allg.}} = u_{\text{hom.}}^{\text{allg.}} + u_{\text{inh.}}^{\text{part.}} = C\cdot x + \frac{1}{4}x\cdot\ln|x| = x\cdot(\frac{1}{4}\ln|x| + C)$
Die Rücksubstitution liefert dann die Lösung $y = y(x) = \frac{1}{u} + \frac{2}{x} = \frac{1}{x\cdot(\frac{1}{4}\ln|x|+C)} + \frac{2}{x} \quad (x > 0)$.

15.3 Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Definition
Seien $b, c \in \mathbb{R}$ sowie $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $g \neq 0$.
Eine DGL der Form $y'' + b \cdot y' + c \cdot y = g$ mit Anfangsbedingungen $y(0) = y_0,\ y'(0) = v_0$
heißt lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten oder auch SchwingungsDGL.
Für $g \equiv 0$ heißt sie homogen, andernfalls inhomogen (analog zu den linearen DGL 1. Ordung).
Homogene lineare DGL besitzen stets die triviale Lösung $y \equiv 0$.

Beispiel
Ein Wagen mit Masse m wird durch die Kraft $K(t)$ einer gespannten Feder in x-Richtung angetrieben.
Gesucht ist nun eine Funktion $x(t)\ \ (t > 0)$, die den Bewegungsverlauf des Wagens charakterisiert.
Der Sachverhalt wird durch $m \cdot \ddot{x}(t) = -k \cdot x(t) - d \cdot \dot{x}(t) + K(t)$ beschrieben.
Hieraus erhalten wir die lineare DGL 2. Ordnung $\ddot{x}(t) + \frac{d}{m} \cdot \dot{x}(t) + \frac{k}{m} \cdot x(t) = \frac{1}{m} \cdot K(t)$.

Bemerkung (Superpositionsprinzip)
Sind $y_1, \ldots, y_m$ Lösungen einer homogenen linearen DGL auf einem Intervall I,
so ist auch jede Linearkombination $C_1 \cdot y_1 + \cdots + C_m \cdot y_m$ Lösung auf I.
Diese ebenso triviale wie fundamentale Tatsache wird Superpositionsprinzip genannt.
Das Superpositionsprinzip gilt für homogene lineare DGL beliebiger Ordnung.

I. Homogene lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung $\quad y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0 \qquad *$

Wir wählen den Euler'schen Ansatz: $y = \mathrm{e}^{\lambda \cdot x}$ mit $y' = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda \cdot x}$ und $y'' = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda \cdot x}$.
Die Exponentialfunktion hat nur positive Werte, also muss notwendig $\lambda^2 + b \cdot \lambda + c = 0$ sein.
Diese quadratische Gleichung heißt charakteristische Gleichung der DGL $*$,
und hat je nach dem Vorzeichen der Diskriminante $\Delta := b^2 - 4c$ bekanntlich folgende Lösungen:

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \frac{1}{2}(-b \pm \sqrt{\Delta}) & \Delta > 0 \quad \text{(zwei verschiedene reelle Lösungen)} \\ -\frac{1}{2}b & \Delta = 0 \quad \text{(eine doppelte reelle Lösung)} \\ \frac{1}{2}(-b \pm \mathrm{i} \cdot \sqrt{-\Delta}) & \Delta < 0 \quad \text{(zwei konjugiert komplexe Lösungen)} \end{cases}$$

Wir haben also nun drei Fälle zu betrachten.

(a) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ reell
Ersichtlich sind dann $y_1 = y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 \cdot x}$ und $y_2 = y_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 \cdot x}$ Lösungen auf $\mathbb{R}$.
Die allgemeine Lösung der DGL $*$ ist also $y = y(x) = C_1 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 \cdot x} + C_2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2 \cdot x}$ (Lösungsschar).
Das Anpassen an gegebene Anfangsbedingungen liefert die Koeffizienten einer speziellen Lösung:
$y(0) = 1 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2 \overset{!}{=} y_0$
$y'(0) = \lambda_1 \cdot C_1 + \lambda_2 \cdot C_2 \overset{!}{=} v_0$
Dieses LGS ist eindeutig lösbar wegen $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$,
d.h. es existiert genau eine Funktion der Lösungsschar, die das AWP löst.

(b) $\lambda_1 = \lambda_2 \implies$ reell
Die Lösung der charakteristischen Gleichung ist $\lambda = -\frac{b}{2}$, d.h. $2\lambda + b = 0$.
$y_1 = y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda \cdot x}$ ist eine mögliche Lösung, wir suchen nun eine weitere:
Im Teil (a) mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist $y = y(x) = \frac{\mathrm{e}^{\lambda_1 \cdot x} - \mathrm{e}^{\lambda_2 \cdot x}}{\lambda_1 - \lambda_2}$ eine Lösung.

Ein Grenzwertübergang liefert $\lim\limits_{\lambda_2\to\lambda_1} \frac{e^{\lambda_1\cdot x}-e^{\lambda_2\cdot x}}{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{d}{d\lambda} e^{\lambda\cdot x}\Big|_{\lambda=\lambda_1} = x\cdot e^{\lambda_1\cdot x}$.
$y_2 = y_2(x) = x\cdot e^{\lambda\cdot x}$ ist tatsächlich eine Lösung, denn abgeleitet ergeben sich
$y_2'(x) = e^{\lambda\cdot x} + \lambda\cdot x\cdot e^{\lambda\cdot x}$ sowie $y_2''(x) = 2\lambda\cdot e^{\lambda\cdot x} + \lambda^2\cdot x\cdot e^{\lambda\cdot x}$.
Einsetzen liefert $y_2'' + b\cdot y_2' + c\cdot y_2 = x\cdot e^{\lambda\cdot x}\cdot\underbrace{(\lambda^2+b\cdot\lambda+c)}_{=0} + e^{\lambda\cdot x}\cdot\underbrace{(2\lambda+b)}_{=0} = 0$.
Die allgemeine Lösung lautet damit $y = y(x) = C_1\cdot e^{\lambda\cdot x} + C_2\cdot x\cdot e^{\lambda\cdot x}$.
Für ein AWP ergeben sich die Koeffizienten aus den Anfangsbedingungen mit folgendem LGS:
$y(0) = C_1 \stackrel{!}{=} y_0$
$y'(0) = \lambda_1\cdot C_1 + C_2 \stackrel{!}{=} v_0$
Die Determinante ist stets $1\neq 0$, also hat jedes AWP genau eine Lösung in der Schar.

