



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN

Funktionalanalysis

Prof. Dr. W. Timmermann

Francesco Kriegel

TU Dresden
Fakultät Mathematik
Institut Analysis

SS 2008 & WS 2008/2009

15. April 2009

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1 Grundlagen aus der Topologie	3
1.1 Metrische Räume	3
1.2 Topologische Räume	14
1.3 Kompaktheit	27
1.4 Filter und der Satz von TYCHONOFF.....	38
Kapitel 2 Normierte Räume und lineare Operatoren	43
2.1 Normierte Räume und Banachräume	43
2.2 Stetige und kompakte Operatoren.....	53
Kapitel 3 Separabilität und Vervollständigung	63
3.1 Separabilität und Abzählbarkeitsaxiome	63
3.2 Vervollständigung	66
Kapitel 4 Der Satz von BAIRE und Anwendungen	67
4.1 Der Satz von BAIRE	67
4.2 Erste Anwendungen des BAIREschen Kategoriensatz	72
4.3 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit.....	73
Kapitel 5 Der Satz von der offenen Abbildung und der Satz vom abgeschlossenen Graphen	77
5.1 Der Satz von der offenen Abbildung.....	77
5.2 Der Satz vom abgeschlossenen Graphen	83
Kapitel 6 Der Satz von HAHN-BANACH und Anwendungen	89
6.1 Der Satz von HAHN-BANACH	89
6.2 Trennungssätze	95
6.3 Anfänge der Dualitätstheorie normierter Räume	99
Kapitel 7 Lokalkonvexe Räume und Dualitätstheorem	105
7.1 Topologische Vektorräume und lokalkonvexe Räume	105

7.2	Duales Paar, schwache Topologien und der Satz von BOURBAKI- ALAOGLU.	109
7.3	Extremalpunkte und der Satz von KREIN-MILMAN.	113
Kapitel 8 Hilberträume und Elemente der Operatortheorie		115
8.1	Hilberträume.	115
8.2	Elemente der Operatortheorie	122
Kapitel 9 Einige Klassen beschränkter linearer Operatoren		127
Kapitel 10 Kompakte Operatoren		131
10.1	Charakterisierung kompakter Operatoren	131
10.2	Spektraleigenschaften kompakter Operatoren.	132
Kapitel 11 Banachalgebren und C^*-Algebren		139
11.1	Definitionen und erste Eigenschaften	139
11.2	Das Spektrum	147
11.3	Multiplikative lineare Funktionale und kommutative Bana- chalgebren	154
11.4	C^* -Algebren und einfachste Eigenschaften	159
11.5	Kommutative C^* -Algebren	163
11.6	Der stetige Funktionenkalkül in C^* -Algebren	165
Kapitel 12 Das Spektraltheorem		171
12.1	Topologien in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$	171
12.2	Spektraltheorem und Diagonalisierung	172
12.3	Darstellungen kommutativer C^* -Algebren und Spektralma- ße.	179
Kapitel A Anhang		189
A.1	Lemma von Zorn	189

1 Grundlagen aus der Topologie

1.1 Metrische Räume

Definition 1.1 (Metrik)

Sei $M \neq \emptyset$. Eine Abbildung $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Metrik* in M , wenn für alle $x, y, z \in M$

- (i) $d(x, y) \geq 0$ (Positivität)
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)
- (iv) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (Definitheit)

gelten. (M, d) heißt *metrischer Raum*. Wenn in (iv) nur $\Leftarrow$ gilt, dann heißt d *Halbmetrik*.

Beispiel 1.2 (i) Für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty)$ sind die Abbildungen

$$d_p: (x, y) \mapsto \left(\sum_{i \in n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$d_\infty: (x, y) \mapsto \bigvee_{i \in n} |x_i - y_i|$$

Metriken in $\mathbb{K}^n$. d_p heißt auch *Minkowski-Metrik* und speziell heißt d_1 *Manhattan-Metrik*, d_2 *euklidische Metrik* und d_∞ *Maximum-Metrik*. Für $i \in n$ sind die Abbildungen

$$d^{(i)}: (x, y) \mapsto |x_i - y_i|$$

Halbmetriken und es gilt $d_p = \left(\sum_{i \in n} \left(d^{(i)} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$ sowie $d_\infty = \bigvee_{i \in n} d^{(i)}$.

(ii) Für $p \in [1, \infty)$ ist der Folgenraum

$$\ell_p := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p < \infty\}$$

ℓ_p mit

$$d_p: (x, y) \mapsto \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ein metrischer Raum, und auch

$$\ell_\infty := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \bigvee_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$$

mit

$$d_\infty: (x, y) \mapsto \bigvee_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

Das wird in Kapitel 2 bewiesen.

(iii) Sei $\omega := \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen, dann ist

$$d: (x, y) \mapsto \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}$$

eine Metrik auf ω .

(iv) Sei M eine Menge, dann ist die *diskrete Metrik* definiert als

$$d: (x, y) \mapsto 1 - \delta_{xy}.$$

□

Definition 1.3 (Kugel, offen, abgeschlossen, Umgebung)

Sei (M, d) ein metrischer Raum.

(i) Für $x \in M$ und $\varepsilon > 0$ heißt

$$U_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

offene ε -Kugel um x und $B_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$ heißt *abgeschlossene ε -Kugel* um x und $S_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid d(x, y) = \varepsilon\}$ *ε -Sphäre* um x .

(ii) Eine Teilmenge $B \subseteq M$ heißt

- *offen* in (M, d) , falls $\forall x \in B \exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(x) \subseteq B$,
- *abgeschlossen* in (M, d) , falls $M \setminus B$ offen,
- *Umgebung* von $x \in M$, falls $\exists O$ offen: $x \in O \subseteq B$.
Die Menge aller Umgebungen von x wird mit $\mathcal{U}(x)$ bezeichnet.

Satz 1.4 Sei (M, d) ein metrischer Raum und $\tau_d := \{O \subseteq M \mid O \text{ offen}\}$ die Menge aller offenen Teilmengen, dann gilt:

$$(i) \mathfrak{X} \subseteq_{fin} \tau \implies \bigcap \mathfrak{X} \in \tau$$

$$(ii) \mathfrak{X} \subseteq \tau \implies \bigcup \mathfrak{X} \in \tau$$

Beweis: (i) Sei $\mathfrak{X} \subseteq_{fin} \tau$. Falls $\mathfrak{X} = \emptyset$, dann ist $\bigcap \mathfrak{X} = M$ trivialerweise offen, also ein Element von τ . Für $\bigcap \mathfrak{X} = \emptyset$ gilt $\emptyset \in \tau$. Sei andernfalls $x \in \bigcap \mathfrak{X}$, dann $\forall X \in \mathfrak{X} \exists \varepsilon_X > 0: U_{\varepsilon_X}(x) \subseteq X$. Wir wählen $\varepsilon := \bigwedge_{X \in \mathfrak{X}} \varepsilon_X > 0$, dann gilt $U_\varepsilon(x) \in \bigcap \mathfrak{X}$, also ist $\bigcap \mathfrak{X}$ offen.

(ii) Sei $\mathfrak{X} \subseteq \tau$. Für $\bigcup \mathfrak{X} = \emptyset$ gilt $\emptyset \in \tau$. Sei sonst $x \in \bigcup \mathfrak{X}$, dann $\exists X \in \mathfrak{X} \exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(x) \subseteq X \subseteq \bigcup \mathfrak{X}$, d.h. $\bigcup \mathfrak{X}$ ist offen. ■

Bemerkung 1.5 (i) Die Bezeichnung *offene* ε -Kugel muss gerechtfertigt werden. Man zeige, dass $U_\varepsilon(x)$ offen ist.

Beweis: Sei $y \in U_\varepsilon(x)$, d.h. $d(x, y) < \varepsilon$. Für $\delta := \varepsilon - d(x, y) > 0$ gilt $U_\delta(y) \subseteq U_\varepsilon(x)$, denn für $z \in M$ gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ und damit folgt aus $d(y, z) < \delta$ stets $d(x, z) < \varepsilon$. ■

Es folgt $U_\varepsilon(x) \in \mathcal{U}(x)$. Analog sind abgeschlossene Kugeln stets abgeschlossen und Umgebungen. Es ist falsch, dass der Abschluss von $U_\varepsilon(x)$ stets $B_\varepsilon(x)$ ist. (Der Abschluss einer Menge ist definiert als der Schnitt aller abgeschlossenen Obermengen.)

(ii) Abgeschlossene Mengen sind genau die Komplemente offener Mengen, damit erhält man aus obigen Satz, dass eine endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen stets abgeschlossen ist und analog ist ein beliebiger Schnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen. Insbesondere sind $\emptyset$ und M abgeschlossen.

(iii) Metrische Räume erfüllen das *T2-Trennungsaxiom*, d.h.

$$\forall x, y \in M: x \neq y \implies \exists U \in \mathcal{U}(x) \exists V \in \mathcal{U}(y): U \cap V = \emptyset.$$

Beweis: Seien $x, y \in M$ mit $x \neq y$, d.h. $\varepsilon := \frac{1}{2} \cdot d(x, y) > 0$. Dann sind $U_\varepsilon(x) \in \mathcal{U}(x)$ und $U_\varepsilon(y) \in \mathcal{U}(y)$ mit $U_\varepsilon(x) \cap U_\varepsilon(y) = \emptyset$. ■

Ein Raum, in dem das T2-Trennungsaxiom gilt, wird auch *Hausdorff-Raum* genannt.

(iv) Für eine Teilmenge $X \subseteq M$ eines metrischen Raumes (M, d) erhält man die von d auf X induzierte Metrik vermöge $d_X := d|_{X \times X}$. Dann ist (X, d_X) ein metrischer Raum.

Definition 1.6 (Folge, konvergent, Cauchyfolge, vollständig)

Sei (M, d) ein metrischer Raum.

(i) Eine Abbildung $x: \mathbb{N} \rightarrow M$ heißt auch *Folge* in M , und man schreibt $x_n := x(n)$ und $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sowie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M$.

(ii) Eine Folge $x \in M^{\mathbb{N}}$ heißt

- *konvergent* gegen $x_\infty \in M$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: d(x_n, x_\infty) < \varepsilon,$$

symbolisch $x \rightarrow x_\infty$ oder $\lim x = x_\infty$ oder auch $x_n \rightarrow x_\infty$
oder $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = x_\infty$,

- *Cauchy-Folge*, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0: d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

(iii) Der Raum (M, d) heißt *vollständig*, falls jede Cauchyfolge in M konvergent gegen ein Element von M ist.

Definition 1.7 (stetig, folgenstetig)

Seien $(M_1, d_1), (M_2, d_2)$ metrische Räume und $x \in M_1$. Eine Abbildung $f: M_1 \rightarrow M_2$ heißt

(i) *stetig* in x , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in M_1: \underbrace{d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon}_{\iff f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x))}.$$

f heißt *stetig*, falls f stetig in allen $x \in M_1$ ist.

(ii) *folgenstetig* in x , falls

$$\forall y \in M_1^{\mathbb{N}}: y \rightarrow x \implies f(y) \rightarrow f(x)$$

und f heißt *folgenstetig*, falls f folgenstetig in allen $x \in M_1$ ist.

Satz 1.8 Seien $(M_1, d_1), (M_2, d_2)$ metrische Räume. Für $x \in M_1$ und eine Abbildung $f: M_1 \rightarrow M_2$ sind äquivalent:

- (i) f stetig in x
- (ii) f folgenstetig in x
- (iii) $\forall V \in \mathcal{U}(f(x)) \exists U \in \mathcal{U}(x): f(U) \subseteq V$

Beweis:

- (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei f stetig in x und sei $y \in M_1^{\mathbb{N}}$ eine Folge mit $y \rightarrow x$, dann $\forall \delta > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: \{y_n \mid n \geq n_0\} \subseteq U_\delta(x)$. Für $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit $f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$, also existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\{f(y_n) \mid n \geq n_0\} = f(\{y_n \mid n \geq n_0\}) \subseteq f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$, d.h. $f(y) \rightarrow f(x)$.
- (ii) $\Rightarrow$ (i) Sei f folgenstetig in x . Angenommen, f wäre nicht stetig in x , d.h. $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0: f(U_\delta(x)) \not\subseteq U_\varepsilon(f(x))$. Insbesondere existiert also eine Folge $y \in M_1^{\mathbb{N}}$ mit $y_n \in U_{\frac{1}{n}}(x)$ und $f(y_n) \notin U_\varepsilon(f(x))$. Damit gilt $y \rightarrow x$, aber $f(y) \not\rightarrow f(x)$, im Widerspruch zur Folgenstetigkeit.
- (i) $\Rightarrow$ (iii) Sei f stetig in x und sei $V \in \mathcal{U}(f(x))$, d.h. $\exists O$ offen: $f(x) \in O \subseteq V$ und weiter $\exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(f(x)) \subseteq O$. Aufgrund der Stetigkeit von f existiert ein $\delta > 0$ mit $f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$. Schließlich ist $U_\delta(x) \in \mathcal{U}(x)$.
- (iii) $\Rightarrow$ (i) Sei $\varepsilon > 0$, also existiert für $U_\varepsilon(f(x)) \in \mathcal{U}(f(x))$ ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $f(U) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$. Wegen $U \in \mathcal{U}(x)$ gibt es eine offene Menge O mit $x \in O \subseteq U$. Weiter existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x) \subseteq O$ und damit folgt $f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$, d.h. f ist stetig in x . ■

Satz 1.9 Seien $(M_1, d_1), (M_2, d_2)$ metrische Räume. Für eine Abbildung $f: M_1 \rightarrow M_2$ sind äquivalent:

- (i) f stetig
- (ii) $f^{-1}(\tau_{d_2}) \subseteq \tau_{d_1}$

Beweis:

- (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei f stetig und sei $O \in \tau_{d_2}$, d.h. $\forall y \in O \exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(y) \subseteq O$ und weiter $f^{-1}(U_\varepsilon(y)) \subseteq f^{-1}(O)$. Insbesondere $\forall x \in f^{-1}(O) \exists \varepsilon > 0: f^{-1}(U_\varepsilon(f(x))) \subseteq f^{-1}(O)$ und aufgrund der Stetigkeit existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U_\varepsilon(f(x)))$. Insgesamt folgt für alle $x \in f^{-1}(O)$ die Existenz eines $\delta > 0$ mit $U_\delta(x) \subseteq f^{-1}(O)$, d.h. $f^{-1}(O)$ ist offen.
- (ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $x \in M_1$ und $\varepsilon > 0$, dann ist $f^{-1}(U_\varepsilon(f(x)))$ offen und $x \in f^{-1}(U_\varepsilon(f(x)))$, also $\exists \delta > 0: U_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U_\varepsilon(f(x)))$. ■

Abgeschlossene Mengen sind genau die Komplemente offener Mengen, damit erhält man aus obigen Satz, dass eine Abbildung genau dann stetig ist, wenn die Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.

Aufgaben

Aufgabe 1.1.1 Sei d eine Metrik auf einer Menge M .

- (i) Zeigen Sie: die Eigenschaft $d(x, y) > 0$ für $x \neq y$ folgt bereits aus Symmetrie, Dreiecksungleichung und $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
- (ii) Zeigen Sie die *Vierecksungleichung*: $|d(x, y) - d(u, v)| \leq d(x, u) + d(y, v)$.
- (iii) Zeigen Sie die *umgekehrte Dreiecksungleichung*: $|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$.

Lösung: (i) Seien $x, y \in M$ mit $x \neq y$. Aus $d(x, y) = 0 \iff x = y$ folgt $d(x, y) \neq 0$. Weiter ist $0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2 \cdot d(x, y)$ und damit $d(x, y) > 0$.

- (ii) Seien $x, y, u, v \in M$. Es gilt $d(x, y) \leq d(x, u) + d(u, y) \leq d(x, u) + d(u, v) + d(v, y)$, d.h.

$$d(x, y) - d(u, v) \leq d(x, u) + d(y, v)$$

und analog ist $d(u, v) \leq d(u, x) + d(x, y) + d(y, v)$ bzw. $d(u, v) - d(x, y) \leq d(x, u) + d(y, v)$, also

$$|d(x, y) - d(u, v)| \leq d(x, u) + d(y, v).$$

- (iii) Seien $x, y, z \in M$. Es ist $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, d.h. $d(x, y) - d(y, z) \leq d(x, z)$, und analog gilt $d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z)$, d.h. $d(y, z) - d(x, y) \leq d(x, z)$, also insgesamt

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z).$$

▲

Aufgabe 1.1.2 Sei d eine Metrik auf einer Menge M . Man kann auf vielfältige Weise aus d neue Metriken erzeugen. Hier sind Beispiele dafür.

- (i) Zeigen Sie: $d': (x, y) \mapsto \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ ist ebenfalls eine Metrik in M .
- (ii) Sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Mit d werde die übliche Metrik in $\mathbb{R}$ bezeichnet. Zeigen Sie: Ist f injektiv, so ist

$$d_f: (x, y) \mapsto d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)|$$

eine Metrik auf M .

Lösung: (i) Sei $f: t \mapsto \frac{t}{1+t}$, dann ist $d' = f \circ d$. Es wird folgendes Lemma benutzt.

Lemma: Sei (M, d) ein metrischer Raum und $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ eine monoton wachsende bzw. ordnungserhaltende, subadditive Abbildung mit $\ker f = \{0\}$. Dann ist auch $f \circ d$ eine Metrik auf M .

Beweis: Es gilt

$$(f \circ d)(x, y) = f(d(x, y)) = 0 \iff d(x, y) = 0 \iff x = y$$

und

$$(f \circ d)(x, y) = f(d(x, y)) = f(d(y, x)) = (f \circ d)(y, x).$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} (f \circ d)(x, z) &= f(d(x, z)) \leq f(d(x, y) + d(y, z)) \\ &\leq f(d(x, y)) + f(d(y, z)) = (f \circ d)(x, y) + (f \circ d)(y, z) \end{aligned}$$

und insgesamt ist $f \circ d$ eine Metrik auf M . ■

Es ist $f': t \mapsto \frac{1}{(1+t)^2} > 0$, also ist f monoton wachsend bzw. ordnungserhaltend. Die einzige Nullstelle von f ist 0, d.h. $\ker f = \{0\}$. Zum Nachweis der Subadditivität dient das folgende Lemma.

Lemma: Sei $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $f(0) = 0$ und $f'' < 0$, d.h. f' monoton fallend. Dann ist f subadditiv.

Beweis: Sei $0 < y \leq x$, dann ist $x < x + y$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $a \in (0, y)$ mit

$$f'(a) = \frac{f(y)}{y}$$

und es existiert ein $b \in (x, x + y)$ mit

$$f'(b) = \frac{f(x + y) - f(x)}{y}.$$

Mit $a < b$ folgt $f'(b) \leq f'(a)$, also $f(x + y) - f(x) \leq f(y)$ und damit ist f subadditiv. ■

Es ist $f'': t \mapsto -\frac{2}{(1+t)^3} < 0$ und damit ist f subadditiv. Insgesamt ist $d' = f \circ d$ eine Metrik auf M .

- (ii) Für $x = y$ gilt $d_f(x, y) = d(f(x), f(x)) = 0$. Für $d_f(x, y) = 0$ gilt $f(x) = f(y)$ und mit der Injektivität folgt $x = y$. Die Symmetrie ist trivial, denn

$$d_f(x, y) = d(f(x), f(y)) = d(f(y), f(x)) = d_f(y, x).$$

Die Dreiecksungleichung ist einfach, denn

$$d_f(x, z) = d(f(x), f(z)) \leq d(f(x), f(y)) + d(f(y), f(z)) = d_f(x, y) + d_f(y, z).$$

▲

Aufgabe 1.1.3 Sei $M = \{x_1, x_2, \dots\}$ eine abzählbare Menge.

(i) Man zeige, dass durch

$$d: (x_i, x_j) \mapsto \begin{cases} 1 + \frac{1}{i+j} & (i \neq j) \\ 0 & (i = j) \end{cases}$$

eine Metrik auf M gegeben wird.

(ii) Ist (M, d) vollständig? Man bestimme dazu etwa die Gestalt von konvergenten Folgen bzw. von Cauchyfolgen.

Lösung: (i) Die Definitheit und Symmetrie sind trivial. Die Dreiecksungleichung gilt wegen

$$d(x_i, x_k) \leq 1 + \frac{1}{i+k} \leq 2 \leq 1 + \frac{1}{i+j} + 1 + \frac{1}{j+k} = d(x_i, x_j) + d(x_j, x_k)$$

für $i \neq j \neq k$.

(ii) Sei $y \in M^{\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0: d(y_m, y_n) < \varepsilon$. Insbesondere für $\varepsilon = 1$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m, n \geq n_0$ stets $d(y_m, y_n) < 1$ gilt, und damit $d(y_m, y_n) = 0$, also $y_m = y_n$. Damit ist y konvergent, denn es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $y_n = y_{n_0}$ für alle $n \geq n_0$. Also ist (M, d) vollständig.

▲

Aufgabe 1.1.4 Sei M mit der diskreten Metrik versehen. Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass eine Folge aus M konvergiert.

Lösung: Sei $y \in M^{\mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen $x \in M$ konvergiert. Insbesondere für $\varepsilon = 1$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(y_n, x) < 1$ für $n \geq n_0$, d.h. $y_n = x$. Eine Folge aus M konvergiert also genau dann bezüglich der diskreten Metrik, wenn alle Folgenglieder ab einem gewissen Index gleich sind.

▲

Aufgabe 1.1.5 Zeigen Sie folgenden Satz: M sei eine Menge, in der zwei Metriken d und d' gegeben sind. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Eine Folge $y \in M^{\mathbb{N}}$ konvergiert bezüglich d gegen $x \in M$ genau dann, wenn y bezüglich d' gegen x konvergiert.
- (ii) Für jede Menge $B \subseteq M$ sind die Abschlüsse bezüglich d und d' gleich.
- (iii) Das System der abgeschlossenen Mengen in (M, d) ist gleich dem System der abgeschlossenen Mengen in (M, d') .

- (iv) Das System der offenen Mengen in (M, d) ist gleich dem System der offenen Mengen in (M, d') , d.h. es gilt $\tau_d = \tau_{d'}$.

Zwei Metriken d, d' auf M mit diesen äquivalenten Eigenschaften heißen *topologisch äquivalent*.

Lösung: Zum Beweis benutzen wir folgendes Lemma.

Lemma: Sei (M, d) ein metrischer Raum.

- (i) Eine Teilmenge $A \subseteq M$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für alle konvergenten Folgen aus A der Limes stets in A liegt.
- (ii) Ein Punkt $x \in M$ liegt genau dann im Abschluss

$$\bar{B} = \bigcap_{\substack{A \supseteq B \\ M \setminus A \in \tau_d}} A$$

einer Menge $B \subseteq M$, wenn es eine Folge aus B gibt, die gegen x konvergiert.

Beweis: (i) $(\Rightarrow)$ Sei $A \subseteq M$ abgeschlossen, d.h. $M \setminus A$ ist offen. Sei $y \in A^{\mathbb{N}}$ eine Folge in A mit $y \rightarrow x$, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: y_n \in U_\varepsilon(x)$. Angenommen, es wäre $x \in M \setminus A$, dann gäbe es ein $\varepsilon_0 > 0$ mit $U_{\varepsilon_0}(x) \subseteq M \setminus A$, d.h. es wäre $\{y_n \mid n \geq n(\varepsilon_0)\} \subseteq M \setminus A$, Widerspruch! Also gilt $x \in A$.

$(\Leftarrow)$ Sei $A \subseteq M$. Angenommen $M \setminus A$ wäre nicht offen, d.h. $\exists x_0 \in M \setminus A \forall \varepsilon > 0: U_\varepsilon(x_0) \not\subseteq M \setminus A$. Für eine Folge $y \in A^{\mathbb{N}}$ mit $y_n \in U_{\frac{1}{n}}(x_0) \cap A$ gilt $y \rightarrow x_0$, also wäre $x_0 \in A$, Widerspruch! Demnach ist A abgeschlossen.

(ii) $(\Rightarrow)$ Sei $x \in \bar{B}$, also gilt für $\varepsilon > 0$ stets $U_\varepsilon(x) \cap B \neq \emptyset$. Wähle eine Folge $y \in B^{\mathbb{N}}$ mit $y_n \in U_{\frac{1}{n}}(x)$, dann konvergiert y gegen x .

$(\Leftarrow)$ Sei $y \in B^{\mathbb{N}}$ eine Folge aus B , die gegen x konvergiert, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: y_n \in U_\varepsilon(x)$, also ist für $\varepsilon > 0$ stets $U_\varepsilon(x) \cap B \neq \emptyset$ und damit $x \in \bar{B}$. ■

- (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $B \subseteq M$. Nun gelten

$$\begin{aligned} x \in \bar{B}^d &\iff \exists y \in B^{\mathbb{N}}: y \xrightarrow{d} x \\ &\iff \exists y \in B^{\mathbb{N}}: y \xrightarrow{d'} x \\ &\iff x \in \bar{B}^{d'} \end{aligned}$$

- (ii) $\Rightarrow$ (iii) trivial.
- (iii) $\Rightarrow$ (iv) einfach mittels Komplementbildung.

- (iv) $\Rightarrow$ (i) Sei $y \in M^{\mathbb{N}}$ eine Folge mit $y \xrightarrow{d} x$, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: y_n \in U_{\varepsilon}^d(x)$. Sei $\varepsilon' > 0$. Nun ist $U_{\varepsilon'}^{d'}(x)$ offen, also gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_{\varepsilon}^d(x) \subseteq U_{\varepsilon'}^{d'}(x)$ und weiter existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für $n \geq n_0$ stets $y_n \in U_{\varepsilon'}^{d'}(x)$ gilt. Damit folgt $y \xrightarrow{d'} x$. Die umgekehrte Richtung erfolgt analog.

▲

Aufgabe 1.1.6 Sei (M, d) ein metrischer Raum. Definiere neue Metriken

$$d_1: (x, y) \mapsto \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad \text{und} \quad d_2: (x, y) \mapsto 1 \wedge d(x, y).$$

Zeigen Sie: d_1, d_2 sind zu d und damit auch untereinander topologisch äquivalent.

Lösung: Sei $y \in M^{\mathbb{N}}$ eine Folge.

(i) Es gilt

$$\begin{aligned} y \xrightarrow{d} x &\iff d(x, y_n) \rightarrow 0 \\ &\iff d_1(x, y_n) = \frac{d(x, y_n)}{1 + d(x, y_n)} \rightarrow 0 \\ &\iff y \xrightarrow{d_1} x. \end{aligned}$$

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} y \xrightarrow{d} x &\iff d(x, y_n) \rightarrow 0 \\ &\iff d_2(x, y_n) = 1 \wedge d(x, y_n) \rightarrow 0 \\ &\iff y \xrightarrow{d_2} x. \end{aligned}$$

▲

Aufgabe 1.1.7 Zwei Metriken d, d' auf M heißen *äquivalent*, wenn es Konstanten $K, L > 0$ gibt mit

$$\forall x, y \in M: K \cdot d(x, y) \leq d'(x, y) \leq L \cdot d(x, y).$$

Zeigen Sie: Wenn d, d' äquivalent sind, dann sind sie auch topologisch äquivalent. Gilt auch die Umkehrung?

Lösung: Seien d, d' äquivalent, d.h. $\exists K, L > 0 \forall x, y \in M: K \cdot d(x, y) \leq d'(x, y) \leq L \cdot d(x, y)$. Sei weiter $y \in M^{\mathbb{N}}$ eine Folge, die bezüglich d gegen $x \in M$ konvergiert. Sei $\varepsilon' > 0$ und wähle $\varepsilon := \frac{\varepsilon'}{L} > 0$, dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $d(x, y_n) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Weiter ist $\frac{1}{L} \cdot d'(x, y_n) \leq d(x, y_n)$ und damit

$d'(x, y_n) < \varepsilon'$ für alle $n \geq n_0$, d.h. $y \xrightarrow{d'} x$. Die umgekehrte Richtung erfolgt analog.

Die Umkehrung gilt nicht, denn betrachte $M = \mathbb{R}$ mit der üblichen Metrik d und $d' := \frac{d}{1+d}$, dann gilt $d' \leq 1 \cdot d$. Angenommen es existierte ein $K > 0$ mit $K \cdot d \leq d'$ bzw. $K \leq \frac{1}{1+d}$, d.h. $\forall x, y \in \mathbb{R}: K \leq \frac{1}{1+|x-y|}$. Insbesondere für $x = 0$ und $y_n = n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{1+|x-y_n|} = \frac{1}{1+n} \rightarrow 0$, also wäre $K = 0$. Widerspruch! ▲

Aufgabe 1.1.8 Zeigen Sie den *Fixpunktsatz von Banach-Caccioppoli*: Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T: M \rightarrow M$ eine kontraktive Abbildung, d.h. es existiert ein $q \in (0, 1)$, sodass für alle $x, y \in M$ stets $d(Tx, Ty) \leq q \cdot d(x, y)$ gilt. Dann gelten:

- (i) T hat genau einen Fixpunkt z , d.h. es existiert genau ein $z \in M$ mit $Tz = z$.
- (ii) Wenn T die nichtleere abgeschlossene Menge $A \subseteq M$ in sich abbildet, dann liegt auch der Fixpunkt in A .
- (iii) Für die *Approximationsfolge* $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n := T^n x_0$ für beliebiges $x_0 \in M$ gilt folgende Fehlerabschätzung:

$$d(z, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot d(Tx_0, x_0)$$

Lösung: (i) Zum Beweis der Existenz betrachte für beliebiges $x_0 \in M$ die *Approximationsfolge* $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n := T^n x_0$. Dann ist x eine Cauchyfolge, denn es gilt für $1 \leq m \leq n$

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=m}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}) = \sum_{k=m}^{n-1} d(Tx_{k-1}, Tx_k) \leq \sum_{k=m}^{n-1} \underbrace{q^{k-1}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{d(x_0, x_1)}_{< \infty} \rightarrow 0.$$

Nun ist der metrische Raum vollständig, also gibt es ein $z \in M$ mit $T^n x_0 \rightarrow z$ und dann gilt

$$Tz = T \lim_{n \in \mathbb{N}} T^n x_0 = \lim_{n \in \mathbb{N}} T^{n+1} x_0 = z$$

T ist stetig, denn sei $\varepsilon > 0$, dann wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{q} > 0$ und für alle $x, y \in M$ gilt $d(x, y) < \delta \implies d(Tx, Ty) < \varepsilon$.

Zum Beweis der Eindeutigkeit seien $y, z \in M$ zwei Fixpunkte von T . Nun gilt

$$\begin{aligned} d(y, z) &= d(Ty, Tz) \leq q \cdot d(y, z) = q \cdot d(Ty, Tz) \\ &\leq q^2 \cdot d(y, z) = q^2 \cdot d(Ty, Tz) \\ &\leq \dots \\ &\leq \underbrace{q^n}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{d(y, z)}_{< \infty} < \infty \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Damit folgt $y = z$.

- (ii) Sei z der Fixpunkt von T und sei $A \subseteq M$ eine nichtleere abgeschlossene Menge mit $TA \subseteq A$. Wähle $x_0 \in A$, dann liegt die Approximationsfolge $x = (T^n x_0)_{n \in \mathbb{N}}$ in A , denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $T^n A \subseteq A$. Weiter gilt $x \rightarrow z$ und damit $z \in A$.

- (iii) Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $d(z, x_n) = d(T^n z, T^n x_0) \leq q^n \cdot d(z, x_0)$ und

$$(1 - q) \cdot d(z, x_0) = d(z, x_0) - \underbrace{q \cdot d(z, x_0)}_{\geq d(Tz, Tx_0)} \leq d(z, x_0) - d(z, x_1) \leq d(x_0, x_1)$$

und insgesamt folgt

$$d(z, x_n) \leq \frac{q^n}{1 - q} \cdot d(x_1, x_0).$$

▲

1.2 Topologische Räume

Definition 1.10 (Topologie)

Sei X eine Menge. Ein Mengensystem $\tau \subseteq \wp(X)$ heißt *Topologie* auf X , wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $\mathcal{X} \subseteq \tau \implies \bigcup \mathcal{X} \in \tau$

(ii) $\mathcal{X} \subseteq_{fin} \tau \implies \bigcap \mathcal{X} \in \tau$

(X, τ) heißt *topologischer Raum*.

Seien τ_1, τ_2 zwei Topologien auf X . τ_1 heißt *schwächer/gröber* als τ_2 und entsprechend heißt τ_2 *stärker/feiner* als τ_1 , wenn $\tau_1 \subseteq \tau_2$ gilt.

Beispiel: (i) Die *diskrete Topologie* $\tau_{dis} = \wp(X)$ ist die stärkste Topologie auf einer Menge X .

(ii) Die *indiskrete Topologie* $\tau_{ind} = \{\emptyset, X\}$ ist die schwächste Topologie auf X .

(iii) Nach Satz 1.4 existiert für jeden metrischen Raum (M, d) die *Normtopologie* τ_d auf M . Ein topologischer Raum (X, τ) heißt *metrisierbar*, wenn es eine Metrik d auf X mit $\tau_d = \tau$ gibt.

(iv) Die *koendliche Topologie* auf X ist

$$\tau_{cof} = \{O \subseteq X \mid X \setminus O \text{ endlich}\}.$$

(v) Die *koabzählbare Topologie* auf X ist

$$\tau_{coc} = \{O \subseteq X \mid X \setminus O \text{ abzählbar}\}.$$

□

Definition (offen, abgeschlossen, Abschluss, Umgebung, dicht)

Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $B \subseteq M$ heißt

- (i) *offen* in (X, τ) , falls $B \in \tau$.
- (ii) *abgeschlossen* in (X, τ) , falls $X \setminus B$ offen.
 $\bar{B}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die B enthält, also

$$\bar{B} = \bigcap_{\substack{A \supseteq B \\ X \setminus A \in \tau}} A$$

und heißt *Abschluss* von B .

- (iii) *Umgebung* von $x \in M$, falls $\exists O \in \tau: x \in O \subseteq B$.
 Die Menge aller Umgebungen von x wird mit $\mathcal{U}(x)$ bezeichnet und heißt auch *Umgebungsfilter* von x .
- (iv) *dicht* in X , wenn $\forall x \in X \forall U \in \mathcal{U}(x): U \cap B \neq \emptyset$.

Lemma: Für eine Teilmenge B eines topologischen Raums (X, τ) sind äquivalent:

- (i) B dicht in X .
- (ii) $\forall O \in \tau \setminus \{\emptyset\}: O \cap B \neq \emptyset$.
- (iii) $\bar{B} = X$.

Beweis: • (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $O \neq \emptyset$ offen, also gibt es ein $x \in O$ mit $O \in \mathcal{U}(x)$.
 Es folgt $O \cap B \neq \emptyset$.

- (ii) $\Rightarrow$ (iii) Angenommen, es wäre $\bar{B} \neq X$, dann gäbe es eine abgeschlossene Menge $A \supseteq B$ mit $A \neq X$. Nach Voraussetzung wäre dann $(X \setminus A) \cap B \neq \emptyset$ und folglich $B \not\subseteq A$. Widerspruch!
- (iii) $\Rightarrow$ (i) Sei $x \in X$ und o.E.d.A. $U \in \mathcal{U}(x) \cap \tau$. Mit der Annahme $U \cap B = \emptyset$ folgt $B \subseteq X \setminus U$ und $X \setminus U$ ist abgeschlossen, d.h. $\bar{B} \subseteq X \setminus U$. Widerspruch! ■

Bemerkung: Um topologische Räume einzuführen, kann man auch mit den Umgebungen beginnen und dann die offenen Mengen definieren.

Definition (hausdorffsch)

Ein topologischer Raum (X, τ) heißt *hausdorffsch* bzw. τ heißt *Hausdorff-Topologie* auf X , wenn das *T2-Trennungsaxiom* erfüllt ist, d.h.

$$\forall x, y \in X: x \neq y \implies \exists U \in \mathcal{U}(x) \exists V \in \mathcal{U}(y): U \cap V = \emptyset.$$

Es ist meist unnötig oder unmöglich, alle offenen Mengen bzw. alle Umgebungen beschreiben zu wollen, und es reichen kleinere Mengensysteme.

Definition 1.11 (Basis, Subbasis, Umgebungsbasis)

Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

(i) Ein System $\mathcal{B} \subseteq \tau$ heißt *Basis* von τ , wenn

$$\tau = \left\{ \bigcup \mathcal{O} \mid \mathcal{O} \subseteq \mathcal{B} \right\}.$$

(ii) Ein System $\mathcal{S} \subseteq \tau$ heißt *Subbasis* von τ , wenn

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap \mathcal{O} \mid \mathcal{O} \subseteq_{fin} \mathcal{S} \right\}$$

eine Basis von τ ist.

(iii) Ein System $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}(x)$ heißt *Umgebungsbasis* von $x \in X$, falls

$$\forall U \in \mathcal{U}(x) \exists V \in \mathcal{V}: V \subseteq U.$$

Beispiel: (i) Sei $\mathbb{R}^n$ mit der üblichen Topologie versehen. Dann ist

$$\{U_\varepsilon(x) \mid \varepsilon \in \mathbb{Q}_+, x \in \mathbb{Q}^n\}$$

eine abzählbare Basis. Für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\{U_\varepsilon(x) \mid \varepsilon \in \mathbb{Q}_+\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x .

(ii) Sei X eine Menge. Das System $\{\{x\} \mid x \in X\}$ ist eine Basis für die diskrete Topologie auf X und $\{X\}$ ist eine Basis für die indiskrete Topologie auf X .

□

Definition (Häufungs-, Berührungs-, isolierter, Rand-, innerer, äußerer Punkt)

Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $B \subseteq X, x \in X$. Dann heißt x

- (i) *Häufungspunkt* von B , wenn $\forall U \in \mathcal{U}(x): (U \cap B) \setminus \{x\} \neq \emptyset$.
- (ii) *Berührungspunkt* von B , wenn $\forall U \in \mathcal{U}(x): U \cap B \neq \emptyset$.
- (iii) *isolierter Punkt* von B , wenn $\exists U \in \mathcal{U}(x): U \cap B = \{x\}$.
- (iv) *Randpunkt* von B , wenn $\forall U \in \mathcal{U}(x): U \cap B \neq \emptyset \wedge U \cap (X \setminus B) \neq \emptyset$.
 ∂B ist die Menge aller Randpunkte von B und heißt *Rand* von B .
- (v) *innerer Punkt* von B , wenn $\exists U \in \mathcal{U}(x): U \subseteq B$.
 $\overset{\circ}{B}$ ist die Menge der inneren Punkte von B und heißt *Inneres* von B .
- (vi) *äußerer Punkt* von B , wenn $\exists U \in \mathcal{U}(x): U \subseteq X \setminus B$.

Lemma: Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $B \subseteq X, x \in X$. Dann gelten:

- (i) x ist genau dann ein Berührungspunkt von B , wenn x ein Häufungspunkt oder ein isolierter Punkt von B ist.
- (ii) x ist genau dann ein Häufungspunkt von B , wenn x ein Berührungspunkt von $B \setminus \{x\}$ ist.
- (iii) x ist genau dann ein isolierter Punkt von B , wenn x ein äußerer Punkt von $B \setminus \{x\}$ ist.
- (iv) x ist genau dann ein Randpunkt von B , wenn x weder ein innerer Punkt noch ein äußerer Punkt von B ist.
- (v) x ist genau dann ein innerer Punkt von B , wenn x ein äußerer Punkt von $X \setminus B$ ist.
- (vi) x ist ein Häufungspunkt von B , wenn x ein innerer Punkt von B ist.

Beweis: (i) Sei x ein Berührungspunkt von B , d.h. $\forall U \in \mathcal{U}(x): U \cap B \neq \emptyset$. Falls eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $B \cap U = \{x\}$ existiert, dann ist x ein isolierter Punkt. Andernfalls gilt für alle Umgebungen $U \in \mathcal{U}(x)$ stets $(B \cap U) \setminus \{x\} \neq \emptyset$, d.h. x ist ein Häufungspunkt von B . Sei umgekehrt x ein isolierter Punkt von B . Es gilt dann $x \in B$, also folgt für jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ immer $x \in U \cap B \neq \emptyset$ und damit ist x ein Berührungspunkt. Jeder Häufungspunkt ist insbesondere ein Berührungspunkt.

(ii) Es gilt für $U \in \mathcal{U}(x)$ stets $(U \cap B) \setminus \{x\} = U \cap (B \setminus \{x\})$.

- (iii) Es ist $U \cap B = \{x\}$ genau dann, wenn $(U \cap B) \setminus \{x\} = U \cap (B \setminus \{x\}) = \emptyset$. Das ist äquivalent mit $U \subseteq X \setminus (B \setminus \{x\})$.
- (iv) x ist ein Randpunkt von B genau dann, wenn

$$\forall U \in \mathcal{U}(x): \underbrace{U \cap B \neq \emptyset}_{\iff U \not\subseteq B} \wedge \underbrace{U \cap (X \setminus B) \neq \emptyset}_{\iff U \not\subseteq X \setminus B}.$$

Das ist äquivalent dazu, dass x weder ein innerer noch ein äußerer Punkt von B ist.

(v) trivial.

- (vi) Sei x innerer Punkt, d.h. $\exists U_0 \in \mathcal{U}(x): U_0 \subseteq B$. Angenommen, x wäre kein Häufungspunkt, dann $\exists U_1 \in \mathcal{U}(x): (U_1 \cap B) \setminus \{x\} = \emptyset$, d.h. $U_1 \cap B \subseteq \{x\}$ und damit $U_1 \cap U_0 \subseteq \{x\}$. Widerspruch!

Definition 1.12 (stetig)

Seien $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ topologische Räume und $x \in X_1$. Eine Abbildung $f: X_1 \rightarrow X_2$ heißt *stetig* in x , falls

$$\forall V \in \mathcal{U}(f(x)) \exists U \in \mathcal{U}(x): f(U) \subseteq V.$$

f heißt *stetig*, wenn f in jedem Punkt $x \in X_1$ stetig ist.

Lemma: Seien $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ topologische Räume. Für eine Abbildung $f: X_1 \rightarrow X_2$ sind äquivalent:

- (i) f stetig
- (ii) $f^{-1}(\tau_2) \subseteq \tau_1$

Beweis: analog zu Satz 1.9.

Bemerkung 1.13 Topologische Räume haben gravierende Unterschiede zu metrischen Räumen:

- (i) Die Stetigkeit einer Abbildung kann nicht mehr durch Folgen charakterisiert werden, genauer gilt: Wenn f stetig, dann ist f folgenstetig. Die Umkehrung gilt in topologischen Räumen nicht.

Beispiel: Betrachte $\mathbb{R}$ mit der koabzählbaren Topologie τ_{coc} . Dann gilt für jede Folge $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und $x \in \mathbb{R}$

$$y \rightarrow x \iff \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: y_n = x.$$

Beweis: Es ist $\mathcal{U}(x) = \{U \in \tau_{coc} \mid x \in U\}$. Sei also $y \rightarrow x$, dann gilt $\forall U \in \mathcal{U}(x) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: y_n \in U$. Betrachte $U := \mathbb{R} \setminus \text{imy} \in \tau_{coc}$. Angenommen, es wäre $x \in U$, dann wäre $U \in \mathcal{U}(x)$, also $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: y_n \in U$. Widerspruch! Also folgt $x \in \text{imy}$, d.h. $\exists n_0 \in \mathbb{N}: x = y_{n_0}$. Betrachte nun $U' := U \cup \{x\} \in \mathcal{U}(x)$, dann $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: y_n \in U'$, d.h. $y_n = x$. ■

Jede Abbildung $f: (\mathbb{R}, \tau_{coc}) \rightarrow (X, \tau)$ ist damit offenbar folgenstetig. Sei speziell $X = \mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie τ versehen. Betrachte die identische Abbildung $\text{id}: (\mathbb{R}, \tau_{coc}) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau)$, dann ist id folgenstetig, aber nicht stetig, denn es gilt $\text{id}^{-1}(0, 1) = (0, 1)$ und $(0, 1)$ ist τ -offen, jedoch nicht τ_{coc} -offen, denn $(0, 1)$ ist kein Komplement einer abzählbaren Menge. □

- (ii) Ein Punkt x ist Häufungspunkt von B , wenn eine Folge $y \in (B \setminus \{x\})^{\mathbb{N}}$ mit $y \rightarrow x$ existiert. In metrischen Räumen sind beide Aussagen äquivalent.