(c) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ komplex
Die Lösungen sind konjugiert-komplex, d.h. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\cdot\beta \ \ (\beta\neq 0)$.
$\tilde{y} = \tilde{y}(x) = e^{\lambda_{1,2}\cdot x} = e^{\alpha\cdot x}\cdot e^{\pm \mathrm{i}\cdot\beta\cdot x} = e^{\alpha\cdot x}\cdot(\cos\beta\cdot x \pm \mathrm{i}\cdot\sin\beta\cdot x)$ ist dann eine spezielle Lösung auf $\mathbb{C}$.
Notwendig sind dann $\mathrm{Re}(\tilde{y}) = y_1(x) = e^{\alpha\cdot x}\cdot\cos\beta\cdot x$ und $\mathrm{Im}(\tilde{y}) = y_2(x) = e^{\alpha\cdot x}\cdot\sin\beta\cdot x$ Lösungen in $\mathbb{R}$.
Nach dem Superpositionsprinzip ist die allgemeine Lösung $y = y(x) = e^{\alpha\cdot x}\cdot(C_1\cdot\cos\beta\cdot x + C_2\cdot\sin\beta\cdot x)$.
Sind Anfangsbedingungen gegeben, so erhalten wir die Koeffizienten C_1, C_2 mit dem LGS:
$y(0) = C_1 \stackrel{!}{=} y_0$
$y'(0) = \alpha\cdot C_1 + \beta\cdot C_2 \stackrel{!}{=} v_0$
Wegen $\beta\neq 0$ existiert genau eine Lösung in der Schar.

Resultat
Sei $\mathrm{L}[y] = y'' + b\cdot y' + c\cdot y$.

(1) Jede homogene lineare DGL 2. Ordnung hat eine allgemeine Lösung (Lösungsschar), die mit dem Euler'schen Ansatz $y = y(x) = e^{\lambda\cdot x}$ gefunden werden kann.

(2) Jedes AWP $\mathrm{L}[y] = 0$ mit $y(0) = y_0$ und $y'(0) = v_0$ hat genau eine spezielle Lösung in der Lösungsschar, deren Koeffizienten mit einem LGS eindeutig bestimmt werden können.

(3) Die allgemeine Lösung ist je nach dem Vorzeichen der Diskriminante $\Delta := b^2 - 4c$

$$y = y(x) = \begin{cases} C_1\cdot e^{\lambda_1\cdot x} + C_2\cdot e^{\lambda_2\cdot x} \quad \text{mit } \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-b\pm\sqrt{\Delta}) & \Delta > 0 \\ e^{\lambda\cdot x}\cdot(C_1 + C_2\cdot x) \quad \text{mit } \lambda = -\frac{1}{2}b & \Delta = 0 \\ e^{\alpha\cdot x}\cdot(C_1\cdot\cos\beta\cdot x + C_2\cdot\sin\beta\cdot x) \quad \text{mit } \alpha = -\frac{1}{2}b,\ \beta = \frac{1}{2}\sqrt{-\Delta} & \Delta < 0 \end{cases}$$

Beweis
Wir zeigen, dass jedes AWP höchstens eine Lösung besitzt.
Dazu seien $y = y(x)$ sowie $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ Lösungen eines AWP $\mathrm{L}[y] = 0,\ y(0) = y_0,\ y'(0) = v_0$.
Dann ist $w = w(x) = y(x) - \tilde{y}(x)$ eine Lösung des AWP $\mathrm{L}[w] = 0,\ w(0) = 0,\ w'(0) = 0$,
d.h. $w'' + b\cdot w' + c\cdot w \underset{\text{Vieta}}{=} w'' - (\lambda_1+\lambda_2)\cdot w' + \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot w = (\underbrace{w' - \lambda_1\cdot w}_{=z'})' - \lambda_2\cdot(\underbrace{w' - \lambda_1\cdot w}_{=:z}) = 0$
Wir erhalten die lineare DGL $z' - \lambda_2\cdot z = 0$ mit $z(0) = 0$, demnach ist $z\equiv 0$ Lösung.
Dann haben wir die DGL $w' - \lambda_1\cdot w = 0$ mit $w(0) = 0$, analog ist hier $w\equiv 0$ Lösung.
Schließlich folgt also $y = \tilde{y}$. □

II. Inhomogene lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung $\mathrm{L}[y] = g$

Sei $y_{\text{hom.}}^{\text{allg.}} = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$ die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL.
Die Methode der Variation der Konstanten liefert dnn eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL.
Wir wählen demnach den Ansatz $y = y(x) = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x)$.
Völlig analog zu den linearen DGL 1. Ordnung ergibt sich die allgemeine inhomogene Lösung aus der Addition der allgemeinen homogenen und der partikulären inhomogenen Lösung: $y_{\text{inh.}}^{\text{allg.}} = y_{\text{hom.}}^{\text{allg.}} + y_{\text{inh.}}^{\text{part.}}$.

15.4 Spezielle Differentialgleichungen 2. Ordnung

Differentialgleichungen 2. Ordnung haben die explizite Gestalt $y'' = f(x, y, y')$.
In gewissen Spezialfällen lassen sie sich elementar lösen, indem sie auf DGL 1. Ordnung zurückgeführt werden:

(1) $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = f(x, y')$ mit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$
Wir substituieren $u(x) = y'(x)$, das liefert eine DGL 1. Ordnung $u' = f(x, u)$.

Beispiel $(1 + x^2) \cdot y'' + y'^2 + 1 = 0$
Substitution $u(x) = y'(x)$ gibt die DGL 1.Ordnung $(1 + x^2) \cdot u' + u^2 + 1 = 0$, d.h. $u' = -\frac{1+u^2}{1+x^2}$.
Die allgemeine Lösung ist $u = u(x) = \tan(C - \arctan x) = \frac{\tan C - x}{1 + x \cdot \tan C} = \frac{D - x}{1 + D \cdot x}$
Rücksubstitution liefert $y = y(x) = \int u(x)\, \mathrm{d}x = (1 + \frac{1}{D^2}) \cdot \ln|1 + D \cdot x| - \frac{x}{D}$.

(2) $y'' = f(y, y')$ mit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$
Hier wird $v(y) = y'(x(y))$ substituiert,
dann ist $y'' = v \cdot v'$ und wir erhalten eine DGL 1. Ordnung $v' = \frac{1}{v} \cdot f(y, v) = g(y, v)$.

Beispiel $y \cdot y'' = y'^2$
Die Substitution $v(y) = y'(x(y))$ liefert $y \cdot v \cdot v' = v^2$, die „reduzierte" DGL ist also $v' = \frac{v}{y}$.
Mit Trennung der Variablen bekommen wir die Lösung $v = v(y) = C \cdot y$.
Nun integrieren wir diese Lösung. Es ist $y' = C \cdot y$, also gilt $\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = C \cdot \int \mathrm{d}x$
und die gesuchte Lösung ist damit $y = y(x) = D \cdot \mathrm{e}^{C \cdot x}$.

(3) $\ddot{x} = f(x)$ mit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$
Energiemethode: Die DGL mit $2\dot{x}$ multiplizieren, d.h. $2\dot{x} \cdot \ddot{x} = 2f(x) \cdot \dot{x}$
und dann integrieren, also ergibt sich $\dot{x}^2 = 2F(x) + C$, dabei sei F eine Stammfunktion zu f.

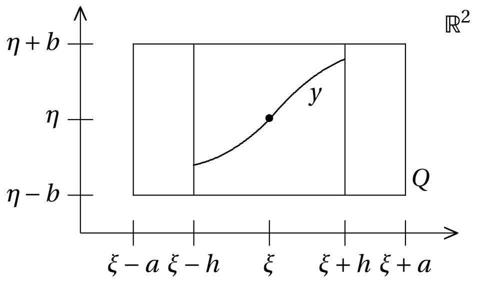
Beispiel $y'' = 2\mathrm{e}^y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$
Multiplikation mit $2y'$ gibt $2y' \cdot y'' = 4\mathrm{e}^y \cdot y'$, Integration liefert $y'^2 = 4\mathrm{e}^y + C$.
Mit den Anfangsbedingungen muss $C = 0$ sein. Dann ist $y' = \pm 2\mathrm{e}^{\frac{y}{2}}$, mit den AB also $y' = -2\mathrm{e}^{\frac{y}{2}}$.
Die Methode der Trennung der Variablen $\int \mathrm{e}^{\frac{y}{2}}\, \mathrm{d}y = -2 \int \mathrm{d}x$ wird nun angewendet,
diese liefert zusammen mit den AB die spezielle Lösung $y = y(x) = -2\ln(x + 1)$ $(x > -1)$.

15.5 Existenz- und Einzigkeitssätze für die DGL $y' = f(x,y)$

15.5.1 Der Existenz- und Einzigkeitssatz von Picard-Lindelöf

Gegeben sei ein AWP $y' = f(x,y)$ mit $y(\xi) = \eta$.
Welche Forderungen müssen wir an f stellen, damit dieses Problem eine Lösung besitzt?

Satz 15.5.1 (Existenz- und Einzigkeitssatz von Picard-Lindelöf) (E. Picard, 1856-1941 & E.L. Lindelöf, 1870-1956)
Seien $\xi, \eta \in \mathbb{R},\ a, b > 0,\ Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x - \xi| \leqslant a \wedge |y - \eta| \leqslant b\}$.
Die Funktion $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ sei auf Q stetig und genüge dort einer Lipschitzbedingung in y,
d.h. $\exists L > 0 : |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant L \cdot |y_1 - y_2|$ für alle $(x,y_1),(x,y_2) \in Q$.
Dann hat das AWP $y' = f(x,y)$ mit $y(\xi) = \eta$ im Intervall $[\xi - h, \xi + h]$ mit $h = \min\{a, \frac{b}{M}\},\ M = \max_Q |f| \neq 0$ genau eine Lösung.



$\exists!\ y : \underbrace{[\xi - h, \xi + h]}_{=:I} \longrightarrow \mathbb{R}$
mit $y'(x) = f(x, y(x))$ für alle $x \in I$
und $y(\xi) = \eta$

Bemerkung 15.5.2
(1) Falls f_y existiert und auf Q beschränkt ist,
so genügt f auf Q einer Lipschitzbedingung in der zweiten Variablen y.

Beweis
Seien $(x,y_1),(x,y_2) \in Q,\ y_1 < y_2$.
Dann ist ${}^{(x)}f(y) = f(x,y)$ auf $[y_1, y_2]$ stetig und auf (y_1, y_2) differenzierbar.
$\overset{\text{MWS}}{\underset{\text{DR}}{\Longrightarrow}}\ \exists\ \tilde{y} \in (y_1, y_2) : |f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |f_y(x,\tilde{y})| \cdot |y_1 - y_2|$
Aus der Beschränktheit von f_y auf Q folgt die Existenz von $L > 0$ mit $\max_Q |f_y| \leqslant L$. □

(2) Das AWP $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ mit $y(0) = 0$ hat die Lösungen $y \equiv 0$ und $y = x^3$, denn $y' = 3x^2 = 3\sqrt[3]{(x^3)^2}$.
Damit genügt $f(x,y) = 3\sqrt[3]{y^2}$ in keiner Umgebung von $(\xi,\eta) = (0,0)$ einer Lipschitzbedingung in y.

Satz 15.5.3
Seien $D \subset \mathbb{R}^2,\ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\xi, \eta \in \mathbb{R}$. Weiterhin seien $y : I \longrightarrow \mathbb{R},\ I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\xi \in I$. Dann gilt:
$y = y(x)$ ist Lösung des AWP $y' = f(x,y)$ mit $y(\xi) = \eta$

$$\Longleftrightarrow \quad y \in \mathscr{C}(I) \quad \wedge \quad y(x) = \eta + \int_\xi^x f(t, y(t))\,\mathrm{d}t \quad (x \in I)$$

Beweis
I. „$\Longrightarrow$“
Sei $y = y(x)$ Lösung des AWP, d.h. $y'(t) = f(t, y(t))$ $(t \in I)$ mit $y(\xi) = \eta$.
$\overset{\text{HS}}{\underset{\text{DIR}}{\Longrightarrow}}\ y(x) - \underbrace{y(\xi)}_{=\eta} = \int_\xi^x f(t, y(t))\,\mathrm{d}t \quad (x \in I)$.

y ist stetig auf I, denn f ist stetig und der Integraloperator $\int_\xi^x \mathrm{d}t$ ist stetig.