Beispiel: Sei $X = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ die Menge aller reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Eine Nullumgebungsbasis für eine Topologie τ in X ist das System aller Mengen

$$U_{x,\varepsilon} = \{f \in X \mid \forall i \in \{1, \dots, n\}: |f(x_i)| < \varepsilon_i\}$$

für beliebige $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^n$ (eine Umgebungsbasis für ein beliebiges $f \in X$ erhält man durch Verschiebung dieser Nullumgebungsbasis an f). Ferner sei A folgende Menge:

$$A = \{f \in X \mid |\ker f| < \infty \wedge \text{im } f \subseteq \{0, 1\}\}$$

Die Nullfunktion 0 ist offenbar Häufungspunkt von A , denn in jeder Nullumgebung $U_{x,\varepsilon}$ liegt ein $f \in A$ mit $f \neq 0$, genauer gilt $\forall i \in \{1, \dots, n\}: f(x_i) = 0$ und $f(x) = 1$ sonst. Aber es existiert keine Folge $f \in A^{\mathbb{N}}$ mit $f \rightarrow 0$. Sei $f \in A^{\mathbb{N}}$, für $n \in \mathbb{N}$ definiere die endliche Menge $M_n := \ker f_n$, dann ist $M := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ abzählbar, also $M \neq \mathbb{R}$. Sei $x_0 \in \mathbb{R} \setminus M$, dann liegt in $U_{x_0, \frac{1}{2}}$ keines der f_n , denn $\forall n \in \mathbb{N}: f_n(x_0) = 1$ und damit kann f nicht gegen die Nullfunktion 0 konvergieren. □

An den beiden Beispielen ist zu erkennen, dass Folgen in topologischen Räumen nicht ausreichend sind. Es gibt hier zwei Auswege: Einerseits die Filter, andererseits die verallgemeinerten Folgen (Netze).

Definition 1.14 (gerichtete Menge, Netz, konvergent, Häufungspunkt)

- (i) Eine *gerichtete Menge* $(I, \preccurlyeq)$ ist eine Menge I mit einer binären Relation $\preccurlyeq \subseteq I \times I$, die folgende Eigenschaften erfüllt:
- $\preccurlyeq$ reflexiv, d.h. $\Delta_I \subseteq \preccurlyeq$
 - $\preccurlyeq$ transitiv, d.h. $\preccurlyeq \circ \preccurlyeq \subseteq \preccurlyeq$
 - $\preccurlyeq$ gerichtet, d.h. $\forall i_1, i_2 \in I \exists i \in I: i_1 \preccurlyeq i \wedge i_2 \preccurlyeq i$
- (ii) Sei X eine Menge und $(I, \preccurlyeq)$ eine gerichtete Menge, dann heißt eine Abbildung $x: I \rightarrow X$ auch *Netz* in X , und man schreibt $x_i := x(i)$ und $x = (x_i)_{i \in I}$ sowie $(x_i)_{i \in I} \subseteq X$.
- (iii) Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Ein Netz $x \in X^I$ heißt *konvergent* gegen $x_\infty \in X$, falls

$$\forall U \in \mathcal{U}(x_\infty) \exists i_0 \in I \forall i \succcurlyeq i_0: x_i \in U,$$

symbolisch $x \rightarrow x_\infty$ oder $\lim x = x_\infty$ oder auch $x_i \rightarrow x_\infty$ oder $\lim_{i \in I} x_i = x_\infty$.

- (iv) Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Ein Punkt $y \in X$ heißt *Häufungspunkt* des Netzes $x \in X^I$, wenn $\forall U \in \mathcal{U}(y) \forall i \in I \exists i_0 \succcurlyeq i: x_{i_0} \in U$.

Bemerkung: Jede Folge ist ein Netz für die gerichtete Menge $(\mathbb{N}, \leq)$. Netze haben aber gravierende Unterschiede zu Folgen:

- (i) Für konvergente Folgen liegen außerhalb jeder Umgebung des Limes nur endlich viele Folgenglieder, bei konvergenten Netzen muss das nicht sein.
- (ii) Konvergente Folgen in metrischen Räume sind stets beschränkt, aber nicht jedes konvergente Netz ist beschränkt.

Beispiel: Betrachte $I = (0, \infty)$ mit der üblichen Ordnung $\leq$. Das Netz $y \in \mathbb{R}^I$ mit $y_i := \frac{1}{i}$ ist konvergent gegen 0, jedoch nicht beschränkt.

□

- (iii) In einem Hausdorff-Raum ist der Limes eines konvergenten Netzes eindeutig bestimmt.

Beweis: Sei $y \in X^I$ ein Netz, das gegen $x_1 \in X$ und $x_2 \in X$ konvergiert. Angenommen es wäre $x_1 \neq x_2$, dann $\exists U \in \mathcal{U}(x_1) \exists V \in \mathcal{U}(x_2): U \cap V = \emptyset$.

Wegen $y \rightarrow x_1$ folgt $\exists i_1 \in I \forall i \succ i_1: y_i \in U$ und analog $\exists i_2 \in I \forall i \succ i_2: y_i \in V$. Damit gilt für $i_0 \in I$ mit $i_0 \succ i_1$ und $i_0 \succ i_2$ stets $y_i \in U \cap V$ für alle $i \succ i_0$. Widerspruch!

Definition (Teilnetz)

Sei $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz. Ein Netz $(y_j)_{j \in J}$ heißt Teilnetz von $(x_i)_{i \in I}$, wenn eine Abbildung $\varphi: J \rightarrow I$ mit den folgenden beiden Eigenschaften existiert:

- (i) $\forall j \in J: y_j = x_{\varphi(j)}$
- (ii) $\forall i \in I \exists j_0 \in J \forall j \succ j_0: \varphi(j) \succ i$.

(i) besagt, dass die y_j stets gewisse der x_i sind. (ii) ersetzt sehr grob die Monotonie in der Teilfolgendefinition: Wenn j weit hinten in der Indexmenge J , dann liegt auch $\varphi(j)$ weit hinten in der Indexmenge I ; oder anders ausgedrückt: jeder Index $i \in I$ wird ab einer gewissen Stelle $j_0 \in J$ von allen Bildern $\varphi(j)$ überholt. Insbesondere können Elemente x_i in $(y_j)_{j \in J}$ unendlich oft vorkommen.

Lemma: Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Ein Punkt $y \in X$ ist Häufungspunkt eines Netzes $x \in X^I$ genau dann, wenn es ein gegen y konvergentes Teilnetz von x gibt.

Beweis: ($\Rightarrow$) Sei $y \in X$ Häufungspunkt des Netzes $x \in X^I$. Betrachte die durch Inklusion $\supseteq$ gerichtete Menge $\mathcal{U}(y)$. Da y Häufungspunkt ist, gilt $\forall i \in I \forall U \in \mathcal{U}(y) \exists i_{U,i} \succ i: x_{i_{U,i}} \in U$. Die Menge $\mathcal{U}(y) \times I$ mit der Relation $(U_1, i_1) \preccurlyeq (U_2, i_2) : \Leftrightarrow U_1 \supseteq U_2 \wedge i_1 \preccurlyeq i_2$ ist gerichtet. Definiere eine Abbildung $\varphi: \mathcal{U}(y) \times I \rightarrow I$, $(U, i) \mapsto i_{U,i}$, dann gilt für alle $i \in I$ und für eine beliebige Umgebung $U \in \mathcal{U}(y)$ nun für alle $(V, j) \succ (U, i)$ stets $\varphi(V, j) \succ j \succ i$. Insgesamt ist also $(x_{\varphi(U, i)})_{(U, i) \in \mathcal{U}(y) \times I}$ ein Teilnetz von x und konvergiert gegen y , denn sei $U \in \mathcal{U}(y)$ und sei $i \in I$ beliebig, dann gilt für $(V, j) \succ (U, i)$ stets $x_{\varphi(V, j)} \in V \subseteq U$.

($\Leftarrow$) Sei $z \in X^J$ ein gegen y konvergentes Teilnetz von x . Sei weiter $U \in \mathcal{U}(y)$ und $i \in I$. Da z gegen y konvergiert, gibt es ein $j_1 \in J$, sodass $\forall j \succ j_1: z_j = x_{\varphi(j)} \in U$. Weil z ein Teilnetz von x ist, existiert ein $j_2 \in J$ mit $\varphi(j) \succ i$ für alle $j \succ j_2$, und damit gibt es ein $j_0 \in J$ mit $j_0 \succ j_1$ und $j_0 \succ j_2$. Setze also $i_0 := \varphi(j_0) \succ i$ mit $x_{i_0} \in U$ und damit ist y ein Häufungspunkt von x .

Satz 1.15 Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann Berührungspunkt einer Menge $B \subseteq X$, wenn es ein gegen x konvergentes Netz aus B gibt.

Beweis: ($\Rightarrow$) Sei x ein Berührungspunkt von B , also gilt $\forall U \in \mathcal{U}(x): U \cap B \neq \emptyset$. Betrachte für die gerichtete Menge $(\mathcal{U}(x), \supseteq)$ ein beliebiges Netz $y \in B^{\mathcal{U}(x)}$ mit $y_U \in U$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$, dann gilt $y \rightarrow x$, denn für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ gibt es ein $V_0 := U \in \mathcal{U}(x)$ mit $x_V \in U$ für alle $V \subseteq V_0$.

($\Leftarrow$) Sei $y \in B^I$ ein gegen x konvergentes Netz, damit gilt $\forall U \in \mathcal{U}(x) \exists i_0 \in I: \{y_i \mid i \succcurlyeq i_0\} \subseteq U$. Also folgt $U \cap B \neq \emptyset$.

Bemerkung: Um im Teil (i) des obigen Beweises ein Netz $y \in B^{\mathcal{U}(x)}$ mit $y_U \in U$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ bilden zu können, benötigt man das *Auswahlaxiom*: Sei $\mathcal{X}$ ein nichtleeres System nichtleerer Mengen, dann existiert eine Abbildung $x: \mathcal{X} \rightarrow \bigcup \mathcal{X}$ mit $x(X) \in X$ für alle $X \in \mathcal{X}$. Anders gesagt gibt es eine Menge M , sodass $X \cap M$ für alle $X \in \mathcal{X}$ stets genau ein Element enthält. (M enthält also für jedes $X \in \mathcal{X}$ genau ein Element aus X .)

Definition (netzstetig)

Seien $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ topologische Räume und $x \in X_1$. Eine Abbildung $f: X_1 \rightarrow X_2$ heißt *netzstetig* in x , falls

$$\forall y \in X_1^I: y \rightarrow x \implies f(y) \rightarrow f(x)$$

und f heißt *netzstetig*, falls f netzstetig in allen $x \in X_1$ ist.

Satz 1.16 Seien $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ topologische Räume. Für eine Abbildung $f: X_1 \rightarrow X_2$ sind äquivalent:

(i) f stetig

(ii) f netzstetig

Beweis: ($\Rightarrow$) Sei f stetig und $y \in X_1^I$ ein gegen $x \in X$ konvergentes Netz. Sei $V \in \mathcal{U}(f(x))$, dann existiert eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $f(U) \subseteq V$ und weiter gibt es ein $i_0 \in I$ mit $\{y_i \mid i \succcurlyeq i_0\} \subseteq U$. Es folgt

$$\{f(y_i) \mid i \succcurlyeq i_0\} = f(\{y_i \mid i \succcurlyeq i_0\}) \subseteq f(U) \subseteq V$$

und damit ist f netzstetig in x .

($\Leftarrow$) Sei f netzstetig in $x \in X$. Angenommen f wäre nicht stetig in x , d.h. $\exists V \in \mathcal{U}(f(x)) \forall U \in \mathcal{U}(x): f(U) \not\subseteq V$. Dann gibt es für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $x_U \in U$ mit $f(x_U) \notin V$ und damit konvergiert das Netz $(x_U)_{U \in \mathcal{U}(x)}$ gegen x , aber das Bildnetz $(f(x_U))_{U \in \mathcal{U}(x)}$ konvergiert nicht gegen $f(x)$. Widerspruch!

Satz 1.17 (initiale Topologie, finale Topologie) Sei X eine Menge und $((X_t, \tau_t))_{t \in T}$ eine Familie von topologischen Räumen.

- (i) Für eine Familie $(f_t)_{t \in T}$ von Abbildungen $f_t: X \rightarrow X_t$ existiert genau eine schwächste Topologie τ_{in} auf X , für die alle Abbildungen f_t stetig sind, und diese heißt *initiale Topologie* auf X bzgl. $(f_t)_{t \in T}$.
- (ii) Für eine Familie $(g_t)_{t \in T}$ von Abbildungen $g_t: X_t \rightarrow X$ gibt es genau eine stärkste Topologie τ_{fin} auf X , für die alle Abbildungen g_t stetig sind, und sie heißt *finale Topologie* auf X bzgl. $(g_t)_{t \in T}$.

Beweis: (i) Sei τ eine Topologie auf X und seien die Abbildungen $f_t: X \rightarrow X_t$ stetig, d.h. es gilt $f_t^{-1}(\tau_t) \subseteq \tau$ für alle $t \in T$. Der Schnitt von Topologien ist stets eine Topologie, also existiert genau eine schwächste Topologie τ_{in} auf X , für die alle Abbildungen f_t stetig sind, nämlich

$$\tau_{in} = \bigcap_{\substack{\tau \text{ Topologie auf } X \\ \forall t \in T: f_t^{-1}(\tau_t) \subseteq \tau}} \tau.$$

Eine Subbasis für die Topologie τ_{in} ist demnach das Mengensystem

$$\mathcal{S}_{in} = \bigcup_{t \in T} f_t^{-1}(\tau_t).$$

- (ii) Sei τ eine Topologie auf X und seien die Abbildungen $g_t: X_t \rightarrow X$ stetig, d.h. es gilt $g_t^{-1}(\tau) \subseteq \tau_t$ für alle $t \in T$. Betrachte die Topologie

$$\tau' = \{O \subseteq X \mid \forall t \in T: g_t^{-1}(O) \in \tau_t\},$$

dann gilt nach Definition von τ' stets $\tau \subseteq \tau'$, d.h. es ist

$$\tau_{fin} = \tau'.$$

■

Beispiel: (i) Sei (X_0, τ_0) ein topologischer Raum und $X \subseteq X_0$ eine Teilmenge. Die initiale Topologie auf X bezüglich der identischen Einbettung $\text{id}_X: X \rightarrow X_0$ ist

$$\tau_0|_X := \text{id}_X^{-1}(\tau_0) = \{O \cap X \mid O \in \tau_0\} =: \tau_0 \cap X$$

und heißt *Unterraumtopologie* auf X .

- (ii) Sei $(X_t, \tau_t)_{t \in T}$ eine Familie von topologischen Räumen. Nach dem Auswahlaxiom ist das kartesische Produkt

$$X = \prod_{t \in T} X_t = \{x: T \rightarrow \bigcup_{t \in T} X_t \mid \forall t \in T: x_t \in X_t\}$$

nichtleer. Betrachte die kanonischen Projektionen $p_t: X \rightarrow X_t$, $x \mapsto x_t$, dann heißt die initiale Topologie auf X bzgl. der Projektionen $(p_t)_{t \in T}$ auch *Produkttopologie* von $(X_t, \tau_t)_{t \in T}$. Eine Basis dieser Topologie ist

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigtimes_{t \in F} O_t \times \bigtimes_{t \in T \setminus F} X_t \mid F \subseteq_{\text{fin}} T \wedge \forall t \in F: O_t \in \tau_t \right\}.$$

- (iii) Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $\sim \subseteq X \times X$ sei eine Äquivalenzrelation auf X (reflexiv, symmetrisch, transitiv). Dann ist $X/\sim$ die Menge aller Äquivalenzklassen $[x] \sim$ und heißt *Faktorraum* oder *Quotientenraum* von X nach $\sim$. Betrachte die kanonische Projektion $\text{nat}: X \rightarrow X/\sim$, $x \mapsto [x]$, dann heißt die finale Topologie auf $X/\sim$ bzgl. nat auch *Faktortopologie* oder *Quotiententopologie* auf $X/\sim$. Eine Menge $B \subseteq X/\sim$ ist genau dann offen, falls $\text{nat}^{-1}(B) = \bigcup_{[x] \in B} [x]$ offen in X ist.

□

Satz 1.18 Seien $(X_1, \tau_1), (X, \tau)$ topologische Räume und $((X_t, \tau_t))_{t \in T}$ eine Familie von topologischen Räumen. Sei $g: X_1 \rightarrow X$ eine Abbildung und $(f_t: X \rightarrow X_t)_{t \in T}$ eine Familie von Abbildungen, sodass τ die initiale Topologie bzgl. $(f_t)_{t \in T}$ ist. Dann gelten:

- (i) g ist stetig genau dann, wenn $f_t \circ g$ für alle $t \in T$ stetig ist.
- (ii) Die initiale Topologie auf X_1 bzgl. g ist gleich der initialen Topologie auf X_1 bzgl. $(f_t \circ g)_{t \in T}$.

Beweis: (i) Sei $f_t \circ g$ stetig für alle $t \in T$, d.h. es gilt $(f_t \circ g)^{-1}(\tau_t) = g^{-1}(f_t^{-1}(\tau_t)) \subseteq \tau_1$ für alle $t \in T$. Damit folgt

$$\bigcup_{t \in T} g^{-1}(f_t^{-1}(\tau_t)) = g^{-1}\left(\underbrace{\bigcup_{t \in T} f_t^{-1}(\tau_t)}_{\text{Subbasis von } \tau}\right) \subseteq \tau_1$$

und nun folgt mit der Schnitt- und Vereinigungsstabilität des Urbildes, dass g stetig ist.

Die umgekehrte Richtung ist trivial.

■

- (ii) folgt aus (i).

Aufgaben

Aufgabe 1.2.1 Bestimmen Sie alle Topologien in einer Menge aus zwei Elementen. Welche davon ist eine Hausdorff-Topologie?

Lösung: Alle Topologien auf der Menge $\{0, 1\}$ sind

$$\tau_{ind} = \{\emptyset, X\}$$

$$\tau_0 = \{\emptyset, \{0\}, X\}$$

$$\tau_1 = \{\emptyset, \{1\}, X\}$$

$$\tau_{dis} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, X\}$$

und nur τ_{dis} ist hausdorffsch. ▲

Aufgabe 1.2.2 Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $B \subseteq X$. Zeigen Sie:

- (i) $\bar{B} = \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{U}(x): U \cap B \neq \emptyset\}$. Man erhält also, dass $\bar{B}$ die Menge aller Berührungspunkte von B ist.
- (ii) $\bar{B} = B \cup B'$ und dabei bezeichnet B' die Menge aller Häufungspunkte von B .
- (iii) $\overset{\circ}{B} = \{x \in X \mid B \in \mathcal{U}(x)\}$.
- (iv) $\overset{\circ}{B}$ ist die größte offene Menge, die in B enthalten ist, d.h. es gilt

$$\overset{\circ}{B} = \bigcup_{\substack{O \subseteq B \\ O \in \tau}} O.$$

Lösung: (i) $(\subseteq)$ Sei $x \in \bar{B}$, d.h. für alle abgeschlossenen Mengen $A \supseteq B$ gilt $x \in A$. Damit gilt für jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ stets $U \cap A \neq \emptyset$. Angenommen es gäbe eine Umgebung $U_0 \in \mathcal{U}(x)$ mit $U_0 \cap B = \emptyset$, dann wäre $U_0 \subseteq B \subseteq A$ im Widerspruch zu $U_0 \not\subseteq A$.

$(\supseteq)$ Sei $A \supseteq B$ abgeschlossen, d.h. $X \setminus A \in \tau$. Für $x \in X$ mit $\forall U \in \mathcal{U}(x): U \cap B \neq \emptyset$ folgt $x \in A$, denn angenommen das Gegenteil wäre der Fall, dann $\exists U_0 \in \mathcal{U}(x): U_0 \subseteq X \setminus A$, d.h. $U \cap A = \emptyset$, also $U \cap B = \emptyset$. Widerspruch! Also folgt $x \in \bar{B}$.

(ii) $(\subseteq)$ Sei x ein Berührungspunkt von B , d.h. $\forall U \in \mathcal{U}(x): U \cap B \neq \emptyset$. Falls $x \notin B$, dann folgt $(U \setminus \{x\}) \cap B = (U \cap B) \setminus \{x\} \neq \emptyset$, also ist x ein Häufungspunkt.

$(\supseteq)$ Sei $x \in B$. Für alle Umgebungen $U \in \mathcal{U}(x)$ gilt $x \in U$, also ist stets $U \cap B \neq \emptyset$. Sei nun x ein Häufungspunkt von B , d.h. $\forall U \in \mathcal{U}(x): (U \cap B) \setminus \{x\} \neq \emptyset$, also folgt stets $U \cap B \neq \emptyset$ und damit ist x ein Berührungspunkt von B .

(iii) $(\subseteq)$ Sei $x \in \overset{\circ}{B}$, d.h. $\exists U_0 \in \mathcal{U}(x): U_0 \subseteq B$, also folgt $B \in \mathcal{U}(x)$.

($\supseteq$) trivial.

(iv) ($\subseteq$) Sei $x \in \overset{\circ}{B}$, d.h. $\exists U_0 \in \mathcal{U}(x): U_0 \subseteq B$, also $\exists O_0 \in \tau: x \in O_0 \subseteq U_0 \subseteq B$.

($\supseteq$) Sei $x \in O \subseteq B$ für eine offene Menge $O \in \tau$, dann gilt insbesondere $O \in \mathcal{U}(x)$ und damit ist x ein innerer Punkt von B .

Aufgabe 1.2.3 Sei X die Menge aller reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Die Topologie τ werde durch folgende Nullumgebungsbasis beschrieben (eine Umgebungsbasis für ein beliebiges $f \in X$ erhält man durch Verschiebung dieser Nullumgebungsbasis an f). Die Nullumgebungsbasis $\mathcal{U}_0$ bestehe aus allen Mengen

$$U_{x,\varepsilon} = \{f \in X \mid \forall i \in \{1, \dots, n\}: |f(x_i)| < \varepsilon_i\}$$

für beliebige $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: $(1 - \chi_E)_{E \in \mathcal{E}}$ ist ein gegen 0 konvergentes Netz. Dabei ist $\mathcal{E}$ das gerichtete System aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{R}$, halbgeordnet mittels Inklusion $\subseteq_{fin}$.

Lösung: Sei $U \in \mathcal{U}(0)$, d.h. $\exists U_{x,\varepsilon} \in \mathcal{U}_0: U_{x,\varepsilon} \subset U$. Für die endliche Menge $E_0 = \text{inx} \in \mathcal{E}$ gilt $1 - \chi_{E_0} \in U_{x,\varepsilon}$ und ebenso gilt für alle $E \supseteq_{fin} E_0$ stets $1 - \chi_E \in U_{x,\varepsilon}$, also konvergiert das Netz $(1 - \chi_E)_{E \in \mathcal{E}}$ gegen 0.

Aufgabe 1.2.4 Eine Eigenschaft P eines metrischen (allgemein: eines topologischen) Raums (oder eines Objekts in diesem Raum) heißt *topologische Eigenschaft*, wenn P unter homöomorphen Abbildungen erhalten bleibt. Welche der folgenden Eigenschaften einer Folge eines metrischen Raums sind topologische Eigenschaften?

(i) Beschränktheit

(ii) Cauchyfolge

(iii) Konvergenz

(iv) Vollständigkeit des metrischen Raums

Lösung: (i) Beschränktheit: Dies ist keine topologische Eigenschaft. Betrachte dazu die beschränkte Folge $x \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ mit $x_n := \frac{1}{n+1}$. Die Bildfolge $(n+1)_{n \in \mathbb{N}}$ unter dem Homöomorphismus $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, t \mapsto \frac{1}{t}$ ist aber nicht beschränkt.

(ii) Cauchyfolge: Das ist keine topologische Eigenschaft. Betrachte dazu die Cauchy-Folge $x \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ mit $x_n := \frac{1}{n+1}$. Die Bildfolge $(n+1)_{n \in \mathbb{N}}$ unter dem Homöomorphismus $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, t \mapsto \frac{1}{t}$ ist aber keine Cauchyfolge.

- (iii) Konvergenz: Dies ist eine topologische Eigenschaft, denn für jede konvergente Folge ist die Bildfolge unter einer stetigen Abbildung auch konvergent, denn in metrischen Räumen ist Stetigkeit und Folgenstetigkeit äquivalent.
- (iv) Vollständigkeit des metrischen Raums: Das ist keine topologische Eigenschaft, denn betrachte den vollständigen metrischen Raum $\mathbb{R}$ mit üblicher Metrik und den Homöomorphismus $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, t \mapsto e^t$, dann ist der Bildraum $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ nicht vollständig. ▲

1.3 Kompaktheit

Definition 1.19 (kompakt)

Ein topologischer Raum (X, τ) heißt *kompakt*, wenn zu jeder Überdeckung von X durch offene Mengen eine endliche Teilüberdeckung existiert, d.h. falls

$$\forall \mathcal{C} \subseteq \tau: \bigcup \mathcal{C} = X \implies \exists \mathcal{F} \subseteq_{fin} \mathcal{C}: \bigcup \mathcal{F} = X.$$

Eine Teilmenge $K \subseteq X$ heißt *kompakt*, falls $(K, \tau|_K)$ kompakt ist.

Bemerkung: Manche Autoren bezeichnen obiges auch als *quasikompakt* bzw. fordern zusätzlich, dass τ eine Hausdorff-Topologie auf X ist.

Satz 1.20 Sei (X, τ) ein topologischer Raum und sei $\alpha = \{A \subseteq X \mid X \setminus A \in \tau\}$ das System der abgeschlossenen Mengen. Dann sind äquivalent:

- (i) X kompakt.
- (ii) $\forall \mathcal{A} \subseteq \alpha: \forall \mathcal{F} \subseteq_{fin} \mathcal{A}: \bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset \implies \bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$.
- (iii) Jedes Netz aus X besitzt einen Häufungspunkt.

Beweis: • (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei X kompakt und sei $\mathcal{A} \subseteq \alpha$ mit $\forall \mathcal{F} \subseteq_{fin} \mathcal{A}: \bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Angenommen es wäre $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$, dann wäre die Menge der Komplemente $\mathcal{C}\mathcal{A} = \{C\mathcal{A} = X \setminus A \mid A \in \mathcal{A}\}$ eine Überdeckung von X wegen $\bigcup \mathcal{C}\mathcal{A} = \mathcal{C}(\bigcap \mathcal{A}) = \mathcal{C}\emptyset = X$ und damit existierte eine endliche Teilüberdeckung $\mathcal{C}\mathcal{F} \subseteq_{fin} \mathcal{C}\mathcal{A}$ mit $\bigcup \mathcal{C}\mathcal{F} = X$, d.h. $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$. Widerspruch!

- (ii) $\Rightarrow$ (i) Es gelte (ii) und sei $\mathcal{C} \subseteq \tau$ eine offene Überdeckung, d.h. es gilt $\bigcup \mathcal{C} = X$ und damit ist $\mathcal{C}\mathcal{C} \subseteq \alpha$ mit $\bigcap \mathcal{C}\mathcal{C} = \mathcal{C}(\bigcup \mathcal{C}) = \mathcal{C}X = \emptyset$. Angenommen X wäre nicht kompakt, d.h. für alle endlichen Teilmengen $\mathcal{F} \subseteq_{fin} \mathcal{C}$ wäre $\bigcup \mathcal{F} \neq X$, also $\bigcap \mathcal{C}\mathcal{F} \neq \emptyset$. Widerspruch!

- (i) $\Rightarrow$ (iii) Sei $x \in X^I$ ein Netz in X . Angenommen x hat keinen Häufungspunkt, d.h.

$$\forall y \in X \exists U_y \in \mathcal{U}(y) \exists i_y \in I \forall i \succ i_y: x_i \notin U_y.$$

Weiter gibt es für alle $y \in X$ stets eine offene Menge $O_y \in \tau$ mit $y \in O_y \subseteq U_y$ und damit ist $\{O_y \mid y \in X\}$ eine offene Überdeckung von X . Wegen der Kompaktheit gibt es eine endliche Menge $F \subseteq_{fin} X$ mit $\bigcup_{y \in F} O_y = X$. Wähle $i_0 \in I$ mit $i_0 \succ i_y$ für alle $y \in F$, dann gilt $x_{i_0} \notin \bigcup_{y \in F} O_y = X$ für alle $i \succ i_0$. Widerspruch!

- (iii) $\Rightarrow$ (i) Sei $\mathcal{C} \subseteq \tau$ mit $\bigcup \mathcal{C} = X$. Angenommen für alle endlichen $\mathcal{F} \subseteq_{fin} \mathcal{C}$ wäre $\bigcup \mathcal{F} \neq X$, dann betrachte für die gerichtete Menge $\wp_{fin}(\mathcal{C})$ aller endlichen Teilmengen von $\mathcal{C}$ ein Netz $x \in X^{\wp_{fin}(\mathcal{C})}$ mit $x_{\mathcal{F}} \notin \bigcup \mathcal{F}$ für alle $\mathcal{F} \subseteq_{fin} \mathcal{C}$. Nach Voraussetzung (iii) hat das Netz einen Häufungspunkt $y \in X$, also gilt $\forall \mathcal{F} \subseteq_{fin} \mathcal{C} \forall U \in \mathcal{U}(y) \cap \mathcal{F} \exists \mathcal{F}_0 \supseteq_{fin} \mathcal{F}: x_{\mathcal{F}_0} \in U$, aber das liegt im Widerspruch zu $x_{\mathcal{F}_0} \notin \bigcup \mathcal{F}_0 \supseteq \bigcup \mathcal{F} \supseteq U$. Also ist X kompakt.
- (ii) $\Rightarrow$ (iii) Sei $x \in X^I$ ein Netz. Betrachte $A_i = \{x_j \mid j \succ i\}$ für $i \in I$. Dann gibt es für alle endlichen Mengen $F \subseteq_{fin} I$ ein $i_0 \in I$ mit $i_0 \succ i$ für alle $i \in F$ und damit gilt $\emptyset \neq A_{i_0} \subseteq \bigcap_{i \in F} A_i$. Es folgt $A = \bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ nach (ii). Sei $y \in A$, dann ist y Häufungswert von x , denn sei $U \in \mathcal{U}(y)$ und $i \in I$, dann ist $U \cap \{x_j \mid j \succ i\} \neq \emptyset$, also folgt $U \cap \{x_j \mid j \succ i\} \neq \emptyset$.
- (iii) $\Rightarrow$ (ii) Sei $\mathcal{A} \subseteq \alpha$ mit $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ für alle $\mathcal{F} \subseteq_{fin} \mathcal{A}$. Betrachte die gerichtete Menge $\wp_{fin}(\mathcal{A})$ aller endlichen Teilmengen von $\mathcal{A}$ und ein Netz $x \in X^{\wp_{fin}(\mathcal{A})}$ mit $x_{\mathcal{F}} \in \bigcap \mathcal{F}$ für alle $\mathcal{F} \subseteq_{fin} \mathcal{A}$, dann hat x nach (iii) einen Häufungspunkt $y \in X$. Es folgt $y \in A$ für alle $A \in \mathcal{A}$, denn sei $A \in \mathcal{A}$ und $U \in \mathcal{U}(y)$, dann gibt es eine endliche Menge $\mathcal{F}_A \subseteq_{fin} \mathcal{A}$ mit $A \in \mathcal{F}_A$ und $x_{\mathcal{F}_A} \in U$. Weiter gilt $x_{\mathcal{F}_A} \in \bigcap \mathcal{F}_A \subseteq A$, also $U \cap A \neq \emptyset$, d.h. $y \in \overline{A} = A$. Schließlich folgt $y \in \bigcap \mathcal{A}$, d.h. $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

Lemma: Sei $K \subset X$ eine Teilmenge eines topologischen Raums (X, τ) . Dann ist K kompakt genau dann, wenn

$$\forall \mathcal{C} \subseteq \tau: \bigcup \mathcal{C} \supseteq K \implies \exists \mathcal{F} \subseteq_{fin} \mathcal{C}: \bigcup \mathcal{F} \supseteq K.$$

Beweis: ($\Rightarrow$) Sei K kompakt, und sei $\mathcal{C} \subseteq \tau$ mit $\bigcup \mathcal{C} \supseteq K$. Dann ist $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cap K \subseteq \tau|_K$ mit $\bigcup \mathcal{C}' = K$, also gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\mathcal{F}' \subseteq_{fin} \mathcal{C}'$ mit $\bigcup \mathcal{F}' = K$ bzw. $\mathcal{F} \subseteq_{fin} \mathcal{C}$ mit $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cap K$ und $\bigcup \mathcal{F} \supseteq K$.

($\Leftarrow$) Sei $\mathcal{C}' \subseteq \tau|_K$ eine Überdeckung von K . Es gibt also eine Menge $\mathcal{C} \subseteq \tau$ mit $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cap K$ und $\bigcup \mathcal{C} \supseteq K$ und damit existiert eine endliche Menge $\mathcal{F} \subseteq_{fin} \mathcal{C}$ mit $\bigcup \mathcal{F} \supseteq K$. Wähle $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cap K$ mit $\mathcal{F}' \subseteq_{fin} \mathcal{C}'$, dann gilt $\bigcup \mathcal{F}' = K$, also ist K kompakt.

Satz 1.21 Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $B \subseteq X$. Dann gelten:

- (i) Wenn X kompakt und B abgeschlossen ist, dann ist B kompakt.
- (ii) Wenn X hausdorffsch und B kompakt ist, dann ist B abgeschlossen.

Beweis: (i) Sei X kompakt und B abgeschlossen. Sei $\mathcal{C} \subseteq \tau$ eine Überdeckung von B , dann ist $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cup \{X \setminus B\}$ eine Überdeckung von X , also existiert eine endliche Teilüberdeckung $\mathcal{F}' \subseteq_{fin} \mathcal{C}'$. Schließlich ist $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \setminus \{X \setminus B\} \subseteq \mathcal{C}$ eine endliche Teilüberdeckung von B .

- (ii) Sei X hausdorffsch und B kompakt. Sei $x \in X \setminus B$. Weil X hausdorffsch ist, gilt

$$\forall y \in B \exists U_y \in \mathcal{U}(x) \cap \tau \exists V_y \in \mathcal{U}(y) \cap \tau: U_y \cap V_y = \emptyset$$

und dann ist $\{V_y \mid y \in B\}$ eine Überdeckung von B . Weiter existiert also eine endliche Menge $F \subseteq B$ mit $\bigcup_{y \in F} V_y \supseteq B$. Setze

$$U := \bigcap_{y \in F} U_y \in \mathcal{U}(x) \cap \tau \quad \text{und} \quad V := \bigcup_{y \in F} V_y \supseteq B,$$

dann ist $U \cap V = \emptyset$, also $U \cap B = \emptyset$ bzw. $U \subseteq X \setminus B$ und damit ist B abgeschlossen. ■

Satz 1.22 Seien $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ topologische Räume, X_1 kompakt und $f: X_1 \rightarrow X_2$ eine stetige Abbildung. Dann gelten:

- (i) $f(X_1)$ kompakt.
- (ii) Wenn X_2 hausdorffsch und f bijektiv, dann ist f ein Homöomorphismus.

Beweis: (i) Sei $\mathcal{C} \subseteq \tau_2$ eine Überdeckung von $f(X_1)$. Dann gilt $f(X_1) \subseteq \bigcup \mathcal{C}$, also folgt

$$X_1 \subseteq f^{-1}\left(\bigcup \mathcal{C}\right) = \bigcup f^{-1}(\mathcal{C})$$

und mit der Stetigkeit ist $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \tau_1$. Weiter ist X_1 kompakt, also gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\mathcal{F}' \subseteq_{fin} f^{-1}(\mathcal{C})$ und damit eine endliche Menge $\mathcal{F} \subseteq_{fin} \mathcal{C}$ mit $\mathcal{F}' = f^{-1}(\mathcal{F})$ und $X_1 \subseteq \bigcup \mathcal{F}' = \bigcup f^{-1}(\mathcal{F}) = f^{-1}(\bigcup \mathcal{F})$, d.h. $f(X_1) \subseteq \bigcup \mathcal{F}$.

- (ii) Sei f bijektiv, d.h. $\forall x_2 \in X_2 \exists! x_1 \in X_1: f(x_1) = x_2$. Setze $f^{-1}: X_2 \rightarrow X_1, x_2 \mapsto x_1$ mit $f(x_1) = x_2$. Zu zeigen verbleibt, dass f^{-1} stetig ist. Sei dazu $x_2 \in X_2$ und $U \in \mathcal{U}_1(f^{-1}(y))$. Für alle $y \in \overline{X_2 \setminus f(U)}$ gibt es Umgebungen $V_y \in \mathcal{U}_2(x_2) \cap \tau_2$ und $W_y \in \mathcal{U}_2(y) \cap \tau_2$ mit $V_y \cap W_y = \emptyset$. Dann ist $\{W_y \mid y \in X_2 \setminus f(U)\}$ eine Überdeckung von $\overline{X_2 \setminus f(U)}$ und damit existiert $F \subseteq_{fin} X_2 \setminus f(U)$ mit $\bigcup_{y \in F} W_y \supseteq \overline{X_2 \setminus f(U)} \supseteq X_2 \setminus f(U)$. Setze

■ $V := \bigcap_{y \in F} V_y \in \mathcal{U}_2(x_2)$, dann ist $V \cap (X_2 \setminus f(U)) = \emptyset$, also $V \subseteq f(U)$ bzw. $f^{-1}(V) \subseteq U$.

Folgerung 1.23 Seien τ_1, τ_2 zwei Topologien auf X mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) (X, τ_1) kompakt.
- (ii) (X, τ_2) hausdorffsch.
- (iii) $\tau_1 \supseteq \tau_2$

Dann gilt $\tau_1 = \tau_2$.

■ **Beweis:** Betrachte die identische Abbildung $\text{id}: (X, \tau_1) \rightarrow (X, \tau_2)$. Wegen $\text{id}^{-1}(\tau_2) = \tau_2 \subseteq \tau_1$ ist id stetig, also nach Satz 1.22 ein Homöomorphismus. Damit folgt $\text{id}(\tau_1) = \tau_1 \subseteq \tau_2$, also $\tau_1 = \tau_2$.

Definition (relativkompakt, lokalkompakt)

Eine Teilmenge $B \subseteq X$ eines topologischen Raums (X, τ) heißt

- (i) *relativkompakt*, wenn es eine kompakte Menge $K \supseteq B$ gibt.
- (ii) *lokalkompakt*, wenn jeder Punkt $x \in B$ eine kompakte Umgebung $K \in \mathcal{U}(x)$ besitzt.

Lemma: Sei (X, τ) hausdorffsch. Dann ist eine Menge $B \subseteq X$ relativkompakt genau dann, wenn $\overline{B}$ kompakt ist.

■ **Beweis:** Sei B relativkompakt, d.h. es gibt eine kompakte Obermenge $K \supseteq B$. Weiter ist K abgeschlossen, also gilt $K \supseteq \overline{B}$ und damit ist $\overline{B}$ kompakt. Die umgekehrte Richtung ist trivial.

Definition 1.24 (abzählbarkompakt, folgenkompakt)

Ein topologischer Raum (X, τ) heißt

- (i) *abzählbarkompakt*, wenn jede abzählbare offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung enthält.
- (ii) *folgenkompakt*, wenn jede Folge aus X eine in X konvergente Teilfolge besitzt.

Lemma: Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:

(i) X abzählbarkompakt.

(ii) Jede Folge aus X besitzt einen Häufungspunkt.

Beweis: • (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei X abzählbarkompakt und $x \in X^{\mathbb{N}}$ eine Folge aus X . Dann ist

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{x_k \mid k \geq n\}} \neq \emptyset,$$

denn sonst wäre $\{X \setminus \overline{\{x_k \mid k \geq n\}} \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Überdeckung und damit gäbe es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $X \setminus \overline{\{x_k \mid k \geq n_0\}} = X$. Widerspruch! Wähle also $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{x_k \mid k \geq n\}}$, und sei $U \in \mathcal{U}(y)$ eine Umgebung von y und $n \in \mathbb{N}$, dann ist $U \cap \overline{\{x_k \mid k \geq n\}} \neq \emptyset$. Damit folgt $U \cap \{x_k \mid k \geq n\} \neq \emptyset$, also ist y ein Häufungspunkt von x .

- (ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $\mathcal{C} = \{C_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq_{\text{abz}} \tau$ eine abzählbare offene Überdeckung von X . Angenommen es gibt keine endliche Teilüberdeckung, dann wähle für $n \in \mathbb{N}$

$$x_n \in X \setminus \bigcup_{k \leq n} C_k$$

und dann hat die Folge x nach (ii) einen Häufungspunkt y . Insbesondere gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y \in C_n \in \mathcal{U}(y)$ und C_n enthält unendlich viele Glieder von x . Nach Konstruktion der Folge x enthält C_n aber nur endlich viele Glieder von x , Widerspruch! ■

Lemma: In einem abzählbarkompakten topologischen Raum besitzt jede abzählbare unendliche Menge einen Häufungspunkt.

Beweis: Sei (X, τ) abzählbarkompakt und $B \subseteq X$ eine abzählbare Menge. Angenommen, B hat keinen Häufungspunkt, d.h.

$$\forall x \in X \exists U_x \in \mathcal{U}(x): (U_x \cap B) \setminus \{x\} = \emptyset.$$

Damit besteht B nur aus isolierten Punkten und es gilt $B = \overline{B}$. Insbesondere gibt es für jede solche Umgebung U_x eine offene Menge $O_x \in \tau$ mit $x \in O_x \subseteq U_x$ und $(O_x \cap B) \setminus \{x\} = \emptyset$. Nun ist $\{O_x \mid x \in B\} \cup \{X \setminus B\} \subseteq \tau$ eine abzählbare offene Überdeckung von X , also existiert eine endliche Menge $F \subseteq_{\text{fin}} B$ mit $B \subseteq \bigcup_{x \in F} O_x$. Aber es ist

$$((\bigcup_{x \in F} O_x) \setminus F) \cap B \subseteq (\bigcup_{x \in F} O_x \setminus \{x\}) \cap B = \bigcup_{x \in F} (O_x \cap B) \setminus \{x\} = \emptyset$$

und damit $(B \setminus F) \cap B = \emptyset$. Widerspruch! ■

Satz 1.25 Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Dann gelten:

(i) X kompakt $\implies X$ abzählbarkompakt

(ii) X folgenkompakt $\implies X$ abzählbarkompakt

Beweis: (i) trivial.

- (ii) Eine Folge mit konvergenter Teilfolge besitzt einen Häufungspunkt. Die Umkehrung gilt in topologischen Räumen, die das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen.

Definition 1.26 (präkompakt, totalbeschränkt)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. X heißt *präkompakt* bzw. *totalbeschränkt*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein *endliches* ε -Netz für X gibt, d.h. falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists F \subseteq_{\text{fin}} X: \bigcup_{x \in F} U_\varepsilon(x) = X.$$

Lemma: Jeder präkompakte metrische Raum ist beschränkt.

Beweis: Sei X präkompakt, es existiert daher ein endliches 1-Netz für X , d.h. es gibt eine endliche Menge $F \subseteq_{\text{fin}} X$ mit $\bigcup_{x \in F} U_1(x) = X$. Wähle $\varepsilon = 1 + \bigvee_{x,y \in F} d(x, y)$, dann gilt stets $X \subseteq U_\varepsilon(x)$ für $x \in F$ und damit ist X beschränkt.

Lemma: Für einen metrischen Raum (X, d) sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) X präkompakt
- (ii) Jede Folge aus X besitzt eine Cauchy-Teilfolge.

Beweis: • (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei X präkompakt und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus X . Für $\varepsilon > 0$ gibt es ein endliches ε -Netz für X , d.h. es existiert eine endliche Menge $F_\varepsilon \subseteq_{\text{fin}} X$ mit $\bigcup_{x \in F_\varepsilon} U_\varepsilon(x) = X$. Damit gibt es stets ein $x_\varepsilon \in F_\varepsilon$, sodass unendlich viele Glieder von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $U_\varepsilon(x_\varepsilon)$ liegen, also gibt es eine Teilfolge, die Cauchyfolge ist.

- (ii) $\Rightarrow$ (i) Jede Folge aus X besitze eine Cauchy-Teilfolge und angenommen, X wäre nicht präkompakt, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \forall F \subseteq_{\text{fin}} X \exists x \in X \forall y \in F: d(x, y) > \varepsilon.$$

Wähle $x_0 \in X$, dann gibt es ein $x_1 \in X$ mit $d(x_0, x_1) > \varepsilon$. Für die endliche Menge $\{x_0, x_1\} \subseteq_{\text{fin}} X$ existiert ein $x_2 \in X$ mit $d(x_0, x_2) > \varepsilon$ und $d(x_1, x_2) > \varepsilon$. Diese Konstruktion wird nun iterativ fortgeführt, d.h. für $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subseteq_{\text{fin}} X$ existiert ein $x_{n+1} \in X$ mit $d(x_0, x_{n+1}) > \varepsilon, d(x_1, x_{n+1}) > \varepsilon, \dots, d(x_n, x_{n+1}) > \varepsilon$. Dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit der Eigenschaft

$$\forall m \neq n: d(x_m, x_n) > \varepsilon,$$

d.h. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ enthält keine Cauchyteilfolge. Widerspruch!

Satz 1.27 (Schachtelsatz von Cantor) Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine absteigende Folge nichtleerer abgeschlossener Mengen, d.h. es gilt $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$, mit $\text{diam}(A_n) = \bigvee_{x, y \in A_n} d(x, y) \rightarrow 0$. Dann gibt es ein $x \in X$ mit

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x\}.$$

Beweis: Sei $y \in X^{\mathbb{N}}$ eine Folge mit $y_n \in A_n$. Dann ist y eine Cauchyfolge und wegen der Vollständigkeit konvergent gegen ein $x \in X$ mit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Für $x, x' \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ gilt $d(x, x') = 0$, also $x = x'$. ■

Satz 1.28 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann sind äquivalent:

- (i) X kompakt.
- (ii) X abzählbarkompakt.
- (iii) X folgenkompakt.
- (iv) X präkompakt und vollständig.

Beweis: • (i) $\Rightarrow$ (ii) trivial.

- (ii) $\Rightarrow$ (iii) gilt nach Satz 1.25.
- (iii) $\Rightarrow$ (iv) Sei X folgenkompakt. Angenommen, X wäre nicht präkompakt, d.h. es gäbe ein $\varepsilon > 0$, für das kein endliches ε -Netz für X existiert. Damit gibt es eine Folge x mit

$$x_n \in X \setminus \bigcup_{k < n} U_\varepsilon(x_k)$$

und es gilt stets $d(x_n, x_m) > \varepsilon$ für $n \neq m$, d.h. x hat keine konvergente Teilfolge im Widerspruch zur Folgenkompaktheit.

Sei weiter x eine Cauchyfolge aus X , dann besitzt x eine konvergente Teilfolge, also ist x selbst konvergent. Damit ist X vollständig.

- (iv) $\Rightarrow$ (i) Sei $\mathcal{C} \subseteq \tau$ eine offene Überdeckung von X . Angenommen es gibt keine endliche Teilüberdeckung. Es werden nun induktiv Mengen A_n konstruiert, sodass alle Voraussetzungen des Cantorsche Schachtelsatzes 1.27 erfüllt sind und außerdem sich kein A_n durch eine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{C}$ überdecken lässt. Setze $A_0 = X$ und $n = 0$.
- (*) Da $(A_n, d|_{A_n})$ präkompakt ist, existiert für A_n ein endliches $\frac{1}{2^n}$ -Netz, also

$$\exists F_n \subseteq_{fin} A_n: \bigcup_{x \in F_n} U_{\frac{1}{2^n}}(x) \supseteq A_n.$$

Eine Kugel $U_{\frac{1}{2^n}}(x_n)$ für ein $x_n \in F_n$ lässt sich nicht durch eine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{C}$ überdecken. Setze $A_{n+1} = B_{\frac{1}{2^n}}(x_n)$, erhöhe n um 1 und gehe zu (*).

Es gelten $A_{n+1} \subseteq A_n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\text{diam} A_n \rightarrow 0$. Da X vollständig ist, gibt es nun ein $x \in X$ mit

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x\}.$$

Weiter gibt es eine offene Menge C aus der Überdeckung $\mathcal{C}$ mit $x \in C$. Wegen $\text{diam} A_n \rightarrow 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A_n \subseteq C$. Das ist ein Widerspruch zur Konstruktion der A_n .

Folgerung 1.29 Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $B \subseteq X$. Dann sind äquivalent:

- (i) B relativkompakt.
- (ii) Jede Folge aus B besitzt eine in X konvergente Teilfolge.
- (iii) B präkompakt.

Beweis: • (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei B relativkompakt, dann ist $\bar{B}$ kompakt, also besitzt insbesondere jede Folge aus $B \subseteq \bar{B}$ eine in $\bar{B} \subseteq X$ konvergente Teilfolge.

- (ii) $\Rightarrow$ (iii) Aus (ii) folgt leicht, dass $\bar{B}$ folgenkompakt, also nach Satz 1.28 auch kompakt bzw. präkompakt ist. Sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein endliches $\frac{\varepsilon}{2}$ -Netz für $\bar{B}$, d.h. $\exists F' \subseteq_{\text{fin}} \bar{B}$ mit $\bigcup_{y \in F'} U_{\frac{\varepsilon}{2}}(y) \supseteq \bar{B}$. Wähle $x_y \in B \cap U_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)$ und setze $F = \{x_y \mid y \in F'\}$, dann gilt wegen $U_\varepsilon(x_y) \supseteq U_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)$

$$\bigcup_{x \in F} U_\varepsilon(x) \supseteq \bigcup_{y \in F'} U_{\frac{\varepsilon}{2}}(y) \supseteq \bar{B} \supseteq B,$$

also ist B präkompakt.

- (iii) $\Rightarrow$ (i) Sei B präkompakt, dann ist auch $\bar{B}$ präkompakt, denn jedes endliche $\frac{\varepsilon}{2}$ -Netz für B ist ein endliches ε -Netz für $\bar{B}$. Weiter ist $\bar{B}$ vollständig, also ist $\bar{B}$ kompakt und damit ist B relativkompakt.

Folgerung: Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig.

Aufgaben

Aufgabe 1.3.1 Sei $p \in [1, \infty)$ und $B \subseteq \ell_p$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (i) B ist präkompakt.

(ii) B ist beschränkt und $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall x \in B: \sum_{k \geq n} |x_k|^p < \varepsilon^p$.

Lösung: • (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei B präkompakt, es existiert daher ein endliches 1-Netz für B , d.h. es gibt eine endliche Menge $F \subseteq_{\text{fin}} B$ mit $\bigcup_{x \in F} U_1(x) \supseteq B$. Wähle $\varepsilon = 1 + \bigvee_{x,y \in F} d_p(x,y)$, dann gilt stets $B \subseteq U_\varepsilon(x)$ für $x \in F$ und damit ist B beschränkt.

Sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein endliches $\frac{\varepsilon}{2}$ -Netz F für B . Für jedes Element $y \in F$ gibt es einen Index $n_y \in \mathbb{N}$ mit

$$\left(\sum_{k \geq n_y} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

dann setze $n = \bigvee_{y \in F} n_y < \infty$ und es gilt für alle $y \in F$ stets

$$\left(\sum_{k \geq n} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei nun $x \in B$, dann gibt es ein $y \in F$ mit $d_p(x,y) < \frac{\varepsilon}{2}$ und es folgt mit der Minkowski-Ungleichung

$$\left(\sum_{k \geq n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \underbrace{\left(\sum_{k \geq n} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}}_{\leq d_p(x,y) < \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\left(\sum_{k \geq n} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon.$$

• (ii) $\Rightarrow$ (i) ▲

Aufgabe 1.3.2 Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Zeigen Sie:

- (i) Ohne die Voraussetzung „ X ist hausdorffsch“ die Aussage „kompakte Teilmengen topologischer Räume sind abgeschlossen“ falsch ist.
- (ii) Sei X hausdorffsch und $K, L \subseteq X$ seien disjunkt und kompakt. Dann gibt es disjunkte offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $K \subseteq U$ und $L \subseteq V$. (Hinweis: Beginnen Sie als ersten Schritt mit: L ist einpunktig.)

Lösung: (i) Betrachte $X = \{0, 1\}$ mit der Topologie $\tau = \{\emptyset, \{0\}, X\}$. Dann ist τ nicht hausdorffsch. Die Menge $\{0\}$ ist kompakt, aber nicht abgeschlossen, denn $X \setminus \{0\} = \{1\} \notin \tau$.

- (ii) Der Fall $L = \emptyset$ ist trivial, wähle $U = X$ und $V = \emptyset$. Sei also im ersten Schritt $L = \{l\}$ kompakt. Da X hausdorffsch ist, gilt

$$\forall x \in K \exists U_x \in \mathcal{U}(x) \cap \tau \exists V_x \in \mathcal{U}(l) \cap \tau: U_x \cap V_x = \emptyset$$

und dann ist $\{U_x \mid x \in K\}$ eine offene Überdeckung von K . Wegen der Kompaktheit von K gibt es eine endliche Menge $F \subseteq_{fin} K$, sodass $\{U_x \mid x \in F\}$ eine endliche Teilüberdeckung von K ist. Setze

$$U = \bigcup_{x \in F} U_x \in \tau \quad \text{und} \quad V = \bigcap_{x \in F} V_x \in \tau,$$

dann gilt $K \subseteq U$ und $L \subseteq V$ sowie $U \cap V = \emptyset$.

Für den zweiten Schritt habe L mindestens zwei Elemente. Nach dem ersten Schritt gibt es für alle $x \in L$ disjunkte offene Mengen U_x, V_x mit $K \subseteq U_x$ und $x \in V_x$. Dann ist $\{V_x \mid x \in L\}$ eine offene Überdeckung von L und damit existiert eine endliche Menge $F \subseteq L$, sodass $\{V_x \mid x \in F\}$ eine endliche Teilüberdeckung ist. Setze

$$U = \bigcap_{x \in F} U_x \in \tau \quad \text{und} \quad V = \bigcup_{x \in F} V_x \in \tau,$$

▲ dann gilt $K \subseteq U$ und $L \subseteq V$ sowie $U \cap V = \emptyset$.

Aufgabe 1.3.3 Betrachte in $\mathbb{R}$ die beiden folgenden Mengensysteme:

$$\tau_{fin} = \{O \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus O \text{ endlich}\}$$

$$\tau_{coc} = \{O \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus O \text{ abzählbar}\}$$

- (i) Zeigen Sie, dass beiden Mengensysteme Topologien definieren.
- (ii) Sind diese Topologien hausdorffsch?
- (iii) Untersuchen Sie die Konvergenz von Folgen bezüglich beider Topologien.
- (iv) $M = [0, 1]$ ist bezüglich dieser Topologien nicht abgeschlossen, warum? Man bestimme den Abschluss von M . Reicht es aus, zu M die Grenzwerte in $\mathbb{R}$ konvergenter Folgen aus M hinzuzunehmen?
- (v) Untersuchen Sie $M = [0, 1]$ bezüglich beider Topologien auf Kompaktheit.

Lösung: (i) Die beliebige Vereinigung von Komplementen endlicher/abzählbarer Mengen ist das Komplement des Schnitts der endlichen/abzählbaren Mengen, also offen. Der endliche Schnitt von Komplementen endlicher/abzählbarer Mengen ist das Komplement der endlichen Vereinigung der endlichen/abzählbaren Mengen, also offen.

- (ii) Angenommen es gibt endliche/abzählbare Teilmengen $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ mit $(\mathbb{R} \setminus X) \cap (\mathbb{R} \setminus Y) = \emptyset$, dann wäre $\mathbb{R} \setminus (X \cup Y) = \emptyset$, d.h. $X \cup Y = \mathbb{R}$. Widerspruch!

Also sind die Topologien nicht hausdorffsch.

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned}
 x \xrightarrow{\tau_{fin}} y &\iff \forall U \in \mathcal{U}(y) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: x_n \in U \\
 &\iff \forall F \subseteq_{fin} \mathbb{R} \setminus \{y\} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: x_n \in \mathbb{R} \setminus F \\
 &\iff \forall z \neq y \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: x_n \neq z \\
 &\iff \forall z \neq y: \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = z\} \text{ endlich}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 x \xrightarrow{\tau_{coc}} y &\iff \forall U \in \mathcal{U}(y) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: x_n \in U \\
 &\iff \forall F \subseteq_{abz} \mathbb{R} \setminus \{y\} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: x_n \in \mathbb{R} \setminus F \\
 &\iff \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: x_n = y
 \end{aligned}$$

Betrachte für die letzte Äquivalenz die abzählbare Menge $(\text{im } x) \setminus \{y\}$.

- (iv) Eine Menge ist abgeschlossen genau dann, wenn sie endlich bzw. abzählbar ist. Also ist $[0, 1]$ nicht abgeschlossen und es gibt auch keine abgeschlossene Obermenge, also gilt in beiden Fällen $\overline{[0, 1]} = \mathbb{R}$.
- (v) $[0, 1]$ ist τ_{fin} -kompakt genau dann, wenn jedes Netz aus $[0, 1]$ einen Häufungspunkt besitzt. Für alle Netze x und Punkte y gilt

$$\begin{aligned}
 x \text{ hat Häufungspunkt } y &\iff \forall U \in \mathcal{U}(y) \forall i \in I \exists i_0 \succ i: x_{i_0} \in U \\
 &\iff \forall F \subseteq_{fin} \mathbb{R} \setminus \{y\} \forall i \in I \exists i_0 \succ i: x_{i_0} \in \mathbb{R} \setminus F \\
 &\iff \forall z \neq y \forall i \in I \exists i_0 \succ i: x_{i_0} \neq z.
 \end{aligned}$$

Angenommen, das wäre nicht so, d.h. es gibt eine Folge x , sodass

$$\forall y \in X \exists z \neq y \exists i_0 \in I \forall i \succ i_0: x_i = z,$$

dann wähle $y_0 \in X$ beliebig, es gibt $z_0 \neq y_0$ und $i_0 \in I$ mit $x_i = z_0$ für alle $i \succ i_0$, und weiter gibt es für z_0 ein $z_1 \neq z_0$ und $i_1 \in I$, sodass $x_i = z_1$ für alle $i \succ i_1$ gilt. Nun existiert ein $i_2 \in I$ mit $i_2 \succ i_1$ und $i_2 \succ i_0$, und damit gilt für $i \succ i_2$ stets $x_i = z_0 \neq z_1 = x_{i_2}$. Widerspruch! Also ist $[0, 1]$ folglich τ_{fin} -kompakt.

$[0, 1]$ ist τ_{coc} -kompakt genau dann, wenn

$$\forall \mathcal{X} \subseteq \wp_{abz}(\mathbb{R}): [0, 1] \cap \bigcap \mathcal{X} = \emptyset \implies \exists \mathcal{F} \subseteq_{fin} \mathcal{X}: [0, 1] \cap \bigcap \mathcal{F} = \emptyset.$$

Betrachte die Menge $\mathcal{X} = \{ \{1 - \frac{1}{n} \mid n \geq k\} \mid k \in \mathbb{N} \}$, dann gilt $\bigcap \mathcal{X} = \emptyset$. Jedoch gibt es für alle endlichen $\mathcal{F} \subseteq_{fin} \mathcal{X}$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\bigcap \mathcal{F} = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \geq k_0\} \neq \emptyset$, also ist $[0, 1]$ nicht τ_{coc} -kompakt. ▲

1.4 Filter und der Satz von TYCHONOFF

Definition (Filter)

Sei X eine Menge.

- (i) Eine Menge $\mathcal{F} \subseteq \wp(X)$ von Teilmengen von X heißt *Filter* auf X , falls gelten:
 - $\emptyset \notin \mathcal{F}, X \in \mathcal{F}$
 - $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}: F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$
 - $\forall A \subseteq X: (\exists F \in \mathcal{F}: F \subseteq A) \Rightarrow A \in \mathcal{F}$
- (ii) Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ heißt *Filterbasis* für $\mathcal{F}$, wenn

$$\forall F \in \mathcal{F} \exists B \in \mathcal{B}: B \subseteq F.$$
- (iii) Für einen Filter $\mathcal{F}$ auf X und eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt der Filter $f(\mathcal{F})$ auf $f(X)$, der $\{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ als Filterbasis hat, *Bildfilter* von $\mathcal{F}$ unter f .
- (iv) Ein Filter $\mathcal{F}_1$ heißt *schwächer* bzw. *größer* als ein Filter $\mathcal{F}_2$ und entsprechend heißt $\mathcal{F}_2$ *stärker* bzw. *feiner* als $\mathcal{F}_1$, wenn $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ gilt.
- (v) Ein Filter $\mathcal{F}$ heißt *Ultrafilter*, wenn $\mathcal{F}$ in keinem echten Oberfilter enthalten ist.

Lemma: Ein nichtleeres System $\mathcal{B}$ von nichtleeren Teilmengen von X ist eine Filterbasis genau dann, wenn

$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \exists B_3 \in \mathcal{B}: B_3 \subseteq B_1 \cap B_2.$$

Beweis:

- $(\Rightarrow)$ Sei $\mathcal{B}$ eine Filterbasis für $\mathcal{F}$ und seien $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Dann ist $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F}$ und nach Definition der Filterbasis gibt es ein $B_3 \in \mathcal{B}$ mit $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.
- $(\Leftarrow)$ Die Menge $\mathcal{F} = \{F \subseteq X \mid \exists B \in \mathcal{B}: B \subseteq F\}$ ist ein Filter, denn:
 - (i) Es sind $\emptyset \notin \mathcal{F}$ und $X \in \mathcal{F}$.
 - (ii) Für $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ gibt es $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ mit $B_1 \subseteq F_1$ und $B_2 \subseteq F_2$. Nach Voraussetzung existiert dann ein $B_3 \in \mathcal{B}$ mit $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq F_1 \cap F_2$, d.h. $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.
 - (iii) Sei $A \subseteq X$ und $F \in \mathcal{F}$ mit $F \subseteq A$. Es gibt ein $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq F$, also folgt sofort $A \in \mathcal{F}$.

Lemma: Jeder Filter ist in einem Ultrafilter enthalten.

Beweis: Sei $\mathcal{F}_0$ ein Filter auf einer Menge X . Betrachte die Menge aller Oberfilter von $\mathcal{F}_0$

$$\Phi := \{\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}_0 \mid \mathcal{F} \text{ Filter auf } X\},$$

diese ist geordnet durch die Teilmengeninklusion bzw. Filtervergleichsrelation $\subseteq$. Sei Φ_0 eine Kette in Φ , dann ist $\bigcup \Phi_0$ ein Oberfilter für alle $\mathcal{F} \in \Phi_0$, d.h. eine obere Schranke von Φ_0 . Nach dem Lemma A.1 von ZORN hat Φ ein maximales Element $\mathcal{G}$. Natürlich ist $\mathcal{G}$ ein Ultrafilter und enthält $\mathcal{F}_0$. ■

Lemma: Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann ist der Bildfilter $f(\mathcal{F})$ ein Ultrafilter auf $f(X)$.

Beweis: • $f(\mathcal{F})$ Filter:

- (i) Es gilt für alle $F \in \mathcal{F}$ stets $F \neq \emptyset$, also $f(F) \neq \emptyset$ und demnach $\emptyset \notin f(\mathcal{F})$. Wegen $X \in \mathcal{F}$ folgt sofort $f(X) \in f(\mathcal{F})$.
- (ii) Seien $A, B \in f(\mathcal{F})$, d.h. es gibt $F_A, F_B \in \mathcal{F}$ mit $A = f(F_A)$ und $B = f(F_B)$. Dann gilt $F_A \cap F_B \in \mathcal{F}$ und damit

$$A \cap B = f(F_A) \cap f(F_B) \supseteq f(F_A \cap F_B) \in f(\mathcal{F}).$$

Wegen (iii) folgt $A \cap B \in f(\mathcal{F})$.

- (iii) Sei $A \subseteq f(X)$ und $B \in f(\mathcal{F})$ mit $B \subseteq A$, d.h. $\exists F_B \in \mathcal{F}: f(F_B) = B$. Es folgt

$$F_B \subseteq f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A)$$

und damit ist $F_A := f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ mit $f(F_A) = A \in f(\mathcal{F})$.

- $f(\mathcal{F})$ Ultrafilter: Sei $\mathcal{G} \subseteq f(\mathcal{F})$ ein Filter auf $f(X)$. Für alle $G \in \mathcal{G}$ existiert ein $F \in \mathcal{F}$ mit $f(F) = G$ bzw. $F \subseteq f^{-1}(G)$. Demnach gilt stets $f^{-1}(G) \in \mathcal{F}$, d.h.

$$f^{-1}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{F}.$$

Nun ist $f^{-1}(\mathcal{G})$ ein Filter auf X , denn:

- (i) Mit $\emptyset \notin \mathcal{F}$ folgt $\emptyset \notin f^{-1}(\mathcal{G})$. Es ist $f(X) \in \mathcal{G}$ und folglich $X = f^{-1}(f(X)) \in f^{-1}(\mathcal{G})$.
- (ii) Für $A, B \in f^{-1}(\mathcal{G})$ gibt es $G_A, G_B \in \mathcal{G}$ mit $f^{-1}(G_A) = A$ und $f^{-1}(G_B) = B$. Mit $G_A \cap G_B \in \mathcal{G}$ folgt

$$A \cap B = f^{-1}(G_A) \cap f^{-1}(G_B) = f^{-1}(G_A \cap G_B) \in f^{-1}(\mathcal{G}).$$

- (iii) Sei $A \subseteq X$ und $B \in f^{-1}(\mathcal{G})$ mit $B \subseteq A$. Wir haben $B = f^{-1}(G_B)$ für ein $G_B \in \mathcal{G}$ und es gilt $G_B = f(B) \subseteq f(A)$. Demnach ist $f(A) \in \mathcal{G}$ und schließlich $A = f^{-1}(f(A)) \in f^{-1}(\mathcal{G})$.

Weil $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, muss $f^{-1}(\mathcal{G}) = \mathcal{F}$ gelten und es folgt

$$\mathcal{G} = f(\mathcal{F}),$$

also ist $f(\mathcal{F})$ ein Ultrafilter. ■

Definition (konvergent)

Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

- (i) Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X heißt *konvergent* gegen $x \in X$, wenn $\mathcal{F}$ stärker als der UmgebungsfILTER $\mathcal{U}(x)$ ist, d.h.

$$\mathcal{F} \supseteq \mathcal{U}(x).$$

Wir schreiben dafür $\mathcal{F} \rightarrow x$.

- (ii) Ein $x \in X$ heißt *Berührungspunkt* des Filters $\mathcal{F}$ auf X , falls

$$\forall U \in \mathcal{U}(x) \forall F \in \mathcal{F}: F \cap U \neq \emptyset.$$

Lemma: Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X und $x \in X$. Dann sind äquivalent:

- (i) x ist Berührungspunkt von $\mathcal{F}$.
- (ii) $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \bar{F}$.
- (iii) $\mathcal{F}$ ist in einem gegen x konvergenten Oberfilter enthalten.

Beweis: • (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Die Bedingung $\forall F \in \mathcal{F} \forall U \in \mathcal{U}(x): F \cap U \neq \emptyset$ ist äquivalent zu $\forall F \in \mathcal{F}: x \in \bar{F}$ und das ist gleichbedeutend mit $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \bar{F}$.

- (i) $\Leftrightarrow$ (iii) Sei x Berührungspunkt von $\mathcal{F}$. Betrachte die Filterbasis $\mathcal{B} := \{F \cap U \mid F \in \mathcal{F}, U \in \mathcal{U}(x)\}$ für einen Filter $\mathcal{G}$. Wegen $x \in \mathcal{F}$ gilt $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{B}$, also konvergiert $\mathcal{G}$ gegen x . Mit $x \in \mathcal{U}(x)$ folgt $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ und damit ist $\mathcal{G}$ stärker als $\mathcal{F}$, d.h. ein Oberfilter.
- (iii) $\Leftrightarrow$ (i) Umgekehrt sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ mit $\mathcal{G} \rightarrow x$, d.h. $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{G}$. Damit folgt stets $F \cap U \neq \emptyset$, denn der Filter $\mathcal{G}$ enthält nicht die leere Menge. Also ist x ein Berührungspunkt von $\mathcal{F}$.

Satz 1.30 Sei (X, τ) ein topologischer Raum, dann sind äquivalent:

- (i) X kompakt.
- (ii) Jedes System abgeschlossener Mengen mit der endlichen Durchschnittseigenschaft (d.h. endliche Durchschnitte sind nichtleer) hat einen nichtleeren Durchschnitt.
- (iii) Jeder Filter auf X besitzt einen Berührungspunkt.
- (iv) Jeder Ultrafilter konvergiert.

Beweis: • (i) $\Rightarrow$ (ii) folgt einfach durch Komplementbildung.

- (ii) $\Rightarrow$ (iii) Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X . Betrachte das System der abgeschlossenen Mengen $\overline{\mathcal{F}} := \{\overline{F} \mid F \in \mathcal{F}\}$. Es gilt nach Definition eines Filters stets $\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \supseteq \overline{F_1 \cap F_2} \in \mathcal{F}$ und $\emptyset \notin \mathcal{F}$, d.h. $\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \neq \emptyset$. Durch wiederholte Anwendung erhalten wir, dass je endlich viele Mengen aus $\overline{\mathcal{F}}$ einen nicht-leeren Durchschnitt haben und folglich gilt $\bigcap \overline{\mathcal{F}} \neq \emptyset$. Nach obigen Lemma ist also jedes $x \in \bigcap \overline{\mathcal{F}}$ ein Berührungspunkt von $\mathcal{F}$.
- (iii) $\Rightarrow$ (iv) Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter, d.h. $\mathcal{F}$ ist in keinem echten Oberfilter enthalten. Nach Voraussetzung hat $\mathcal{F}$ einen Berührungspunkt x und damit existiert ein gegen x konvergenter Oberfilter $\mathcal{G}$ von $\mathcal{F}$. Nun kann $\mathcal{G}$ kein echter Oberfilter sein, d.h. $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ und schließlich konvergiert $\mathcal{F}$ gegen x .
- (iv) $\Rightarrow$ (i) Sei $(O_i)_{i \in I} \subseteq \tau$ eine offene Überdeckung von X . Angenommen, es gäbe keine endliche Teilüberdeckung, dann gilt für jede endliche Teilmenge $J \subseteq_{\text{fin}} I$

$$A_J := \mathbb{C} \bigcup_{i \in J} O_i \neq \emptyset.$$

Für die Mengen A_J gilt

$$A_{J_1} \cap A_{J_2} = \mathbb{C} \bigcup_{i \in J_1} O_i \cap \mathbb{C} \bigcup_{i \in J_2} O_i = \bigcap_{i \in J_1 \cup J_2} \mathbb{C} O_i = \mathbb{C} \bigcup_{i \in J_1 \cup J_2} O_i = A_{J_1 \cup J_2}$$

und $J_1 \cup J_2$ ist eine endliche Teilmenge von I , also bildet

$$\mathcal{B} := \{A_J \mid J \subseteq_{\text{fin}} I\}$$

eine Filterbasis für einen Filter $\mathcal{F}$. Weiter ist $\mathcal{F}$ in einem Ultrafilter $\mathcal{G}$ enthalten, der nach (iv) gegen ein $x \in X$ konvergiert, d.h. $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{G}$. Es gilt $x \in O_i$ für ein $i \in I$ und damit $O_i \in \mathcal{G}$. Nach Konstruktion von $\mathcal{G}$ ist aber auch $A_{\{i\}} = \mathbb{C} O_i \in \mathcal{G}$. Widerspruch! ■

Theorem 1.31 (TYCHONOFF) Ein nichtleerer Produktraum

$$X = \prod_{i \in I} X_i$$

von topologischen Räumen X_i ist kompakt genau dann, wenn jedes X_i kompakt ist.

- Beweis:** • ($\Rightarrow$) Sei X kompakt. Nach Definition der Produkttopologie sind die Projektionen $pr_i: X \rightarrow X_i$ stetig. Mit Satz 1.22 folgt die Kompaktheit von $X_i = pr_i^{-1}(X)$.
- ($\Leftarrow$) Seien nun die X_i kompakt. Ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X , dann ist der Bildfilter $pr_i(\mathcal{F})$ ein Ultrafilter auf X_i und nach dem Satz 1.30 konvergiert jeder Bildfilter $pr_i(\mathcal{F})$ gegen ein $x_i \in X_i$. Da die projizierten Filter konvergieren, konvergiert $\mathcal{F}$ gegen $x = (x_i)_{i \in I}$. Schließlich ist X kompakt wegen Satz 1.30. ■

2 Normierte Räume und lineare Operatoren

2.1 Normierte Räume und Banachräume

Definition 2.1 (Norm)

Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine *Halbnorm* p auf X ist eine Abbildung $p: X \rightarrow [0, \infty)$ mit

- (i) $p(\lambda \cdot x) = |\lambda| \cdot p(x)$ (homogen)
- (ii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (subadditiv)

für alle $x, y \in X$. Wenn zusätzlich

- (iii) $p(x) = 0 \implies x = 0$ (definit)

für $x \in X$ gilt, dann ist p eine *Norm*, geschrieben $p = \|\cdot\|$. (X, p) bzw. $(X, \|\cdot\|)$ heißt dann *(halb-)normierter Raum*. Jede Halbnorm p erzeugt eine Halbmetrik $d: (x, y) \mapsto p(x - y)$ und jede Norm $\|\cdot\|$ induziert eine Metrik $d: (x, y) \mapsto \|x - y\|$. Ein vollständiger normierter Raum heißt *Banachraum*.

Bemerkung 2.2 (i) In einem Banachraum X ist jeder abgeschlossene Teilvektorraum $X_0 \subseteq X$ auch ein Banachraum.

(ii) In einem normierten Raum X ist jeder vollständige Teilvektorraum $X_0 \subseteq X$ abgeschlossen.

(iii) Die (Halb-)Normeigenschaften bedeuten, dass im Vektorraum X die algebraischen Operationen Addition und Skalarmultiplikation stetig sind.

Satz 2.3 Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) X Banachraum.

(ii) $\forall x \in X^{\mathbb{N}}: \sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty \implies \exists y \in X: y = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = \lim_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k < n} x_k$

Beweis: • (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei X ein Banachraum und sei $x \in X^{\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$. Dann ist $(\sum_{k < n} x_k)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, denn es gilt für $m < n$

$$\left\| \sum_{k < m} x_k - \sum_{k < n} x_k \right\| = \left\| \sum_{m \leq k < n} x_k \right\| \leq \sum_{m \leq k < n} \|x_k\| \rightarrow 0.$$

Da X vollständig ist, konvergiert die Folge gegen ein Element $y = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \in X$.

• (ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $x \in X^{\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Dann gibt es eine monoton wachsende Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ aus $\mathbb{N}$ mit $\|x_m - x_n\| < \frac{1}{2^k}$ für alle $m, n \geq n_k$, und insbesondere gilt stets $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$. Damit folgt

$$\|x_{n_0}\| + \sum_{k \in \mathbb{N}} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \infty$$

und nach Voraussetzung konvergiert also

$$(x_{n_0} + \sum_{i < k} (x_{n_{i+1}} - x_{n_i}))_{k \in \mathbb{N}} = (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}},$$

d.h. x hat eine konvergente Teilfolge, also ist x selbst konvergent. Damit ist X vollständig bzw. ein Banachraum. ■

Lemma: Für einen normierten Raum X gilt

$$X \text{ vollständig} \iff B_1(0) \text{ vollständig} \iff S_1(0) \text{ vollständig.}$$

Beispiel 2.4 (i) Sei X ein topologischer Raum, dann ist die Menge der stetigen und beschränkten $\mathbb{K}$ -wertigen Funktionen auf X

$$C_b(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ stetig und beschränkt}\}$$

mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_{\infty} = \bigvee_{x \in X} |f(x)|$$

ein Banachraum. Die Konvergenz bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{\infty}$ auf $C_b(X)$ ist die *gleichmäßige Konvergenz*.

Beweis: Die Normeigenschaften sind offensichtlich. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge aus $C_b(X)$, dann gilt

$$\|f_m - f_n\|_\infty = \bigvee_{x \in X} |f_m(x) - f_n(x)| \rightarrow 0.$$

Es folgt

$$\forall x \in X: |f_m(x) - f_n(x)| \rightarrow 0,$$

d.h. alle Koordinatenfolgen $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ für $x \in X$ sind Cauchyfolgen. Es ist $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ vollständig, also konvergieren die Koordinatenfolgen. Damit definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \end{aligned}$$

dann konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f , denn es gilt

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_\infty &= \bigvee_{x \in X} |f(x) - f_n(x)| \\ &= \bigvee_{x \in X} \left| \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) - f_n(x) \right| \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \bigvee_{x \in X} |f_m(x) - f_n(x)| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Weiter ist f beschränkt, denn wegen $\|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|f - f_{n_0}\|_\infty < 1$ und damit folgt

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| < 1 + \|f_{n_0}\|_\infty < \infty$$

für alle $x \in X$. Es verbleibt noch die Stetigkeit von f zu zeigen. Sei dazu $x \in X$ und $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $\|f - f_{n_1}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ und wegen der Stetigkeit von f_{n_1} existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $y \in X$ aus $d(x, y) < \delta$ stets $|f_{n_1}(x) - f_{n_1}(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ folgt. Dann gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq \underbrace{|f(x) - f_{n_1}(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{n_1}(x) - f_{n_1}(y)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{n_1}(y) - f(y)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon.$$

Damit ist f stetig und liegt in $C_b(X)$. Also ist $C_b(X)$ vollständig. ■

Sei $C(X)$ die Menge der stetigen $\mathbb{K}$ -wertigen Abbildungen auf X . Falls X kompakt ist, dann ist eine stetige Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ stets beschränkt, denn $f(X)$ ist kompakt, also präkompakt, also beschränkt. In diesem Fall gilt also

$$C_b(X) = C(X).$$

(ii) Sei $p \in [1, \infty)$ und betrachte den Folgenraum

$$\ell_p = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p < \infty\},$$

dann ist

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

eine Norm auf ℓ_p .

Beweis: Die Definitheit und Homogenität sind trivial. Zum Beweis der Subadditivität. Sei $p \in (1, \infty)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Die Funktion $\ln$ ist konkav, also gilt für $u, v > 0$ und $a + b = 1$ stets $\ln(u^a \cdot v^b) = a \cdot \ln u + b \cdot \ln v \leq \ln(a \cdot u + b \cdot v)$ und da $\ln$ streng monoton wachsend ist folgt

$$u^a \cdot v^b \leq a \cdot u + b \cdot v.$$

Weiter gilt damit für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $x \in \ell_p, y \in \ell_q$

$$\left(\frac{|x_n|^p}{\|x\|_p^p} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{|y_n|^q}{\|y\|_q^q} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|x_n|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|y_n|^q}{\|y\|_q^q}$$

und Summation über n liefert

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|x_n|}{\|x\|_p} \cdot \frac{|y_n|}{\|y\|_q} &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{p} \cdot \frac{|x_n|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|y_n|^q}{\|y\|_q^q} \right) \\ &= \frac{1}{p} \cdot \frac{\|x\|_p^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\|y\|_q^q}{\|y\|_q^q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &= 1, \end{aligned}$$

also folgt die *Hölder-Ungleichung*

$$\|x \cdot y\|_1 \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q.$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p^p &= \|(x + y)^p\|_1 \\ &= \|(x + y) \cdot (x + y)^{p-1}\|_1 \\ &\leq \|x \cdot (x + y)^{p-1}\|_1 + \|y \cdot (x + y)^{p-1}\|_1 \\ &\leq \|x\|_p \cdot \|(x + y)^{p-1}\|_q + \|y\|_p \cdot \|(x + y)^{p-1}\|_q \end{aligned}$$

und mit $(p-1) \cdot q = p$ folgt

$$||x+y||_p^p \leq (||x||_p + ||y||_p) \cdot \left(||x+y||_p^p\right)^{\frac{1}{q}},$$

insgesamt haben wir damit die *Minkowski-Ungleichung*

$$||x+y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p.$$

Die Minkowski-Ungleichung gilt auch für $p = 1$, das folgt einfach aus der Dreiecksungleichung für den Betrag $|\cdot|$ in $\mathbb{K}$. ■

Der Folgenraum

$$\ell_\infty = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \bigvee_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$$

mit

$$||x||_\infty = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

ist ein normierter Raum. Die Normeigenschaften sind einfach nachzuweisen.

Satz 2.5 Seien $p, q \in [1, \infty]$ mit $p < q$. Dann gelten:

- (i) ℓ_p vollständig.
- (ii) $\ell_p \subsetneq \ell_q$.
- (iii) Die Einbettung $j: \ell_p \rightarrow \ell_q$ ist stetig.

Beweis: (i) Sei $p \in [1, \infty]$ und $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} = ((x_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in ℓ_p , d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0: ||x^{(m)} - x^{(n)}||_p < \varepsilon$$

und damit folgt insbesondere $|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}| < \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$, d.h. jede Koordinatenfolge $(x_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$. Nun ist $\mathbb{K}$ vollständig, also konvergiert jede Koordinatenfolge gegen ein Element

x_k . Setze $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, dann gilt $x^{(n)} \rightarrow x$, denn

$$\begin{aligned} \|x - x^{(n)}\|_p^p &= \sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k - x_k^{(n)}|^p \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \left| \lim_{m \in \mathbb{N}} x_k^{(m)} - x_k^{(n)} \right|^p \\ &= \lim_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k^{(m)} - x_k^{(n)}|^p \\ &= \lim_{m \in \mathbb{N}} \|x^{(m)} - x^{(n)}\|_p^p \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

bzw. für $p = \infty$

$$\begin{aligned} \|x - x^{(n)}\|_\infty &= \bigvee_{k \in \mathbb{N}} |x_k - x_k^{(n)}| \\ &= \bigvee_{k \in \mathbb{N}} \left| \lim_{m \in \mathbb{N}} x_k^{(m)} - x_k^{(n)} \right| \\ &= \lim_{m \in \mathbb{N}} \bigvee_{k \in \mathbb{N}} |x_k^{(m)} - x_k^{(n)}| \\ &= \lim_{m \in \mathbb{N}} \|x^{(m)} - x^{(n)}\|_\infty \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Damit gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $x - x^{(n_0)} \in \ell_p$ gilt. ℓ_p ist ein Vektorraum und $x^{(n_0)} \in \ell_p$, also folgt $x \in \ell_p$.

(ii) Es gilt $\|x\|_p = (\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$, also ist stets $|x_n| \leq \|x\|_p$. Es folgt sofort

$$\|x\|_\infty = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \leq \|x\|_p$$

und für $1 \leq p < q < \infty$ folgt mit $\frac{|x_n|}{\|x\|_p} \leq 1$

$$\frac{|x_n|^q}{\|x\|_p^q} \leq \frac{|x_n|^p}{\|x\|_p^p} \leq 1$$

und weiter

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|x_n|^q}{\|x\|_p^q} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|x_n|^p}{\|x\|_p^p} = 1.$$

Es gilt also

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^q \leq \|x\|_p^q$$

und das liefert die *Jensen-Ungleichung*

$$||x||_q \leq ||x||_p.$$

Wenn also $x \in \ell_p$ ist, dann ist $||x||_p^p < \infty$, also auch $||x||_p < \infty$. Dann folgt mit der Jensen-Ungleichung sofort $||x||_q < \infty$, d.h. $||x||_q^q < \infty$ bzw. $x \in \ell_q$. Demnach gilt

$$\ell_p \subseteq \ell_q.$$

Betrachte die Folge $x = \left(n^{-\frac{1}{q-1}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Es gilt $x \in \ell_q$, denn mit $q > q - 1$ folgt $-\frac{q}{q-1} < -1$ und damit

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |n^{-\frac{1}{q-1}}|^q = \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-\frac{q}{q-1}} < \infty.$$

Jedoch ist für alle $p \in [1, q)$ stets $x \notin \ell_p$, denn wäre $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-\frac{p}{q-1}} < \infty$, dann müsste $-\frac{p}{q-1} < -1$ bzw. $p > q - 1$ sein. Widerspruch! Damit gilt also

$$\ell_p \subsetneq \ell_q.$$

Die Folge $x = (1)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt, liegt also in ℓ_∞ . Es gilt jedoch für alle $p \in [1, \infty)$ stets $||x||_p = \infty$, d.h. $x \notin \ell_p$. Schließlich gilt auch

$$\ell_p \subsetneq \ell_\infty.$$

- (iii) Die Einbettung $j: \ell_p \rightarrow \ell_q$ ist stetig, denn j ist linear und in 0 stetig, denn sei $\varepsilon > 0$, dann wähle $\delta = \varepsilon$ und für alle $x \in \ell_p$ folgt mit der Jensen-Ungleichung aus $||x||_p < \delta$ stets $||x||_q < \varepsilon$. ■

- (iii) Der Raum der konvergenten Folgen ist

$$c := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \lim x \in \mathbb{K}\}$$

und entsprechend ist

$$c_0 := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \lim x = 0\}$$

der Raum der Nullfolgen.

Lemma 2.6 Es gilt

$$c_0 \subsetneq c \subsetneq \ell_\infty$$

und c sowie c_0 sind abgeschlossene Unterräume, also selbst Banachräume.

Beweis: Die Inklusionen sind trivial. Betrachte die dem Cauchy Kriterium nachempfundene Abbildung

$$f: \ell_\infty \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lim_{k \rightarrow \infty} \bigvee_{m, n \geq k} |x_m - x_n|,$$

dann ist f stetig, denn es gilt

$$|x_m - x_n| \leq |(x_m - y_m) - (x_n - y_n)| + |y_m - y_n| \leq 2 \cdot \|x - y\|_\infty + |y_m - y_n|$$

und damit

$$f(x) \leq 2 \cdot \|x - y\|_\infty + f(y).$$

Vertauschen von x, y liefert nun

$$|f(x) - f(y)| \leq 2 \cdot \|x - y\|_\infty,$$

also ist f in der Tat stetig. Nach dem Cauchy Kriterium gilt

$$c = f^{-1}(\{0\})$$

und c ist abgeschlossen, denn $\{0\}$ ist abgeschlossen.

Betrachte die Abbildung

$$g: c \rightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Es gilt stets $|x_n - y_n| \leq \bigvee_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n| = \|x - y\|_\infty$, also folgt

$$|g(x) - g(y)| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right| \leq \|x - y\|_\infty,$$

also ist g stetig und damit ist

$$c_0 = g^{-1}(\{0\})$$

■ abgeschlossen.

Es gilt

$$\bigcup_{p \in [1, \infty)} \ell_p \subsetneq c_0.$$

Die Nullfolge $(\frac{1}{\ln n})_{n \in \mathbb{N}}$ liegt in keinem ℓ_p , denn für große n gilt

$$\left(\frac{1}{\ln n}\right)^p \geq \frac{1}{n} \iff \ln n \leq n^{\frac{1}{p}} \iff n \leq e^{n^{\frac{1}{p}}} \stackrel{k := n^{\frac{1}{p}}}{\iff} k^p \leq e^k.$$

- (iv) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres offenes Intervall und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Menge $C_b^n(I)$ aller n -mal stetig differenzierbaren $\mathbb{K}$ -wertigen Funktionen auf I , deren Ableitungen bis n -ter Ordnung auf I beschränkt sind, also

$$C_b^n(I) = \{f: I \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist } n\text{-mal stetig differenzierbar,} \\ \forall k \leq n: f^{(k)} \text{ beschränkt auf } I\},$$

mit der Norm

$$\|f\|_{n,\infty} = \sum_{k \leq n} \|f^{(k)}\|_{\infty}$$

ein vollständiger normierter Raum, also ein Banachraum. Auch $\|f\|_{n,\infty} = \sum_{k \leq n} \frac{1}{k!} \|f^{(k)}\|_{\infty}$ ist eine geeignete Norm.

- (v) *Produkt normierter Räume:* Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, dann ist $X \times Y$ ein Vektorraum, in den sich X und Y einbetten lassen. Für Normen auf $X \times Y$ gibt es viele Möglichkeiten, zum Beispiel die *Maximumsnorm*

$$\|(x, y)\|_{\infty} = \|x\|_X \vee \|y\|_Y$$

oder die *Minkowski-Norm*

$$\|(x, y)\|_p = \left(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

für $p \in [1, \infty)$. $\|\cdot\|_1$ heißt auch *Summen-Norm* und $\|\cdot\|_2$ heißt auch *euklidische Norm*. Weiter sind

$$\|(x, y)\|_X = \|x\|_X \quad \text{und} \quad \|(x, y)\|_Y = \|y\|_Y$$

Halbnormen. X und Y sind nach Einbettung abgeschlossene Unterräume in $(X \times Y, \|\cdot\|)$ und $X \times Y$ ist ein Banachraum genau dann, wenn X und Y Banachräume sind. Entsprechende Aussagen und Konstruktionen sind für das Produkt endlich vieler normierter Räume möglich. □

Definition 2.7 (stärker, schwächer, äquivalent)

Sei X ein Vektorraum und $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ seien zwei Normen auf X .

- (i) $\|\cdot\|_2$ heißt *stärker* als $\|\cdot\|_1$ und entsprechend heißt $\|\cdot\|_1$ *schwächer*.

cher als $\|\cdot\|_2$, wenn

$$\exists K > 0 \forall x \in X: \|x\|_1 \leq K \cdot \|x\|_2.$$

(ii) $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ heißen *äquivalent*, wenn

$$\exists K, L > 0 \forall x \in X: K \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq L \cdot \|x\|_1.$$

□ **Beispiel:** Die Normen im Beispiel 2.4 (iv) und (v) sind äquivalent.