II. „$\Longleftarrow$“
Seien $y \in \mathscr{C}(I)$, $y(x) = \eta + \int\limits_{\xi}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t \quad (x \in I)$.
$\overset{\text{HS}}{\underset{\text{DIR}}{\Longrightarrow}} \; y'(x) = f(x, y(x))$ mit $y(\xi) = \eta$ □

Bemerkung 15.5.4

(1) Statt des AWP $y' = f(x,y)$ mit $y(\xi) = \eta$ kann die IGL $y(x) = \eta + \int\limits_{\xi}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t$ behandelt werden.

(2) Zum Beweis des Satzes 15.5.1 von Picard-Lindelöf betrachten wir $\mathscr{C}(I)$ mit $I = [\xi - h, \xi + h]$ und den Operator $T : \tilde{M} \longrightarrow \mathscr{C}(I) : \varphi \longmapsto (T\varphi)(x) := \eta + \int\limits_{\xi}^{x} f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t \quad (x \in I)$
mit $\tilde{M} = \{\varphi \in \mathscr{C}(I) : \max\limits_{I} |\varphi - \eta| \leq b\}$.
Das Lösen der IGL ist äquivalent zur Bestimmung einer Funktion $\varphi \in \tilde{M}$ mit $(Ty)(x) = y(x) \quad (x \in I)$, d.h. das IGL-Problem ist ein Fixpunkt-Problem im Raum $\mathscr{C}(I)$.

(3) *Wiederholung (Banach'scher Fixpunktsatz)*
Sei (E,d) ein vollständiger, metrischer Raum, $\tilde{M} \subset E$ sei abgeschlossen.
Außerdem sei $T : \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}$ eine Kontraktion, d.h. $\exists\, L < 1 \; \forall \varphi, \psi \in \tilde{M} : d(T\varphi, T\psi) \leq L \cdot d(\varphi, \psi)$.
Dann hat T in $\tilde{M}$ genau einen Fixpunkt.

(4) Es wäre naheliegend mit der durch die Maximums-Norm / Tschebytscheff-Norm $||\varphi||_\infty := \max\limits_{I} |\varphi|$ auf $\mathscr{C}(I)$ erzeugten Metrik zu arbeiten.
Wir wählen jedoch allgemeiner die Morgenstern-Normen $||\varphi||_{\infty,\alpha} := \max\limits_{|t-\xi| \leq h} (\mathrm{e}^{-\alpha \cdot |t-\xi|} \cdot |\varphi(t)|) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$.
Ersichtlich sind die Morgenstern-Normen $|| \cdot ||_{\infty,\alpha}$ äquivalent zur Maximums-Norm $|| \cdot ||_\infty$, sie erzeugen also denselben Konvergenzbegriff.
Insbesondere ist demnach $\big(\mathscr{C}(I), || \cdot ||_{\infty,\alpha}\big)$ vollständig, d.h. ein Banach-Raum.
Die von $|| \cdot ||_{\infty,\alpha}$ erzeugte Konvergenz ist die gleichmäßige Konvergenz auf $\mathscr{C}(I)$.

Beweis von Satz 15.5.1 von Picard-Lindelöf

Sei $I = [\xi - h, \xi + h]$ ein Intervall und auf der Funktionenmenge $\tilde{M} = \{\varphi \in \mathscr{C}(I) : ||\varphi - \eta||_\infty \leq b\}$ sei der Operator $T : \tilde{M} \longrightarrow \mathscr{C}(I)$ definiert durch $(T\varphi)(x) := \eta + \int\limits_{\xi}^{x} f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t \quad (x \in I,\ \varphi \in \tilde{M})$.
Nach Bemerkung 15.5.3 genügt es, folgende Punkte zu zeigen:

(1) $\tilde{M}$ ist abgeschlossen bezüglich $|| \cdot ||_\infty$,

(2) T ist eine kontrahierende Selbstabbildung auf $\tilde{M}$, d.h.

  (a) $T(\tilde{M}) \subset \tilde{M}$,

  (b) $\exists\, \alpha \in \mathbb{R} : T$ ist Kontraktion bezüglich $|| \cdot ||_{\infty,\alpha}$.

(1) offensichtlich

(2) (a) Sei $\varphi \in \tilde{M}$, betrachte $T\varphi$:
$$|(T\varphi)(x) - \eta| = |\int\limits_{\xi}^{x} f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t| \leq |\int\limits_{\xi}^{x} \underbrace{|f(t, \varphi(t))|}_{\leq M}\,\mathrm{d}t| \leq M \cdot |x - \xi| \underset{x \in I}{\leq} M \cdot h \leq b$$
Es gilt also $||T\varphi - \eta||_\infty \leq b$ und demnach ist $T\varphi \in \tilde{M}$.

(b) Seien $\varphi, \psi \in \tilde{M}$, dann gilt für $x \in I$:

$$\begin{aligned}
\left|e^{-\alpha\cdot|x-\xi|}\cdot\left[(T\varphi)(x)-(T\psi)(x)\right]\right| &\leqslant e^{-\alpha\cdot|x-\xi|}\cdot\Big|\int_\xi^x \underbrace{|f(t,\varphi(t))-f(t,\psi(t))|}_{\leqslant L\cdot|\varphi(t)-\psi(t)|\cdot e^{-\alpha\cdot|t-\xi|}\cdot e^{\alpha\cdot|t-\xi|}}\,\mathrm{d}t\Big| \\
&\leqslant e^{-\alpha\cdot|x-\xi|}\cdot L\cdot||\varphi-\psi||_{\infty,\alpha}\cdot\underbrace{\Big|\int_\xi^x e^{\alpha\cdot|t-\xi|}\,\mathrm{d}t\Big|}_{=\frac{1}{|\alpha|}\cdot(e^{\alpha\cdot|x-\xi|}-1)} \\
&\leqslant \frac{L}{|\alpha|}\cdot e^{-\alpha\cdot|x-\xi|}\cdot(e^{\alpha\cdot|x-\xi|}-1)\cdot||\varphi-\psi||_{\infty,\alpha} \\
&\leqslant \frac{L}{|\alpha|}\cdot\underbrace{(1-e^{-\alpha\cdot h})}_{<1}\cdot||\varphi-\psi||_{\infty,\alpha} \\
&< \frac{L}{|\alpha|}\cdot||\varphi-\psi||_{\infty,\alpha}
\end{aligned}$$