Satz 2.8 (Hausdorff) In einem endlich-dimensionalen Vektorraum sind alle Normen äquivalent und der Vektorraum ist bezüglich jeder Norm ein Banachraum.

Beweis: Sei X ein Vektorraum mit $\dim X = n$ und $(e_1, \dots, e_n)$ sei eine normierte Basis, d.h. es gilt stets $\|e_i\| = 1$ für eine Norm $\|\cdot\|$ auf X . Wir zeigen, dass $\|\cdot\|$ zur Summennorm $\|\cdot\|_1$ äquivalent ist. Es ist $\|x\|_1 = \|\sum_{i=1}^n x_i e_i\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Eine Richtung der Äquivalenz ist trivial, denn nach der Dreiecksungleichung gilt

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|e_i\| = \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1.$$

Das heißt die Norm $\|\cdot\|$ ist bezüglich $\|\cdot\|_1$ stetig, d.h. $\|\cdot\|: (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig. Sei $S = S_1(0) = \{x \in X \mid \|x\|_1 = 1\}$ die Einheitssphäre in $(X, \|\cdot\|_1)$, dann ist S abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Die $\|\cdot\|_1$ -stetige Funktion $\|\cdot\|$ nimmt also auf S ein Minimum $m \geq 0$ an. Da $\|\cdot\|$ eine Norm ist, folgt $m > 0$. Dann gilt für alle $y \in S$ stets $\|y\| \geq m > 0$. Für beliebiges $x \in X$ gilt $y = \frac{x}{\|x\|_1} \in S$ und damit folgt $\left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| \geq m$ bzw.

$$m \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|.$$

Also sind $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_1$ äquivalent und damit sind zwei beliebige Normen auf X stets äquivalent.

Lemma: Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $B = B_1(0)$ die abgeschlossene Einheitskugel. B ist kompakt genau dann, wenn $\dim X < \infty$.

Aufgaben

Aufgabe 2.1.1

▲ **Lösung:**

2.2 Stetige und kompakte Operatoren

Alle folgenden Räume seien stets normiert.

Definition (beschränkt)

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Eine Menge $B \subseteq X$ heißt *beschränkt*, wenn $\exists \varepsilon > 0: B \subseteq U_\varepsilon(0)$.

Lemma: Für eine Teilmenge $B \subseteq X$ eines normierten Raums $(X, \|\cdot\|)$ sind äquivalent:

- (i) B beschränkt.
- (ii) $\forall x \in B \ \|x\| < \infty$.
- (iii) $\forall U \in \mathcal{U}(0) \ \exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \varepsilon \geq \varepsilon_0: B \subseteq \varepsilon \cdot U$.

Beweis: • (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei B beschränkt, d.h. es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $B \subseteq U_\varepsilon(0)$. Dann gilt für alle $x \in B$ stets $\|x\| < \varepsilon$.

- (ii) $\Rightarrow$ (iii) Setze $0 < d = \sup_{x \in B} \|x\| < \infty$ und sei $U \in \mathcal{U}(0)$ eine Nullumgebung, d.h. es gibt ein $r > 0$ mit $U_r(0) \subseteq U$. Setze $\varepsilon_0 = \frac{d}{r} > 0$, dann gilt für alle $\varepsilon > \varepsilon_0$ stets

$$B \subseteq U_d(0) = \frac{d}{r} \cdot U_r(0) \subseteq \varepsilon \cdot U_r(0).$$

- (iii) $\Rightarrow$ (i) Sei $r > 0$, dann ist $U_r(0) \in \mathcal{U}(0)$ eine Nullumgebung, also gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$B \subseteq \varepsilon \cdot U_r(0) = U_{\varepsilon \cdot r}(0)$$

und wegen $\varepsilon \cdot r > 0$ ist B beschränkt. ■

Definition 2.9 (linearer Operator)

Ein *linearer Operator* (kurz: *Operator*) von X nach Y ist eine lineare Abbildung

$$T: \mathcal{D}(T) \subseteq X \rightarrow Y.$$

Dabei ist $\mathcal{D}(T)$ ein linearer Teilraum von X und heißt *Definitionsbereich* von T . Für $\mathcal{D}(T)$ schreiben wir auch einfach $T: X \rightarrow Y$. Falls $\mathcal{D}(T) = X$ und $Y = \mathbb{K}$ gilt, dann heißt T *lineares Funktional*. Die Menge $\text{im } T = T(\mathcal{D}(T)) = \{T(x) \mid x \in \mathcal{D}(T)\}$ heißt auch *Bild* oder *Wertebereich* von T und $\ker T = T^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathcal{D}(T) \mid T(x) = 0\}$ heißt *Kern* von T .

Definition (beschränkt)

Ein linearer Operator $T: X \rightarrow Y$ heißt *beschränkt*, wenn T beschränkte Mengen in beschränkte Mengen abbildet.

Satz 2.10 Für einen linearen Operator $T: X \rightarrow Y$ sind äquivalent:

- (i) T stetig in 0.
- (ii) T stetig.
- (iii) T gleichmäßig stetig.
- (iv) $T(U_1(0))$ beschränkt.
- (v) T beschränkt.
- (vi) $\exists M > 0 \forall x \in X: \|Tx\| \leq M \cdot \|x\|$.
- (vii) $\|T\| := \sup_{x \in U_1(0)} \|Tx\| < \infty$.

Gelten diese Bedingungen, dann gilt stets $\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$.

Beweis: • (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei T stetig in 0, dann ist T folgenstetig in 0. Sei also $x_n \rightarrow x$, dann gilt $x_n - x \rightarrow 0$, also folgt $Tx_n - Tx = T(x_n - x) \rightarrow 0$ bzw. $Tx_n \rightarrow Tx$.

• (ii) $\Rightarrow$ (iii) Dies folgt wegen der Linearität von X .

• (i) $\Rightarrow$ (iv) Sei T stetig in 0, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: T(U_\delta(0)) \subseteq U_\varepsilon(0)$. Es folgt

$$T(U_1(0)) = T\left(\frac{1}{\delta} U_\delta(0)\right) = \frac{1}{\delta} T(U_\delta(0)) \subseteq \frac{1}{\delta} U_\varepsilon(0) = U_{\frac{\varepsilon}{\delta}}(0).$$

• (iv) $\Rightarrow$ (v) Sei B eine beschränkte Menge, also gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B \subseteq U_\varepsilon(0)$. Damit folgt

$$T(B) \subseteq T(U_\varepsilon(0)) = T(\varepsilon \cdot U_1(0)) = \varepsilon \cdot T(U_1(0)),$$

also ist $T(B)$ beschränkt.

• (v) $\Rightarrow$ (vi) Sei T beschränkt, also gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $T(B_1(0)) \subseteq B_\varepsilon(0)$, d.h. aus $\|x\| \leq 1$ folgt stets $\|Tx\| \leq \varepsilon$. Sei $x \in X \setminus \{0\}$, dann gilt $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq 1$ und damit folgt

$$\|Tx\| = \left\| \|x\| \cdot T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \|x\| \cdot \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \|x\| \cdot \varepsilon$$

für alle $x \in X$.

• (vi) $\Rightarrow$ (vii) Es ist $\|T\| \leq \varepsilon$ aus dem vorigen Teilabschnitt.

• (vii) $\Rightarrow$ (iii) Die Ungleichung $\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ ist trivial für $x = 0$. Sei also $x \neq 0$, dann gilt

$$\|Tx\| = \|T\| \cdot \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \|x\| \cdot \underbrace{\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\|}_{\leq 1} \leq \|x\| \cdot \|T\|,$$

und damit folgt

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| \leq \|T\| \cdot \|x - y\|.$$

Folgerung 2.11 Sei $X_0 \subseteq X$ ein dichter Teilraum, Y ein Banachraum und $T_0: X_0 \rightarrow Y$ ein stetiger Operator. Dann existiert eine eindeutige stetige Fortsetzung $T: X \rightarrow Y$ mit $T|_{X_0} = T_0$ und $\|T\| = \|T_0\|$.

Beweis:

- *Existenz:* Sei $x \in X$, dann gibt es wegen der Dichtheit von X_0 eine Folge aus X_0 mit $x_n \rightarrow x$. Nun ist die Bildfolge $(T_0 x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, denn T_0 ist stetig und mit der Vollständigkeit von Y ist die Bildfolge konvergent gegen ein $y \in Y$. Wir setzen $Tx = y$.
- *Eindeutigkeit:* Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen aus X_0 , die gegen $x \in X$ konvergieren, dann gilt $x_n - x'_n \rightarrow 0$ und damit $T_0(x_n - x'_n) \rightarrow 0$. Folglich haben also beide Bildfolgen $(T_0 x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(T_0 x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ den gleichen Limes. Obige Definition von Tx hängt also nicht von der gegen x konvergierenden Folge aus X_0 ab und damit ist die Fortsetzung T eindeutig.
- *Linearität:* folgt aus der Linearität von T_0 und der Eindeutigkeit des Limes.
- *Stetigkeit:* Es gilt

$$\|Tx\| = \|T_0 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_0 x_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_0\| \cdot \|x_n\| = \|T_0\| \cdot \|x\|,$$

also ist T stetig und weiter folgt

$$\|T\| \leq \|T_0\|.$$

Andererseits ist $\|T_0\| \leq \|T\|$ sowieso klar.

Lemma: Sei X ein normierter Raum und $f \neq 0$ ein lineares Funktional auf X . Dann sind äquivalent:

- (i) f stetig.
- (ii) $\ker f$ abgeschlossen.
- (iii) $\ker f$ nicht dicht.
- (iv) f beschränkt auf einer Nullumgebung.

Definition (positiver Operator)

Seien X, Y geordnete normierte Räume. Ein Operator $T: X \rightarrow Y$ heißt *positiv*, falls aus $x \geq 0$ stets $Tx \geq 0$ folgt. Für eine Menge $\mathcal{F}$ von Operatoren bezeichnen wir die Teilmenge der positiven Operatoren mit $\mathcal{F}_+$.

Definition (topologischer Dualraum)

Es sei

$$\mathcal{B}(X, Y) := \{T: X \rightarrow Y \mid T \text{ stetig}\}$$

die Menge der stetigen bzw. beschränkten linearen Operatoren von X nach Y . Weiter ist $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X, X)$ und der Raum der stetigen linearen Funktionale auf X

$$X' := \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$$

heißt *topologischer Dualraum* zu X .

Bemerkung: Der Raum aller linearen Funktionale auf X ist der *algebraische Dualraum* X^* und für $\dim X < \infty$ gilt $X' = X^*$.

Satz 2.12 (i) $\mathcal{B}(X, Y)$ ist mit

$$\|T\| := \bigvee_{x \in U_1(0)} \|Tx\|$$

ein normierter Raum.

- (ii) Wenn Y ein Banachraum ist, dann ist $\mathcal{B}(X, Y)$ ein Banachraum. Insbesondere ist X' stets vollständig.
- (iii) Wenn X ein Banachraum ist, dann ist $\mathcal{B}(X)$ eine *Banachalgebra*, d.h. $(\mathcal{B}(X), \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum und es gelten für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $S, T \in \mathcal{B}(X)$
 - $\lambda \cdot S + T \in \mathcal{B}(X)$.
 - $S \circ T \in \mathcal{B}(X)$.
 - $\|S \circ T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$.

Beweis: (i) Beachte die Linearität der Räume bzw. Operatoren und die Stetigkeit der Operatoren bzw. Operationen. Die Normeigenschaften sind einfach nachzuweisen.

- (ii) Sei Y ein Banachraum und $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge aus $\mathcal{B}(X, Y)$. Dann gilt für alle $x \in X$

$$\|T_m x - T_n x\| \leq \|T_m - T_n\| \cdot \|x\| \rightarrow 0$$

und damit ist $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in Y , die wegen der Vollständigkeit gegen ein Element $y \in Y$ konvergiert. Setze $Tx := y = \lim T_n x$, dann ist T linear. Weiter ist T stetig, denn sei $\varepsilon > 0$ gegeben, dann existiert ein

$n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für $m, n \geq n_0$ stets $\|T_m - T_n\| < \varepsilon$ gilt. Also folgt für alle $x \in X$

$$\|T_m x - T_n x\| < \varepsilon \cdot \|x\| \quad (*)$$

und für $m \rightarrow \infty$ gilt damit

$$\|Tx - T_n x\| < \varepsilon \cdot \|x\|.$$

Demnach ist $T - T_n \in \mathcal{B}(X, Y)$ und damit ist $T = (T - T_n) + T_n \in \mathcal{B}(X, Y)$. Aus (*) folgt $\|T - T_n\| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, d.h.

$$T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T.$$

- (iii) Sei X ein Banachraum, dann ist nach (ii) nun $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X, X)$ ein Banachraum. Die erste Eigenschaft $\lambda \cdot S + T \in \mathcal{B}(X)$ folgt aus (i). Die Eigenschaft $S \circ T \in \mathcal{B}(X)$ gilt allgemein, denn die Komposition von stetigen Abbildungen ist stetig.

$$\begin{aligned} \|S \circ T\| &= \bigvee_{x \in U_1(0)} \underbrace{\|(S \circ T)x\|}_{=S(Tx)} = \bigvee_{x \in U_1(0)} \|Tx\| \cdot \underbrace{\|S \frac{Tx}{\|Tx\|}\|}_{\|\cdot\|=1} \\ &\leq \bigvee_{x \in U_1(0)} \|Tx\| \cdot \|S\| = \|S\| \cdot \|T\| \end{aligned}$$

Definition 2.13 (kompakt)

Ein Operator $T: X \rightarrow Y$ heißt *kompakt*, wenn $T(U_1(0))$ relativkompakt in Y ist. Die Menge aller kompakten Operatoren von X nach Y wird mit $\mathcal{K}(X, Y)$ bezeichnet und $\mathcal{K}(X) := \mathcal{K}(X, X)$.

Lemma 2.14 Seien $A, B \subseteq X$ relativkompakte Mengen und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann ist sind auch $A + B$ und $\lambda \cdot A$ relativkompakt.

Beweis: Nach Folgerung 1.29 ist relativkompakt äquivalent mit präkompakt. Nun lassen sich aus ε -Netzen für A und B leicht ε -Netze für $A + B$ und $\lambda \cdot A$ konstruieren.

Lemma: (i) Ein Operator T ist kompakt genau dann, wenn T beschränkte Mengen in relativkompakte Mengen abbildet.

(ii) Es gilt $\mathcal{K}(X, Y) \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$.

Beweis: (i) Das folgt einfach unter Anwendung des Lemma 2.14.

(ii) Relativkompakte Mengen sind präkompakt, also beschränkt. Also bilden kompakte Operatoren beschränkte Mengen in beschränkte Mengen ab, d.h. sie sind beschränkt bzw. stetig.

Definition (Ideal)

Sei $\mathcal{R}$ ein Ring oder eine Algebra. Eine Teilmenge $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{R}$ heißt *zweiseitiges Ideal*, wenn $\mathcal{I}$ ein Unterring bzw. eine Unter algebra von $\mathcal{R}$ ist und für alle $x \in \mathcal{R}$ stets $x \cdot \mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$ und $\mathcal{I} \cdot x \subseteq \mathcal{I}$ gelten.

Beispiel: (i) Die Nullfolgen c_0 bilden ein Ideal in den konvergenten Folgen c und auch in den beschränkten Folgen ℓ_∞ oder ℓ_p für $p \in [1, \infty)$.

(ii) Sei X ein topologischer Raum und $B \subseteq X$ eine nichtleere Teilmenge. Dann ist

$$\mathcal{I}_B := \{f \in \mathcal{C}(X) \mid \forall x \in B: f(x) = 0\}$$

□ ein Ideal in $\mathcal{C}(X)$. Für $x \in X$ ist $\mathcal{I}_{\{x\}}$ ein maximales Ideal.

Satz 2.15 (i) $\mathcal{K}(X, Y)$ ist ein linearer Teilraum von $\mathcal{B}(X, Y)$. Wenn Y ein Banachraum ist, dann ist $\mathcal{K}(X, Y)$ abgeschlossen in $\mathcal{B}(X, Y)$, also auch vollständig.

(ii) Seien $T \in \mathcal{B}(X, Y), S \in \mathcal{B}(Y, Z)$ und einer sei kompakt, dann ist auch $S \circ T$ kompakt. Mit anderen Worten: $\mathcal{K}(X)$ ist ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{B}(X)$.

Beweis: (i) Die Vektorraumeigenschaften folgen im Wesentlichen aus dem Lemma 2.14. Sei Y vollständig und $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{K}(X, Y)$, die bezüglich $\|\cdot\|$ gegen ein $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ konvergiert. Zu zeigen ist die Kompaktheit von T . Nach Satz 1.29 genügt es zu zeigen, dass $T(U_1(0))$ präkompakt ist. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\|T_n - T\| < \frac{\varepsilon}{4}$. Nun ist $T_n(U_1(0))$ präkompakt, also gibt es $x_1, \dots, x_k \in T_n(U_1(0))$ mit $T_n(U_1(0)) \subseteq \bigcup_{i=1}^k U_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_i)$. Seien $y_1, \dots, y_k \in U_1(0)$ mit $T_n y_i = x_i$. Weiter gilt

$$T(U_1(0)) \subseteq \bigcup_{i=1}^k U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i),$$

denn sei $y \in U_1(0)$, dann gibt es ein x_j mit $\|T_n y - x_j\| < \frac{\varepsilon}{4}$ und damit gilt

$$\|Ty - x_j\| = \|Ty - T_n y + T_n y - x_j\| \leq \underbrace{\|T - T_n\|}_{< \frac{\varepsilon}{4}} \cdot \underbrace{\|y\|}_{\leq 1} + \underbrace{\|T_n y - x_j\|}_{< \frac{\varepsilon}{4}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Setze nun $x'_i := Ty_i$, dann gilt

$$\|x_i - x'_i\| = \|T_n y_i - Ty_i\| < \frac{\varepsilon}{4}$$

und insgesamt folgt

$$T(U_1(0)) \subseteq \bigcap_{i=1}^k U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^k U_{\varepsilon}(x'_i),$$

d.h. $T(U_1(0))$ ist totalbeschränkt.

- (ii) Sei $B \subseteq X$ beschränkt. Für $T \in \mathbb{K}(X, Y), S \in \mathcal{B}(Y, Z)$ ist $T(B)$ relativkompakt und damit ist $S(T(B))$ relativkompakt, denn S ist stetig. Für $T \in \mathcal{B}(X, Y), S \in \mathbb{K}(Y, Z)$ ist $T(B)$ beschränkt, also ist $S(T(B))$ relativkompakt. ■

Satz 2.16 (Lemma von Riesz) Für einen normierten Raum X sind äquivalent:

- (i) $\dim X < \infty$.
- (ii) id_X kompakt, d.h. $U_1(0)$ relativkompakt.
- (iii) X lokalkompakt.
- (iv) $U_1(0)$ präkompakt.

Beweis: Die Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) sind einfach. Zum Beweis der Implikation (iv) $\Rightarrow$ (i) sei $U_1(0)$ präkompakt. Nun existieren $x_1, \dots, x_k \in U_1(0)$ mit

$$U_1(0) \subseteq \bigcap_{i=1}^k U_{\frac{1}{2}}(x_i) = \bigcap_{i=1}^k (x_i + U_{\frac{1}{2}}(0)).$$

Sei $L := \text{lin}\{x_i\}_{i=1}^k$ die lineare Hülle der x_i , dann gilt $\dim L < \infty$ und L ist vollständig, also in X abgeschlossen. Es gilt

$$\begin{aligned} U_1(0) &\subseteq L + U_{\frac{1}{2}}(0) = \frac{1}{2} \cdot (L + U_1(0)) \subseteq \frac{1}{2} \cdot (L + L + U_{\frac{1}{2}}(0)) \\ &= L + U_{\frac{1}{4}}(0) \subseteq \dots \subseteq L + U_{\frac{1}{2^m}}(0) \end{aligned}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Damit gibt es für alle $x \in U_1(0)$ eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus L mit $x_n \rightarrow x$. Da L abgeschlossen ist, gilt $x \in L$, d.h. $U_1(0) \subseteq L$. Es folgt $L = X$. ■

Lemma 2.17 Ein Operator $T: X \rightarrow Y$ ist kompakt genau dann, wenn für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus die Bildfolge $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus Y eine konvergente Teilfolge enthält.

Beweis: folgt unmittelbar aus Satz 1.28. ■

Lemma: Wenn $\dim X < \infty$, dann ist jeder Operator $T: X \rightarrow Y$ kompakt.

Beweis: Aus $\dim X < \infty$ folgt $\dim TX < \infty$ und dann ist $TU_1(0)$ relativkompakt genau dann, wenn $TU_1(0)$ beschränkt ist. Das ist der Fall, denn T ist auch stetig, also beschränkt. ■

Definition 2.18 (endlichdimensional)

Ein Operator $T: X \rightarrow Y$ heißt *endlichdimensional*, wenn $\dim TX < \infty$. Die Menge der endlichdimensionalen Operatoren sei $\mathcal{F}(X, Y)$.

Lemma: Es gilt $\mathcal{F}(X, Y) \subseteq \mathcal{K}(X, Y)$.

Folgerung 2.19 Seien X, Y Banachräume. Sei $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{F}(X, Y)$ mit $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$ für ein $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Dann gilt $T \in \mathcal{K}(X, Y)$, d.h.

$$\overline{\mathcal{F}(X, Y)}^{\mathcal{B}(X, Y)} \subseteq \mathcal{K}(X, Y).$$

Bemerkung: Lange Zeit war unbekannt, ob $\overline{\mathcal{F}(X, Y)}^{\mathcal{B}(X, Y)} = \mathcal{K}(X, Y)$ gilt. Wenn X, Y Hilberträume sind, dann gilt dies.

Definition (gleichgradig stetig, punktweise beschränkt)

Sei K ein kompakter Raum. Dann heißt eine Menge von Funktionen $F \subseteq \mathcal{C}(K)$

(i) *gleichgradig stetig* in $x \in K$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists U \in \mathcal{U}(x) \forall f \in F: f(U) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$$

gilt. F heißt *gleichgradig stetig*, wenn F in jedem $x \in K$ gleichgradig stetig ist.

(ii) *punktweise beschränkt*, wenn für alle $x \in K$ die Menge $F(x) := \{f(x) \mid f \in F\}$ beschränkt ist.

Satz 2.20 (Arzela-Ascoli) Sei K kompakt und $F \subseteq \mathcal{C}(K)$, dann sind äquivalent:

(i) F relativkompakt.

(ii) F gleichgradig stetig und punktweise beschränkt.

Beweis: • (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei F relativkompakt, dann ist F präkompakt, also $\|\cdot\|_\infty$ -beschränkt und damit auch punktweise beschränkt. Sei $\varepsilon > 0$, dann

gibt es ein endliches ε -Netz für F , d.h. $f_1, \dots, f_k \in F$ mit $F \subseteq \bigcup_{i=1}^k U_{\frac{\varepsilon}{3}}(f_i)$. Sei $x \in K$, mit der Stetigkeit von f_i existiert eine Umgebung $U_i \in \mathcal{U}(x)$ mit $f_i(U_i) \subseteq U_{\frac{\varepsilon}{3}}(f_i(x))$. Setze $U := \bigcap_{i=1}^k U_i \in \mathcal{U}(x)$, sei $f \in F$, dann gibt es ein f_i mit $f \in U_{\frac{\varepsilon}{3}}(f_i)$. Für alle $y \in U$ gilt dann

$$|f(x) - f(y)| \leq \underbrace{|f(x) - f_i(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_i(x) - f_i(y)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_i(y) - f(y)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon,$$

also ist F gleichgradig stetig.

- (ii) $\Rightarrow$ (i) Es genügt zu zeigen, dass F präkompakt ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$, dann gibt es für alle $x \in K$ eine offene Umgebung $U_x \in \mathcal{U}(x)$, sodass für alle $f \in F$ stets $f(U_x) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$ gilt. Dann ist $\{U_x \mid x \in K\}$ eine offene Überdeckung von K , also existieren $x_1, \dots, x_n \in K$ mit $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Da $F(x)$ für alle $x \in K$ beschränkt ist, ist auch die Menge $\tilde{F} := \{(f(x_1), \dots, f(x_n)) \mid f \in F\}$ beschränkt in $\mathbb{K}^n$, also totalbeschränkt bzw. präkompakt. Damit gibt es Mengen $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_k \subseteq \tilde{F}$ mit $\text{diam} \tilde{A}_j < \varepsilon$ und $\tilde{F} = \bigcup_{j=1}^k \tilde{A}_j$. Setze nun $A_j := \{f \in F \mid (f(x_1), \dots, f(x_n)) \in \tilde{A}_j\}$, dann folgt

$$F = \bigcup_{j=1}^k A_j.$$

Wir zeigen noch, dass $\text{diam} A_j \leq 3 \cdot \varepsilon$ gilt und damit ist F dann präkompakt. Seien $f, g \in A_j$ und $x \in K$, dann gibt es ein x_i mit $x \in U_{x_i}$. Es gilt also

$$|f(x) - g(x)| \leq \underbrace{|f(x) - f(x_i)|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|f(x_i) - g(x_i)|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|g(x_i) - g(x)|}_{< \varepsilon} < 3 \cdot \varepsilon$$

und damit

$$\|f - g\|_\infty \leq 3 \cdot \varepsilon,$$

d.h.

$$\text{diam} A_j \leq 3 \cdot \varepsilon.$$

Folgerung 2.21 Sei $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist die kanonische Einbettung $\text{id}: (\mathcal{C}_b^1(I), \|\cdot\|_{1,\infty}) \rightarrow (\mathcal{C}_b(I), \|\cdot\|_\infty)$ kompakt.

Beweis: Man kann offenbar $\mathcal{C}(\bar{I})$ als Teilraum von $\mathcal{C}_b(I)$ auffassen. Es gilt aber $\mathcal{C}_b(I) \subsetneq \mathcal{C}(\bar{I})$, betrachte dazu die Funktion $(0, 1) \ni x \mapsto \sin \frac{1}{x}$. Weiter gilt $\mathcal{C}_b^1(I) \subseteq \mathcal{C}(\bar{I})$, denn sei $c \in I$ fest, dann gilt für $f \in \mathcal{C}_b^1(I)$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(c) + \int_c^x f'(y) dy) = f(c) + \int_c^a f'(y) dy$$

und analog an der Stelle b . Es verbleibt zu zeigen, dass

$$U_1(0) = \{f \in \mathcal{C}_b^1(I) \mid \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq 1\}$$

relativkompakt in $\mathcal{C}(\bar{I})$ ist. Die punktweise Beschränktheit ist klar, denn für alle $f \in U_1(0)$ gilt $\|f\|_\infty \leq 1$. Für die gleichgradige Stetigkeit sei $f \in U_1(0)$, dann gilt stets

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_x^y f'(t) dt \right| \leq \underbrace{\|f'\|_\infty}_{\leq 1} \cdot |x - y| \leq |x - y|.$$

■

Aufgaben

Aufgabe 2.2.1

▲

Lösung:

3 Separabilität und Vervollständigung

3.1 Separabilität und Abzählbarkeitsaxiome

Definition 3.1 (separabel, erstes und zweites Abzählbarkeitsaxiom)

Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

- (i) X heißt *separabel*, wenn eine abzählbare dichte Menge in X existiert.
- (ii) X erfüllt das *erste Abzählbarkeitsaxiom*, wenn jedes $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.
- (iii) X erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*, wenn τ eine abzählbare Basis hat.

Beispiel: (i) $\mathbb{C}^n$ ist separabel, denn die Menge $(\mathbb{Q} + i \cdot \mathbb{Q})^n$ ist abzählbar und dicht in $\mathbb{C}^n$.

(ii) $\mathbb{C}^n$ erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, denn für jedes $x \in \mathbb{C}^n$ ist $\{U_\varepsilon(x) \mid \varepsilon \in \mathbb{Q}_+\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis.

(iii) $\mathbb{C}^n$ erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom, denn $\{U_\varepsilon(x) \mid x \in (\mathbb{Q} + i \cdot \mathbb{Q})^n, \varepsilon \in \mathbb{Q}_+\}$ ist eine abzählbare Basis für die Topologie in $\mathbb{C}^n$. □

Satz 3.2 Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann gelten:

- (i) X erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom.
- (ii) X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom genau dann, wenn X separabel ist.

Beweis: (i) Für jedes $x \in X$ ist $\{U_\varepsilon(x) \mid \varepsilon \in \mathbb{Q}_+\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis.

(ii) Sei X separabel, also gibt es eine abzählbare dichte Menge $A \subseteq X$. Bilde nun

$$\mathcal{B} = \{U_{\frac{1}{n}}(x) \mid x \in A, n \in \mathbb{N}\}.$$

Sei $O \subseteq X$ offen mit $x \in O$, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $U_{\frac{1}{n}}(x) \subseteq O$. Wegen der Dichtheit von A gibt es ein $y \in A \cap U_{\frac{1}{2n}}(x)$. Nun gilt

$$x \in U_{\frac{1}{2n}}(y) \subseteq U_{\frac{1}{n}}(x) \subseteq O$$

und damit ist O darstellbar als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$.

Sei umgekehrt $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis für τ . Sei $x_B \in B \in \mathcal{B}$ für alle $B \neq \emptyset$. Dann ist $A = \{x_B \mid B \in \mathcal{B}\}$ dicht in X , denn sei $x \in X$ und $U \in \mathcal{U}(x)$ eine Umgebung, dann gibt es eine offene Menge $O \subseteq U$ mit $x \in O$ und $O = \bigcup_{O \supseteq B \in \mathcal{B}} B$, also gibt es ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B$ und B ist offen. Dann gilt

$$x_B \in B \subseteq U.$$

Folgerung 3.3 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subseteq X$. Wenn X separabel ist, dann auch $(M, d|_{M \times M})$.

Beweis: Sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis für τ_d , dann ist $\mathcal{B} \cap M$ eine abzählbare Basis für $\tau|_M$, also ist M separabel.

Satz 3.4 Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) X separabel.
- (ii) Es existiert eine abzählbare totale Menge $A \subseteq X$, d.h. die lineare Hülle von A ist dicht in X .

Beweis: • (i) $\Rightarrow$ (ii) trivial.

- (ii) $\Rightarrow$ (i) Wenn die lineare Hülle $\text{lin} A$ dicht ist, dann auch $\text{lin}_{\mathbb{Q}} A$. A ist abzählbar, also ist auch $\text{lin}_{\mathbb{Q}} A$ abzählbar.

Beispiel: (i) $\mathbb{K}^n$ ist separabel.

- (ii) ℓ_p für $p \in [1, \infty)$ ist separabel. Die Menge $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit $e_n := \delta_n^{\mathbb{N}}$ ist total in den ℓ_p -Räumen. Es ist

$$d := \text{lin}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

die Menge der abbrechenden bzw. endlichen Folgen und d ist dicht in ℓ_p .

- (iii) ℓ_∞ ist nicht separabel. Betrachte dazu eine Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ aus ℓ_∞ .
Setze

$$x_k := \begin{cases} -1 & (\Re x_k^{(k)} \geq 0) \\ +1 & (\Re x_k^{(k)} < 0), \end{cases}$$

dann gilt für die Folge $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$

$$\|x - x^{(n)}\|_\infty \geq |x_n - x_n^{(n)}| \geq 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit kann in ℓ_∞ keine abzählbare dichte Menge existieren. □

Satz 3.5 (Approximationssatz von WEIERSTRASS)

- (i) Die Menge der stetigen Funktionen auf $[0, 1]$

$$\mathcal{C}[0, 1]$$

ist separabel. Die Menge der Polynomfunktionen $\mathcal{P}[0, 1]$ liegt dicht in $\mathcal{C}[0, 1]$.

- (ii) Sei $f \in \mathcal{C}[0, 1]$ und setze $B_n(x) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot x^k \cdot (1-x)^{n-k}$ für $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\|f - B_n\|_\infty \rightarrow 0.$$

B_n heißt *n-tes Bernsteinpolynom*.

Beweis: Eine alternative Beweisidee siehe in LANG: Undergraduate Analysis oder LANG: Real and Functional Analysis. ■

Bemerkung 3.6 Der Approximationssatz gilt auch für $\mathcal{C}[a, b]$ oder allgemeiner für $\mathcal{C}(K)$ für kompakte $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Es gilt für einen metrischen Raum (K, d) , dass $\mathcal{C}_b(K)$ separabel genau dann, wenn K kompakt ist.

Satz 3.7 (STONE-WEIERSTRASS) Sei X ein kompakter Hausdorffraum und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ eine Teilalgebra mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $\mathcal{A}$ enthält eine konstante Funktion.
- (ii) $\mathcal{A}$ trennt die Punkte von X , d.h. für $x_1 \neq x_2$ aus X existiert ein $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- (iii) Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dann sei $\mathcal{A}$ selbstadjungiert, d.h. aus $f \in \mathcal{A}$ folgt $\bar{f} \in \mathcal{A}$.

Dann ist $\mathcal{A}$ dicht in $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$.

Beweis: siehe Literatur. ■

3.2 Vervollständigung

Definition 3.8 (Vervollständigung)

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Ein metrischer Raum $(\tilde{M}, \tilde{d})$ heißt *Vervollständigung* von (M, d) , wenn gelten:

- (i) $(\tilde{M}, \tilde{d})$ vollständig.
- (ii) Es existiert eine isometrische Einbettung $j: M \rightarrow \tilde{M}$, sodass $j(M)$ dicht in $\tilde{M}$ ist. Isometrie bedeutet $\tilde{d}(j(x), j(y)) = d(x, y)$ für alle $x, y \in M$.

Satz 3.9 Jeder metrische Raum besitzt eine bis auf Isometrie eindeutige Vervollständigung.

Beispiel 3.10 Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $p \in [1, \infty)$. Die Menge der stetigen Funktionen auf Ω mit kompakten Träger $\text{supp } f := \{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$

$$\mathcal{C}_c(\Omega) := \{f \in \mathcal{C}(\Omega) \mid \text{supp } f \text{ kompakt}\}$$

und der Norm

$$\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

- liefert als Vervollständigung den Raum $L_p(\Omega)$.

4 Der Satz von BAIRE und Anwendungen

4.1 Der Satz von BAIRE

Theorem 4.1 (BAIRE, 1. Variante) Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann gilt: Für jede Folge $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offener und dichter Teilmengen von X ist der Durchschnitt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$$

dicht in X .

Beweis: Es ist zu zeigen, dass in jeder Umgebung eines beliebigen Punktes aus X stets ein Punkt aus dem Durchschnitt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ liegt. Sei also $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Da O_1 offen und dicht ist, gibt es $x_1 \in X$ und $\varepsilon_1 > 0$ mit

$$U_{\varepsilon_1}(x_1) \subseteq O_1 \cap U_\varepsilon(x).$$

O.E.d.A. sei dabei $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ und sogar $B_{\varepsilon_1}(x_1) \subseteq O_1 \cap U_\varepsilon(x)$. Weiter ist O_2 offen und dicht, also existiert ein $x_2 \in X$ und $\varepsilon_2 > 0$, sodass

$$U_{\varepsilon_2}(x_2) \subseteq O_2 \cap U_{\varepsilon_1}(x_1) \subseteq O_2 \cap O_1 \cap U_\varepsilon(x)$$

gilt. Wieder sei o.E.d.A. $\varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_1}{2}$ und auch $B_{\varepsilon_2}(x_2) \subseteq O_2 \cap U_{\varepsilon_1}(x_1)$. Analog führen wir nun diese Konstruktion fort und erhalten eine Punktfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und eine Zahlenfolge $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft

$$B_{\varepsilon_n}(x_n) \subseteq O_n \cap U_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1}) \subseteq \cdots \subseteq O_n \cap O_{n-1} \cap \cdots \cap O_2 \cap O_1 \cap U_\varepsilon(x).$$

Außerdem gilt $\varepsilon_n < \frac{\varepsilon_{n-1}}{2} < \cdots < \frac{\varepsilon}{2^n}$, also folgt $\varepsilon_n \rightarrow 0$ bzw. $\text{diam} B_{\varepsilon_n}(x_n) \rightarrow 0$. Mit dem Schachtelsatz 1.27 von CANTOR erhalten wir

$$\{y\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{\varepsilon_n}(x_n) \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n \cap U_\varepsilon(x)$$

für ein $y \in X$, also ist der Durchschnitt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ dicht in X . ■

Lemma: Sei A eine Teilmenge eines metrischen Raums (X, d) , die keine Kugel bzw. keine inneren Punkte enthält. Dann ist das Komplement $\complement A$ dicht in X .

Beweis: Angenommen, das Komplement $\complement A$ wäre nicht dicht in X , d.h. $\overline{\complement A} \neq X$ bzw. es gibt ein $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ mit $\complement A \cap U_\varepsilon(x) = \emptyset$. Dann wäre aber $U_\varepsilon(x) \subseteq A$. Widerspruch!

Satz 4.2 (BAIRE, 2. Variante) Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Hat X eine Darstellung

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

als Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen Mengen, dann enthält ein A_n eine Kugel.

Beweis: Angenommen, kein A_n enthält eine Kugel, dann wären die Komplemente $\complement A_n$ dicht in X . Nach dem Theorem 4.1 von BAIRE ist also $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \complement A_n$ dicht in X , aber das liegt im Widerspruch zu

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \complement A_n = \complement \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \complement X = \emptyset.$$

Definition 4.3 (Baireraum, nirgends dicht, mager, fett, Kategorie, G_δ , F_σ)

Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

- (i) X heißt *Baireraum*, wenn der abzählbare Durchschnitt von offenen dichten Teilmengen von X stets dicht in X ist.
- (ii) Eine Teilmenge $B \subseteq X$ heißt
 - *nirgends dicht*, falls der Abschluss $\overline{B}$ keine inneren Punkte enthält.
 - *mager* bzw. von *erster (Baire'scher) Kategorie*, wenn B eine Darstellung als abzählbare Vereinigung $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ von nirgends dichten Mengen B_n hat.
 - *fett* bzw. von *zweiter (Baire'scher) Kategorie*, wenn B nicht von erster Kategorie ist.
 - G_δ -Menge, falls $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ für abzählbar viele offene O_n .
 - F_σ -Menge, falls $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ für abzählbar viele abgeschlossene A_n .

Lemma: In einem topologischen Raum (X, τ) gelten:

- (i) Eine nichtleere nirgends dichte Menge ist nicht offen.

- (ii) Eine Teilmenge $B \subseteq X$ ist nirgends dicht genau dann, wenn jede nichtleere offene Menge $O \subseteq X$ eine nichtleere offene Menge $U \subseteq O$ mit $U \cap B = \emptyset$ enthält.
- (iii) Das Komplement einer nirgends dichten Menge ist dicht.
- (iv) Das Komplement einer offenen dichten Menge ist nirgends dicht.
- (v) Die Vereinigung endlich vieler nirgends dichter Mengen ist nirgends dicht.

Beweis: (i) Sei B nirgends dicht. Wir nehmen an, B wäre offen. Dann gäbe es ein $x \in B$ mit $B \in \mathcal{U}(x)$, also wäre x ein innerer Punkt von B . Widerspruch!

(ii) Sei $B \subseteq X$ nirgends dicht und $O \subseteq X$ eine nichtleere offene Menge. Wähle $U := O \cap (\overset{\circ}{B} \cup \mathbb{C}\overline{B}) \in \tau \setminus \{\emptyset\}$, dann gilt

$$U \cap B = O \cap (\overset{\circ}{B} \cup \mathbb{C}\overline{B}) \cap B = (O \cap \underbrace{\overset{\circ}{B}}_{\subseteq \overline{B} = \emptyset} \cap B) \cup (O \cap \underbrace{\mathbb{C}\overline{B}}_{\substack{\subseteq \mathbb{C}B \\ \subseteq \emptyset}} \cap B) \subseteq \emptyset.$$

Umgekehrt: Angenommen, $\overline{B}$ hat einen inneren Punkt x , d.h. es gibt eine nichtleere offene Menge O mit $x \in O \subseteq \overline{B}$. Weiter existiert eine nichtleere offene Menge $U \subseteq O$ mit $U \cap B = \emptyset$, also gilt $U \subseteq \overline{B} \cap \mathbb{C}B \subseteq \partial B$. Widerspruch!

- (iii) Sei B nirgends dicht, d.h. $\overline{B}$ hat keine inneren Punkte, also gilt

$$\forall x \in X \forall U \in \mathcal{U}(x): U \not\subseteq \overline{B}$$

und insbesondere stets $U \not\subseteq B$. Damit folgt $U \cap \mathbb{C}B \neq \emptyset$, d.h. $\mathbb{C}B$ ist dicht.

- (iv) Für eine offene dichte Menge B gilt $\forall x \in X \forall U \in \mathcal{U}(x): U \cap B \neq \emptyset$. Es folgt stets $U \not\subseteq \mathbb{C}B = \overline{\mathbb{C}B}$, also enthält $\mathbb{C}B$ keine inneren Punkte und ist damit nirgends dicht.
- (v) Seien B_1, B_2 nirgends dichte Mengen. Wir benutzen (ii). Angenommen, $B_1 \cup B_2$ enthält ein offenes $O \neq \emptyset$. Dann gäbe es ein nichtleeres offenes $U \subseteq O \subseteq B_1 \cup B_2$ mit $U \cap B_1 = \emptyset$, d.h. $U \subseteq B_2$. Widerspruch! Also ist $B_1 \cup B_2$ nirgends dicht. Durch eine endliche Anwendung erhält man die entsprechende Aussage für endlich viele nirgends dichte Mengen. ■

Lemma: Für einen topologischen Raum X sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) X ist Baireraum.
- (ii) Das Komplement einer mageren Menge ist dicht.

- (iii) Jede nichtleere offene Menge ist fett.
- (iv) Das Innere jeder mageren Menge ist leer.

Beweis: • (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei B mager in einem Baireraum, d.h. $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ für nirgends dichte abgeschlossene Mengen B_n . Es folgt $\mathring{B} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathring{B}_n$ und die Mengen $\mathring{B}_n$ sind dicht und offen. Mit der Baireraumeigenschaft folgt, dass $\mathring{B}$ dicht ist.

- (ii) $\Rightarrow$ (iii) Angenommen, es gäbe eine nichtleere offene magere Menge $O \subseteq X$. Es gilt $\forall x \in O: O \in \mathcal{U}(x)$ und damit $x \notin \mathring{O} = \overline{\mathring{O}}$, d.h. $\mathring{O}$ wäre nicht dicht. Widerspruch!
- (iii) $\Rightarrow$ (iv) Sei $B \subseteq X$ eine magere Menge, d.h. es gibt eine Folge $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nirgends dichter Mengen mit $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Nun gilt

$$\mathring{B} = \mathring{B} \cap B = \mathring{B} \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathring{B} \cap B_n)$$

und die Mengen $\mathring{B} \cap B_n$ sind offen und nirgends dicht, also nach (iii) leer und es folgt $\mathring{B} = \emptyset$.

- (iv) $\Rightarrow$ (i) Sei $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge offener dichter Mengen, dann sind die Mengen $A_n := \mathring{O}_n$ abgeschlossen mit $\mathring{A}_n = \emptyset$, d.h. die A_n sind nirgends dicht und damit besitzt die magere Menge

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathring{O}_n = \mathring{C} \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$$

nach (iv) ein leeres Inneres, also ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ dicht und damit ist X ein Baireraum. ■

Bemerkung 4.4 (i) Ein vollständiger metrischer Raum ist nach dem Theorem 4.1 von BAIRE ein Baireraum und fett bzw. von zweiter Kategorie in sich, falls er nicht leer ist. Umgekehrt muss aber ein metrischer Raum, der ein Baireraum ist, nicht vollständig sein. Beispielsweise ist das reelle Intervall $(0, 1)$ mit der üblichen Metrik ein Baireraum, jedoch nicht vollständig. Ein Grund dafür ist, dass Vollständigkeit keine topologische Eigenschaft ist, aber die Baireraumeigenschaft ist topologisch.

- (ii) Die Menge $(0, 1)$ ist nicht dicht in $\mathbb{R}$, aber nicht nirgends dicht, denn der Abschluss $[0, 1]$ hat den inneren Punkt $\frac{1}{2}$.
- (iii) Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist dicht in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Das Komplement $\mathring{\mathbb{C}}\mathbb{Q}$ ist die Menge der irrationalen Zahlen und

diese liegt auch dicht in $\mathbb{R}$. Die Mengen $\{x\}$ für $x \in \mathbb{Q}$ sind nirgends dicht und wegen der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ ist also $\mathbb{Q} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\}$ mager bzw. von erster Kategorie in $\mathbb{R}$. Es gibt demnach Mengen, die gleichzeitig mager und dicht sind.