Für $\alpha \geqslant L$ gilt dann folglich $||T\varphi - T\psi||_{\infty,\alpha} < ||\varphi-\psi||_{\infty,\alpha}$, und damit existiert ein Fixpunkt, der sich durch den Banach'schen Fixpunktsatz 11.23 approximieren lässt. □

Folgerung 15.5.5
Unter den Vorraussetzungen des Satzes 15.5.1 konvergiert jede Funktionenfolge (φ_n) mit

(1) $\varphi_0 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\varphi_0(\xi) = \eta$ und $\max\limits_I |\varphi - \eta| \leqslant b$,

(2) $\varphi_{n+1} := \eta + \int_\xi^x f(t, \varphi_n(t))\,\mathrm{d}t$ für alle $x \in I$

gleichmäßig gegen die einzige Lösung des AWP, dies folgt aus dem konstruktiven Beweis des BFS 11.23.

Beispiel $y' = x\cdot y,\ y(0) = 1$
Die äquivalente IGL ist $y(x) = \eta + \int_\xi^x f(t, y(t))\,\mathrm{d}t = 1 + \int_0^x t\cdot y(t)\,\mathrm{d}t$,
daraus erhalten wir die Iterationsvorschrift $y_0 = \eta = 1,\ y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x t\cdot y_n(t)\,\mathrm{d}t$.

$y_1(x) = 1 + \int_0^x t\,\mathrm{d}t = 1 + \frac{x^2}{2}$

$y_2(x) = 1 + \int_0^x t\cdot(1+\frac{t^2}{2})\,\mathrm{d}t = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2$

$\vdots$

$y_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)^k$

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \quad\Longrightarrow\quad y_n(x) \rightrightarrows y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$

Als Resultat erhalten wir, dass die Funktionenfolge (y_n) gleichmäßig gegen $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ konvergiert (auf jedem endlichen Intervall). Schließlich löst dann $y = y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ das AWP.

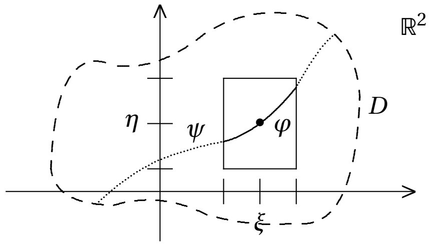
15.5.2 Die Fortsetzung von Lösungen - ein globaler Existenz- und Einzigkeitssatz

Bedeutsamer als ein lokaler Existenzsatz ist ein globaler Existenzsatz.
Im Folgenden sei mit $D \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ein AWP $y' = f(x,y),\ y(\xi) = \eta$ gegeben. ∘

Beispiel $y' = y^2,\ y(1) = 1$
Dieses AWP mit $f(x,y) = y^2,\ f_y(x,y) = 2y$ erfüllt die Vorraussetzung von Satz 15.5.1, und hat somit in einer Umgebung von ξ eine eindeutige Lösung.

Als Lösung ergibt sich mittels Variablentrennung $y = y(x) = -\frac{1}{x-2}$ mit natürlicher Grenze an $x = 2$.
Diese Funktion ist auf $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ definiert und löst stets das AWP.

Es treten nun zwei Fragen / Probleme auf:
Sei $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine lokale Lösung des AWP $\circ$.



(1) *Ist die lokale Lösung φ bis zum Rand ∂D fortsetzbar d.h. existiert eine globale Lösung ψ mit $\psi|I = \varphi$?*

(2) *Wie viele Fortsetzungen gibt es?*

Definition 15.5.6 (lokale Lipschitzbedingung)
Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.
f genügt in D einer lokalen Lipschitzbedingung bezüglich y
$:\Longleftrightarrow$ $\forall (x_0, y_0) \in D\, \exists$ Umgebung U von (x_0, y_0) $\exists\, L \geqslant 0$:
$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L \cdot |y_1 - y_2|$ für alle Paare $(x, y_1), (x, y_2) \in U$.

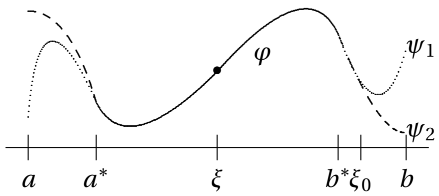
Definition 15.5.7 (maximale Lösung)
Eine Lösung φ des AWP $\circ$ heißt maximale Lösung
$:\Longleftrightarrow$ $\mathrm{D}(\varphi)$ ist ein offenes Intervall,
und für jedes offene Intervall (a, b) mit $\mathrm{D}(\varphi) \subsetneq (a, b)$
keine Fortsetzung von φ auf (a, b) eine Lösung des AWP $\circ$ ist.

Bemerkung 15.5.8
Sei $f \in \mathscr{C}(D)$ und genüge in D einer lokalen Lipschitzbedingung.
Weiter sei φ Lösung des AWP $\circ$ auf dem Intervall (a^*, b^*) und $(a^*, b^*) \subsetneq (a, b)$. Dann gelten:

(1) Es gibt höchstens eine Fortsetzung ψ von φ auf (a, b), die das AWP $\circ$ löst.

(2) Es gibt genau eine maximale Lösung des AWP $\circ$.

Beweis



(1) Seien ψ_1, ψ_2 zwei verschiedene Lösungen des AWP auf (a, b) und Fortsetzungen von φ.
Dann $\exists\, x_0 \in (a, b) : \psi_1(x_0) \neq \psi_2(x_0)$.
O.E.d.A. sei $b^* \leqslant x_0$.
Setze $\xi_0 := \inf\{x \geqslant b^* : \psi_1(x) \neq \psi_2(x)\}$.
Wegen $\psi_1(x) = \psi_2(x)$ für $x \in (a^*, \xi_0)$ und der Stetigkeit von ψ_1, ψ_2 folgt $\psi_1(\xi_0) = \psi_2(\xi_0) =: \eta_0$.
Das AWP $y' = f(x, y),\ y(\xi_0) = \eta_0$ besitzt nach Satz 15.5.1 von Picard-Lindelöf in einer gewissen Umgebung U von ξ_0 genau eine Lösung. Widerspruch!

(2) Wir zeigen die Existenz einer maximalen Lösung, die Einzigkeit folgt aus (1).
Sei M die Menge aller Lösungen φ und jedes φ sei Lösung auf einem Intervall $(a(\varphi), b(\varphi))$.
Setze $A := \inf\limits_{\varphi \in M} a(\varphi)$ sowie $B := \sup\limits_{\varphi \in M} b(\varphi)$.
Weiter sei $\psi : (A, B) \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\psi(x) = \varphi(x)$, falls $\varphi \in M$ und $x \in (a(\varphi), b(\varphi))$.
Nun ist ψ nach (1) eindeutig definiert und nach Konstruktion die maximale Lösung. $\square$

Satz 15.5.9
Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt. Sei $f \in \mathscr{C}(D)$ beschränkt, genüge einer lokalen Lipschitzbedingung in y.
Dann hat das AWP $\circ$ genau eine Lösung ϕ, die nicht fortsetzbar ist.
D(ϕ) ist ein offenes Intervall (a,b) und es existieren die Grenzwerte $\lim\limits_{x\searrow a}\phi(x) =: \alpha$ und $\lim\limits_{x\nearrow b}\phi(x) =: \beta$
Es sind $(a,\alpha),(b,\beta) \in \partial D$, d.h. jede Lösung kann bis zum Rand von D fortgesetzt werden.

Beweis
Nach Bemerkung 15.5.8 existiert genau eine maximale Lösung ϕ. Sei D(ϕ) $= (a,b)$.
Zu zeigen sind o.E.d.A. nur die Existenz des Grenzwertes $\lim\limits_{x\nearrow b}\phi(x) =: \beta$ und $(b,\beta) \in \partial D$.

Es gilt $\phi(x) = \eta + \underbrace{\int\limits_{\xi}^{x} f(t,\phi(t))\,\mathrm{d}t}_{=:F(x)}$ für $x \in (a,b)$.

Das Integral $F(b) = \int\limits_{\xi}^{b} f(t,\phi(t))\,\mathrm{d}t$ existiert, da der Integrand beschränkt und stetig bis auf $t = b$ ist.
Nach dem HS-DIR gilt $\lim\limits_{x\nearrow b} F(x) = F(b)$, also existiert $\beta = \lim\limits_{x\nearrow b}\phi(x) = \eta + F(b)$.
Angenommen es wäre $(b,\beta) \in D$,
dann besäße das AWP $y' = f(x,y),\ y(b) = \beta$ genau eine Lösung φ auf $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ mit passendem ε.

$$\psi(x) := \begin{cases} \phi(x) & x \in (a,b) \\ \varphi(x) & x \in (b, b+\varepsilon) \end{cases}$$

ψ wäre Lösung des AWP $\circ$, also wäre ϕ nicht maximal. Widerspruch! □

15.6 Existenzsätze für Systeme von DGL 1. Ordnung

15.6.1 DGL höherer Ordnung und DGL-Systeme 1. Ordnung

Definition (DGL-System 1. Ordnung und Lösung)
(1) Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
Dann ist $y' = f(x,y)$ ein System von n DGL 1. Ordnung.

(2) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar und $y'(x) = f(x, y(x))$ für alle $x \in I$.
Dann heißt y eine Lösung von $y' = f(x,y)$.

f und y sind n-dimensionale Vektorfunktionen, daher enthält das System $y' = f(x,y)$ genau n DGL:

$$\left| \begin{array}{l} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{array} \right|$$

Bemerkung 15.6.1
Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
Wir betrachten einerseits die DGL n-ter Ordnung $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$, $*$
andererseits das folgende DGL-System 1. Ordnung für $(y_1, \ldots, y_n)$:

$$\left|\begin{array}{l} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, \ldots, y_n) \end{array}\right| \qquad **$$

(1) Sei $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der DGL $*$.
Dann ist $\psi = (\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots, \varphi^{(n-1)})$ eine Lösung des DGL-System $**$.

(2) Falls $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ eine Lösung des DGL-Systems $**$ ist,
so ist ψ_1 eine Lösung der DGL $*$.

Beweis

(1) Sei $y = y(x)$ eine Lösung der DGL $*$, d.h. $y^{(n)}(x) = f(x, \underbrace{y(x)}_{=:y_1(x)}, \underbrace{y'(x)}_{=:y_2(x)}, \ldots, \underbrace{y^{(n-1)}(x)}_{=:y_n(x)}) \quad (x \in I)$.
Dann gilt $y_1' = y_2,\ y_2' = y_3,\ \ldots,\ y_{n-1}' = y_n,\ y_n' = f(x, y_1, \ldots, y_n)$.

(2) Sei umgekehrt $y = (y_1, \ldots, y_n)$ eine Lösung des DGL-Systems $**$, es gilt also
$y_1' = y_2,\ y_1'' = y_2' = y_3,\ \ldots,\ y_1^{(n-1)} = y_{n-1}' = y_n,\ y_1^{(n)} = y_n' = f(x, y_1, \ldots, y_n) = f(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)})$. □

15.6.2 Existenzsätze für DGL-Systeme 1. Ordnung / DGL höherer Ordnung

Definition 15.6.2 (Lipschitzbedingung)
Seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $||\cdot||$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.

(1) Die Vektorfunktion f genügt in D einer Lipschitzbedingung bezüglich y
$:\Longleftrightarrow \quad \exists L > 0 : ||f(x, y) - f(x, \bar{y})|| \leq L \cdot ||y - \bar{y}||$ für $(x, y), (x, \bar{y}) \in D$.