- (iv) Das Intervall $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ ist trivialerweise eine F_σ -Menge und wegen $[0, 1] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$ auch eine G_δ -Menge.
- (v) Im topologischen Sinne sind magere Mengen „klein“ und im maßtheoretischen Sinne sind Nullmengen „klein“. Beide Kleinheitsbegriffe sind jedoch nicht gleichwertig. Es existiert nämlich eine disjunkte Zerlegung der reellen Zahlen $\mathbb{R} = A \cup B$, sodass A mager und B eine Lebesguenullmenge ist.

Satz 4.5 Sei X ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:

- (i) X Baireraum.
- (ii) Wenn $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge dichter G_δ -Mengen ist, dann ist der Durchschnitt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ eine dichte G_δ -Menge.
- (iii) Wenn $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge nirgends dichter Mengen ist, dann besitzt die Vereinigung $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ keine inneren Punkte.

Beweis: • (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei X ein Baireraum und $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge dichter G_δ -Mengen, d.h. $B_n = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} O_{n,m}$ für offene dichte Mengen $O_{n,m}$. Dann ist

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} O_{n,m}$$

ein Durchschnitt abzählbar vieler offener dichter Mengen, also eine dichte G_δ -Menge.

- (ii) $\Rightarrow$ (i) Offene Mengen sind insbesondere G_δ -Mengen. Demnach ist der abzählbare Durchschnitt offener dichter Mengen wieder dicht, d.h. X ist Baireraum.
- (i) $\Rightarrow$ (iii) Sei X ein Baireraum und $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge nirgends dichter Mengen. Angenommen, $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ wäre ein innerer Punkt, dann gäbe es ein offenes O mit $x \in O \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Weiter folgt

$$O \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathring{B}_n = O \cap \mathring{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n} = \emptyset$$

und damit wäre $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathring{B}_n$ nicht dicht. Das ist aber ein Widerspruch zur Baireraumeigenschaft, denn alle $\mathring{B}_n$ sind offen und dicht.

- (iii) $\Rightarrow$ (i) Sei $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge offener dichter Teilmengen von X , dann sind alle $\bar{O}_n$ nirgends dicht und damit enthält $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bar{O}_n$ keine inneren Punkte. Schließlich ist $\bar{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{O}_n$ dicht in X . ■

Lemma: Sei X ein normierter, unendlichdimensionaler Raum und B sei eine algebraische Basis von X , d.h. jedes $x \in X$ ist (eindeutige) Linearkombination endlich vieler Elemente aus B . Dann gelten:

- (i) Jeder endlichdimensionale lineare Teilraum von X ist abgeschlossen.
- (ii) Ein linearer Teilraum von X , der nicht dicht in X ist, ist nirgends dicht in X .
- (iii) Wenn X vollständig ist, dann ist B überabzählbar.

4.2 Erste Anwendungen des BAIREschen Kategoriensatz

Satz 4.6 Sei f eine auf $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ (oder auf ganz $\mathbb{R}$) definierte Funktion, die auf einer dichten Teilmenge ihres Definitionsbereiches stetig ist. Dann ist die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen mager bzw. von erster Kategorie in $[a, b]$ (bzw. in $\mathbb{R}$).

Beispiel: Die Funktion

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \\ \frac{1}{q} & (x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Z}, \gcd(p, q) = 1) \end{cases}$$

ist unstetig auf $\mathbb{Q}$ und stetig auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Es gibt jedoch keine Funktion, die stetig auf $\mathbb{Q}$ und unstetig auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist, denn $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist nicht von erster Kategorie.

Beachte, dass ohne die Voraussetzung der Stetigkeit auf einer dichten Menge der Satz falsch ist: Die Dirichlet-Funktion

$$g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \\ 1 & (x \in \mathbb{Q}) \end{cases}$$

□ ist auf ganz $\mathbb{R}$ unstetig.

Satz 4.7 Es gibt eine Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, die überall stetig und nirgends differenzierbar ist.

4.3 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

Theorem 4.8 (BANACH-STEINHAUS) Seien X, Y normierte Räume und X sei ein Baire-Raum. Ferner sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$ eine punktweise beschränkte Menge stetiger linearer Abbildungen, d.h. für alle $x \in X$ gilt

$$\bigvee_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| < \infty.$$

Dann ist $\mathcal{F}$ gleichmäßig beschränkt, d.h.

$$\bigvee_{T \in \mathcal{F}} \|T\| < \infty.$$

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ setze

$$X_n := \{x \in X \mid \forall T \in \mathcal{F}: \|Tx\| \leq n\} = \bigcap_{T \in \mathcal{F}} \|T \cdot\|^{-1}([0, n]).$$

Da die Norm $\|\cdot\|$ und alle $T \in \mathcal{F}$ stetig sind, ist auch $\|\cdot\| \circ T = \|T \cdot\|$ stetig. Damit ist $\|T \cdot\|^{-1}([0, n])$ stets abgeschlossen, also sind alle X_n abgeschlossen. Es gilt

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n,$$

denn $\mathcal{F}$ ist punktweise beschränkt. Nach dem Satz 4.2 von BAIRE hat ein X_n ein nicht-leeres Inneres, d.h. $\exists x_0 \in X_n \exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(x_0) \subseteq X_n$. Mit $U_\varepsilon(x_0) = x_0 + U_\varepsilon(0)$ folgt für beliebiges $T \in \mathcal{F}$ und für alle $x \in U_\varepsilon(0)$ sofort $\|T(x_0 + x)\| \leq n$ und damit gilt

$$\forall x \in U_\varepsilon(0): \|Tx\| = \|T(x + x_0 - x_0)\| \leq \|T(x + x_0)\| + \|Tx_0\| \leq 2n.$$

Es gilt also stets $\|T \frac{x}{\varepsilon}\| \leq \frac{2n}{\varepsilon}$ und mit $U_1(0) = \frac{1}{\varepsilon} U_\varepsilon(0)$ erhalten wir

$$\forall x \in U_1(0): \|Tx\| \leq \frac{2n}{\varepsilon}.$$

Schließlich ist

$$\bigvee_{T \in \mathcal{F}} \|T\| \leq \frac{2n}{\varepsilon} < \infty.$$

Folgerung 4.9 Seien X, Y normierte Räume, X ein Baire-Raum und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$ sei eine Menge stetiger linearer Abbildungen, die nicht gleichmäßig beschränkt ist, d.h. $\bigvee_{T \in \mathcal{F}} \|T\| = \infty$. Dann ist $\mathcal{F}$ nicht punktweise beschränkt, d.h. es existiert ein $x \in X$ mit $\bigvee_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| = \infty$.

Dies wird auch als *Kondensation von Singularitäten* bezeichnet und bedeutet Folgendes: Hat man eine Menge von Elementen x_i mit Eigenschaft (=Singularität) E_i , dann gelingt es oft, alle Eigenschaften E_i in einem Element x zu vereinen (=kondensieren).

Beispiel: Sei $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und stetig bis auf $x = 0$. Wähle $\{x_i \mid i \in I\} \subseteq \mathbb{R}$ beliebig und setze $f_i(x) := g(x - x_i)$, dann ist f_i in x_i unstetig (Eigenschaft E_i). Die Funktion $f(x) := \sum_{i \in I} \frac{f_i(x)}{2^i}$ ist unstetig in allen x_i .

□

Bemerkung 4.10 (i) Aus den Voraussetzungen im Theorem 4.8 von BANACH-STEINHAUS folgt auch, dass $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig ist, denn es gilt für alle $T \in \mathcal{F}$ stets $TU_1(0) \subseteq U_{\frac{2n}{\varepsilon}}(0)$ und jedes $T \in \mathcal{F}$ ist linear.

(ii) Manchmal wird das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit allgemeiner formuliert: Sei X ein Baireraum und $\mathcal{F}_0$ eine Familie stetiger reellwertiger Funktionen auf X , die punktweise beschränkt ist (nach oben beschränkt). Dann ist $\mathcal{F}_0$ auf einer Kugel in X gleichmäßig beschränkt (nach oben beschränkt). Zum Beweis setze analog $X_n := \{x \in X \mid \forall f \in \mathcal{F}_0: fx \leq n\}$. Diesen Satz würde man zum Beweis von Theorem 4.8 auf die Familie $\mathcal{F}_0 = \{\|T \cdot\| \mid T \in \mathcal{F}\}$ anwenden. Die gleichmäßige Beschränktheit folgt auch hier aus der Linearität der $T \in \mathcal{F}$.

Definition 4.11 (punktweise Konvergenz)

Seien X, Y normierte Räume, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{B}(X, Y)$ und $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Man sagt, die Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *konvergiert punktweise* bzw. *bzgl. der starken Operator-topologie* gegen T , wenn für alle $x \in X$ die Folge $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen Tx konvergiert. Man schreibt dafür auch $T_n \xrightarrow{s} T$.

Satz 4.12 Sei X ein normierter Raum und Y ein Banachraum. Eine Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{B}(X, Y)$ konvergiert punktweise gegen $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Es existiert eine totale Menge $B \subseteq X$, sodass für jedes $x \in B$ die Folge $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ in Y konvergiert.
- (ii) $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist gleichmäßig beschränkt, d.h. $\forall_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$.
- (iii) $\|T\| \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|$.

Falls X ein Banachraum ist, dann sind obige Bedingungen notwendig und hinreichend.

5 Der Satz von der offenen Abbildung und der Satz vom abgeschlossenen Graphen

5.1 Der Satz von der offenen Abbildung

Definition 5.1 (offen)

Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $T: X \rightarrow Y$ heißt *offen*, wenn das Bild jeder offenen Mengen aus X offen in Y ist.

Bemerkung: Bei stetigen Abbildungen ist das Urbild offener Mengen offen. Offene Abbildungen haben aber keineswegs die Eigenschaft, abgeschlossene Mengen in abgeschlossene Mengen abzubilden. Betrachte hierfür die Projektion $p_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ auf die erste Koordinate. p_1 ist offen, aber für die abgeschlossene Menge $A = \{(x, y) \mid x \geq 0, xy \geq 1\}$ gilt $p_1 A = (0, \infty)$.

Lemma 5.2 Seien X, Y normierte Räume und $T: X \rightarrow Y$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

- (i) T offen.
- (ii) T bildet offene Kugeln um 0 auf Nullumgebungen ab.
- (iii) $TU_1(0)$ ist Nullumgebung.

Beweis: • (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $U_\delta(0)$ eine Kugel um 0. Es gilt $T0 = 0$ und $V := TU_\delta(0)$ ist offen mit $0 \in V$, also ist V eine Nullumgebung.

- (ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $O \subseteq X$ offen und $x \in O$, dann gibt es eine Umgebung $U_\delta(x) \subseteq O$. Es folgt

$$TO \supseteq TU_\delta(x) = T(x + U_\delta(0)) = Tx + TU_\delta(0),$$

also ist TO offen.

- (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) trivial mit der Linearität von T . ■

Definition (absorbierend)

Sei X ein normierter Raum. Eine Teilmenge $B \subseteq X$ heißt *absorbierend*, falls

$$\forall x \in X \exists \lambda > 0 \forall |\mu| \geq \lambda: x \in \mu B.$$

Lemma: Für eine absorbierende Teilmenge $B \subseteq X$ eines normierten Raums X gilt

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nB.$$

Folgerung: Seien X, Y normierte Räume und $T: X \rightarrow Y$ eine offene lineare Abbildung. Dann ist T surjektiv.

Beweis: Nach obigen Lemma 5.2 ist $TU_1(0)$ eine Nullumgebung, d.h. $\exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(0) \subseteq TU_1(0)$. Die Einheitskugel $U_1(0) \subseteq X$ ist absorbierend in X , also gilt $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nU_1(0)$ und damit folgt mit der Linearität von T

$$TX = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nTU_1(0) \supseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nU_\varepsilon(0) = Y.$$

Definition 5.3 (abzählbarkonvex)

Sei X ein normierter Raum und $B \subseteq X$ beschränkt. B heißt *abzählbarkonvex* (oder auch *idealkonvex*), wenn für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus B und alle Zahlenfolgen $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $(0, 1)$ mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = 1$ die Summe

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n x_n$$

gegen ein Element aus B konvergiert.

Satz 5.4 (i) Wenn $B \subseteq X$ abzählbarkonvex ist, dann gilt $\overset{\circ}{B} \subseteq B$.

(ii) Wenn X ein Banachraum und $B \subseteq X$ abgeschlossen, konvex und absorbierend ist, dann ist B eine Nullumgebung.

(iii) Wenn X ein Banachraum und $B \subseteq X$ abzählbarkonvex und absorbierend, dann ist B eine Nullumgebung.

Beweis: (i) Sei $x \in \overset{\circ}{B}$, o.E.d.A. $x = 0$, also gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(0) \subseteq \bar{B}$. Sei $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $(0, 1)$ mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = 1$, es gilt insbesondere $\alpha_n \rightarrow 0$. Wegen $0 \in \bar{B}$ gibt es ein $x_1 \in B$ mit

$$\|\alpha_1 x_1\| < \varepsilon \alpha_2.$$

Es gilt

$$y_1 := -\alpha_1 x_1 \in U_{\varepsilon \alpha_2}(0) = \alpha_2 U_\varepsilon(0) \subseteq \alpha_2 \bar{B} = \overline{\alpha_2 B}$$

und damit existiert ein $x_2 \in B$ mit

$$\|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\| = \|\alpha_2 x_2 - y_1\| < \varepsilon \alpha_3.$$

Konstruiere nun iterativ eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$: Es gilt

$$y_n := -\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \in U_{\varepsilon \alpha_{n+1}}(0) = \alpha_{n+1} U_\varepsilon(0) \subseteq \alpha_{n+1} \bar{B} = \overline{\alpha_{n+1} B}$$

und damit existiert ein $x_{n+1} \in B$ mit

$$\left\| \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k \right\| = \|\alpha_{n+1} x_{n+1} - y_n\| < \varepsilon \alpha_{n+2}.$$

Da $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, gilt $\|\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n x_n\| = 0$, d.h. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n x_n = 0$. Weil B abzählbarkonvex ist, folgt damit $0 \in B$.

- (ii) B ist absorbierend, d.h. es ist $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nB$, also gibt es nach Satz 4.2 von BAIRE ein $n \in \mathbb{N}$, sodass nB eine Kugel enthält. Damit hat auch B einen inneren Punkt x . Weil B absorbierend ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $-x \in \frac{1}{\varepsilon} B$, also $-\varepsilon x \in B$. Es folgt mit der Konvexität von B

$$0 \overset{x \in \overset{\circ}{B}}{\underset{\downarrow}{\in}} \underbrace{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \overset{\circ}{B} + \frac{1}{1+\varepsilon} (-\varepsilon x)}_{\text{offen}} \overset{B \text{ konvex}}{\underset{\downarrow}{\subseteq}} B,$$

d.h. B ist eine Nullumgebung.

- (iii) Nach (ii) ist $\bar{B}$ eine Nullumgebung, denn es gilt die Implikationskette

$$B \text{ abzählbarkonvex} \implies B \text{ konvex} \implies \bar{B} \text{ konvex}.$$

Nach (i) gilt $\overset{\circ}{\bar{B}} \subseteq B$ und weiter ist $\overset{\circ}{\bar{B}}$ offen mit $0 \in \overset{\circ}{\bar{B}}$, d.h. B ist eine Nullumgebung. ■

Lemma: (i) Die offene Einheitskugel $U_1(0)$ in einem Banachraum X ist abzählbarkonvex.

- (ii) Das stetige lineare Bild einer abzählbarkonvexen Menge ist abzählbarkonvex.
- (iii) Eine surjektive lineare Abbildung bildet absorbierende Mengen auf absorbierende Mengen ab.

Beweis: (i) $U_1(0)$ ist ersichtlich beschränkt. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq U_1(0)$ und $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (0, 1)$ mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = 1$. Es gilt

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|\alpha_n x_n\| = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \underbrace{\|x_n\|}_{< 1} < \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = 1 < \infty$$

und damit konvergiert die Summe $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n x_n$ nach Satz 2.3 in X . (Es ist auch möglich zu zeigen, dass die Partialsummenfolge eine Cauchyfolge ist.) Weiter ist

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n x_n \right\| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \underbrace{\|x_n\|}_{< 1} < 1$$

und damit gilt $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n x_n \in U_1(0)$.

(ii) Sei $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ stetig und $B \subseteq X$ abzählbarkonvex. Ferner sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq TB$, d.h. $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B: Tx_n = y_n$, und sei $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (0, 1)$ mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = 1$. Weil B abzählbarkonvex ist, gilt $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n x_n \in B$ und mit der Folgenstetigkeit von T folgt

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k y_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k Tx_k = T \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \rightarrow T \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n x_n \in TB,$$

also ist auch TB abzählbarkonvex.

(iii) Sei $T: X \rightarrow Y$ surjektiv und $B \subseteq X$ absorbierend, dann folgt

$$Y = TX = T \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nB = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nTB,$$

d.h. TB ist absorbierend in Y .

Theorem 5.5 (Satz von der offenen Abbildung) Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ surjektiv. Dann ist T offen.

Beweis: Nach obigen Lemma ist $U_1(0)$ abzählbarkonvex und absorbierend in X und damit ist auch $TU_1(0)$ abzählbarkonvex und absorbierend. Nach Satz 5.4 ist $TU_1(0)$ eine Nullumgebung, also ist T nach Lemma 5.2 offen.

Satz 5.6 (Satz vom stetigen Inversen) Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ bijektiv. Dann ist T^{-1} stetig.

Beweis: Weil T bijektiv ist, existiert die Umkehrabbildung T^{-1} . Nun ist nach dem Theorem 5.5 von der offenen Abbildung T offen, d.h. $T = (T^{-1})^{-1}$ bildet offene Mengen auf offene Mengen ab, also sind die Urbilder offener Mengen unter T^{-1} stets offen, d.h. T^{-1} ist stetig.

Folgerung 5.7 Seien $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ zwei Normen auf X mit den Eigenschaften:

(i) X ist bezüglich beider Normen ein Banachraum.

(ii) $\|\cdot\|_2$ ist stärker als $\|\cdot\|_1$.

Dann sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent.

Beweis: Wegen (ii) ist die identische Abbildung $\text{id}_X: (X, \|\cdot\|_2) \rightarrow (X, \|\cdot\|_1)$ stetig. Außerdem ist id_X bijektiv, also folgt mit dem Satz 5.6 vom stetigen Inversen, dass $\text{id}_X^{-1}: (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$ stetig ist, also ist $\|\cdot\|_1$ stärker als $\|\cdot\|_2$ und insgesamt sind beide Normen äquivalent. ■

Lemma: Seien X, Y normierte Räume und $T: X \rightarrow Y$ eine lineare Abbildung, deren Bild $\text{im}T$ fett in Y ist. Dann gelten:

(i) $\overline{TU_1(0)}$ ist eine Nullumgebung in Y .

(ii) Wenn X ein Banachraum ist, dann ist $TU_1(0)$ eine Nullumgebung in Y .

Beweis: (i) Die Kugel $U_{\frac{1}{2}}(0)$ ist absorbierend in X , d.h. es gilt $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nU_{\frac{1}{2}}(0)$ und damit ist

$$TX = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nTU_{\frac{1}{2}}(0).$$

Da das Bild $TX = \text{im}T$ fett in Y ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\overline{nTU_{\frac{1}{2}}(0)}$ ein nichtleeres Inneres hat, also folgt $\overline{TU_{\frac{1}{2}}(0)} \neq \emptyset$ und damit gibt es ein $y \in Y$ und $\varepsilon > 0$ mit

$$y + U_\varepsilon(0) = U_\varepsilon(y) \subseteq \overline{TU_{\frac{1}{2}}(0)}.$$

Sei nun $z \in U_\varepsilon(0)$, d.h. es ist $y + z \in \overline{TU_{\frac{1}{2}}(0)}$. Weiter gibt es eine Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (Tu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq TU_{\frac{1}{2}}(0)$ mit $v_n \rightarrow y + z$ und eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (Tx_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq TU_{\frac{1}{2}}(0)$ mit $y_n \rightarrow y$. Folglich konvergiert die Folge $(v_n - y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen z und wegen $u_n - x_n \in U_1(0)$ gilt $v_n - y_n = T(u_n - x_n) \in TU_1(0)$, also ist $z \in \overline{TU_1(0)}$. Damit gilt also

$$U_\varepsilon(0) \subseteq \overline{TU_1(0)},$$

d.h. $\overline{TU_1(0)}$ ist eine Nullumgebung. Wegen der Linearität von T folgt insbesondere für alle $n \in \mathbb{N}$

$$U_{\frac{\varepsilon}{2n}}(0) \subseteq \overline{TU_{\frac{1}{2n}}(0)}.$$

(ii) Wir übernehmen das ε aus Teil (i). Sei $y \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) \subseteq \overline{TU_{\frac{1}{2}}(0)}$ und wähle $x_1 \in U_{\frac{1}{2}}(0)$ mit $\|y - Tx_1\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$, d.h. $y - Tx_1 \in U_{\frac{\varepsilon}{4}}(0)$. Wähle $x_2 \in U_{\frac{1}{4}}(0)$ mit $\|(y - Tx_1) - Tx_2\| \leq \frac{\varepsilon}{8}$, d.h. $y - Tx_1 - Tx_2 \in U_{\frac{\varepsilon}{8}}(0)$. Dieses Verfahren

setzen wir iterativ fort und erhalten eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in U_{\frac{1}{2^n}}(0)$ und

$$\|y - \sum_{k=1}^n Tx_k\| \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Es gilt $x_n \rightarrow 0$ und wegen

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\|x_n\|}_{< \frac{1}{2^n}} < \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty$$

konvergiert nach Satz 2.3 die Partialsummenfolge $(\sum_{k=1}^n x_k)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq U_1(0)$. Weiter gilt

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \right\| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\|x_n\|}_{< \frac{1}{2^n}} < 1$$

und damit ist $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \in U_1(0)$. Schließlich gilt $y = T \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \in TU_1(0)$, also

$$U_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) \subseteq TU_1(0).$$

Es folgt für alle $\delta > 0$ stets

$$U_\delta(0) \subseteq TU_{\frac{2\delta}{\varepsilon}}(0).$$

Theorem 5.8 (Satz von der offenen Abbildung) Sei X ein Banachraum und Y ein normierter Raum. Weiter sei $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ und das Bild $\text{im} T$ sei fett in Y . Dann ist T surjektiv und offen und außerdem ist Y vollständig.

Beweis: Nach dem vorangegangenen Lemma ist $TU_1(0)$ eine Nullumgebung, also ist T offen nach Lemma 5.2. Weiter ist T auch surjektiv. Zum Beweis der Vollständigkeit von Y benutzen wir den Satz 2.3. Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Y$ eine Folge mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|y_n\| < \infty$, es gibt also eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ mit $Tx_n = y_n$. Nun gilt

$$y_n \in U_{2\|y_n\|}(0) \subseteq TU_{\frac{4\|y_n\|}{\varepsilon}}(0)$$

und damit

$$\|x_n\| \leq \frac{4}{\varepsilon} \|y_n\|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$ und weil X vollständig ist, konvergiert $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ gegen ein Element $x \in X$. Mit der Folgenstetigkeit von T gilt schließlich

$$\sum_{k=1}^n y_k = T \sum_{k=1}^n x_k \rightarrow Tx \in Y.$$

Folgerung: Seien $p, q \in [1, \infty]$ mit $p < q$, dann ist ℓ_p mager in ℓ_q .

5.2 Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

Definition (Graph)

Seien X, Y normierte Räume und $T: X \supseteq \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$ ein linearer Operator. Die Menge

$$\mathcal{G}(T) := \{(x, Tx) \mid x \in \mathcal{D}(T)\}$$

heißt *Graph* von T .

Lemma: $\mathcal{G}(T)$ ist ein linearer Unterraum von $X \times Y$. Wenn T stetig mit $\mathcal{D}(T) = X$ ist, dann ist $\mathcal{G}(T)$ abgeschlossen in $X \times Y$.

Beweis: Wegen der Linearität von X, Y, T ist $\mathcal{G}(T)$ ersichtlich ein linearer Unterraum von $X \times Y$. Eine Norm auf $X \times Y$ bzw. $\mathcal{G}(T)$ ist beispielsweise $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$. Sei nun $T: X \rightarrow Y$ stetig. Dann ist auch die Abbildung

$$\hat{T}: X \times Y \rightarrow Y \\ (x, y) \mapsto Tx - y$$

stetig und damit ist $\mathcal{G}(T) = \hat{T}^{-1}\{0\}$ abgeschlossen. ■

Definition 5.9 (abgeschlossen)

Seien X, Y normierte Räume. Eine lineare Abbildung $T: X \supseteq \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$ heißt *abgeschlossen*, wenn $\mathcal{G}(T)$ abgeschlossen in $X \times Y$ ist.

Satz 5.10 Seien X, Y normierte Räume und $T: X \supseteq \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

- (i) T abgeschlossen.
- (ii) Wenn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{D}(T)$ mit $x_n \rightarrow x \in X$ und $Tx_n \rightarrow y \in Y$ ist, dann gilt $x \in \mathcal{D}(T)$ und $Tx = y$.

Beweis: Der Graph $\mathcal{G}(T)$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für alle konvergenten Folgen $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{G}(T)$ der Grenzpunkt (x, y) in $\mathcal{G}(T)$ liegt. Dies ist äquivalent damit, dass die Koordinatenfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(T)$ gegen ein Element $x \in \mathcal{D}(T)$ konvergiert und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Y$ gegen ein $y \in Y$ mit $y = Tx$. ■

Bemerkung: Sei $T: X \supseteq \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$ eine lineare Abbildung. Betrachte die folgenden Aussagen:

- (i) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(T)$ konvergiert gegen $x \in X$.

(ii) $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \text{im} T$ konvergiert gegen $y \in Y$.

(iii) $x \in \mathcal{D}(T)$ und $Tx = y$, d.h. $y \in \text{im} T$.

T ist nach Satz 5.10 genau dann abgeschlossen, wenn stets $(i) \wedge (ii) \Rightarrow (iii)$ gilt. Sei zunächst $\mathcal{D}(T) = X$. Wenn T stetig ist, dann gilt $(i) \Rightarrow (ii) \wedge (iii)$. Sei nun $\mathcal{D}(T) \neq X$, dann erhalten wir die Äquivalenz

$$T \text{ abgeschlossen} \iff \mathcal{D}(T) \text{ abgeschlossen in } X.$$

Theorem 5.11 (Satz vom abgeschlossenen Graphen) Seien X, Y Banachräume und $T: X \rightarrow Y$ ein abgeschlossener linearer Operator. Dann ist T stetig, d.h. es gilt $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Beweis: X, Y sind Banachräume, also ist auch $X \times Y$ ein Banachraum. Weil T abgeschlossen ist, ist der Graph $\mathcal{G}(T)$ abgeschlossen in $X \times Y$ und damit ist auch $\mathcal{G}(T)$ ein Banachraum. Betrachte die kanonischen Projektionen $p_X: X \times Y \rightarrow X$ und $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$. Beide Abbildungen sind stetig, denn es gilt

$$\|p_X(x, y)\| = \|x\| \leq \|x\| + \|y\| = \|(x, y)\|.$$

Die Einschränkung $p_X: \mathcal{G}(T) \rightarrow X$ ist bijektiv, denn durch $x \in X$ ist Tx und damit das Paar (x, Tx) eindeutig bestimmt. Nach dem Satz 5.6 vom stetigen Inversen ist $p_X^{-1}: X \rightarrow \mathcal{G}(T)$, $x \mapsto (x, Tx)$ stetig. Offenbar gilt

$$T = p_Y \circ p_X^{-1}$$

■ und damit ist T stetig.

Lemma: Sei X ein Banachraum und $T: X \supseteq \mathcal{D}(T) \rightarrow X$ ein abgeschlossener Operator. Dann gelten:

(i) $(\mathcal{D}(T), \|\cdot\|_T)$ mit der Graphennorm $\|x\|_T := \|x\| + \|Tx\|$ ist ein Banachraum.

(ii) $T: (\mathcal{D}(T), \|\cdot\|_T) \rightarrow (X, \|\cdot\|)$ ist stetig.

(iii) Sei $S: X \supseteq \mathcal{D}(S) \rightarrow X$ mit $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(T)$ ein weiterer abgeschlossener Operator, dann sind die Graphennormen $\|\cdot\|_T$ und $\|\cdot\|_S$ äquivalent.

(iv) Wenn T unbeschränkt mit $\mathcal{D}(T) \neq X$ ist, dann ist $\mathcal{D}(T)$ mager in X .

Beweis: (i) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(T)$ eine Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|_T$, also gilt

$$\|x_n - x_m\| + \|Tx_n - Tx_m\| = \|x_n - x_m\|_T \rightarrow 0$$

und damit sind $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolgen für $\|\cdot\|$, d.h. $x_n \rightarrow x$ und $Tx_n \rightarrow y$. Weil T abgeschlossen ist, folgt $(x, y) \in \mathcal{G}(T)$, also $x \in \mathcal{D}(T)$ und $Tx = y$, d.h. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert bezüglich $\|\cdot\|_T$ gegen x .

(ii) Für alle $x \in \mathcal{D}(T)$ gilt

$$\|Tx\| \leq \|x\| + \|Tx\| = \|x\|_T,$$

d.h. $T: (\mathcal{D}(T), \|\cdot\|_T) \rightarrow (X, \|\cdot\|)$ ist stetig.

(iii) Betrachte die Abbildung

$$P: \begin{aligned} \mathcal{G}(T) &\rightarrow X \\ (x, Tx) &\mapsto Sx. \end{aligned}$$

P ist abgeschlossen, also stetig. Damit gilt

$$\exists C > 0 \forall x \in \mathcal{D}(T): \|P(x, Tx)\| = \|Sx\| \leq C\|x\|_T = C(\|x\| + \|Tx\|)$$

und analog beim Vertauschen von S und T . Weiter folgt

$$\|x\|_S = \|x\| + \|Sx\| \leq (C+1)\|x\|_T$$

und

$$\|x\|_T = \|x\| + \|Tx\| \leq (D+1)\|x\|_S,$$

also insgesamt

$$\frac{1}{D+1}\|x\|_T \leq \|x\|_S \leq (C+1)\|x\|_T$$

und $\|\cdot\|_S, \|\cdot\|_T$ sind äquivalent.

(iv) $\mathcal{D}(T)$ und $\mathcal{G}(T)$ sind Banachräume. Die Abbildung

$$P: \begin{aligned} \mathcal{G}(T) &\rightarrow \mathcal{D}(T) \\ (x, Tx) &\mapsto x \end{aligned}$$

ist linear, stetig und bijektiv. Falls also das Bild $\text{im } P = \mathcal{D}(T)$ fett in X ist, so ist P offen nach dem Theorem 5.8 von der offenen Abbildung und damit wäre P^{-1} stetig, d.h.

$$\exists C > 0 \forall x \in \mathcal{D}(T): \|P^{-1}x\| = \|x\| + \|Tx\| = \|x\|_T \leq C\|x\|.$$

Wegen $\|Tx\| \leq C\|x\|$ für alle $x \in \mathcal{D}(T)$ wäre T stetig, also beschränkt. Widerspruch! ■

Beispiel: Der Ableitungsoperator auf der Menge $\mathcal{C}^1[0, 1]$ der einmal stetig differenzierbaren Funktionen ist unbeschränkt, aber abgeschlossen. Also ist $\mathcal{C}^1[0, 1]$ mager in $\mathcal{C}[0, 1]$. □

Definition 5.12 (Einschränkung, Fortsetzung, abschließbar, Abschluss)

Seien X, Y normierte Räume und $S, T: X \rightarrow Y$ lineare Operatoren.

(i) S heißt *Einschränkung* von T und T heißt *Fortsetzung* von S , wenn

$$\mathcal{G}(S) \subseteq \mathcal{G}(T)$$

gilt. Wir schreiben dafür auch $S \subseteq T$.

(ii) T heißt *abschließbar*, wenn T eine abgeschlossene Fortsetzung besitzt. Die kleinste abgeschlossene Fortsetzung heißt *Abschluss* von T und wir schreiben dafür $\bar{T}$.

Bemerkung: Wenn eine abgeschlossene Fortsetzung von T existiert, dann ist $\bar{T}$ eindeutig definiert durch

$$\mathcal{G}(\bar{T}) = \bigcap_{T \subseteq S \text{ abg.}} \mathcal{G}(S).$$

Lemma: Seien X, Y normierte Räume und $T: X \supseteq \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$ ein linearer Operator. Dann sind äquivalent:

- (i) T abschließbar.
- (ii) $\overline{\mathcal{G}(T)}$ ist der Graph eines linearen, abgeschlossenen Operators S . Es gilt $\bar{T} = S$.
- (iii) Für eine Nullfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{D}(T)$ folgt aus $Tx_n \rightarrow y$ stets $y = 0$.

Beweis: • (i) $\Rightarrow$ (ii) Wenn T abschließbar ist, dann existiert eine abgeschlossene Fortsetzung $S_0 \supseteq T$ mit $\mathcal{G}(S_0)$ abgeschlossen und $\mathcal{G}(T) \subseteq \mathcal{G}(S_0)$. Es folgt $\overline{\mathcal{G}(T)} \subseteq \mathcal{G}(S_0)$ und damit ist $\overline{\mathcal{G}(T)}$ Graph eines abgeschlossenen Operators S . Weiter ist $\overline{\mathcal{G}(T)}$ kleinste abgeschlossene Menge, die $\mathcal{G}(T)$ enthält, also ist S die kleinste abgeschlossene Fortsetzung $\bar{T}$ von T .

- (ii) $\Rightarrow$ (iii) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{D}(T)$ mit $x_n \rightarrow 0$ und $Tx_n \rightarrow y$, dann folgt $(0, y) \in \overline{\mathcal{G}(T)} = \mathcal{G}(\bar{T})$ und damit gilt $y = 0$.
- (ii) $\Rightarrow$ (i) trivial.
- (iii) $\Rightarrow$ (ii) Sei $(x, y) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$, dann existiert eine Folge $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{G}(T)$ mit $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$, d.h. $x_n \rightarrow x$ und $y_n = Tx_n \rightarrow y$. Falls $x = 0$, so folgt $y = 0$. Unter Beachtung der Linearität von T folgt, dass $\overline{\mathcal{G}(T)}$ Graph eines abgeschlossenen linearen Operators $S \supseteq T$ ist. Weiter ist $\overline{\mathcal{G}(T)}$ kleinste abgeschlossene Menge, die $\mathcal{G}(T)$ enthält, also ist S die kleinste abgeschlossene Fortsetzung $\bar{T}$ von T .

Lemma: Seien X, Y Banachräume und $T: X \rightarrow Y$ abschließbar. Dann ist T stetig.

Beweis: Wenn T abschließbar ist, dann ist der Abschluss $\overline{T}$ abgeschlossen und außerdem eine Fortsetzung von T . Nach dem Theorem 5.11 vom abgeschlossenen Graphen ist also $\overline{T}$ stetig und damit ist auch die Einschränkung T stetig. ■

6 Der Satz von HAHN-BANACH und Anwendungen

6.1 Der Satz von HAHN-BANACH

Definition 6.1 (algebraischer Dualraum)

Sei X ein $\mathbb{K}$ -linearer Raum für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Der *algebraische Dualraum*

$$X^* := \{f: X \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ linear}\}$$

ist der $\mathbb{K}$ -lineare Raum aller linearen Funktionale auf X . Wenn $f \in X^*$ und $x \in X$, dann schreiben wir statt $f(x)$ häufig auch $\langle f, x \rangle$ oder (x, f) .

Lemma 6.2 Sei X ein $\mathbb{C}$ -linearer Raum.

- (i) Ist $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ein $\mathbb{R}$ -lineares Funktional und setzt man

$$\tilde{f}(x) := f(x) - i f(ix),$$

dann ist $\tilde{f}: X \rightarrow \mathbb{C}$ ein $\mathbb{C}$ -lineares Funktional mit $\Re \tilde{f} = f$.

- (ii) Ist $h: X \rightarrow \mathbb{C}$ ein $\mathbb{C}$ -lineares Funktional und setzt man

$$f := \Re h$$

sowie $\tilde{f}$ wie in (i), dann ist f ein $\mathbb{R}$ -lineares Funktional mit $\tilde{f} = h$.

- (iii) Ist $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Halbnorm und $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ ein $\mathbb{C}$ -lineares Funktional, dann gilt:

$$\forall x \in X: |f(x)| \leq p(x) \iff \forall x \in X: |\Re f(x)| \leq p(x).$$

- (iv) Ist X ein normierter $\mathbb{C}$ -linearer Raum, dann gilt für ein stetiges $\mathbb{C}$ -lineares Funktional f auf X stets

$$\|f\| = \|\Re f\|.$$

Beweis: (i) Das Funktional $\tilde{f}$ ist als Komposition $\mathbb{R}$ -linearer Funktionale selbst $\mathbb{R}$ -linear. Die $\mathbb{C}$ -Linearität folgt wegen

$$\tilde{f}(ix) = f(ix) - if(iix) = if(x) + f(ix) = i(f(x) - if(ix)) = i\tilde{f}(x).$$

(ii) Das Funktional $f = \Re h$ ist als Realteil eines $\mathbb{C}$ -linearen Funktionals natürlich $\mathbb{R}$ -linear. Weiter gilt mit $\Re z = \Im(iz)$ bzw. $\Im z = -\Re(iz)$

$$\tilde{f}(x) = \Re h(x) - i\Re h(ix) = \Re h(x) + i\Im h(x) = h(x)$$

für alle $x \in X$ und damit ist $\tilde{f} = h$.

(iii) Es gilt stets $|\Re f(x)| \leq |f(x)|$, also ist die Richtung ($\Rightarrow$) trivial. Sei nun $|\Re f(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in X$. Für alle $z \in \mathbb{C}$ existiert ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$ und $|z| = \alpha z$. Damit gilt für alle $x \in X$ nun

$$|f(x)| = \alpha f(x) = f(\alpha x) = \Re f(\alpha x) \leq |\Re f(\alpha x)| \leq p(\alpha x) \leq |\alpha|p(x) = p(x).$$

(iv) Trivial ist $\|\Re f\| \leq \|f\|$. Weil f stetig ist, gilt $\|f\| < \infty$. Aus (iii) folgt unmittelbar

$$\forall x \in U_1(0): |f(x)| \leq a \iff \forall x \in U_1(0): |\Re f(x)| \leq a.$$

Wegen $|\Re f(x)| \leq \|\Re f\|$ folgt $|f(x)| \leq \|\Re f\|$ für alle $x \in U_1(0)$ und damit gilt auch $\|f\| \leq \|\Re f\|$.

Korollar: Sei X ein $\mathbb{C}$ -linearer Raum. Die Zuordnung

$$f \mapsto \Re f$$

ist nach dem Lemma 6.2(i),(ii) eine bijektive $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung zwischen dem Raum der $\mathbb{C}$ -linearen $\mathbb{C}$ -wertigen Funktionale auf X und dem Raum der $\mathbb{R}$ -linearen $\mathbb{R}$ -wertigen Funktionale auf X . Die Zuordnung ist aber keinesfalls $\mathbb{C}$ -linear, denn für die Abbildung $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(x) = 1$ für $x \in \mathbb{R}$ und $f(x) = 0$ sonst gilt $\Re if = 0$, aber $i\Re f = if \neq 0$. Falls X normiert ist, dann ist diese Zuordnung isometrisch, nach Lemma 6.2(iii),(iv).

Definition (sublinear, konvex)

Sei X ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Eine Abbildung $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt:

- (i) *subadditiv*, wenn $\forall x, y \in X: p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.
- (ii) *positiv homogen*, wenn $\forall x \in X \forall \alpha \geq 0: p(\alpha x) = \alpha p(x)$.
- (iii) *absolut homogen*, wenn $\forall x \in X \forall \alpha \in \mathbb{K}: p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$.
- (iv) *sublinear*, falls p subadditiv und positiv homogen ist.

(v) *konvex*, falls p subadditiv und absolut homogen ist.

Theorem 6.3 (HAHN-BANACH) Sei X ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum und p ein sublineares Funktional auf X . Ferner sei $L \subseteq X$ ein linearer Unterraum und $f \in L^*$ mit $\Re f(x) \leq p(x)$ für alle $x \in L$. Dann gibt es eine lineare Fortsetzung $F \in X^*$ von f , sodass $\Re F(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis: • ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

(i) *Fortsetzung um eine Dimension:* Sei $a \in X \setminus L$ und setze

$$M := \text{lin}(L \cup \{a\}) = L + \mathbb{R}a,$$

dann gibt es also für jedes $y \in M$ eine eindeutige Darstellung $y = x + \lambda a$ mit $x \in L$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Eine lineare Fortsetzung $F \supseteq f$ auf M ist eindeutig durch $\alpha = F(a)$ bestimmt, denn für eine Abbildung $F \in M^*$ gilt

$$F(y) = F(x) + \lambda F(a) = f(x) + \lambda \alpha.$$

Anders gesagt: Jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ erzeugt eine Fortsetzung $F_\alpha \in M^*$. Wir zeigen nun, dass es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$F_\alpha(x + \lambda a) \leq p(x + \lambda a)$$

für alle $x \in L$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. Der Fall $\lambda = 0$ gilt nach Voraussetzung. Es genügt, obige Gleichung für $\lambda = \pm 1$ zu erfüllen, denn dann gilt für beliebiges $\lambda \neq 0$

$$F_\alpha(x + \lambda a) = |\lambda| F_\alpha\left(\frac{x}{|\lambda|} + \underbrace{\frac{\lambda}{|\lambda|}}_{=\pm 1} a\right) \leq |\lambda| p\left(\frac{x}{|\lambda|} + \frac{\lambda}{|\lambda|} a\right) = p(x + \lambda a).$$

Es ist also die Existenz eines $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $f(x) + \alpha \leq p(x + a)$ für alle $x \in L$ sowie $f(y) - \alpha \leq p(y - a)$ für alle $y \in L$ zu zeigen, d.h. $f(y) - p(y - a) \leq \alpha \leq p(x + a) - f(x)$. Wegen der Linearität von f und der Sublinearität von p gilt für $x, y \in L$ stets

$$f(y) + f(x) = f(y + x) \leq p(y + x) \leq p(y - a) + p(x + a)$$

und damit folgt

$$f(y) - p(y - a) \leq p(x + a) - f(x).$$

Wähle also $\alpha_1 := \bigvee_{y \in L} (f(y) - p(y - a))$ und $\alpha_2 := \bigwedge_{x \in L} (p(x + a) - f(x))$ mit $\alpha_1 \leq \alpha_2$, dann gilt für jedes $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ und für alle $x, y \in L$ stets

$$f(y) - p(y - a) \leq \alpha \leq p(x + a) - f(x)$$

und damit folgt $f(y) - \alpha \leq p(y - a)$ sowie $f(x) + \alpha \leq p(x + a)$.

(ii) *Anwendung des Lemma von Zorn:* Betrachte die Menge

$$\mathcal{F} := \{g \supseteq f \mid g \text{ linear, } \forall x \in \mathcal{D}(g): g(x) \leq p(x)\},$$

diese ist halbgeordnet vermöge der Teilmengen- bzw. Fortsetzungsrelation $\subseteq$. Sei $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ eine Kette in $\mathcal{F}$, dann definiere ein lineares Funktional k auf $\mathcal{D}(k) := \bigcup_{g \in \mathcal{G}} \mathcal{D}(g)$ mit $k(x) := g(x)$ für alle $x \in \mathcal{D}(g)$ für alle $g \in \mathcal{G}$. Wegen der Ketteneigenschaft ist k korrekt definiert, d.h. unabhängig von $g \in \mathcal{G}$ mit $x \in \mathcal{D}(g)$. Es gilt $g \subseteq k$ für alle $g \in \mathcal{G}$, d.h. k setzt alle g fort. Weiter gilt $k \in \mathcal{F}$ und damit ist k eine obere Schranke von $\mathcal{G}$. Mit dem Lemma A.1 von ZORN folgt die Existenz eines maximalen Elements $F \in \mathcal{F}$. Nun gilt $\mathcal{D}(F) = X$, denn andernfalls könnte F nach (i) um eine Dimension fortgesetzt werden. Das ist ein Widerspruch zur Maximalität von F .

- ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Betrachte X als $\mathbb{R}$ -linearen Raum und wende den ersten Teil auf $f_0 = \Re f \in L^*$ an. Wir erhalten ein $\mathbb{R}$ -lineares $\mathbb{R}$ -wertiges Funktional $F_0 \in X^*$ mit $F_0|_L = \Re f$ und $F_0(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$. Nach Lemma 6.2 gibt es ein eindeutiges $\mathbb{C}$ -lineares $\mathbb{C}$ -wertiges Funktional $F \in X^*$ mit $\Re F = F_0$ und $F|_L = f$ sowie $\Re F(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$.