(2) f genügt in D einer lokalen Lipschitzbedingung bezüglich y
$:\Longleftrightarrow \quad \forall (x_0, y_0) \in D\ \exists$ Umgebung U von $(x_0, y_0)\ \exists L > 0$:
$||f(x, y) - f(x, \bar{y})|| \leq L \cdot ||y - \bar{y}||$ für $(x, y), (x, \bar{y}) \in D \cap U$,
wenn also für jeden Punkt von D eine Umgebung U existiert,
sodass f eingeschränkt auf diese Umgebung $f|D \cap U$ eine Lipschitzbedingung erfüllt.

Bemerkung 15.6.3

(1) Seien $D = I \times V$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, konvex.
$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f = f(x, y)$ für $x \in I,\ y \in V$ sei stetig differenzierbar nach y,
$\frac{\partial f}{\partial y}$ sei auf D beschränkt, d.h. sämtliche partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(i, j \in \{1, \ldots, n\})$ seien beschränkt.
Dann erfüllt f eine Lipschitzbedingung bezüglich y.

(2) Falls $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar nach y ist,
so erfüllt f eine lokale Lipschitzbedingung bezüglich y.

Beweis
folgt unmittelbar aus Satz 12.21, Folgerung 12.22, vergleiche dazu Bemerkung 15.5.2. □

Satz 15.6.4 (Picard-Lindelöf für DGL-Systeme)
Seien $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, $a, b > 0$, $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |x - \xi| \leqslant a \wedge ||y - \eta|| \leqslant b\}$.
Die Funktion $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei auf Q stetig und genüge dort einer Lipschitzbedingung bezüglich y.
Dann existiert ein $h > 0$,
sodass das AWP $y' = f(x, y)$ mit $y(\xi) = \eta$ im Intervall $[\xi - h, \xi + h]$ genau eine Lösung hat.

Beweis
analog Satz 15.5.1, Integration koordinatenweise □

Bemerkung
Fortsetzungssätze sind analog zu formulieren und dann anwendbar.

Folgerung 15.6.5 (AWP für DGL höherer Ordnung)
Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}^n$ mit $(\xi, \eta) \in D$.
Weiter erfülle f in einer Umgebung von (ξ, η) eine Lipschitzbedingung bezüglich y.
Dann existiert ein $h > 0$,
sodass das AWP $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ mit $y(\xi) = \eta_1$, $y'(\xi) = \eta_2, \ldots, y^{(n-1)}(\xi) = \eta_n$
in einem Intervall $[\xi - h, \xi + h]$ genau eine Lösung hat.

Beweis
Das AWP ist äquivalent zu dem DGL-System

$$\left|\begin{array}{ll} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) = y_2 & y_1(\xi) = \eta_1 \\ y_2' = f_2(x, y_1, \ldots, y_n) = y_3 & y_2(\xi) = \eta_2 \\ \vdots & \vdots \\ y_{n-1}' = f_{n-1}(x, y_1, \ldots, y_n) = y_n & y_{n-1}(\xi) = \eta_{n-1} \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) = f(x, y_1, \ldots, y_n) & y_n(\xi) = \eta_n \end{array}\right|$$

Setze $\tilde{f} := (f_1, \ldots, f_n)$,
es genügt nun zu zeigen, dass $\tilde{f}$ einer Lipschitzbedingung genügt.
Es gilt $|f_k(x, y) - f_k(x, \bar{y})| = |y_{k+1} - \bar{y}_{k+1}|$ für $k \in \{1, \ldots, n-1\}$
sowie $|f_n(x, y - f_n(x, \bar{y})| \leqslant L \cdot ||y - \bar{y}||$
O.E.d.A. sei die gewählte Norm die Supremumsnorm $|| \cdot ||_\infty$, d.h. $||y|| = \sup\limits_{i \in \{1, \ldots, n\}} |y_i| \quad (y \in \mathbb{R}^n)$,
also folgt $|f_k(x, y) - f_k(x, \bar{y})| \leqslant \tilde{L} \cdot ||y - \bar{y}||$ mit $\tilde{L} = \max\{1, L\}$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$.
Schließlich ist also $||\tilde{f}(x, y) - \tilde{f}(x, \bar{y})| \leqslant \tilde{L} \cdot ||y - \bar{y}||$ mit $\tilde{L} = \max\{1, L\} > 0$. □

15.6.3 Der Satz von Picard-Lindelöf (Streifenversion)

Satz 15.6.6
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig und genüge einer Lipschitzbedingung in y.
Mit $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}^n$ hat das AWP $y' = f(x, y)$, $y(\xi) = \eta$ genau eine Lösung auf I.

Beweis

(a) Das Intervall I sei kompakt, d.h. beschränkt und abgeschlossen, I sei also ein Intervall $[\xi - a, \xi + b]$.
Der Beweis erfolgt nun analog zum Satz 5.1 von Picard-Lindelöf.

Die Vektorfunktion y ist Lösung des AWP auf I $\iff$ $y \in \mathscr{C}(I)$ und $y(x) = \eta + \int_\xi^x f(t, y(t))\,\mathrm{d}t \quad (x \in I)$.

Betrachte den Operator $T : \mathscr{C}(I) \longrightarrow \mathscr{C}(I)$ definiert durch $(T\varphi)(x) := \eta + \int_\xi^x f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t \quad (x \in I)$.

Der Vektorraum $\mathscr{C}(I)$ der auf I stetigen Vektorfunktionen $\varphi = \left(\varphi_1, \dots, \varphi_n\right)^T$
mit der Norm $||\varphi||_\alpha = \max_{x \in I} \left[\mathrm{e}^{-\alpha \cdot x} \cdot \max_{i \in \{1,\dots,n\}} |\varphi_i(x)|\right]$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ ist ein Banach-Raum.
Der Operator T ist für $\alpha \geqslant L$ (Lipschitzkonstante) eine Kontraktion,
besitzt also genau einen Fixpunkt und dieser ist die einzige Lösung des AWP.

(b) Falls I nicht kompakt ist, z.B. $I = (-\infty, \infty)$, $I = (\xi - a, \xi + b]$, $I = (-\infty, \xi + b), \dots$
Ist bespielsweise $I = [\xi - a, \infty)$, dann folgt mit (a) die Existenz und Einzigkeit auf jedem Intervall $[\xi - a, \xi + n]$ $(n \in \mathbb{N}_+)$ und damit durch Fortsetzung die Behauptung für $I = [\xi - a, \infty)$. □

15.7 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

15.7.1 Existenz- und Strukturaussagen

Definition 15.7.1
Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.
Dann heißt die DGL $\mathrm{L}[y] := y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = b$ lineare DGL n-ter Ordnung.
Für $b \equiv 0$ heißt sie homogen, andernfalls inhomogen.