Satz 6.4 (HAHN-BANACH) Sei (X, p) ein halbnormierter Raum, $L \subseteq X$ ein linearer Unterraum und $f \in L^*$ mit $|f(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in L$. Dann gibt es eine lineare Fortsetzung $F \in X^*$ von f , sodass $|F(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis: Eine Halbnorm p ist sublinear und es gilt $\Re f(x) \leq |f(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in X$, also existiert nach dem Theorem 6.3 von HAHN-BANACH eine lineare Fortsetzung $F \in X^*$ mit $\Re F(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$. Für alle $z \in \mathbb{C}$ existiert ein $\theta \in \mathbb{C}$ mit $|\theta| = 1$ und $|z| = \theta z$ und damit folgt

$$|F(x)| = \theta F(x) = F(\theta x) = \Re F(\theta x) \leq p(\theta x) = |\theta| p(x) = p(x)$$

für jedes $x \in X$.

Folgerung 6.5 Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $L \subseteq X$ ein linearer Unterraum und $f \in L'$ ein stetiges lineares Funktional. Dann gibt es eine stetige lineare Fortsetzung $F \in X'$ von f , sodass $\|f\|_L = \|F\|_X$ gilt.

Beweis: Weil f stetig ist, gilt nach Satz 2.10 für $x \in X$ stets $|f(x)| \leq \|f\|_L \|x\|$. Wende nun den Satz 6.4 von HAHN-BANACH auf die Halbnorm $p = \|f\|_L \|\cdot\|$ an und erhalte eine lineare Fortsetzung $F \in X^*$ mit $|F(x)| \leq \|f\|_L \|x\|$ für alle $x \in X$. Damit ist F stetig, d.h. $F \in X'$, und es gilt $\|F\|_X \leq \|f\|_L$. Die umgekehrte Abschätzung $\|f\|_L \leq \|F\|_X$ ist trivial, denn F ist eine Fortsetzung von f .

Folgerung 6.6 Sei X ein normierter Raum, $L \subseteq X$ ein linearer Unterraum und $x_0 \notin L$ mit $d := \|L - x_0\| = \bigwedge_{x \in L} \|x - x_0\| > 0$. Dann existiert ein stetiges lineares Funktional $F \in X'$ mit $F(x_0) = d$ und $F|_L = 0$, d.h. $L \subseteq \ker F$, sowie $\|F\| = 1$.

Beweis: Setze $L_1 := \text{lin}(L \cup \{x_0\}) = L + \mathbb{K}x_0$ und definiere $f \in L_1^*$ mit $f(x + \lambda x_0) := \lambda d$, dann ist $f(x_0) = d$ und $f|_L = 0$. Für $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ gilt

$$\|x + \lambda x_0\| = |\lambda| \underbrace{\left\| \frac{x}{\lambda} + x_0 \right\|}_{\in L} \geq |\lambda| d = |\lambda| f(x_0) = |\lambda| f\left(\frac{x}{\lambda} + x_0\right) = |f(x + \lambda x_0)|$$

und damit folgt $\|f\|_{L_1} \leq 1$. Andererseits existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L$ mit $\|x_n - x_0\| \rightarrow d$. Folglich gilt

$$f\left(\frac{x_n - x_0}{\|x_n - x_0\|}\right) = \frac{d}{\|x_n - x_0\|} \rightarrow 1,$$

also ist $\|f\|_{L_1} = 1$. Wende nun die Folgerung 6.5 auf den linearen Unterraum $L_1 \subseteq X$ und das stetige lineare Funktional $f \in L_1^*$ mit $\|f\|_{L_1} = 1$ an und erhalte eine stetige lineare Fortsetzung $F \in X'$ mit $\|F\|_X = \|f\|_{L_1} = 1$. Weil F eine Fortsetzung von f ist, gilt sofort $F(x_0) = d$ sowie $F|_L = 0$. ■

Folgerung 6.7 Sei X ein normierter Raum. Für alle $x \in X \setminus \{0\}$ existiert ein stetiges lineares Funktional $f \in X'$ mit $\|f\| = 1$ und $f(x) = \|x\|$.

Beweis: Wende die Folgerung 6.6 auf den linearen Unterraum $L := \{0\}$ und $x_0 := x \notin L$ mit $d := \|x\|$ an. ■

Folgerung 6.8 Sei X ein normierter Raum. Für alle $x \in X$ gilt

$$\|x\| = \bigvee_{\substack{f \in X' \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)|.$$

Beweis: Für $x = 0$ ist die Gleichung trivial. Wegen $|f(x)| \leq \|f\| \|x\|$ gilt

$$\bigvee_{\substack{f \in X' \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)| \leq \|x\|.$$

Andererseits gibt es nach Folgerung 6.7 ein $f \in X'$ mit $\|f\| = 1$ und $f(x) = \|x\|$, also wird das Supremum sogar angenommen. ■

Bemerkung: Man beachte die Dualität zu

$$\|f\| = \bigvee_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)|.$$

Allgemein wird das Supremum hier nicht angenommen, d.h. es gibt meist kein $x \in X$ mit $\|x\| \leq 1$ und $|f(x)| = \|f\|$.

Folgerung 6.9 Sei X ein normierter Raum. Dann trennt X' die Punkte von X , d.h.

$$\forall x \in X \setminus \{0\} \exists f \in X': f(x) \neq 0$$

bzw.

$$\forall x \in X: (\forall f \in X': f(x) = 0 \implies x = 0).$$

■ **Beweis:** folgt direkt aus der Folgerung 6.7.

Bemerkung: Trivial ist, dass X die Punkte von X' trennt, denn für jedes $f \in X' \setminus \{0\}$ gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) \neq 0$.

Folgerung 6.10 Sei X ein normierter Raum und $D \subseteq X$. Dann sind äquivalent:

(i) D total in X , d.h. $\text{lin}D$ dicht in X .

(ii) D trennt die Punkte von X' , d.h. $\forall f \in X': (\forall x \in D: f(x) = 0 \implies f = 0)$.

Beweis: • (i) $\implies$ (ii) Sei $f \in X'$ mit $f(x) = 0$ für alle $x \in D$, dann gilt mit der Linearität von f sofort $f(x) = 0$ für jedes $x \in \text{lin}D$. Weil $\text{lin}D$ dicht in X ist, gibt es für jedes $x \in X$ eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \text{lin}D$, die gegen x konvergiert. Es ist stets $f(x_n) = 0$ und wegen der Folgenstetigkeit von f gilt $f(x_n) \rightarrow f(x)$, also folgt $f(x) = 0$.

• (ii) $\implies$ (i) Angenommen, D wäre nicht total, d.h. $\text{lin}D$ wäre nicht dicht, also gäbe es ein $x_0 \in X \setminus \overline{\text{lin}D}$ mit $\|\overline{\text{lin}D} - x_0\| > 0$. Nach Folgerung 6.6 gibt es dann ein $f \in X'$ mit $f(x_0) \neq 0$ und $f|_D = 0$, im Widerspruch zu $f = 0$.

■

Folgerung 6.11 Sei X ein normierter Raum und $x_1, \dots, x_n \in X$ linear unabhängig. Dann existieren stetige lineare Funktionale $f_1, \dots, f_n \in X'$ mit $f_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Beweis: Für $j \in \{1, \dots, n\}$ ist

$$L_j := \text{lin}\{x_k \mid k \neq j\}$$

ein linearer Unterraum von X . Wegen der linearen Unabhängigkeit gilt stets $x_j \notin L_j$ und damit $d_j := \bigwedge_{x \in L_j} \|x - x_j\| > 0$. Nach Folgerung 6.6 gibt es stetige lineare Funktionale $F_j \in X'$ mit $F_j|_{L_j} = 0$ und $F_j(x_j) = d_j$ sowie $F_j(x_k) = 0$ für $k \neq j$. Dann sind

$$f_j := \frac{F_j}{d_j}$$

■

die gesuchten Funktionale.

6.2 Trennungssätze

Definition (Minkowski-Funktional, Eichfunktional)

Sei X ein normierter Raum und $A \subseteq X$ eine nichtleere Teilmenge. Das *Minkowski-Funktional* bzw. *Eichfunktional* von A ist definiert als

$$X \rightarrow [0, \infty]$$

$$p_A: x \mapsto \bigwedge_{\substack{t > 0 \\ x \in tA}} t.$$

Als Konvention setzen wir dabei $\bigwedge \emptyset = \infty$.

Lemma 6.12 Sei X ein normierter Raum und $A \subseteq X$ eine konvexe Teilmenge mit innerem Punkt 0 . Dann gelten:

- (i) A ist absorbierend, genauer gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $p_A(x) \leq \frac{\|x\|}{\varepsilon}$ für alle $x \in X$.
- (ii) p_A ist sublinear.
- (iii) Falls A zusätzlich offen ist, dann ist $A = p_A^{-1}[0, 1)$.

Beweis: (i) 0 ist innerer Punkt von A , also gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(0) \subseteq A$. Sei $x \in X \setminus \{0\}$ und wähle $\lambda := \frac{\|x\|}{\varepsilon} > 0$, dann gilt für alle $\mu \in \mathbb{K}$ mit $|\mu| > \lambda$ stets

$$\left\| \frac{x}{\mu} \right\| = \frac{\|x\|}{|\mu|} < \frac{\|x\|}{\lambda} = \varepsilon,$$

also $\frac{x}{\mu} \in U_\varepsilon(0) \subseteq A$, d.h. $x \in \mu A$. Damit ist A absorbierend und weiter gilt noch

$$p_A(x) = \bigwedge_{\substack{t > 0 \\ x \in tA}} t \leq \lambda = \frac{\|x\|}{\varepsilon}.$$

- (ii) p_A ist positiv homogen, denn für $\lambda > 0$ gilt

$$p_A(\lambda x) = \bigwedge_{\substack{t > 0 \\ \lambda x \in tA}} t = \bigwedge_{\substack{\lambda t > 0 \\ \lambda x \in \lambda tA}} \lambda t = \lambda \bigwedge_{\substack{t > 0 \\ x \in tA}} t = \lambda p_A(x).$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $x, y \in X$. Wähle $\lambda, \mu > 0$ mit $\lambda \leq p_A(x) + \varepsilon$ und $\mu \leq p_A(y) + \varepsilon$ sowie $\frac{x}{\lambda} \in A$ und $\frac{y}{\mu} \in A$. Weil A konvex ist, folgt

$$\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{y}{\mu} = \frac{x + y}{\lambda + \mu} \in A$$

und damit gilt

$$p_A(x+y) \leq \lambda + \mu \leq p_A(x) + p_A(y) + 2\varepsilon.$$

Lassen wir nun ε gegen 0 gehen, dann erhalten wir die Subadditivität $p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y)$.

(iii) Sei $p_A(x) < 1$, d.h. $\exists \lambda < 1: \frac{x}{\lambda} \in A$. Wegen $0 \in A$ und A konvex folgt

$$x = \lambda \frac{x}{\lambda} + (1-\lambda)0 \in A.$$

Sei nun $p_A(x) \geq 1$, d.h. $\forall \lambda < 1: \frac{x}{\lambda} \notin A$. Weil $\mathbb{C}A$ abgeschlossen ist, folgt

$$x = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{x}{\lambda} \in \mathbb{C}A.$$

Definition 6.13 (Hyperebene, trennbar)

(i) Sei X ein $\mathbb{K}$ -linearer Raum. Eine Teilmenge $H \subseteq X$ heißt *Hyperebene*, wenn es ein reelles lineares Funktional f auf X und ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$H = H_c := \{x \in X \mid f(x) = c\}.$$

(ii) Sei X ein normierter Raum. Zwei Teilmengen $A, B \subseteq X$ heißen *durch Hyperebene trennbar*, wenn es ein reelles lineares Funktional $f \in X^*$ und ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass A und B auf verschiedenen Seiten der Hyperebene H_c liegen, d.h.

$$\forall x \in A: \Re f(x) \leq c \quad \text{und} \quad \forall y \in B: \Re f(y) \geq c.$$

(iii) A und B heißen *durch Hyperebene strikt trennbar*, wenn in obigen Ungleichungen stets $<$ bzw. $>$ gelten.

Lemma 6.14 Sei X ein normierter Raum und $f \in X^* \setminus \{0\}$ ein lineares Funktional auf X . Dann ist f offen.

Beweis: Sei $f \neq 0$ ein lineares Funktional auf X , also gibt es ein $y \in X$ mit $f(y) = 1$. Sei $O \subseteq X$ offen und $x \in O$, dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(0) \subseteq O - x$. Die Menge $O - x$ ist also absorbierend und damit existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass für $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| < \varepsilon$ stets $\lambda y \in O - x$ ist. Wegen der Linearität von f folgt $f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda \in f(O)$, d.h.

$$U_\varepsilon(f(x)) \subseteq f(O).$$

Lemma 6.15 Sei X ein normierter Raum und $A, B \subseteq X$ disjunkte Teilmengen mit A kompakt und B abgeschlossen. Dann existiert eine konvexe offene Nullumgebung $V \subseteq X$ mit

$$(A + V) \cap (B + V) = \emptyset,$$

d.h. insbesondere haben A und B disjunkte offene Umgebungen.

Beweis: Sei $x \in A \subseteq \mathbb{C}B$, dann gibt es wegen der Offenheit von $\mathbb{C}B$ stets ein $\varepsilon > 0$ mit

$$x + U_{\frac{\varepsilon}{3}}(0) + U_{\frac{\varepsilon}{3}}(0) + U_{\frac{\varepsilon}{3}}(0) = x + U_{\varepsilon}(0) = U_{\varepsilon}(x) \subseteq \mathbb{C}B$$

und folglich gilt mit der Vereinbarung $V_x := U_{\frac{\varepsilon}{3}}(0)$

$$x + V_x + V_x \subseteq \mathbb{C}(B + V_x).$$

Die V_x sind Kugeln um 0, also konvex. Nun ist $\{x + V_x \mid x \in A\}$ eine Überdeckung von A , also gibt es wegen der Kompaktheit $x_1, \dots, x_n \in A$ mit $\bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{x_i}) \supseteq A$. Wähle

$$V := \bigcap_{i=1}^n V_{x_i},$$

dann ist V konvex und wegen $x + V_x + V \subseteq x + V_x + V_x$ erhalten wir

$$A + V \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_i + V_{x_i} + V \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_i + V_{x_i} + V_{x_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathbb{C}(B + V_{x_i}) = \mathbb{C}(B + \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}) = \mathbb{C}(B + V),$$

d.h. $(A + V) \cap (B + V) = \emptyset$. ■

Bemerkung: (i) Im Lemma ist wichtig, dass an jedem Punkt von A und B die gleiche Nullumgebung V angehängt wird. Wenn A nicht kompakt ist, dann geht das nicht. Betrachte beispielsweise im $\mathbb{R}^2$ die abgeschlossenen konvexen Mengen $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq \frac{1}{x}\}$ und $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}$.

(ii) In metrischen Räumen gilt sogar: Wenn A, B abgeschlossen und disjunkt sind, dann haben A, B disjunkte offene Umgebungen.

Theorem 6.16 (HAHN-BANACH) Sei X in normierter Raum und $A, B \subseteq X$ konvex und disjunkt. Dann gelten:

- (i) Wenn A offen, dann können A und B durch eine Hyperebene getrennt werden.
- (ii) Wenn A und B offen, dann können A und B durch eine Hyperebene strikt getrennt werden.
- (iii) Wenn A kompakt und B abgeschlossen, dann können A und B durch eine Hyperebene strikt getrennt werden.

Beweis: • ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) Sei X zunächst $\mathbb{R}$ -linear.

- (i) Wähle $x_0 \in -(A - B)$ und setze

$$C := A - B + x_0 = \bigcup_{b \in B} \underbrace{A - b + x_0}_{\text{offen}}$$

dann ist C offen, konvex und $0 \in C$, also ist C eine Nullumgebung. Konvexe Nullumgebungen sind nach Lemma 6.12 absorbierend und damit ist das Minkowskifunktional p_C sublinear. Betrachte auf dem linearen Unterraum

$$L := \text{lin}\{x_0\} = \mathbb{R}x_0 = \{\lambda x_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

das lineare Funktional $f \in L^*$ mit $f(\lambda x_0) := \lambda$. Weil A, B disjunkt sind, gilt $0 \notin A - B$ und folglich $x_0 \notin C$. Mit Lemma 6.12 folgt $p_C(x_0) \geq 1 = f(x_0)$. Weiter gilt für $\lambda > 0$

$$f(\lambda x_0) = \lambda \leq \lambda p_C(x_0) = p_C(\lambda x_0)$$

und für $\lambda \leq 0$ gilt

$$f(\lambda x_0) = \lambda \leq 0 \leq p_C(\lambda x_0).$$

Für alle $x \in L$ gilt also die Ungleichung $f(x) \leq p_C(x)$. Mit dem Theorem 6.3 von HAHN-BANACH lässt sich $f \in L^*$ fortsetzen zu einem linearen Funktional $F \in X^*$, sodass für $x \in X$ stets $F(x) \leq p_C(x)$ gilt. Jedes $x \in C = A - B + x_0$ hat eine Darstellung $x = a - b + x_0$ mit $a \in A$ und $b \in B$, demnach ist

$$F(x) = F(a) - F(b) + \underbrace{F(x_0)}_{=f(x_0)=1} < 1$$

und damit gilt für alle $a \in A, b \in B$ stets $F(a) < F(b)$, also auch

$$\bigvee F(A) \leq \bigwedge F(B).$$

Wähle schließlich $c \in [\bigvee F(A), \bigwedge F(B)]$, dann trennt die Hyperebene $H_c = \{x \in X \mid F(x) = c\}$ die Mengen A und B .

- (ii) Sei F wie in (i). Weil F nicht das Nullfunktional ist, folgt mit Lemma 6.14 die Offenheit von F . Damit sind $F(A)$ und $F(B)$ offen und konvex in $\mathbb{R}$, d.h. offene Intervalle. Folglich gilt $F(a) < \bigvee F(A)$ für $a \in A$ und entsprechend auch $\bigwedge F(B) < F(b)$ für jedes $b \in B$, also haben wir insgesamt

$$F(a) < \bigvee F(A) \leq c \leq \bigwedge F(B) < F(b)$$

und damit werden A und B von der Hyperebene H_c strikt getrennt.

- (iii) Aus Lemma 6.15 folgt, dass eine offene konvexe Nullumgebung V mit $(A + V) \cap (B + V) = \emptyset$ existiert. Die Mengen $A + V$ und $B + V$ sind offen und konvex, also können sie nach (ii) durch eine Hyperebene strikt getrennt werden. Unter Beachtung von $A \subseteq A + V$ und $B \subseteq B + V$ ergibt sich, dass auch A und B strikt trennbar sind.
- ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Sei X nun $\mathbb{C}$ -linear.
 - (i) Wähle analog $L := \mathbb{C}x_0$ sowie $f: L \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(\lambda x_0) := \lambda$. Betrachte X als $\mathbb{R}$ -linearen Raum und wende den reellen ersten Teil auf $f_0 = \Re f \in L^*$ an. Wir erhalten ein $\mathbb{R}$ -lineares $\mathbb{R}$ -wertiges Funktional $F_0 \in X^*$ mit $F_0|_L = \Re f$ und $F_0(x) \leq p_C(x)$ für alle $x \in X$. Nach Lemma 6.2 gibt es ein eindeutiges $\mathbb{C}$ -lineares $\mathbb{C}$ -wertiges Funktional $F \in X^*$ mit $\Re F = F_0$ und $F|_L = f$ sowie $\Re F(x) \leq p_C(x)$ für alle $x \in X$. Weiter folgt für alle $a \in A$ und $b \in B$ entsprechend $\Re F(a) < \Re F(b)$, also können wir $c \in [\bigvee \Re F(a), \bigwedge \Re F(b)]$ wählen und H_c trennt dann A und B .
 - (ii) Analog ist $\Re F$ offen, also sind $\Re F(A)$ und $\Re F(B)$ offene Intervalle in $\mathbb{R}$. Es ergibt sich $\Re F(a) < \bigvee \Re F(A) \leq c \leq \bigwedge \Re F(B) < \Re F(b)$, d.h. A und B werden von der Hyperebene H_c strikt getrennt. ■

Bemerkung: Das Funktional F aus Teil (i) des Beweis ist sogar stetig.

Beweis: Sei $z \in C \cap -C$, d.h. $\pm z \in C$, dann gilt

$$F(\pm z) \leq p_C(\pm z) < 1,$$

d.h. $|F(z)| < 1$. Es folgt, dass F auf der Nullumgebung $C \cap -C$ beschränkt ist, also ist F nach Satz 2.10 stetig. ■

6.3 Anfänge der Dualitätstheorie normierter Räume

Definition (bidualer Raum)

Sei X ein normierter Raum. Der topologische Dualraum X'' des topologischen Dualraums von X heißt *bidualer Raum* zu X .

Satz 6.17 Sei X ein normierter Raum, dann ist die kanonische Einbettung

$$\begin{aligned} X &\rightarrow X'' \\ j: x \mapsto j(x): X' &\rightarrow \mathbb{K} \\ f &\mapsto j(x)(f) := f(x) \end{aligned}$$

linear, injektiv und isometrisch.

Beweis: (i) j ist linear, denn seien $x, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gilt

$$j(x + \lambda y)(f) = f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y) = j(x)(f) + \lambda j(y)(f)$$

für alle $f \in X'$.

(ii) j ist injektiv, denn sei $j(x) = j(y)$, d.h. $j(x - y) = 0$. Also gilt für $f \in X'$ immer $f(x - y) = j(x - y)(f) = 0$ und demnach ist $x - y = 0$, also $x = y$.

(iii) j ist isometrisch. Betrachte dazu $x \in X$. Es gilt

$$\|j(x)\| = \bigvee_{\substack{f \in X' \\ \|f\| \leq 1}} |j(x)(f)| = \bigvee_{\substack{f \in X' \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)| \stackrel{6.8}{=} \|x\|.$$

Definition 6.18 (reflexiv)

Ein normierter Raum X heißt *reflexiv*, falls die kanonische Einbettung j in den bidualen Raum surjektiv ist, d.h. falls X und X'' isometrisch isomorph sind.

Bemerkung: (i) Nach dem Satz 2.12 ist X' vollständig, also auch X'' . Folglich sind reflexive normierte Räume stets Banachräume.

(ii) Häufig wird das Bild $j(X) \subseteq X''$ der kanonischen Einbettung mit X identifiziert, d.h. $X \subseteq X''$. Für reflexive Räume gilt dann $X = X''$.

Beispiel 6.19 Für $p \in (1, \infty)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt $\ell'_p = \ell_q$, also ist ℓ_p reflexiv. Weiter gelten $\ell'_1 = \ell_\infty$ und $c'_0 = \ell_1$, also $c''_0 = \ell_\infty$ und damit ist c_0 nicht reflexiv. Es gilt $\ell_1 \subsetneq \ell'_\infty$ und ℓ'_∞ ist schwer zu beschreiben. Die Folgenräume ℓ_1, ℓ_∞ und c sind auch nicht reflexiv. Analoge Aussagen gelten für $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Theorem 6.20 (RIESZ-MARKOV-KAKUTANI) Sei K ein kompakter topologischer Raum. Es gilt $(\mathcal{C}(K)')_+ \cong \mathcal{M}_+(K)$ und

$$\mathcal{C}(K)' \cong \mathcal{M}(K)$$

mit dem isometrischen Isomorphismus

$$j: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}(K) & \rightarrow & \mathcal{C}(K)' \\ \mu \mapsto \int_K \cdot d\mu & & \begin{array}{c} \mathcal{C}(K) \rightarrow \mathbb{K} \\ f \mapsto \int_K f d\mu \end{array} \end{array}$$

■ **Beweis:** siehe auch 12.5.

Definition 6.21 (dualer Operator)

Sei $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Der *duale Operator* (oder auch *adjugierter Operator*) zu T ist definiert als

$$T': Y' \rightarrow X' \\ g \mapsto T'(g) := g \circ T.$$

Bemerkung: (i) Obiges ist wohldefiniert, denn sei $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ und $g \in Y'$, dann sind T und g stetig und damit auch $g \circ T = T'(g)$, d.h. $T'(g) \in X'$.

(ii) Es gilt

$$|T'(g)(x)| = |g(T(x))| \leq \|g\| \|T(x)\| \leq \|g\| \|T\| \|x\|$$

und damit folgt $T' \in \mathcal{B}(Y', X')$, denn

$$\|T'\| = \bigvee_{\substack{g \in Y' \\ \|g\| \leq 1}} \|T'(g)\| = \bigvee_{\substack{g \in Y' \\ \|g\| \leq 1}} \bigvee_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |T'(g)(x)| \leq \|T\|.$$

Satz 6.22 Die Abbildung

$$\mathcal{B}(X, Y) \rightarrow \mathcal{B}(Y', X') \\ T \mapsto T'$$

ist eine lineare isometrische Einbettung und für $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, $S \in \mathcal{B}(Y, Z)$ gilt

$$(S \circ T)' = T' \circ S'.$$

Beweis: (i) *Linearität:* Für $T, S \in \mathcal{B}(X, Y)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$(T + \lambda S)'(g)(x) = g(T(x) + \lambda S(x)) = g(T(x)) + \lambda g(S(x)) = T'(g)(x) + \lambda S'(g)(x).$$

(ii) *Injektivität:* Sei $T' = S'$, dann gilt stets

$$0 = (T' - S')(g)(x) = (T - S)'(g)(x) = g((T - S)(x)) = g(T(x) - S(x))$$

und folglich $T(x) = S(x)$, also $T = S$.

(iii) *Isometrie*: Es ist

$$\begin{aligned} \|T'\| &= \bigvee_{\substack{g \in Y' \\ \|g\| \leq 1}} \|T'(g)\| = \bigvee_{\substack{g \in Y' \\ \|g\| \leq 1}} \bigvee_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |T'(g)(x)| \\ &= \bigvee_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \bigvee_{\substack{g \in Y' \\ \|g\| \leq 1}} |g(T(x))| \stackrel{6.8}{=} \bigvee_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \|Tx\| = \|T\|. \end{aligned}$$

(iv) Seien $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, $S \in \mathcal{B}(Y, Z)$, dann gilt für alle $h \in Z'$ und $x \in X$

$$\begin{aligned} (S \circ T)'(h)(x) &= h((S \circ T)(x)) = h(S(T(x))) \\ &= S'(h)(T(x)) = T'(S'(h))(x) = (T' \circ S')(h)(x). \end{aligned}$$

Lemma 6.23 Seien X, Y normierte Räume.

(i) Für die Einbettungen $j_X: X \rightarrow X''$ und $j_Y: Y \rightarrow Y''$ und alle $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ gilt

$$j_Y \circ T = T'' \circ j_X.$$

(ii) Ein $S \in \mathcal{B}(Y', X')$ ist der duale Operator zu einem $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ genau dann, wenn

$$S'(j_X(X)) \subseteq j_Y(Y).$$

Beweis: (i) Es gilt für $x \in X$ und $g \in Y'$

$$\begin{aligned} (j_Y \circ T)(x)(g) &= j_Y(T(x))(g) = g(T(x)) \\ &= (T'(g))(x) = j_X(x)(T'(g)) = T''(j_X(x))(g) = (T'' \circ j_X)(x)(g). \end{aligned}$$

(ii) Sei zunächst $S = T'$, dann gilt

$$S'(j_X(x)) = (T'' \circ j_X)(x) = (j_Y \circ T)(x) = j_Y(T(x)) \in j_Y(Y).$$

Sei umgekehrt $S'(j_X(X)) \subseteq j_Y(Y)$. Es ist $(S' \circ j_X)' \circ j_{Y'} = S$, denn für alle $g \in Y'$ und $x \in X$ gelten

$$\begin{aligned} ((S' \circ j_X)' \circ j_{Y'})(g)(x) &= (S' \circ j_X)'(j_{Y'}(g))(x) \\ &= (j_{Y'}(g) \circ S' \circ j_X)(x) \\ &= j_{Y'}(g)(S'(j_X(x))) \\ &= (S'(j_X(x)))(g) \\ &= (j_X(x) \circ S)(g) \\ &= j_X(x)(S(g)) \\ &= S(g)(x). \end{aligned}$$

Satz 6.24 Seien X, Y Banachräume. Ein Operator $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ ist kompakt genau dann, wenn der duale Operator $T' \in \mathcal{B}(Y', X')$ kompakt ist.

Definition (orthogonales Komplement, Annulator)

Sei X ein normierter Raum. Für Teilmengen $U \subseteq X$ und $V \subseteq X'$ sind

$$U^\perp := \{f \in X' \mid \forall x \in U: f(x) = 0\}$$

und

$$V_\perp := \{x \in X \mid \forall f \in V: f(x) = 0\}$$

abgeschlossene Unterräume von X' bzw. X und sie heißen auch *orthogonales Komplement* oder *Annulator* von U bzw. V .

Satz 6.25 Seien X, Y normierte Räume. Für $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ gilt stets

$$\overline{\operatorname{im} T} = (\ker T')_\perp.$$

Folgerung 6.26 Seien X, Y normierte Räume und $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ ein Operator mit abgeschlossenem Bild $\operatorname{im} T$. Dann ist die Gleichung

$$T(x) = y$$

genau dann lösbar, wenn die Implikation

$$T'(g) = 0 \implies g(y) = 0$$

gilt. Mit anderen Worten: Die rechte Seite der zu lösenden Gleichung muss orthogonal (im obigen Sinne) zum Kern von T' stehen.

7 Lokalkonvexe Räume und Dualitätstheorem

7.1 Topologische Vektorräume und lokalkonvexe Räume

Definition 7.1 (topologischer Vektorraum)

Sei X ein $\mathbb{K}$ -linearer Raum. Eine Topologie τ auf X heißt *lineare Topologie* und das Paar (X, τ) heißt *topologischer Vektorraum*, wenn die Topologie mit der Vektorraumstruktur verträglich ist, d.h. falls die algebraischen Operationen Addition

$$a: \begin{array}{l} X \times X \rightarrow X \\ (x, y) \mapsto x + y \end{array}$$

und Skalarmultiplikation

$$m: \begin{array}{l} \mathbb{K} \times X \rightarrow X \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x \end{array}$$

stetig sind.

Bemerkung: In der Sprache der Umgebungen bedeutet die Stetigkeit der Operationen folgendes: Sei $U \in \mathcal{U}(x + y)$, dann gibt es $V \in \mathcal{U}(x)$ und $W \in \mathcal{U}(y)$ mit $V + W \subseteq U$. Analog existieren für $U \in \mathcal{U}(\lambda x)$ Umgebungen $V \in \mathcal{U}(\lambda)$ und $W \in \mathcal{U}(x)$, sodass $VW \subseteq U$ ist.

Definition 7.2 (konvex, absolutkonvex, kreisförmig)

Sei X ein $\mathbb{K}$ -linearer Raum. Eine Teilmenge $B \subseteq X$ heißt

(i) *konvex*, falls

$$\forall x, y \in B \forall \lambda \in [0, 1]: \lambda x + (1 - \lambda)y \in B.$$

(ii) *absolutkonvex*, wenn

$$\forall x, y \in B \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}: |\lambda| + |\mu| \leq 1 \Rightarrow \lambda x + \mu y \in B.$$

(iii) *kreisförmig*, wenn

$$\forall x \in B \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}: |\lambda| \leq 1 \Rightarrow \lambda x \in B.$$

Lemma: Sei X ein Vektorraum.

- (i) Eine Menge ist absolutkonvex genau dann, wenn sie konvex und kreisförmig ist.
- (ii) Der Abschluss einer absolutkonvexen Menge ist absolutkonvex.
- (iii) Das lineare Bild und Urbild einer absolutkonvexen Menge ist absolutkonvex.
- (iv) Der Durchschnitt von absolutkonvexen Mengen ist absolutkonvex.
- (v) Sei $(B_i)_{i \in I}$ eine Folge konvexer Mengen, dann gilt für die konvexe Hülle der Vereinigung

$$\operatorname{co} \bigcup_{i \in I} B_i = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \mid \forall i \in I: x_i \in B_i, \lambda_i \geq 0, \operatorname{supp}(\lambda_i)_{i \in I} < \infty, \sum_{i \in I} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Satz 7.3 Sei X ein linearer topologischer Raum. Dann gelten:

- (i) Für jedes $x \in X$ ist die Abbildung $a_x: y \mapsto x + y$ ein Homöomorphismus.
- (ii) Für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ ist $m_\lambda: x \mapsto \lambda x$ ein Homöomorphismus.
- (iii) Eine Nullumgebung $U \in \mathcal{U}(0)$ hat folgende Eigenschaften:
 - U ist absorbierend.
 - $\exists V \in \mathcal{U}(0): V + V \subseteq U$.
 - $\exists$ kreisförmiges $W \subseteq U$.

Folgerung 7.4 Sei (X, τ) ein topologischer Vektorraum. Dann ist τ bereits durch die Angabe einer Nullumgebungsbasis eindeutig bestimmt.

Definition 7.5 (lokalkonvexer Raum)

Ein linearer topologischer Raum heißt *lokalkonvexer Raum*, wenn es eine Nullumgebungsbasis aus konvexen Mengen gibt.

Satz 7.6 Jeder lokalkonvexe Raum besitzt eine Nullumgebungsbasis aus absolutkonvexen Mengen.

Lemma 7.7 Sei X ein $\mathbb{K}$ -linearer Raum und $A, B \subseteq X$ absolutkonvex. Dann gelten:

- (i) $\text{lin}A = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda A$.
- (ii) $\forall x \in \text{lin}A: p_A(x) < \infty$.
- (iii) $\{x \in X \mid p_A(x) < 1\} \subseteq A \subseteq \{x \in X \mid p_A(x) \leq 1\}$.
- (iv) Wenn $A \subseteq B$ gilt, so ist $p_A(x) \geq p_B(x)$ für alle $x \in \text{lin}A$.
- (v) Wenn $\text{lin}A = X$, d.h. falls A absorbierend ist, dann ist das Minkowskifunktional p_A eine Halbnorm auf X .

Satz 7.8 Sei X ein lokalkonvexer Raum, dann gilt für jede absolutkonvexe Nullumgebung:

- (i) Das Minkowskifunktional p_U ist eine stetige Halbnorm auf X .
- (ii) $\overset{\circ}{U} = \{x \in X \mid p_U(x) < 1\} \subseteq U \subseteq \{x \in X \mid p_U(x) \leq 1\} = \overline{U}$.
- (iii) $\frac{1}{2}\overline{U} \subseteq \overset{\circ}{U}$.

Definition 7.9 (Fundamentalsystem)

Sei X ein lokalkonvexer Raum.

- (i) Eine Menge $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}(0)$ von Nullumgebungen heißt *Fundamentalsystem von Nullumgebungen*, falls

$$\forall U \in \mathcal{U}(0) \exists V \in \mathcal{V} \exists \varepsilon > 0: \varepsilon V \subseteq U,$$

also wenn $\{\varepsilon V \mid V \in \mathcal{V}, \varepsilon > 0\}$ eine Nullumgebungsbasis ist.

- (ii) Eine Familie $(p_i)_{i \in I}$ stetiger Halbnormen auf X heißt *Fundamentalsystem von Halbnormen*, wenn die Menge aller

$$V_i := \{x \in X \mid p_i(x) < 1\}$$

ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen ist.

Satz 7.10 Jeder lokalkonvexe Raum X besitzt ein Fundamentalsystem von Halbnormen $(p_i)_{i \in I}$ und es gelten:

- (i) $\forall i, j \in I \exists k \in I \exists \varepsilon > 0: p_i \vee p_j \leq \varepsilon p_k$.
- (ii) Wenn X hausdorffsch ist, dann $\forall x \in X \setminus \{0\} \exists i \in I: p_i(x) > 0$.

Satz 7.11 Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $(p_i)_{i \in I}$ ein System von Halbnormen mit der Eigenschaft

$$\forall i, j \in I \exists k \in I \exists \varepsilon > 0: p_i \vee p_j \leq \varepsilon p_k,$$

dann existiert genau eine lokalkonvexe Topologie τ auf X , für die $(p_i)_{i \in I}$ ein Fundamentalsystem von Halbnormen ist. Gilt außerdem noch

$$\forall x \in X \setminus \{0\} \exists i \in I: p_i(x) > 0,$$

dann ist τ hausdorffsch.

Bemerkung: Meist hat man eine allgemeinere Situation vorliegen: Sei X ein linearer Raum und $(q_i)_{i \in I}$ ein System von Halbnormen auf X . Dann ist auch $p_F := \bigvee_{i \in F} q_i$ für alle endlichen $F \subseteq_{\text{fin}} I$ eine Halbnorm und das System $(p_F)_{F \subseteq_{\text{fin}} I}$ ist nach obigem Satz sogar ein Fundamentalsystem von Halbnormen für eine eindeutig bestimmte Topologie τ auf X . Wir nennen τ die von $(q_i)_{i \in I}$ erzeugte lokalkonvexe Topologie.

Die Topologie τ ist gerade die initiale Topologie bezüglich der Einbettungen $X \rightarrow (X, q_i)$.

Lemma: Sei X ein lokalkonvexer Raum mit $(p_j)_{j \in J}$ als Fundamentalsystem von Halbnormen. Dann konvergiert ein Netz $(x_i)_{i \in I} \subseteq X$ genau dann gegen $x \in X$, wenn für alle $j \in J$ das Netz $(p_j(x - x_i))_{i \in I}$ gegen 0 konvergiert.

Satz 7.12 Seien X, Y lokalkonvexe Räume mit den Fundamentalsystemen von Halbnormen $(p_i)_{i \in I}$ bzw. $(q_j)_{j \in J}$. Für jede lineare Abbildung $T: X \rightarrow Y$ sind äquivalent:

- (i) T ist stetig.
- (ii) T ist stetig in 0.
- (iii) $\forall j \in J \exists i \in I \exists \varepsilon > 0 \forall x \in X: q_j(T(x)) \leq \varepsilon p_i(x)$.

Folgerung 7.13 Sei X ein lokalkonvexer Raum und $(p_i)_{i \in I}$ ein Fundamentalsystem von Halbnormen. Für jedes $f \in X^*$ sind äquivalent:

- (i) f ist stetig.
- (ii) $\exists i \in I \exists \varepsilon > 0 \forall x \in X: |f(x)| \leq \varepsilon p_i(x)$.
- (iii) $\exists U \in \mathcal{U}(0): \forall x \in U |f(x)| < \infty$.

Beweis: Setze $Y := \mathbb{K}$ und $q_j := |\cdot|$ für alle $j \in J$. ■

Lemma: Sei (X, τ) ein hausdorffscher lokalkonvexer Raum mit einem abzählbaren Fundamentalsystem von Halbnormen $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann ist τ metrisierbar, genauer wird τ von der Metrik

$$d(x, y) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x - y)}{1 + p_n(x - y)}$$

erzeugt.

7.2 Duales Paar, schwache Topologien und der Satz von BOURBAKI-ALAOGLU

Definition 7.14 (duales Paar)

Seien X, Y Vektorräume über $\mathbb{K}$ mit $Y \subseteq X^*$. Dann heißt (X, Y) *duales Paar* oder *Dualsystem*, falls Y die Punkte von X trennt, d.h. falls

$$\forall x_1, x_2 \in X: x_1 \neq x_2 \Rightarrow \exists f \in Y: f(x_1) \neq f(x_2).$$

Bemerkung: (i) Die Eigenschaft der Punktetrennung ist äquivalent zu

$$\forall x \in X \setminus \{0\} \exists f \in Y: f(x) \neq 0$$

und auch zu

$$\forall x \in X: \forall f \in Y: f(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

(ii) Trivialerweise trennt auch X die Punkte von Y , denn es gilt

$$\forall f \in Y: \forall x \in X: f(x) = 0 \Rightarrow f = 0.$$

- (iii) Hat man ein duales Paar (X, Y) , dann erhält man eine bilineare Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times Y \rightarrow \mathbb{K} \\ (x, f) \mapsto \langle x, f \rangle := f(x).$$

Beispiel: (i) (X, X^*) für einen linearen Raum X .

- (ii) (X, X') für einen normierten Raum X , nach Folgerung 6.9.

Definition 7.15 (schwache Topologien im dualen Paar)

Sei (X, Y) ein duales Paar.

- (i) Die von dem Halbnormensystem

$$(p_f: x \mapsto |\langle x, f \rangle|)_{f \in Y}$$

erzeugte lokalkonvexe Topologie $\sigma(X, Y)$ auf X heißt *schwache Topologie* oder auch *w-Topologie* auf X .

- (ii) Dual wird die von dem Halbnormensystem

$$(p_x: f \mapsto |\langle x, f \rangle|)_{x \in X}$$

erzeugte lokalkonvexe Topologie $\sigma(Y, X)$ auf Y als *schwache *-Topologie* oder *w*-Topologie* auf Y bezeichnet.

Bemerkung: (i) Aus der Eigenschaft der Punktentrennung folgt sofort, dass die beiden schwachen Topologien $\sigma(X, Y)$ und $\sigma(Y, X)$ hausdorffsch sind.

- (ii) $\sigma(X, Y)$ ist die initiale Topologie bezüglich $Y = (x \mapsto \langle x, f \rangle)_{f \in Y}$. Damit ist ein lineares Funktional $f \in Y$ stets $\sigma(X, Y)$ -stetig.

- (iii) Dual ist $\sigma(Y, X)$ die initiale Topologie bezüglich $X = (f \mapsto \langle x, f \rangle)_{x \in X}$, also ist ein lineares Funktional auf Y genau dann schwach-*-stetig, wenn es ein Auswertungsfunktional $x: f \mapsto f(x)$ ist.

Definition (zulässige Topologie im dualen Paar)

Sei (X, Y) ein duales Paar. Eine lokalkonvexe Topologie τ auf X mit

$$(X, \tau)' = Y$$

heißt *zulässige* Topologie im dualen Paar.

Die Bedingung $(X, \tau)' = Y$ bedeutet, dass ein lineares Funktional $f \in Y$ immer τ -stetig ist.

Lemma 7.16 Sei X ein linearer Raum und $f_0, \dots, f_n \in X^*$. Dann ist f_0 entweder eine Linearkombination der $f_1, \dots, f_n$ oder es existiert ein $x_0 \in X$ mit $f_0(x_0) = 1$ und $f_1(x_0) = \dots = f_n(x_0) = 0$.

Folgerung 7.17 Seien $f_1, \dots, f_n$ linear unabhängige Elemente aus X^* . Dann gibt es $x_1, \dots, x_n$ aus X mit $f_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Satz 7.18 $\sigma(X, Y)$ ist die schwächste zulässige Topologie im dualen Paar.

Es gilt also $(X, \sigma(X, Y))' = Y$ und damit sind alle linearen Funktionale $f \in Y$ schwach stetig. Falls zusätzlich auch τ eine zulässige Topologie ist, also $(X, \tau)' = Y$ gilt, dann ist ein lineares Funktional $f \in Y$ schwach stetig genau dann, wenn es τ -stetig ist.

Definition (Polare)

Sei (X, Y) ein duales Paar und $U \subseteq X$. Dann heißt

$$U^\circ := \{f \in Y \mid \forall x \in U: |f(x)| \leq 1\}$$

Polare zu U .

Lemma: Die Polare U° einer absolutkonvexen Menge U ist absolutkonvex.

Beweis: Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| + |\mu| \leq 1$ und $f, g \in U^\circ$, d.h. $\forall x \in U: |f(x)| \leq 1$ und $|g(x)| \leq 1$. Damit folgt

$$|(\lambda f + \mu g)(x)| = |\lambda f(x) + \mu g(x)| \leq \underbrace{|\lambda| |f(x)|}_{\leq 1} + \underbrace{|\mu| |g(x)|}_{\leq 1} \leq |\lambda| + |\mu| \leq 1,$$

also ist $\lambda f + \mu g \in U^\circ$. ■

Theorem 7.19 (BOURBAKI-ALAOGLU) Sei (X, Y) ein duales Paar, τ eine zulässige Topologie und $U \subseteq X$ eine τ -Nullumgebung. Dann ist die Polare U° stets $\sigma(Y, X)$ -kompakt.

Beweis: Sei $x \in X$. Nach Satz 7.3 ist U absorbierend, also gibt es ein $\lambda_x > 0$ mit $x \in \lambda_x U$. Für $x \in U$ wählen wir stets $\lambda_x = 1$ und sonst $\lambda_x > 1$. Nun sei $f \in U^\circ$,

dann gilt $|f(x)| \leq 1 = \lambda_x$ für alle $x \in U$. Für $x \notin U$ ist $\frac{x}{\lambda_x} \in U$ und damit folgt $|f(\frac{x}{\lambda_x})| = \frac{|f(x)|}{\lambda_x} \leq 1$. Insgesamt gilt

$$\forall f \in U^\circ \forall x \in X: |f(x)| \leq \lambda_x.$$

Die Mengen $V_x := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| \leq \lambda_x\}$ sind nach dem Satz von Heine-Borel kompakt für alle $x \in X$. Weiter ist also das Produkt

$$V := \bigtimes_{x \in X} V_x = \{f: X \rightarrow \mathbb{K} \mid \forall x \in X: |f(x)| \leq \lambda_x\}$$

nach dem Theorem 1.31 von TYCHONOFF kompakt in der Produkttopologie auf $\mathbb{K}^X$, d.h. alle Projektionen $pr_x: \mathbb{K}^X \rightarrow \mathbb{K}$, $f \mapsto f(x)$ für $x \in X$ sind stetig. Die w -*-Topologie $\sigma(Y, X)$ auf Y ist gerade die initiale Topologie bezüglich X , d.h. alle Auswertungsfunktionale $x: Y \rightarrow \mathbb{K}$, $f \mapsto f(x)$ sind stetig. Folglich stimmt auf Y die Produkttopologie mit der schwachen *-Topologie überein. Die Polare

$$U^\circ = \{f \in Y \mid \forall x \in U: |f(x)| \leq 1\} = \bigcap_{x \in U} \{f \in Y \mid p_x(f) \leq 1\} = \bigcap_{x \in U} p_x^{-1}[0, 1]$$

ist $\sigma(Y, X)$ -abgeschlossen, also wegen

$$U^\circ \subseteq V$$

■ auch $\sigma(Y, X)$ -kompakt.

Beispiel: Sei X ein normierter Raum. Die identische Abbildung

$$\text{id}: (X, \|\cdot\|) \rightarrow (X, \sigma(X, X'))$$

ist nach Satz 7.12 stetig, denn es gilt

$$\forall f \in X' \forall x \in X: p_f(x) = |f(x)| \leq \underbrace{\|f\|}_{\geq 0} \|x\|.$$

Damit ist die schwache Topologie schwächer als die Normtopologie, also

$$\sigma(X, X') \subseteq \tau_{\|\cdot\|}.$$

Die Normtopologie $\tau_{\|\cdot\|}$ und auch die schwache Topologie $\sigma(X, X')$ ist zulässig im dualen Paar (X, X') , folglich ist ein lineares Funktional auf X schwach stetig genau dann, wenn es norm-stetig ist.

□

Für einen normierten Raum X sei $B_{X'} := \{f \in X' \mid \|f\| \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel im topologischen Dualraum. Nun ist X' (und damit auch X) endlichdimensional genau dann, wenn $B_{X'}$ kompakt bezüglich $\|\cdot\|$ ist. Für die Topologie $\sigma(X', X)$ gilt noch mehr:

Theorem 7.20 (BANACH-ALAOGLU) Sei X ein normierter Raum. Dann ist die Einheitskugel $B_{X'}$ im Dualraum $\sigma(X', X)$ -kompakt.

Beweis: Im normierten Fall hat man speziell $B_{X'} = (B_X)^\circ$ und damit ist dies ein Spezialfall vom Theorem 7.19 von BOURBAKI-ALAOGLU. ■

Folgerung 7.21 Für einen separablen normierten Raum X ist $B_{X'}$ sogar $\sigma(X', X)$ -folgenkompakt.

Folgerung 7.22 Sei X ein Banachraum. Die Einheitskugel B_X ist w -kompakt genau dann, wenn X reflexiv ist.

Folgerung: Jeder Banachraum ist isometrisch isomorph zu einem abgeschlossenen Unterraum von $\mathcal{C}(K)$ mit einem geeigneten kompakten Hausdorffraum K .

7.3 Extremalpunkte und der Satz von KREIN-MILMAN

Definition 7.23 (Extremalpunkt)

Sei X ein Vektorraum und $K \neq \emptyset$ eine konvexe Teilmenge. Ein Element $x \in K$ heißt *Extremalpunkt* von K , wenn aus $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ für $x_1, x_2 \in K$ und $\lambda \in (0, 1)$ stets $x = x_1 = x_2$ folgt. Die Menge aller Extremalpunkte von K bezeichnen wir mit $\text{ext}K$.

Die *konvexe Hülle* $\text{co}B$ einer Menge $B \subseteq X$ ist die kleinste konvexe Menge, die B enthält. Es gilt

$$\text{co}B = \bigcap_{\substack{K \text{ konvex} \\ K \supseteq B}} K.$$

Theorem 7.24 (KREIN-MILMAN) Jede konvexe kompakte Teilmenge $K \neq \emptyset$ eines hausdorff'schen lokalkonvexen Raums X ist gleich dem Abschluss der konvexen Hülle ihrer Extremalpunkte, d.h.

$$K = \overline{\text{coext}K}.$$

8 Hilberträume und Elemente der Operatortheorie

8.1 Hilberträume

Definition 8.1 (Skalarprodukt, unitärer Raum, Hilbertraum)

Sei X ein $\mathbb{C}$ -linearer Raum. Ein *Skalarprodukt* auf X ist eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{C}$$

mit folgenden Eigenschaften für alle $\phi, \psi, \chi \in X$ und $\lambda \in \mathbb{C}$:

- (i) $\langle \phi, \phi \rangle \geq 0$
- (ii) $\langle \phi, \phi \rangle = 0 \Leftrightarrow \phi = 0$
- (iii) $\langle \phi, \psi \rangle = \overline{\langle \psi, \phi \rangle}$
- (iv) $\langle \phi, \lambda \psi \rangle = \lambda \langle \phi, \psi \rangle$
- (v) $\langle \phi, \psi + \chi \rangle = \langle \phi, \psi \rangle + \langle \phi, \chi \rangle$

Dann heißt $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *unitärer Raum* und ein vollständiger unitärer Raum heißt *Hilbertraum*. Wir schreiben dann auch $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Wir schreiben $\|\phi\|^2 := \langle \phi, \phi \rangle$. Dabei ist $\|\cdot\|$ zunächst ein Symbol – wir sehen später, dass dies tatsächlich eine Norm ist.

Definition 8.2 (orthogonal, Orthonormalsystem)

Sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum. Zwei Elemente $\phi, \psi \in X$ heißen *orthogonal*, wenn

$$\langle \phi, \psi \rangle = 0.$$

Ein System $(\phi_i)_{i \in I} \subseteq X$ heißt *Orthogonalsystem*, falls die ϕ_i paarweise orthogonal sind, also wenn $\forall i, j \in I: i \neq j \Rightarrow \langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0$. Ein Orthogonalsystem heißt *Orthonormalsystem*, wenn zusätzlich stets

$\langle \phi_i, \phi_i \rangle = 1$ gilt, d.h. wenn

$$\forall i, j \in I: \langle \phi_i, \phi_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Satz 8.3 (PYTHAGORAS) Sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum und $(\phi_i)_{i=1}^n$ ein endliches Orthonormalsystem. Dann gilt für alle $\phi \in X$

$$\|\phi\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle \phi_i, \phi \rangle|^2 + \|\phi - \sum_{i=1}^n \langle \phi_i, \phi \rangle \phi_i\|^2.$$

Folgerung 8.4 (BESSEL-Ungleichung) Sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum und $(\phi_i)_{i=1}^n$ ein endliches Orthonormalsystem. Dann gilt für alle $\phi \in X$

$$\sum_{i=1}^n |\langle \phi_i, \phi \rangle|^2 \leq \|\phi\|^2$$

Folgerung: Sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum und $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein abzählbares Orthonormalsystem. Dann gilt für alle $\phi \in X$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle \phi_n, \phi \rangle|^2 \leq \|\phi\|^2$$

Folgerung 8.5 (CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung) Sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum. Dann gilt für alle $\phi, \psi \in X$

$$|\langle \phi, \psi \rangle| \leq \|\phi\| \|\psi\|$$

Folgerung 8.6 Sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum. Dann ist die Abbildung $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$\|\phi\| := \langle \phi, \phi \rangle^{\frac{1}{2}}$$

eine Norm auf X .

Satz 8.7 Sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum. Für $\phi, \psi \in X$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) $\|\phi + \psi\| = \|\phi\| + \|\psi\|$
- (ii) $\langle \phi, \psi \rangle = \|\phi\| \|\psi\|$
- (iii) $\exists \lambda \geq 0: \phi = \lambda \psi$

Folgerung 8.8 Sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum. Für $\phi, \psi \in X$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) $|\langle \phi, \psi \rangle| = \|\phi\| \|\psi\|$
- (ii) $\exists \lambda \in \mathbb{C}: \phi = \lambda \psi$, d.h. ϕ, ψ linear abhängig.

Satz 8.9 Sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum. Dann ist das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

Satz 8.10 (NEUMANN) Sei X ein Menge.

- (i) Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf X , dann erfüllt die Norm $\|\phi\| := \langle \phi, \phi \rangle^{\frac{1}{2}}$ die *Parallelogramm-Identität*

$$\|\phi + \psi\|^2 + \|\phi - \psi\|^2 = 2\|\phi\|^2 + 2\|\psi\|^2$$

für alle $\phi, \psi \in X$.

- (ii) Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf X , die die Parallelogramm-Identität erfüllt. Dann definiert die *Polarisations-Identität*

$$\langle \phi, \psi \rangle := \frac{1}{4} \left(\|\phi + \psi\|^2 - \|\phi - \psi\|^2 + i\|\phi - i\psi\|^2 - i\|\phi + i\psi\|^2 \right)$$

ein Skalarprodukt auf X mit der Eigenschaft

$$\|\phi\| = \langle \phi, \phi \rangle^{\frac{1}{2}}$$

für alle $\phi \in X$.

Satz 8.11 Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ eine abgeschlossene konvexe Teilmenge und $\phi_0 \in \mathcal{H}$. Dann existiert genau ein $\psi_0 \in \mathcal{K}$ mit

$$\|\phi_0 - \psi_0\| = \|\phi_0 - \mathcal{K}\| := \bigwedge_{\psi \in \mathcal{K}} \|\phi_0 - \psi\|$$

und

$$\Re \langle \psi, \phi_0 - \psi_0 \rangle \leq \Re \langle \psi_0, \phi_0 - \psi_0 \rangle$$

für alle $\psi \in \mathcal{K}$. Wir nennen ψ_0 *Bestapproximation* von ϕ_0 bezüglich $\mathcal{K}$.

Bemerkung: Die Abgeschlossenheit von $\mathcal{K}$ sichert die Existenz von ψ_0 und die Konvexität sichert die Eindeutigkeit.

Definition 8.12 (orthogonales Komplement)

Sei X ein unitärer Raum. Für eine Teilmenge $B \subseteq X$ heißt

$$B^\perp := \{\phi \in X \mid \forall \psi \in B: \langle \phi, \psi \rangle = 0\}$$

orthogonales Komplement von B .

Offenbar ist ein orthogonales Komplement stets ein linearer Teilraum und abgeschlossen, denn es ist $B^\perp = \bigcap_{\psi \in B} \{\psi\}^\perp$.

Definition (direkte Summe)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \subseteq \mathcal{H}$ abgeschlossene lineare Teilräume.

(i) Wenn $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$ gilt, dann ist

$$\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 := \{\phi_1 + \phi_2 \mid \phi_1 \in \mathcal{H}_1, \phi_2 \in \mathcal{H}_2\}$$

ein abgeschlossener linearer Teilraum und heißt *direkte Summe* von $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$. Insbesondere hat jedes Element $\phi \in \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ eine eindeutige Darstellung $\phi = \phi_1 + \phi_2$ mit $\phi_1 \in \mathcal{H}_1$ und $\phi_2 \in \mathcal{H}_2$.

(ii) Falls $\mathcal{H}_1 \perp \mathcal{H}_2$, dann ist $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$ und die direkte Summe

$$\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 := \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$$

heißt *orthogonale direkte Summe*.

Für beliebige Hilberträume $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ bilde das Produkt $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ mit komponentenweisen Skalarprodukt, dann ist auch $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Weiter können $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ in $\mathcal{H}$ isometrisch eingebettet werden und wenn wir diese Einbettungen mit $\mathcal{H}_1$ bzw. $\mathcal{H}_2$ identifizieren, dann gilt $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

Entsprechende Verallgemeinerungen sind auch für mehr als zwei Hilberträume möglich.

Satz 8.13 (Projektionssatz) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}$ ein abgeschlossener linearer Teilraum. Dann gilt

$$\mathcal{H} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^\perp,$$

d.h. jedes $\phi \in \mathcal{H}$ hat eine eindeutige Darstellung $\phi = \psi + \psi^\perp$ mit $\psi \in \mathcal{L}$ und $\psi^\perp \in \mathcal{L}^\perp$ und ψ heißt *orthogonale Projektion* von ϕ auf $\mathcal{L}$. Die Abbildung $P: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}$, die jedem $\phi \in \mathcal{H}$ dessen orthogonale Projektion $\psi \in \mathcal{L}$ zuordnet, ist ein linearer Operator. Falls $\mathcal{L} \neq \{0\}$, dann gilt $\|P\| = 1$.

Definition 8.14 (summierbar)

Sei X ein normierter Raum und $(x_i)_{i \in I} \subseteq X$ eine Familie von Elementen aus X . Dann heißt $(x_i)_{i \in I}$ *summierbar* in X , wenn das Netz $(\sum_{i \in F} x_i)_{F \in \mathcal{F}}$ gegen ein $x \in X$ konvergiert. Wir schreiben dafür auch

$$\sum_{i \in I} x_i = x.$$

Dabei ist $\mathcal{F} := \wp_{fin}(I) = \{F \subseteq I \mid |I| < \infty\}$ das bezüglich der Teilmengeninklusion $\subseteq$ gerichtete System aller endlichen Teilmengen von I .

Satz 8.15 Sei X ein unitärer Raum. Für jedes Orthonormalsystem $(\phi_i)_{i \in I}$ in X sind äquivalent:

- (i) $\text{lin}\{\phi_i \mid i \in I\}$ dicht in X .
- (ii) $\forall \phi \in X: \phi = \sum_{i \in I} \langle \phi_i, \phi \rangle \phi_i$.
- (iii) $\forall \phi \in X: \|\phi\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle \phi_i, \phi \rangle|^2$ (PARSEVALSche Gleichung).

Die $\langle \phi_i, \phi \rangle$ heißen *Fourierkoeffizienten* von ϕ bezüglich $(\phi_i)_{i \in I}$ und falls eine der obigen Bedingungen gilt, dann ist $\langle \phi_i, \phi \rangle \neq 0$ für höchstens abzählbar viele $i \in I$.

Definition 8.16 (Orthonormalbasis)

Sei X ein unitärer Raum. Ein Orthonormalsystem $(\phi_i)_{i \in I}$ in X heißt *Orthonormalbasis*, wenn eine der äquivalenten Bedingungen aus Satz 8.15 erfüllt ist.

Bemerkung 8.17 (i) Sei X ein unitärer Raum und $\mathcal{H} := \tilde{X}$ seine Vervollständigung, d.h. $\mathcal{H}$ ist ein Hilbertraum. Wenn $(\phi_i)_{i \in I}$ eine Orthonormalbasis in X ist, dann auch in $\mathcal{H}$.

(ii) Seien $\phi, \psi \in \mathcal{H}$, dann gilt

$$\langle \phi, \psi \rangle = \sum_{i \in I} \langle \phi, \phi_i \rangle \langle \phi_i, \psi \rangle.$$

(iii) Die Fourierkoeffizienten sind eindeutig: Hat $\phi \in \mathcal{H}$ eine Darstellung $\phi = \sum_{i \in I} c_i \phi_i$, dann folgt stets $c_i = \langle \phi_i, \phi \rangle$ wegen

$$\langle \phi_j, \phi \rangle = \langle \phi_j, \sum_{i \in I} c_i \phi_i \rangle = \sum_{i \in I} c_i \underbrace{\langle \phi_j, \phi_i \rangle}_{=\delta_{ij}} = c_j.$$

Satz 8.18 Jedes Orthonormalsystem in einem Hilbertraum lässt sich zu einer Orthonormalbasis erweitern. Insbesondere besitzt also jeder Hilbertraum eine Basis.

Satz 8.19 Für einen Hilbertraum $\mathcal{H}$ sind äquivalent:

- (i) $\mathcal{H}$ ist separabel.
- (ii) $\mathcal{H}$ hat eine abzählbare Orthonormalbasis.
- (iii) Jedes Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$ ist höchstens abzählbar.
- (iv) $\mathcal{H}$ ist isometrisch isomorph zu ℓ_2 .

Lemma: Alle Orthonormalbasen eines Hilbertraums haben die gleiche Mächtigkeit.

Definition 8.20 (Dimension)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Die *Dimension* von $\mathcal{H}$ ist die Kardinalzahl einer Orthonormalbasis in $\mathcal{H}$. Wir schreiben dafür $\dim \mathcal{H}$.

Bemerkung 8.21 (i) Setzt man im Satz 8.15 voraus, dass X ein Hilbertraum ist, dann sind die angegebenen Bedingungen äquivalent dazu, dass $(\phi_i)_{i \in I}$ ein maximales Orthonormalsystem ist. Eine Orthonormalbasis eines Hilbertraums ist demnach stets ein maximales Orthonormalsystem.

- (ii) Analog zum Satz 8.18 existiert in einem unitären Raum immer ein maximales Orthonormalsystem, aber nicht unbedingt eine Orthonormalbasis. (siehe dazu BOURBAKI: *Topologische Vektorräume*.) Mit dem Orthonormalisierungsverfahren von GRAM-SCHMIDT lässt sich in einem separablen unitären Raum stets eine Orthonormalbasis konstruieren.

- (iii) In einem unitären Raum ist der Satz 8.18 im Allgemeinen falsch, d.h. man kann ein Orthonormalsystem nicht immer zu einer Orthonormalbasis ergänzen.
- (iv) Auch der folgende Satz 8.22 von RIESZ ist in unitären Räumen falsch.

Theorem 8.22 (RIESZ) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H}' \\ j: \quad \psi &\mapsto j(\psi) := \langle \psi, \cdot \rangle: \quad \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K} \\ &\quad \phi \mapsto \langle \psi, \phi \rangle \end{aligned}$$

ein antilinearer isometrischer Isomorphismus.

Beweis: (i) *j antilinear:* Seien $\psi, \phi, \chi \in \mathcal{H}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gilt

$$j(\psi + \lambda\chi)(\phi) = \langle \psi + \lambda\chi, \phi \rangle = \langle \psi, \phi \rangle + \bar{\lambda}\langle \chi, \phi \rangle = j(\psi)(\phi) + \bar{\lambda}j(\chi)(\phi).$$

- (ii) *j injektiv:* Seien $\psi, \chi \in \mathcal{H}$ mit $j(\psi) = j(\chi)$, also gilt $\langle \psi, \phi \rangle = \langle \chi, \phi \rangle$ für alle $\phi \in \mathcal{H}$. Weiter ist stets $\langle \psi - \chi, \phi \rangle = 0$ und damit $\psi = \chi$.
- (iii) *j surjektiv:* Sei $f \in \mathcal{H}'$. Für $f = 0$ wähle einfach $\psi = 0$. Nun sei $f \neq 0$, dann wähle $\psi_0 \in (\ker f)^\perp$ mit $\|\psi_0\| = 1$. Setze $\chi_\phi := f(\psi_0)\phi - f(\phi)\psi_0$ für $\phi \in \mathcal{H}$, dann gilt $\chi_\phi \in \ker f$. Es folgt

$$0 = \langle \psi_0, \chi_\phi \rangle = \langle \psi_0, f(\psi_0)\phi - f(\phi)\psi_0 \rangle = \langle \psi_0, f(\psi_0)\phi \rangle - \underbrace{\langle \psi_0, f(\phi)\psi_0 \rangle}_{=f(\phi)\|\psi_0\|^2=f(\phi)}$$

und damit gilt

$$f(\phi) = \langle \psi_0, f(\psi_0)\phi \rangle = \overline{f(\psi_0)}\langle \psi_0, \phi \rangle.$$

Schließlich setzen wir $\psi := \overline{f(\psi_0)}\psi_0$ und erhalten $f = j(\psi)$.

- (iv) *j isometrisch:* Sei $\psi \in \mathcal{H}$. Wir haben nach der CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung

$$\|j(\psi)\| = \bigvee_{\|\phi\| \leq 1} |j(\psi)(\phi)| = \bigvee_{\|\phi\| \leq 1} |\langle \psi, \phi \rangle| \leq \bigvee_{\|\phi\| \leq 1} \|\psi\| \|\phi\| = \|\psi\|$$

und für $\phi_0 := \frac{\psi}{\|\psi\|}$ mit $\|\phi_0\| = 1$ gilt

$$\|j(\psi)\| \geq |\langle \psi, \phi_0 \rangle| = \frac{\|\psi\|^2}{\|\psi\|} = \|\psi\|.$$

Insgesamt gilt immer $\|j(\psi)\| = \|\psi\|$ für $\psi \in \mathcal{H}$. ■

Folgerung 8.23 Jeder Hilbertraum ist reflexiv.

Beweis: Mit dem im Satz 8.22 eingeführten Isomorphismus $j: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ lässt sich in $\mathcal{H}'$ ein Skalarprodukt einführen, sodass $\mathcal{H}'$ zu einem Hilbertraum wird. Dann wenden wir den Satz 8.22 von RIESZ auf $\mathcal{H}'$ an und erhalten

$$\mathcal{H} \cong \mathcal{H}' \cong \mathcal{H}''$$

■ .

8.2 Elemente der Operatortheorie

Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Für $\psi \in \mathcal{H}$ betrachte das lineare Funktional

$$f_\psi: \begin{array}{l} \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K} \\ \phi \mapsto \langle \psi, T\phi \rangle. \end{array}$$

Es ist $f_\psi \in \mathcal{H}'$ und nach dem Theorem 8.22 von RIESZ gibt es ein $\chi_\psi \in \mathcal{H}$ mit $f_\psi = \langle \chi_\psi, \cdot \rangle$, d.h. $\langle \psi, T\phi \rangle = \langle \chi_\psi, \phi \rangle$ für alle $\phi \in \mathcal{H}$.

Definition (adjugierten Operator)

Damit definieren wir den sogenannten *adjugierten Operator* zu T vermöge

$$T^*: \begin{array}{l} \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \\ \psi \mapsto \chi_\psi \end{array}$$

und dann gilt stets

$$\langle \psi, T\phi \rangle = \langle T^*\psi, \phi \rangle.$$

Lemma 8.24 Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, dann gelten:

(i) $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

(ii) $T^* = j^{-1} \circ T' \circ j$ und dabei ist j wie im Theorem 8.22 von RIESZ.

Satz 8.25 (i) Es gilt $\|T\| = \|T^*\|$ für alle $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

(ii) Die Abbildung $T \mapsto T^*$ ist eine $*$ -Abbildung in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, d.h. es gelten

- $(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*$
- $(TS)^* = S^* T^*$
- $(T^*)^* = T$

für alle $T, S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.

(iii) Die Norm erfüllt die C^* -Eigenschaft: Es gilt

$$\|T^* T\| = \|T\|^2$$

für alle $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Folgerung: $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist eine C^* -Algebra. Siehe dazu die Definition 11.1. Damit haben wir die im dortigen Kapitel definierten Begriffe und bewiesenen Sätze nun auch in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ zur Verfügung. Im folgenden werden einige Ergänzungen gemacht.

Satz 8.26 Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, dann gelten:

- (i) $(\operatorname{im} T)^\perp = \ker T^*$
- (ii) Wenn $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum ist, dann folgt aus $\langle \phi, T\psi \rangle = 0$ für alle $\phi \in \mathcal{H}$ stets $T\psi = 0$.

Beweis: (i) Es gilt

$$\begin{aligned}
 (\operatorname{im} T)^\perp &= \{\phi \in \mathcal{H} \mid \forall \psi \in \mathcal{H}: \underbrace{\langle \phi, T\psi \rangle}_{= \langle T^* \phi, \psi \rangle} = 0\} = \ker T^*. \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\iff T^* \phi = 0}
 \end{aligned}$$

■

Satz 8.27 Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, dann gelten:

(i) T ist positiv genau dann, wenn

$$\langle \phi, T\phi \rangle \geq 0$$

für alle $\phi \in \mathcal{H}$ gilt.

(ii) T ist selbstadjugiert genau dann, wenn

$$\langle \phi, T\phi \rangle \in \mathbb{R}$$

für alle $\phi \in \mathcal{H}$ ist.

(iii) T ist unitär genau dann, wenn T surjektiv und isometrisch ist.

(iv) T ist isometrisch genau dann, wenn

$$\langle T\phi, T\psi \rangle = \langle \phi, \psi \rangle$$

für alle $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ gilt.

(v) T ist normal genau dann, wenn

$$\|T\phi\| = \|T^*\phi\|$$

für alle $\phi \in \mathcal{H}$ ist.

Definition 8.28 (Zerlegung des Spektrum)

Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Das Spektrum $\sigma(T)$ kann in folgende disjunkte Teilmengen zerlegt werden:

(i) *Punktspektrum*

$$\begin{aligned} \sigma_p(T) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists \phi \in \mathcal{H} \setminus \{0\} : T\phi = \lambda\phi\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda I \text{ nicht injektiv}\} \end{aligned}$$

(ii) *stetiges Spektrum*

$$\begin{aligned} \sigma_c(T) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda I \text{ injektiv,} \\ &\quad \text{im}(T - \lambda I) \text{ dicht in } \mathcal{H}, \\ &\quad (T - \lambda I)^{-1} \text{ unbeschränkt}\} \end{aligned}$$

(iii) *Residualspektrum*

$$\sigma_r(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda I \text{ injektiv,} \\ \text{im}(T - \lambda I) \text{ nicht dicht in } \mathcal{H}\}$$

Satz 8.29 Für $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gelten:

- (i) $\overline{\sigma_p(T)} \subseteq \sigma_p(T^*) \cup \sigma_r(T^*)$
- (ii) $\overline{\sigma_r(T)} \subseteq \sigma_p(T^*)$
- (iii) $\overline{\sigma_c(T)} = \sigma_c(T^*)$

Dabei bedeute $\overline{\sigma(T)}$ nicht etwa den Abschluss, sondern das Konjugieren in den komplexen Zahlen.

Beweis: (i) Sei $\lambda \in \sigma_p(T)$, dann gibt es ein $\phi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ mit

$$\text{lin}\{\phi\} \subseteq \ker(T - \lambda I) = (\text{im}(T^* - \bar{\lambda}I))^\perp$$

und damit kann $\text{im}(T^* - \bar{\lambda}I)$ nicht dicht sein, d.h. $\bar{\lambda} \notin \sigma_c(T^*)$.

- (ii) Sei $\lambda \in \sigma_r(T)$, d.h. $T - \lambda I$ ist injektiv und das Bild $\text{im}(T - \lambda I) = (\ker(T^* - \bar{\lambda}I))^\perp$ ist nicht dicht. Also existiert ein $\phi \neq 0$ mit $\phi \in \ker(T^* - \bar{\lambda}I)$.

- (iii) Nach (i) und (ii) gilt

$$\overline{\sigma_p(T)} \cup \overline{\sigma_r(T)} = \sigma_p(T^*) \cup \sigma_r(T^*)$$

und nach Folgerung 11.34 gilt $\overline{\sigma(T)} = \sigma(T^*)$, also muss

$$\overline{\sigma_c(T)} = \sigma_c(T^*)$$

gelten. ■

Satz 8.30 Sei $T = T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

(i) Es gilt $\lambda \in \rho(T)$ genau dann, wenn

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \phi \in \mathcal{H}: \|(T - \lambda I)\phi\| \geq \varepsilon \|\phi\|.$$

(ii) *WEYLSches Kriterium*: Es gilt $\lambda \in \sigma(T)$ genau dann, wenn es eine Folge $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ mit $\|\phi_n\| = 1$ gibt und es gilt

$$(T - \lambda I)\phi_n \rightarrow 0.$$

(iii) Das Spektrum ist reell, d.h. $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$, und die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen orthogonal.

(iv) Das Residualspektrum ist leer, also $\sigma_r(T) = \emptyset$.

Beweis: (i)

(ii)

(iii) folgt aus 11.36. Seien $\lambda, \mu \in \sigma_p(T)$ Eigenwerte mit $\lambda \neq \mu$ und $\phi \in \text{Eig}_\lambda(T) = \ker(T - \lambda I)$ sowie $\psi \in \text{Eig}_\mu(T) = \ker(T - \mu I)$ entsprechende Eigenvektoren. Dann gilt

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle \lambda \phi, \psi \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle T\phi, \psi \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle \phi, T\psi \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle \phi, \mu \psi \rangle = \frac{\mu}{\lambda} \langle \phi, \psi \rangle$$

und damit $\langle \phi, \psi \rangle = 0$.

■

(iv) Es gilt $\sigma_r(T) \subseteq \sigma_p(T)$ nach 8.29, also folgt $\sigma_r(T) = \emptyset$.

9 Einige Klassen beschränkter linearer Operatoren

Definition 9.1 (Orthoprojektor, isometrisch)

Ein Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt

- (i) *Projektor*, falls T idempotent ist.
- (ii) *Orthoprojektor*, falls T idempotent und selbstadjugiert ist.
- (iii) *isometrisch*, wenn $\|T\phi\| = \|\phi\|$ für alle $\phi \in \mathcal{H}$ gilt.

Bemerkung 9.2 (i) P ist ein (Ortho-)Projektor genau dann, wenn $I - P$ ein (Ortho-)Projektor ist.

(ii) Für einen Projektor P ist das Bild $\text{im}P$ und der Kern $\ker P$ abgeschlossen. Ferner gilt $\text{im}P = \ker(I - P)$.

(iii) P und $I - P$ kommutieren und das Produkt ist 0.

(iv) Wenn $\text{im}P \cap \ker P = \{0\}$, dann gilt $\text{im}P + \ker P = \mathcal{H}$.

Satz 9.3 Sei $P = P^2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \setminus \{0\}$ ein Projektor. Dann sind äquivalent:

- (i) $\text{im}P \perp \ker P$.
- (ii) $\|P\| = 1$.
- (iii) P selbstadjugiert, d.h. $P = P^*$.
- (iv) P normal, d.h. $P^*P = PP^*$.
- (v) P positiv, d.h. $P \geq 0$ bzw. $\langle \phi, P\phi \rangle \geq 0$ für alle $\phi \in \mathcal{H}$.

Gilt eine dieser Bedingungen, dann ist P ein Orthoprojektor.

Definition 9.4 (invariant, reduzierend)

Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ein Unterraum $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{H}$ heißt

- (i) *invariant* für T , wenn $T\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$ gilt.
- (ii) *reduzierend* für T , wenn $\mathcal{U}$ und $\mathcal{U}^\perp$ invariant für T sind, d.h. falls $T\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$ und $T\mathcal{U}^\perp \subseteq \mathcal{U}^\perp$ gelten.

Bemerkung 9.5 Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{H}$ ein Unterraum und $\mathcal{H} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp$. Dann kann jeder Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ auch als eine (2,2)-Operatormatrix

$$T = \begin{pmatrix} W & X \\ Y & Z \end{pmatrix}$$

mit Operatoren $W \in \mathcal{B}(\mathcal{U})$, $X \in \mathcal{B}(\mathcal{U}^\perp, \mathcal{U})$, $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{U}, \mathcal{U}^\perp)$ und $Z \in \mathcal{B}(\mathcal{U}^\perp)$ geschrieben werden.

Satz 9.6 Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und $P = P_{\mathcal{U}}$ der Orthoprojektor auf den Unterraum $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{H}$. Dann sind äquivalent:

- (i) $\mathcal{U}$ ist invariant für T .
- (ii) Es gilt $PTP = TP$.
- (iii) Für eine Matrixdarstellung $T = \begin{pmatrix} W & X \\ Y & Z \end{pmatrix}$ gilt stets $Y = 0$.

Satz 9.7 Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und $P = P_{\mathcal{U}}$ der Orthoprojektor auf den Unterraum $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{H}$. Dann sind äquivalent:

- (i) $\mathcal{U}$ ist reduzierend für T .
- (ii) Es gilt $PT = TP$.
- (iii) Für eine Matrixdarstellung $T = \begin{pmatrix} W & X \\ Y & Z \end{pmatrix}$ gilt stets $X = Y = 0$.
- (iv) $\mathcal{U}$ ist invariant für T und T^* .

Folgerung 9.8 Wenn $T = T^*$ selbstadjugiert ist, so ist jeder invariante Unterraum auch reduzierend für T .

Satz 9.9 Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, dann gelten folgende Aussagen:

- (i) Wenn es ein $C > 0$ mit $\|T\phi\| \geq C\|\phi\|$ für alle $\phi \in \mathcal{H}$ gibt, dann ist das Bild $\text{im} T$ abgeschlossen.
- (ii) T ist invertierbar in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ genau dann, wenn das Bild $\text{im} T$ dicht in $\mathcal{H}$ ist und es ein $C > 0$ mit $\|T\phi\| \geq C\|\phi\|$ für alle $\phi \in \mathcal{H}$ gibt.
- (iii) T ist beschränkt invertierbar in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ genau dann, wenn es $C, D > 0$ mit $\|T\phi\| \geq C\|\phi\|$ und $\|T^*\phi\| \geq D\|\phi\|$ für alle $\phi \in \mathcal{H}$ gibt.

10 Kompakte Operatoren

10.1 Charakterisierung kompakter Operatoren

Satz 10.1 $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ ist ein normabgeschlossenes zweiseitiges $*$ -Ideal in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, das $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ enthält.

Definition (schwach konvergent, vollstetig)

- (i) Eine Folge $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ heißt *schwach konvergent* gegen $\phi \in \mathcal{H}$, wenn

$$\langle \psi, \phi_n \rangle \rightarrow \langle \psi, \phi \rangle$$

für alle $\psi \in \mathcal{H}$ gilt. Wir schreiben dafür auch $\phi_n \xrightarrow{w} \phi$.

- (ii) Ein Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt *vollstetig*, wenn T schwach konvergente Folgen auf $\|\cdot\|$ -konvergente Folgen abbildet.

Satz 10.2 Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dann sind äquivalent:

- (i) T ist kompakt.
- (ii) T ist vollstetig.

Folgerung 10.3 Wenn $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ kompakt ist, dann gilt für ein beliebiges unendliches Orthonormalsystem $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ stets $T\phi_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$.

Beweis: Sei $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem. Nach der BESSEL-Ungleichung 8.4 gilt $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle \psi, \phi_n \rangle|^2 \leq \|\psi\|^2$ und demnach $\langle \psi, \phi_n \rangle \rightarrow 0$ für alle $\psi \in \mathcal{H}$. Die Folge $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist also schwach konvergent und demnach ist die Bildfolge $(T\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ normkonvergent mit $T\phi_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$. ■

Theorem 10.4 Es ist $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ genau dann, wenn eine Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{H})$ mit $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$ existiert. Die endlichdimensionalen Operatoren $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ liegen also dicht in den kompakten Operatoren $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Beweis: ($\Rightarrow$) Sei $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Dann ist $\overline{TU_1(0)}$ kompakt, d.h. präkompakt und damit gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein endliches ε -Netz für $\overline{TU_1(0)}$. Mit dem Grenzwertübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ erhalten wir eine abzählbare dichte Menge in $\overline{TU_1(0)}$, also ist $\overline{TU_1(0)}$ separabel. Mit Satz 3.4 gibt es eine abzählbare totale Menge in $\overline{TU_1(0)}$ und wenn eine lineare Hülle dicht in $\overline{TU_1(0)}$ liegt, dann ist sie auch dicht in $\overline{\text{im} T}$, d.h. $\overline{\text{im} T}$ ist separabel. Sei nun $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine, also abzählbare, Orthonormalbasis von $\overline{\text{im} T}$ und P_n sei jeweils die Projektion auf den Unterraum $\text{lin}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$, d.h. $P_n \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$. Ersichtlich gilt $P_n \xrightarrow{s} I$. Setze nun

$$T_n := P_n T \in \mathcal{F}(\mathcal{H}),$$

dann konvergiert $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stark gegen T . Weiter sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein endliches $\frac{\varepsilon}{3}$ -Netz $F \subseteq \overline{TU_1(0)}$. Für $\phi \in U_1(0)$ gibt es also stets ein $\psi \in F$ mit $\|T\phi - T\psi\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Weil $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stark gegen T konvergiert, gibt es einen Index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_\varepsilon$ stets $\|T_n\psi - T\psi\| < \frac{\varepsilon}{3}$ für $\psi \in F$ gilt. Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} \|T_n\phi - T\phi\| &\leq \underbrace{\|T_n\phi - T_n\psi\|}_{=\|P_n(T\phi - T\psi)\| < \|P_n\| \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|T_n\psi - T\psi\|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|T\psi - T\phi\|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon \\ &= \|P_n(T\phi - T\psi)\| < \|P_n\| \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

für $n \geq n_\varepsilon$, also $\|T_n - T\| \rightarrow 0$.

($\Leftarrow$) Jedes T_n ist insbesondere kompakt und $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ ist normabgeschlossen, also folgt sogleich $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Folgerung 10.5 Sei $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Dann ist $\overline{\text{im} T}$ separabel. Wenn $(\phi_n)_n$ eine Orthonormalbasis in $\overline{\text{im} T}$ und P_n der Orthoprojektor auf $\text{lin}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ ist, dann gilt $P_n T \xrightarrow{\|\cdot\|} T$.

10.2 Spektraleigenschaften kompakter Operatoren

Satz 10.6 Sei $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ ein kompakter Operator und $\lambda \neq 0$, dann ist das Bild $\text{im}(T - \lambda I)$ abgeschlossen.

Bemerkung 10.7 (i) Für die identische Abbildung gilt $E \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ genau dann, wenn $\dim \mathcal{H} < \infty$.

(ii) Für einen Orthoprojektor gilt $P \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ genau dann, wenn $\dim P\mathcal{H} < \infty$.

- (iii) Für den Eigenraum $\text{Eig}_\lambda(T) = \ker(T - \lambda I)$ gilt $T|_{\text{Eig}_\lambda(T)} = \lambda E|_{\text{Eig}_\lambda(T)}$, also ist der Eigenraum $\text{Eig}_\lambda(T)$ stets endlichdimensional. Jedes $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ hat demnach eine endliche Vielfachheit.

Beweis: Nach dem Lemma 2.16 von RIESZ ist $\text{Eig}_\lambda(T)$ endlichdimensional genau dann, wenn die identische Abbildung auf $\text{Eig}_\lambda(T)$ kompakt ist. Das ist nach Lemma 2.17 äquivalent dazu, dass jede Folge aus $\text{Eig}_\lambda(T)$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Sei also $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \text{Eig}_\lambda(T) = \ker(T - \lambda I)$, dann gibt es wegen der Kompaktheit von T eine konvergente Teilfolge $(T\phi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Wegen $T\phi_{n_k} = \lambda\phi_{n_k}$ ist $(\phi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergent. ■

Satz 10.8 Sei $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ und $\dim \mathcal{H} = \infty$. Dann gelten:

- (i) Die von Null verschiedenen Elemente aus $\sigma(T)$ sind Eigenwerte, d.h. $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$.
- (ii) T hat höchstens abzählbar viele Eigenwerte, deren einziger Häufungspunkt 0 sein kann. Jeder Eigenwert $\lambda \neq 0$ hat endliche Vielfachheit.
- (iii) Für $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ gilt $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$ und die beiden Eigenwerte haben gleiche Vielfachheit $\dim \ker(T - \lambda I) = \dim \ker(T^* - \bar{\lambda} I)$.

Beweis: (i) Es gilt stets $0 \in \sigma(T)$, denn andernfalls wäre T invertierbar und damit wäre $T^{-1}T = E$ kompakt. Für unendlichdimensionale Hilberträume ist das ein Widerspruch zum Lemma 2.16 von RIESZ. Sei $\lambda \notin \sigma_p(T) \cup \{0\}$. Wir zeigen, dass dann $\lambda \notin \sigma(T)$ folgt. Wegen $\ker(T - \lambda I) = \{0\}$ ist $T - \lambda I$ injektiv und damit $T - \lambda I: \mathcal{H} \rightarrow \text{im}(T - \lambda I)$ bijektiv, also ist

$$(T - \lambda I)^{-1}: \mathcal{H} \rightarrow \text{im}(T - \lambda I)$$

stetig nach dem Satz 5.6 vom stetigen Inversen. Angenommen, es wäre $\text{im}(T - \lambda I) \neq \mathcal{H}$. Setze $\mathcal{H}_0 := \mathcal{H}$ und $\mathcal{H}_n := (T - \lambda I)\mathcal{H}_{n-1} = (T - \lambda I)^n \mathcal{H}$ für $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_0$ und induktiv folgt

$$\mathcal{H}_n = (T - \lambda I)\mathcal{H}_{n-1} \subseteq (T - \lambda I)\mathcal{H}_{n-2} = \mathcal{H}_{n-1}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$, also

$$\mathcal{H}_0 \supseteq \mathcal{H}_1 \supseteq \mathcal{H}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{H}_n \supseteq \dots$$

Weiter gilt stets

$$T\mathcal{H}_n = (T - \lambda I)\mathcal{H}_n + \lambda\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_{n+1} + \lambda\mathcal{H}_n \subseteq \mathcal{H}_n + \lambda\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_n$$

und demnach ist $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$. Mit dem Satz 10.6 folgt wegen $\lambda \neq 0$ nun, dass alle $(T - \lambda I)\mathcal{H}_n$ abgeschlossen sind. Angenommen, es wäre $\mathcal{H}_{n+1} = \mathcal{H}_n$ für

ein $n \in \mathbb{N}$, d.h. $(T - \lambda I)^{n+1} \mathcal{H} = (T - \lambda I)^n \mathcal{H}$ und damit folgt $(T - \lambda I) \mathcal{H} = \mathcal{H}$. Widerspruch! Also gilt

$$\mathcal{H}_0 \supsetneq \mathcal{H}_1 \supsetneq \mathcal{H}_2 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathcal{H}_n \supsetneq \cdots$$

Wähle jetzt $\phi_n \in \mathcal{H}_n \ominus \mathcal{H}_{n+1}$, d.h. $\phi_n \in \mathcal{H}_n$ und $\phi_n \perp \mathcal{H}_{n+1}$. Dies ist möglich, denn alle $\mathcal{H}_n$ sind als Bild einer linearen Abbildung stets lineare Unterräume. O.E.d.A. gelte $\|\phi_n\| = 1$, also ist $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem. Mit der Folgerung 10.3 erhalten wir $\|T\phi_n\| \rightarrow 0$. Andererseits ist

$$T\phi_n = \underbrace{(T - \lambda I)\phi_n}_{\in \mathcal{H}_{n+1}} \oplus \underbrace{\lambda\phi_n}_{\perp \mathcal{H}_{n+1}}$$

und damit

$$\|T\phi_n\| \geq \|\lambda\phi_n\| = |\lambda| > 0.$$

Widerspruch! Schließlich folgt $\text{im}(T - \lambda I) = \mathcal{H}$ und $(T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, also $\lambda \notin \sigma(T)$.

- (ii) Angenommen, $\lambda \neq 0$ wäre ein Häufungspunkt von $\sigma_p(T)$, dann gibt es eine Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ mit paarweise verschiedenen λ_n und $\lambda_n \rightarrow \lambda$. Wähle nun $\phi_n \in \text{Eig}_{\lambda_n}(T) = \ker(T - \lambda_n I)$ mit $\|\phi_n\| = 1$, dann ist die Folge $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ linear unabhängig, denn Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten haben den Durchschnitt $\{0\}$. Setze damit $\mathcal{H}_0 := \{0\}$ und

$$\mathcal{H}_n := \text{lin}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}.$$

Wähle nun $\psi_n \in \mathcal{H}_n \ominus \mathcal{H}_{n-1}$ mit $\|\psi_n\| = 1$, dann ist $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem und wegen 10.3 folgt $\|T\psi_n\| \rightarrow 0$. Es gilt $T\psi_n = (T - \lambda_n I)\psi_n + \lambda_n \psi_n$. Mit $\psi_n = \sum_{k=1}^n x_k \phi_k$ folgt

$$(T - \lambda_n I)\psi_n = \sum_{k=1}^n x_k (T - \lambda_n I)\phi_k = \sum_{k=1}^{n-1} x_k (\lambda_k - \lambda_n) \phi_k \in \mathcal{H}_{n-1},$$

und das heißt

$$T\psi_n = (T - \lambda_n I)\psi_n \oplus \lambda_n \psi_n.$$

Folglich gilt

$$\|T\psi_n\| \geq \|\lambda_n \psi_n\| = |\lambda_n| > 0.$$

Widerspruch! Also ist 0 der einzige mögliche Häufungspunkt und damit gibt es nur abzählbar viele Eigenwerte.