Satz 15.7.2 (Existenz- und Einzigkeitssatz)
Vorraussetzungen wie oben, weiter seien $\xi \in I$, $\eta = (\overset{0}{\eta}, \dots, \overset{n-1}{\eta}) \in \mathbb{R}^n$.
Dann existiert genau eine Funktion $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$,
die das AWP $\mathrm{L}[y] = b$ mit $y(\xi) = \overset{0}{\eta}$, $y'(\xi) = \overset{1}{\eta}, \dots,$ $y^{(n-1)}(\xi) = \overset{n-1}{\eta}$ löst.

Beweis
Das betrachtete AWP ist äquivalent zum AWP für das folgende DGL-System 1. Ordnung:

$$\left|\begin{array}{lll} y_1' = y_2 & = f_1(x, y) & y_1(\xi) = \overset{0}{\eta} \\ y_2' = y_3 & = f_2(x, y) & y_2(\xi) = \overset{1}{\eta} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n-1}' = y_n & = f_{n-1}(x, y) & y_{n-1}(\xi) = \overset{n-2}{\eta} \\ y_n' = b - \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k-1} \cdot y_k & = f_n(x, y) & y_n(\xi) = \overset{n-1}{\eta} \end{array}\right|$$

Setze $f = \left(f_1, \dots, f_n\right)^T : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, es gilt $f \in \mathscr{C}(I \times \mathbb{R}^n)$.

(a) Sei I kompakt.
Es gelten $|f_k(x, y) - f_k(x, \bar{y})| \leqslant 1 \cdot |y_{k+1} - \bar{y}_{k+1}|$ für $k \in \{1, \dots, n-1\}$
und $|f_n(x, y) - f_n(x, \bar{y})| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{k-1}(x)| \cdot \underbrace{|y_k - \bar{y}_k|}_{\leqslant ||y - \bar{y}||_\infty}$.
Damit genügt f (wegen a_k stetig auf I) einer Lipschitzbedingung (z.B. bezüglich der Norm $||\cdot||_\infty$).
Nach dem Satz 6.6 hat das AWP also genau eine Lösung auf I.

(b) Falls I nicht kompakt ist, so kommen wieder die Fortsetzungssätze zur Anwendung. □

Bemerkung 15.7.3

(1) Wir setzen $\mathrm{L}[y] := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot y^{(k)}$ mit $a_n = 1$.

(2) Falls $y = y(x)$ Lösung von $\mathrm{L}[y] = b$ ist, so gilt $y \in \mathscr{C}^n(I)$.
$\mathscr{C}^n(I)$ ist ein unendlichdimensionaler Vektorraum.

(3) Die Menge der Lösungen der homogenen DGL $\mathrm{L}[y] = 0$ bildet einen Untervektorraum von $\mathscr{C}^n(I)$.

(4) Falls $z_1 = z_1(x)$ und $z_2 = z_2(x)$ Lösungen der inhomogenen DGL $\mathrm{L}[y] = b$ sind,
so ist $z_1 - z_2$ Lösung der zugehörigen homogenen DGL $\mathrm{L}[y] = 0$.
Es gilt also $y_{\text{inh.}}^{\text{allg.}} = y_{\text{hom.}}^{\text{allg.}} + y_{\text{inh.}}^{\text{part.}}$.

Beweis …

15.7.2 Die Wronski'sche Determinante / Lineare Unabhängigkeit in $\mathscr{C}^{n-1}(I)$

Ersichtlich ist $\mathscr{C}^n(I) \subsetneq \mathscr{C}^{n-1}(I)$.

Definition 15.7.4
Seien $y_1 = y_1(x), \dots, y_k = y_k(x) \in \mathscr{C}^{n-1}(I)$, $k \leqslant n$.

$$\mathrm{W}(y_1, \dots, y_k) := \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_k \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_k' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(k-1)} & y_2^{(k-1)} & \cdots & y_k^{(k-1)} \end{pmatrix}$$ heißt Wronski-Determinante von $(y_1, \dots, y_k)$.

Bemerkung 15.7.5

(1) $\mathrm{W} = \mathrm{W}(y_1, \dots, y_k) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.

(2) Falls $y_1, \dots, y_k \in \mathscr{C}^n(I)$, so ist W differenzierbar.

Satz 15.7.6
Falls $y_1, \dots, y_k \in \mathscr{C}^{(n-1)}(I)$, $k \leqslant n$ linear abhängig sind, so gilt $\tilde{\mathrm{W}}(x) := \mathrm{W}(y_1(x), \dots, y_k(x)) = 0$ für alle $x \in I$.

Beweis
Da $y_1, \dots, y_k$ linear abhängig sind, existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ (nicht alle =0), sodass für alle $x \in I$ gilt:

$$y_1(x) \cdot \alpha_1 + y_2(x) \cdot \alpha_2 + \cdots + y_k(x) \cdot \alpha_k = 0 \quad \Big| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$
$$y_1'(x) \cdot \alpha_1 + y_2'(x) \cdot \alpha_2 + \cdots + y_k'(x) \cdot \alpha_k = 0 \quad \Big| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$
$$\vdots$$
$$y_1^{(k-1)}(x) \cdot \alpha_1 + y_2^{(k-1)}(x) \cdot \alpha_2 + \cdots + y_k^{(k-1)}(x) \cdot \alpha_k = 0$$

Sei $x \in I$ fest, damit ist die Wronski-Determinante $\tilde{\mathrm{W}}(x)$ die Koeffizientendeterminante eines homogenen LGS mit k Gleichungen und k Variablen, die eine nicht-triviale Lösung besitzt, nämlich $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$.
Also ist $\tilde{\mathrm{W}}(x) = 0$ □

Folgerung
Falls $\mathrm{W}(y_1, \dots, y_k)$ nicht identisch verschwindet, so sind $y_1, \dots, y_k$ linear unabhängig.
Im Übrigen gilt die Umkehrung des Satzes nicht.