- (iii) Nach Satz 8.29 gilt $\overline{\sigma_p(T)} \subseteq \sigma_p(T^*) \cup \sigma_r(T^*)$

Satz 10.9 Sei $T = T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dann gilt $\|T\| \in \sigma(T)$ oder $-\|T\| \in \sigma(T)$.

Theorem 10.10 (Spektraltheorem)

- (i) Sei $T = T^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ und P_λ die Projektion auf den Eigenraum $\text{Eig}_\lambda(T)$ für jeden Eigenwert $\lambda \in \sigma_p(T)$. Dann gilt

$$T = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}} \lambda P_\lambda$$

und diese Reihe konvergiert in der Operatornorm.

- (ii) Die obige Darstellung von T ist in folgendem Sinne eindeutig: Sei $(\lambda_j)_j$ eine Nullfolge oder eine endliche Folge aus $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, sodass alle Glieder λ_j paarweise verschieden sind. P_j seien paarweise orthogonale endlichdimensionale Orthoprojektoren. Dann ist die unendliche Reihe $\sum_j \lambda_j P_j$ in der Operatornorm konvergent. Weiter ist $T := \bigoplus_j \lambda_j P_j$ dann selbstadjugiert und kompakt und T hat genau die λ_j als Eigenwerte und die P_j als Orthoprojektoren auf die zugehörigen Eigenräume.

Beweis: (i) Nach dem Satz 10.8 besteht das Spektrum von T genau aus 0 und den Eigenwerten von T , d.h. $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$. Außerdem hat T höchstens abzählbar viele Eigenwerte, deren einziger Häufungspunkt 0 sein kann. Für jeden Eigenwert $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ sei P_λ der Orthoprojektor auf den Eigenraum $\text{Eig}_\lambda(T) = \{\phi \in \mathcal{H} \mid T\phi = \lambda\phi\}$. Jeder Eigenraum ist endlichdimensional, also gilt stets $P_\lambda \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$. Nun definiere den linearen Unterraum

$$\mathcal{U} := \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}} \text{Eig}_\lambda(T)$$

und sei P der Orthoprojektor auf $\mathcal{U}$. Sei $\phi \in \mathcal{U}$, d.h. es gibt eine Zerlegung $(\phi_\lambda)_{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}}$ mit $\phi = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}} \phi_\lambda$. Nun gilt

$$T\phi = T \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}} \phi_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}} T\phi_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}} \lambda \phi_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}} \lambda \phi_\lambda \in \mathcal{U},$$

also ist $\mathcal{U}$ invariant für T , d.h. $T\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$, und wegen $T = T^*$ sowie 9.8 ist $\mathcal{U}$ reduzierend für T , d.h. $T\mathcal{U}^\perp \subseteq \mathcal{U}^\perp$. Die Einschränkung $T|_{\mathcal{U}^\perp}$ ist auch kompakt und selbstadjugiert und kann nur den Eigenwert 0 haben, denn für $\phi \perp \mathcal{U}$ gilt $T\phi \perp \mathcal{U}$, also gibt es keinen Eigenwert $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ mit $T\phi = \lambda\phi$. Angenommen es wäre $T|_{\mathcal{U}^\perp} \neq 0$, dann wäre auch $\|T|_{\mathcal{U}^\perp}\| \neq 0$ und

- wegen Satz 11.30 gilt $r(T) = \|T|_{\mathcal{U}^\perp}\| \neq 0$, d.h. es gibt ein $\lambda \neq 0$ mit $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T)$. Widerspruch!
- wegen Satz 10.9 gilt $\|T|_{\mathcal{U}^\perp}\| \in \sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T)$. Widerspruch!

Also haben wir $T|_{\mathcal{U}^\perp} = 0$. Weiter ist $I = P + \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}} P_\lambda$ und es gilt

$$T\phi = \underbrace{TP\phi}_{=0} + \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}} TP_\lambda\phi = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}} \lambda P_\lambda\phi.$$

Wenn es nur endlich viele Eigenwerte gibt, dann ist die Reihe eine endliche Summe, also konvergent. Sonst haben wir noch

$$\begin{aligned} \|(T - \bigoplus_{\substack{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\} \\ |\lambda| < n}} \lambda P_\lambda)\phi\| &= \|\bigoplus_{\substack{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\} \\ |\lambda| \geq n}} \lambda P_\lambda\phi\| \\ &= \sum_{\substack{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\} \\ |\lambda| \geq n}} |\lambda| \|P_\lambda\phi\| \\ &\leq \bigvee_{\substack{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\} \\ |\lambda| \geq n}} |\lambda| \sum_{\substack{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\} \\ |\lambda| \geq n}} \|P_\lambda\phi\| \\ &= \underbrace{\bigvee_{\substack{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\} \\ |\lambda| \geq n}} |\lambda|}_{\rightarrow 0} \underbrace{\|\bigoplus_{\substack{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\} \\ |\lambda| \geq n}} P_\lambda\phi\|}_{\leq \|\phi\|}, \end{aligned}$$

das heißt die Reihe konvergiert gleichmäßig gegen T .

- (ii) Die Konvergenz der Reihe $\bigoplus_j \lambda_j \cdot P_j$ sieht man analog wie in (i). $T = \bigoplus_j \lambda_j \cdot P_j$ ist selbstadjugiert und nach dem Theorem 10.4 ist T kompakt. Es ist auch klar, dass die λ_j Eigenwerte von T sind und die Bilder $\text{im } P_j$ sind gerade die Eigenräume. Es verbleibt zu zeigen, dass kein weiterer von 0 verschiedener Eigenwert existiert. ■

Folgerung 10.11 Sei $T = T^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Dann gibt es ein höchstens abzählbares Orthonormalsystem $(\phi_n)_n$ in $\mathcal{H}$ und eine Nullfolge $(\mu_n)_n$ aus $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, sodass

$$T\phi = \sum_n \mu_n \langle \phi_n, \phi \rangle \phi_n$$

für alle $\phi \in \mathcal{H}$ gilt.

Beweis: Es gibt nur abzählbar viele Eigenwerte und jeder Eigenraum ist endlichdimensional. Wähle für jeden Eigenwert $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ eine endliche Orthonormalbasis $(\phi_1^\lambda, \dots, \phi_{n_\lambda}^\lambda)$, dann ist deren Aneinanderreihung

$$(\phi_1^\lambda, \dots, \phi_{n_\lambda}^\lambda \mid \lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\})$$

abzählbar, ein Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$ und sogar eine Basis für das Bild von T . Es gilt

$$T = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}} \bigoplus_{i=1}^{n_\lambda} \lambda \langle \phi_i^\lambda, \cdot \rangle \phi_i^\lambda$$

und nun muss man nur geeignet umindizieren. ■

Theorem 10.12 (HILBERT-SCHMIDT) Sei $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Dann gibt es eine monoton fallende Folge $(\mu_n)_n$ mit $\mu_n > 0$, die endlich oder eine Nullfolge ist, und Orthonormalsysteme $(\phi_n)_n, (\psi_n)_n$ in $\mathcal{H}$ mit

$$T\phi = \sum_n \mu_n \langle \phi_n, \phi \rangle \psi_n.$$

Beweis: Der Operator T^*T ist positiv, also selbstadjugiert. Weiter ist T^*T auch kompakt, denn $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ ist ein $*$ -Ideal. Nach der obigen Folgerung 10.11 gibt es ein höchstens abzählbares Orthonormalsystem $(\phi_n)_n$ in $\mathcal{H}$ und eine Nullfolge $(\mu_n)_n$ aus $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, sodass

$$T\phi = \sum_n \mu_n^2 \langle \phi_n, \phi \rangle \phi_n$$

für alle $\phi \in \mathcal{H}$ gilt. Dann ist $(\psi_n)_n$ mit $\psi_n := \frac{T\phi_n}{\mu_n}$ ein Orthonormalsystem, denn es gilt

$$\langle \psi_i, \psi_j \rangle = \frac{1}{\mu_i \mu_j} \langle T\phi_i, T\phi_j \rangle = \frac{1}{\mu_i \mu_j} \langle T^*T\phi_i, \phi_j \rangle = \frac{1}{\mu_i \mu_j} \langle \mu_i^2 \phi_i, \phi_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Sei $\phi \in \mathcal{H}$, so gibt es eine Zerlegung $\phi = \sum_n \langle \phi_n, \phi \rangle \phi_n + \phi_0$ mit $\phi_0 \in \ker(T^*T)$. Weiter gilt

$$\|T\phi_0\|^2 = \langle T\phi_0, T\phi_0 \rangle = \langle T^*T\phi_0, \phi_0 \rangle = 0,$$

also $\phi_0 \in \ker T$. Schließlich folgt

$$T\phi = \sum_n \langle \phi_n, \phi \rangle T\phi_n = \sum_n \mu_n \langle \phi_n, \phi \rangle \psi_n.$$

■

Bemerkung 10.13 (i) Die μ_n heißen *singuläre Zahlen* und sind gerade die Eigenwerte von der Quadratwurzel $|T| := (T^*T)^{\frac{1}{2}}$.

(ii) Entsprechende Verallgemeinerungen sind auch für normale Operatoren möglich. Dazu verwende man die selbstadjugierte Zerlegung aus dem Satz 11.30.

11 Banachalgebren und C^* -Algebren

11.1 Definitionen und erste Eigenschaften

Definition (Algebra)

- (i) $(\mathcal{A}, +)$ heißt *abelsche Gruppe*, wenn $+: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ eine binäre Operation auf $\mathcal{A}$ („Addition“) ist mit den Eigenschaften:
- $\forall x, y, z \in \mathcal{A}: x + (y + z) = (x + y) + z$ (assoziativ)
 - $\forall x, y \in \mathcal{A}: x + y = y + x$ (kommutativ)
 - $\exists o \in \mathcal{A} \forall x \in \mathcal{A}: x + o = x$ (neutrales Element)
 - $\forall x \in \mathcal{A} \exists (-x) \in \mathcal{A}: x + (-x) = o$ (inverses Element)
- (ii) $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ heißt $\mathbb{K}$ -Vektorraum, wenn $(\mathbb{K}, \oplus, \odot)$ ein Körper, $(\mathcal{A}, +)$ eine abelsche Gruppe und $\cdot: \mathbb{K} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ eine äußere Operation von $\mathbb{K}$ auf $\mathcal{A}$ („Skalarmultiplikation“) ist mit den Eigenschaften:
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \forall x \in \mathcal{A}: (\lambda \odot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$ (regulär)
 - $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \forall x \in \mathcal{A}: (\lambda \oplus \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ (distributiv)
 - $\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x, y \in \mathcal{A}: \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ (distributiv)
 - $\exists 1 \in \mathbb{K} \forall x \in \mathcal{A}: 1 \cdot x = x$ (unitär)
- (iii) $(\mathcal{A}, +, \circ, \cdot)$ heißt *Algebra*, wenn $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ ein $\mathbb{K}$ -Modul und $\circ: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ eine binäre Operation auf $\mathcal{A}$ („Multiplikation“) ist mit den Eigenschaften:
- $\forall x, y, z \in \mathcal{A}: x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ (assoziativ)
 - $\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x, y \in \mathcal{A}: \lambda \cdot (x \circ y) = (\lambda \cdot x) \circ y = x \circ (\lambda \cdot y)$ (regulär)
 - $\forall x, y, z \in \mathcal{A}: (x + y) \circ z = x \circ z + y \circ z$ (distributiv)
 - $\forall x, y, z \in \mathcal{A}: x \circ (y + z) = x \circ y + x \circ z$ (distributiv)

Lemma: (i) In einer abelschen Gruppe $(\mathcal{A}, +)$ gelten:

- Das neutrale Element o ist eindeutig.
- Das inverse Element $-x$ eines $x \in \mathcal{A}$ ist eindeutig.
- $\forall x, y, z \in \mathcal{A}: x + y = z \Leftrightarrow x = z + (-y)$.

(ii) In einem $\mathbb{K}$ -Vektorraum $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ gelten:

- $\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x \in \mathcal{A}: \lambda \cdot x = o \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee x = o$
- $\forall x \in \mathcal{A}: (-1) \cdot x = -x$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x \in \mathcal{A}: (-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x)$

Beweis: (i) • Seien o, o' zwei neutrale Elemente, dann gilt

$$o = o + o' = o'.$$

- Sei $x \in X$ und y ein inverses Element von x , dann gilt

$$(-x) = x + y + (-x) = x + (-x) + y = y.$$

- Es gilt

$$x = x + o = x + y + (-y) = z + (-y)$$

und umgekehrt

$$x + y = z + (-y) + y = z + o = z.$$

- (ii) • Es gilt

$$0 \cdot x = (0 \oplus 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x,$$

also folgt $0 \cdot x = o$. Analog ist

$$\lambda \cdot o = \lambda \cdot (o + o) = \lambda \cdot o + \lambda \cdot o,$$

also $\lambda \cdot o = o$.

Umgekehrt sei $\lambda \cdot x = o$, angenommen $\lambda \neq 0$, dann folgt

$$x = 1 \cdot x = (\lambda^{-1} \odot \lambda) \cdot x = \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda^{-1} \cdot o = o.$$

- Es gilt

$$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = o$$

und damit folgt $-x = (-1) \cdot x$, denn das inverse Element ist eindeutig nach (i).

- Es ist

$$(-\lambda) \cdot x = ((-1) \odot \lambda) \cdot x = \begin{cases} \lambda \cdot ((-1) \cdot x) = \lambda \cdot (-x) \\ (-1) \cdot (\lambda \cdot x) = -(\lambda \cdot x). \end{cases}$$

Im folgenden seien alle Vektorräume und Algebren über $\mathbb{C}$. Das ist wichtig, denn manche Sätze gelten sonst nicht.

Definition 11.1 (kommutativ, unital, normiert, Banach-, $*$ -, C^* -Algebra)

Eine Algebra $(\mathcal{A}, +, \circ, \cdot)$ heißt:

(i) *kommutativ*, wenn

$$\forall x, y \in \mathcal{A}: x \circ y = y \circ x.$$

(ii) *unital*, wenn

$$\exists e \in \mathcal{A} \forall x \in \mathcal{A}: x \circ e = x = e \circ x.$$

(iii) x heißt *invertierbar*, wenn

$$\exists x^{-1} \in \mathcal{A}: x \circ x^{-1} = e = x^{-1} \circ x.$$

(iv) *normiert*, wenn $\|\cdot\|: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$ eine Abbildung ist mit

- $\forall x \in \mathcal{A}: \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = o$ (definit)
- $\forall \lambda \in \mathbb{C} \forall x \in \mathcal{A}: \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \odot \|x\|$ (homogen)
- $\forall x, y \in \mathcal{A}: \|x + y\| \leq \|x\| \oplus \|y\|$ (subadditiv)

und zusätzlich

- $\forall x, y \in \mathcal{A}: \|x \circ y\| \leq \|x\| \odot \|y\|$ (submultiplikativ)

(v) *Banachalgebra*, wenn $\mathcal{A}$ normiert und vollständig ist.

(vi) *$*$ -Algebra*, wenn eine Involution $x \mapsto x^*$ existiert mit

- $\forall \lambda \in \mathbb{C} \forall x, y \in \mathcal{A}: (x + y)^* = x^* + y^*$
- $\forall x, y \in \mathcal{A}: (x \circ y)^* = y^* \circ x^*$
- $\forall \lambda \in \mathbb{C} \forall x \in \mathcal{A}: (\lambda \cdot x)^* = \bar{\lambda} \cdot x^*$
- $\forall x \in \mathcal{A}: (x^*)^* = x$

(vii) *C^* -Algebra*, wenn $\mathcal{A}$ eine Banach- $*$ -Algebra ist und zusätzlich

- $\forall x \in \mathcal{A}: \|x^* \circ x\| = \|x\|^2$

Lemma: In einer unitalen $*$ -Algebra gilt stets $e = e^*$.

Beweis: Es gilt

$$e = (e^*)^* = (ee^*)^* = ee^* = e^*.$$

■

Bemerkung 11.2 (i) In den vorangegangenen Definitionen wurden die Additions- und Multiplikationsoperationen in den einzelnen Räumen unterschieden. Ab jetzt schreiben wir einheitlich $+$ für Additionen und $\cdot$ für Multiplikationen, wir setzen noch $xy := x \cdot y$.

(ii) In einer Algebra $(\mathcal{A}, +, \circ, \cdot)$ definieren wir die Potenzen eines Elements $x \in \mathcal{A}$ als

$$x^1 := x \quad \text{und} \quad x^n := x \circ x^{n-1}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Ist die Algebra unital, dann setzen wir noch

$$x^0 := e$$

und für ein invertierbares Element $x \in \mathcal{A}$ setzen wir

$$x^{-n} = (x^{-1})^n.$$

(iii) Für eine normierte Algebra folgt aus $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, dass die Multiplikation in beiden Faktoren gleichzeitig stetig ist.

(iv) Wenn $\mathcal{A}$ eine unitale Algebra ist, dann nehmen wir stets $\|e\| = 1$ an. Das kann durch eine geeignete Normierung erfolgen.

(v) Wenn $\mathcal{A}$ nicht unital ist, dann gibt es eine kanonische Konstruktion „Adjunktion der Eins“ mit der $\mathcal{A}$ in eine (minimale) größere unitale Algebra $\mathcal{B}$ eingebettet wird. Idee: Betrachte $\mathcal{B} := \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$ mit Einselement $e = (0, 1)$ und definiere die Rechenoperationen geeignet.

Beispiel 11.3 (i) Die Menge der Polynome $\mathcal{P}[a, b]$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ist eine normierte Algebra und nicht vollständig.

(ii) Für einen kompakten topologischen Raum K ist $\mathcal{C}(K)$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ und der Konjugation $f \mapsto f^* := \bar{f}$ als Involution eine C^* -Algebra. Die Konvergenz ist die gleichmäßige Konvergenz. $\mathcal{C}(K)$ ist der Prototyp einer kommutativen unitalen C^* -Algebra – nach dem Theorem 11.35 von GELFAND-NEUMARK gibt es bis auf isometrische Isomorphie keine anderen C^* -Algebren.

(iii) Sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein σ -endlicher Maßraum, dann ist $L_\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$ mit der wesentlichen Supremumsnorm $\|\cdot\|_{\infty, \text{ess}}$ eine kommutative C^* -Algebra.

(iv) $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist C^* -Algebra.

(v) $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ ist eine nicht unitale C^* -Algebra.

- (vi) $\ell_1(\mathbb{Z})$ ist mit der Summennorm $\|\cdot\|_1$ und der Faltung $(x \star y)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \cdot y_{n-k}$ eine kommutative unitale Banachalgebra mit dem Einselement $e = \delta_0^{\mathbb{Z}} = (\dots, 0, 1, 0, \dots)$. □

Lemma 11.4 Sei $\mathcal{A}$ eine unitale Banachalgebra und $x \in \mathcal{A}$ mit $\|x\| < 1$. Dann gelten:

- (i) $e - x$ ist invertierbar und es gilt $(e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.
- (ii) $\|(e - x)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|x\|}$.
- (iii) $\|(e - x)^{-1} - e - x\| \leq \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}$.

Beweis: (i) Die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n$ ist konvergent, denn die Partialsummenfolge $(\sum_{k=0}^n x^k)_{n \in \mathbb{N}}$ ist wegen

$$\left\| \sum_{k=0}^m x^k - \sum_{k=0}^n x^k \right\| = \left\| \sum_{k=m}^n x^k \right\| \leq \sum_{k=m}^n \|x^k\| \leq \sum_{k=m}^n \|x\|^k \rightarrow 0$$

eine Cauchyfolge. Insbesondere ist also $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Für die Summe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ gilt

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) (e - x) &= \left(\lim_n \sum_{k=0}^n x^k \right) (e - x) \\ &= \lim_n \sum_{k=0}^n x^k (e - x) \\ &= \lim_n (e - x^{n+1}) \\ &= e - \lim_n x^{n+1} \\ &= e \end{aligned}$$

und analog $(e - x) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = e$, d.h. es ist $(e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

- (ii) Es gilt

$$\|(e - x)^{-1}\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x\|^n = \frac{1}{1 - \|x\|}.$$

- (iii) analog. ■

Folgerung 11.5 Sei $\mathcal{A}$ eine unitale Banachalgebra und $x \in \mathcal{A}$ mit $\|e - x\| < 1$. Dann ist x invertierbar mit

$$x^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (e - x)^n$$

und es gilt $\|x^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|e - x\|}$.

Satz 11.6 Sei $\mathcal{A}$ eine unitale Banachalgebra. Für die Gruppe G der invertierbaren Elemente gelten:

- (i) G offen.
- (ii) $x \mapsto x^{-1}$ Homöomorphismus auf G .

Beweis: (i) Sei $x \in G$ und wähle $y \in \mathcal{A}$ mit $\|x - y\| < \frac{1}{\|x^{-1}\|}$, dann gilt

$$1 > \|x^{-1}\| \cdot \|x - y\| \geq \|e - x^{-1}y\|$$

und damit ist $x^{-1}y$ invertierbar. Also ist auch $y = xx^{-1}y$ invertierbar, d.h. $y \in G$. Es gilt demnach für alle $x \in G$ stets

$$U_{\frac{1}{\|x^{-1}\|}}(x) \subseteq G.$$

- (ii) Wegen $(x^{-1})^{-1} = x$ ist x invertierbar genau dann, wenn x^{-1} invertierbar ist. Außerdem sind inverse Elemente stets eindeutig, also ist die Abbildung $x \mapsto x^{-1}$ bijektiv auf G . Zum Beweis der Stetigkeit sei $x \in G$ und ferner $y \in G$ mit $\|x - y\| \leq \frac{1}{2\|x^{-1}\|}$, dann gilt

$$\|e - x^{-1}y\| \leq \|x^{-1}\| \cdot \|x - y\| \leq \frac{1}{2}$$

und weiter

$$\|y^{-1}\| \leq \|y^{-1}x\| \cdot \|x^{-1}\| = \|(x^{-1}y)^{-1}\| \cdot \|x^{-1}\| \leq \frac{\|x^{-1}\|}{1 - \|e - x^{-1}y\|} \leq 2\|x^{-1}\|.$$

Mit $x^{-1} - y^{-1} = x^{-1}(y - x)y^{-1}$ folgt

$$\|x^{-1} - y^{-1}\| \leq \|x^{-1}\| \cdot \|x - y\| \cdot \|y^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|^2 \cdot \|x - y\|$$

■ und damit ist die Abbildung $x \mapsto x^{-1}$ stetig.

Definition 11.7 (Ideal)

Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra. Eine Teilmenge $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$ heißt (zweiseitiges) *Ideal* in $\mathcal{A}$, wenn $\mathcal{I}$ eine Unteralgebra von $\mathcal{A}$ ist und

$$\mathcal{A}\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I} \quad \mathcal{I}\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$$

gelten. Falls $\mathcal{I} \neq \mathcal{A}$ gilt, so heißt $\mathcal{I}$ *echtes Ideal*. Ein Ideal heißt *maximales Ideal*, wenn es in keinem echt größeren Ideal enthalten ist. Die Menge aller maximalen Ideale bezeichnen wir mit $\mathcal{M}$ bzw. $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Lemma 11.8 Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Algebren und $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Homomorphismus. Dann gelten:

- (i) Wenn $\mathcal{I}$ ein Ideal in $\mathcal{B}$ ist, dann ist das Urbild $f^{-1}(\mathcal{I})$ ein Ideal in $\mathcal{A}$.
- (ii) Ein Ideal $\mathcal{I}$ ist ein echtes Ideal genau dann, wenn $e \notin \mathcal{I}$ gilt.
- (iii) Wenn $\mathcal{I}$ ein echtes Ideal in $\mathcal{B}$ ist, dann ist $f^{-1}(\mathcal{I})$ ein echtes Ideal in $\mathcal{A}$.
- (iv) $\ker f$ ist ein Ideal in $\mathcal{A}$.

Beweis: (i) Seien $a_1, a_2 \in f^{-1}(\mathcal{I})$ und $\mu \in \mathbb{K}$, d.h. $\exists b_1, b_2 \in \mathcal{I}$ mit $f(a_1) = b_1$ und $f(a_2) = b_2$. Es folgt $f(a_1 + \mu a_2) = f(a_1) + \mu f(a_2) = b_1 + \mu b_2 \in \mathcal{I}$ und damit $a_1 + \mu a_2 \in f^{-1}(\mathcal{I})$.

Sei nun $a_1 \in \mathcal{A}$ und $a_2 \in f^{-1}(\mathcal{I})$, dann gibt es ein $b_1 \in \mathcal{B}$ mit $f(a_1) = b_1$ und ein $b_2 \in \mathcal{I}$ mit $f(a_2) = b_2$. Weiter gilt $f(a_1 a_2) = f(a_1) f(a_2) = b_1 b_2 \in \mathcal{I}$, also $a_1 a_2 \in f^{-1}(\mathcal{I})$.

- (ii) Sei $\mathcal{I} \neq \mathcal{A}$ ein echtes Ideal. Angenommen es wäre $e \in \mathcal{I}$, dann wäre $\mathcal{A} = e\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$. Widerspruch!
Umgekehrt sei $e \notin \mathcal{I}$ für ein Ideal $\mathcal{I}$. Es folgt sofort $\mathcal{I} \neq \mathcal{A}$.
- (iii) Wir nehmen an, dass $f^{-1}(\mathcal{I})$ kein echtes Ideal ist, also gilt $f^{-1}(\mathcal{I}) = \mathcal{A}$, d.h. $f(\mathcal{A}) = \mathcal{I}$. Nun ist $e \in \mathcal{A}$ und wegen $f(e) = e$ folgt $e \in \mathcal{I}$. Widerspruch!
- (iv) Es gilt $\ker f = f^{-1}(\{0\})$ und $\{0\}$ ist ein Ideal in $\mathcal{B}$, also ist $\ker f$ nach (i) ein Ideal in $\mathcal{A}$. ■

Satz 11.9 Sei $\mathcal{A}$ eine unitale Banachalgebra und $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$ ein echtes Ideal. Dann gelten:

- (i) $\overline{\mathcal{I}}$ ist ein echtes Ideal.
- (ii) Wenn $\mathcal{I}$ abgeschlossen, dann ist $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ eine unitale Banachalgebra.
- (iii) Wenn $\mathcal{I}$ maximales Ideal, dann ist $\mathcal{I}$ abgeschlossen.
- (iv) $\mathcal{I}$ ist in einem maximalem Ideal enthalten.
- (v) $x \in \mathcal{A}$ ist links-/rechts-invertierbar genau dann, wenn x in keinem echten Links-/Rechts-Ideal enthalten ist.

Beweis: (i) $\overline{\mathcal{I}}$ ist wegen der Stetigkeit der algebraischen Operationen ein Ideal. Angenommen es wäre $\overline{\mathcal{I}} = \mathcal{A}$ kein echtes Ideal, dann wäre $e \in \overline{\mathcal{I}}$ und es gäbe ein $x \in \mathcal{I}$ mit $\|e - x\| < 1$. Folglich ist x invertierbar nach Folgerung 11.5 und damit wäre $x^{-1}x = e \in \mathcal{I}$. Widerspruch!

(ii) Die Faktoralgebra

$$\mathcal{A}/\mathcal{I} := \{[x] \mid x \in \mathcal{A}\}$$

ist definiert durch die Äquivalenzrelation

$$x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathcal{I}$$

mit den Äquivalenzklassen

$$[x] := \{y \in \mathcal{A} \mid x \sim y\} = \{x + y \mid y \in \mathcal{I}\} = x + \mathcal{I}.$$

Die kanonische Quotientenabbildung ist definiert als

$$\begin{aligned} \text{nat: } \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I} \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

und nat ist stetig. Die algebraischen Operationen werden in natürlicher Weise fortgesetzt:

$$[x] + [y] := [x + y] \quad [x][y] := [xy] \quad \mu[x] := [\mu x]$$

Das Nullelement ist $[0] = \mathcal{I}$ und das Einselement ist $[e]$. Damit ist $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ eine unitale Algebra. Weiter haben wir noch eine Norm

$$\|[x]\|_0 := \bigwedge_{y \in \mathcal{I}} \|x + y\| = \bigwedge_{y \in [x]} \|y\|,$$

bezüglich der $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ zu einer Banachalgebra wird. Sei nämlich $([x_n])_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}/\mathcal{I}$ eine Folge mit

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|[x_n]\|_0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{y_n \in \mathcal{I}} \|x_n + y_n\| < \infty,$$

dann gibt es also eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I}$ mit $\|x_n + y_n\| \leq \|[x_n]\|_0 + \frac{1}{2^n}$ und es gilt $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n + y_n\| < \infty$. Mit Satz 2.3 folgt $x_n + y_n \rightarrow z = x_0 + y_0$ mit $y_0 \in \mathcal{I}$ und demnach ist

$$[x_n] = [x_n + y_n] \rightarrow [x_0 + y_0] = [x_0],$$

also ist auch $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ vollständig.

(iii) Sei $\mathcal{I}$ ein maximales Ideal, es gilt $\mathcal{I} \subseteq \bar{\mathcal{I}}$ und $\bar{\mathcal{I}}$ ist nach (i) ein echtes Ideal, also folgt $\mathcal{I} = \bar{\mathcal{I}}$.

(iv) Betrachte die durch Teilmengeninklusion $\subseteq$ geordnete Menge

$$\mathcal{X} := \{\mathcal{J} \supseteq \mathcal{I} \mid \mathcal{J} \text{ echtes Ideal}\}.$$

Sei $\mathcal{K}$ eine Kette in $\mathcal{X}$, dann ist $\bigcup \mathcal{K}$ ein echtes Ideal und damit eine obere Schranke für $\mathcal{K}$. Also hat $\mathcal{X}$ nach dem Lemma A.1 von ZORN ein maximales Element und dieses ist natürlich ein maximales Ideal, welches $\mathcal{I}$ enthält.

- (v) Sei x linksinvertierbar, d.h. $\exists x^{-1}$ mit $x^{-1}x = e$. Angenommen, $\mathcal{I}$ wäre ein echtes Linksideal mit $x \in \mathcal{I}$, dann folgt sofort $x^{-1}x = e \in \mathcal{I}$. Widerspruch! Sei umgekehrt x in keinem echten Linksideal enthalten. Nehmen wir an, x wäre nicht invertierbar, d.h. $\forall y \in \mathcal{A}: yx \neq e$. Dann ist $\mathcal{I} := \langle x \rangle = \mathcal{A}x$ ein echtes Linksideal, welches x enthält. Widerspruch!
- Für Rechtsinvertierbarkeit und Rechtsideal erfolgt der Beweis analog. ■

Bemerkung: In nicht-kommutativen Banachalgebren gilt keinesfalls, dass x genau dann invertierbar ist, wenn x in keinem echten Ideal enthalten ist. Betrachte zum Beispiel die Banachalgebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ und einen unendlich-dimensionalen Orthoprojektor $P \neq E$. Dann ist P nicht invertierbar und auch in keinem echten Ideal enthalten.

11.2 Das Spektrum

Definition 11.10 (Spektrum)

Sei $\mathcal{A}$ eine unitale Banachalgebra und $x \in \mathcal{A}$.

- (i) Die Menge

$$\rho(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (x - \lambda e)^{-1} \in \mathcal{A}\}$$

heißt *Resolventenmenge* von x und $R_\lambda(x) := (x - \lambda e)^{-1}$ heißt *Resolvente* von x in λ .

- (ii) Das Komplement der Resolventenmenge

$$\sigma(x) := \mathbb{C} \setminus \rho(x)$$

heißt *Spektrum* von x .

- (iii)

$$r(x) := \bigvee_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda|$$

heißt *Spektralradius* von x .

Theorem 11.11 Sei $\mathcal{A}$ eine unitale Banachalgebra. Dann gelten für alle $x \in \mathcal{A}$:

- (i) $\rho(x)$ offen.
- (ii) $\sigma(x) \neq \emptyset$ kompakt.
- (iii) $r(x) \leq \|x\|$.

Beweis: (i) $\rho(x)$ offen: Sei $\lambda \in \rho(x)$. Für $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu - \lambda| < \|(x - \lambda e)^{-1}\|^{-1}$ gilt

$$\begin{aligned} (x - \mu e)^{-1} &= (x - \lambda e - (\mu - \lambda)e)^{-1} \\ &= (x - \lambda e)^{-1} (e - (\mu - \lambda)(x - \lambda e)^{-1})^{-1} \\ &= (x - \lambda e)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{((\mu - \lambda)(x - \lambda e)^{-1})^n}_{\|\cdot\| < 1} \end{aligned}$$

und die Reihe ist konvergent nach Satz 2.3, also ist $x - \mu e$ invertierbar, d.h. $\mu \in \rho(x)$. Folglich gilt für alle $\lambda \in \rho(x)$

$$U_{\|(x - \lambda e)^{-1}\|^{-1}}(\lambda) \subseteq \rho(x),$$

also ist $\rho(x)$ offen.

- (ii) $\sigma(x)$ kompakt: Wegen (i) ist $\sigma(x)$ abgeschlossen und nach (iv) gilt $|\lambda| \leq \|x\|$ für alle $\lambda \in \sigma(x)$, d.h. $\sigma(x)$ ist beschränkt. Nach dem Satz von HEINE-BOREL ist $\sigma(x)$ kompakt.
- (iii) Sei $x \in \mathcal{A}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > \|x\|$, d.h. $\lambda \in \rho(x)$ nach (iv). Es gilt

$$\begin{aligned} (x - \lambda e)^{-1} &= -\frac{1}{\lambda} \left(e - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} \\ &= -\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^n}{\lambda^{n+1}} \end{aligned}$$

und damit ist die Resolventenabbildung

$$R(x): \begin{array}{l} \rho(x) \rightarrow \mathcal{A} \\ \lambda \mapsto R_\lambda(x) := (x - \lambda e)^{-1} \end{array}$$

in jedem Punkt der Resolventenmenge in eine Potenzreihe entwickelbar, d.h. sie ist analytisch in $\rho(x)$. Angenommen es wäre $\rho(x) = \mathbb{C}$, dann wäre also $R(x)$ auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch. Mit dem Satz von LIOUVILLE folgt, dass

$R(x)$ konstant ist. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\|(x - \lambda e)^{-1}\| &= \left\| \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n \right\| \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{x}{\lambda} \right\|^n \\ &= \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \frac{\|x\|}{|\lambda|}} \\ &= \frac{1}{|\lambda| - \|x\|} \\ &\xrightarrow{|\lambda| \rightarrow \infty} 0\end{aligned}$$

und das bedeutet $R_\lambda(x) = 0$ für alle $\lambda \in \rho(x)$. Widerspruch!

- (iv) Sei $|\lambda| > \|x\|$, dann folgt $\left\| \frac{x}{\lambda} \right\| < 1$. Also ist $e - \frac{x}{\lambda}$ invertierbar und damit auch $-\lambda(e - \frac{x}{\lambda}) = x - \lambda e$, d.h. $\lambda \in \rho(x)$. Mit der Kontraposition erhalten wir $|\lambda| \leq \|x\|$ für alle $\lambda \in \sigma(x)$ und es folgt $r(x) \leq \|x\|$. ■

Theorem 11.12 (GELFAND-MAZUR) Sei $\mathcal{A}$ eine Divisionsalgebra, d.h. alle $x \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ sind invertierbar. Dann gilt

$$\mathcal{A} \cong \mathbb{C}$$

vermöge eines isometrischen Algebrenisomorphismus.

Beweis: Seien alle $x \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ invertierbar, dann ist

$$\rho(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (x - \lambda e)^{-1} \in \mathcal{A}\} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid x \neq \lambda e\}$$

für alle $x \in \mathcal{A}$ und folglich ist

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid x = \lambda e\}.$$

Das Spektrum ist stets einelementig, denn seien $\lambda, \mu \in \sigma(x)$, so folgt $\lambda e = x = \mu e$. Umstellen ergibt $(\lambda - \mu)e = 0$, d.h. $\lambda = \mu$. Wir schreiben also

$$\sigma(x) = \{\lambda(x)\}$$

und definieren eine Abbildung

$$\begin{aligned}\Phi: \mathcal{A} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \lambda(x).\end{aligned}$$

Dann hat Φ folgende Eigenschaften:

- (i) Φ ist ein Homomorphismus.
- (ii) Φ ist bijektiv.
- (iii) Φ ist isometrisch.

Diese drei Eigenschaften wollen wir nun beweisen:

- (i) Φ Homomorphismus: Seien $x, y \in \mathcal{A}$ und $\mu \in \mathbb{C}$. Es gelten $x = \lambda(x)e$ und $y = \lambda(y)e$. Wegen $x + y = \lambda(x + y)e$ folgt

$$\lambda(x + y) = \lambda(x) + \lambda(y).$$

Analog ist $xy = \lambda(xy)e$ und damit

$$\lambda(xy) = \lambda(x)\lambda(y).$$

Schließlich gilt mit $\mu x = \lambda(\mu x)e$ auch

$$\lambda(\mu x) = \mu\lambda(x).$$

Nach Definition von Φ haben wir stets $\Phi(x) = \lambda(x)$, also ist Φ ein Homomorphismus.

- (ii) Φ bijektiv: Seien $x, y \in \mathcal{A}$ mit $\Phi(x) = \Phi(y)$. Es folgt sofort

$$x = \lambda(x)e = \lambda(y)e = y.$$

Für $\lambda \in \mathbb{C}$ setze $x := \lambda e$, dann ist $\lambda = \lambda(x) = \Phi(x)$.

- (iii) Φ isometrisch: Für $x \in \mathcal{A}$ gilt

$$|\Phi(x)| = |\lambda(x)| = |\lambda(x)||e| = \|\lambda(x)e\| = \|x\|.$$

Satz 11.13 Sei $\mathcal{A}$ eine unitale Banachalgebra. Dann gilt für alle $x \in \mathcal{A}$

$$r(x) = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Beweis: Sei $\lambda \in \sigma(x)$, dann gilt nach dem Spektralabbildungssatz 11.16 auch $\lambda^n \in \sigma(x^n)$. Damit haben wir stets $|\lambda|^n \leq \|x^n\|$ bzw. $|\lambda| \leq \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ und es folgt

$$|\lambda| \leq \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{k > n} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$$

sowie

$$r(x) \leq \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{k > n} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Betrachte nun die Mengen

$$\mathcal{U} := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < \frac{1}{r(x)}\}$$

$$V := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < \frac{1}{\|x\|}\}$$

mit $V \subseteq U$ wegen $r(x) \leq \|x\|$. Die folgende Funktion ist analytisch auf U :

$$U \rightarrow \mathcal{A} \\ S: \lambda \mapsto (x - \frac{1}{\lambda}e)^{-1} = -\lambda(e - \lambda x)^{-1} = -\lambda \sum_{n \in \mathbb{N}} y_n \lambda^n$$

mit Koeffizienten $y_n \in \mathcal{A}$. Für $\lambda \in V$ gilt $\|\lambda x\| < 1$ und damit nach Lemma 11.4 stets $S(\lambda) = -\lambda \sum_{n \in \mathbb{N}} x^n \lambda^n$. Sei nun $f \in \mathcal{A}'$, dann gilt $f(S(\lambda)) = -\lambda \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^n f(y_n)$ für $\lambda \in U$ sowie $f(S(\lambda)) = -\lambda \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^n f(x^n)$ für $\lambda \in V$. Wegen der Eindeutigkeit einer Potenzreihenentwicklung folgt $f(y_n) = f(x^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich ist $(\lambda^n f(x^n))_{n \in \mathbb{N}}$ für alle $\lambda \in U$ und alle Funktionale $f \in \mathcal{A}'$ eine Nullfolge. Demnach muss nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit die Folge $(\lambda^n x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch $\|\cdot\|$ -beschränkt sein, d.h. $\|\lambda^n x^n\| = |\lambda|^n \|x^n\| \leq \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$. Es folgt $|\lambda| \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \varepsilon^{\frac{1}{n}}$ und damit

$$|\lambda| \lim_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{k > n} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq 1$$

für alle $\lambda \in U$. Mit $|\lambda| < \frac{1}{r(x)}$ folgt

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{k > n} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(x)$$

und damit die Behauptung. ■

Satz 11.14 Sei $\mathcal{A}$ eine unitale Banachalgebra und $x, y \in \mathcal{A}$. Es gilt: $xy - e$ ist invertierbar genau dann, wenn $yx - e$ invertierbar ist.

Beweis: Sei $xy - e$ invertierbar. Dann gilt

$$(xy - e)^{-1} = -(e - xy)^{-1} = - \sum_{n \in \mathbb{N}} (xy)^n$$

für $\|xy\| < 1$. Weiter ist damit

$$\begin{aligned} (y(xy - e)^{-1}x - e)(yx - e) &= (y(- \sum_{n \in \mathbb{N}} (xy)^n)x - e)(yx - e) \\ &= (- \sum_{n \in \mathbb{N}} (yx)^n)(yx - e) \\ &= - \sum_{n \in \mathbb{N}} ((yx)^{n+1} - (yx)^n) \\ &= e \end{aligned}$$

und analog gilt auch $(yx - e)(y(xy - e)^{-1}x - e) = e$, d.h. $yx - e$ ist invertierbar mit $(yx - e)^{-1} = y(xy - e)^{-1}x - e$. ■

Folgerung 11.15 Sei $\mathcal{A}$ eine unitale Banachalgebra und $x, y \in \mathcal{A}$. Dann gelten:

$$(i) \quad \sigma(xy) = \sigma(yx)$$

$$(ii) \quad r(xy) = r(yx)$$

Beweis: (i) Wir haben die Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma(xy) \setminus \{0\} &\iff xy - \lambda e \text{ nicht invertierbar} \\ &\iff \frac{xy}{\lambda} - e \text{ nicht invertierbar} \\ &\iff \frac{yx}{\lambda} - e \text{ nicht invertierbar} \\ &\iff yx - \lambda e \text{ nicht invertierbar} \\ &\iff \lambda \in \sigma(yx) \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Es gilt auch $0 \in \sigma(xy) \iff 0 \in \sigma(yx)$, denn xy ist invertierbar genau dann, wenn yx invertierbar ist.

(ii) Mit (i) folgt sofort

$$r(xy) = \bigvee_{\lambda \in \sigma(xy)} |\lambda| = \bigvee_{\lambda \in \sigma(yx)} |\lambda| = r(yx).$$

■

Satz 11.16 (Spektralabbildungssatz) Sei $\mathcal{A}$ eine unitale Banachalgebra und $x \in \mathcal{A}$. Dann gelten:

(i) Wenn p ein beliebiges Polynom in einer Variablen ist, dann gilt $\sigma(p(x)) = p(\sigma(x))$.

(ii) Wenn x invertierbar ist, dann gilt $\sigma(x^{-1}) = \sigma(x)^{-1}$.

(iii) Wenn $\mathcal{A}$ kommutativ ist, dann gelten

$$\sigma(x + y) \subseteq \sigma(x) + \sigma(y) \quad \sigma(xy) \subseteq \sigma(x)\sigma(y)$$

$$r(x + y) \leq r(x) + r(y) \quad r(xy) \leq r(x)r(y)$$

Beweis: (i) Sei $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ ein Polynom. Sei zunächst $\lambda \in \sigma(x)$, dann ist also $x - \lambda e$ nicht invertierbar, d.h. o.E.d.A. nicht linksinvertierbar. Nach Satz 11.9 ist $x - \lambda e$ einem echten Linksideal $\mathcal{I} := \mathcal{A}(x - \lambda e)$ enthalten. Weiter ist

$$p(x) - p(\lambda)e = \sum_{k=0}^n a_k (x^k - \lambda^k e)$$

und wegen

$$x^k - \lambda^k e = \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{x^i \lambda^{k-i-1}}_{\in \mathcal{A}} \right)}_{\in \mathcal{A}} (x - \lambda e) \in \mathcal{I}$$

folgt $p(x) - p(\lambda)e \in \mathcal{I}$. Damit ist $p(x) - p(\lambda)e$ nicht invertierbar, also ist $p(\lambda) \in \sigma(p(x))$, d.h.

$$p(\sigma(x)) \subseteq \sigma(p(x)).$$

Sei nun $\lambda \in \sigma(p(x))$, dann ist $p(x) - \lambda e$ nicht invertierbar. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ die Nullstellen von $t \mapsto p(t) - \lambda$, dann gilt

$$p(x) - \lambda e = \prod_{k=1}^m a_n(x - \lambda_k e)$$

und folglich ist ein $x - \lambda_k e$ nicht invertierbar, d.h. wir haben $\lambda_k \in \sigma(x)$. Nun gilt $p(\lambda_k) = \lambda$ und weiter

$$\lambda \in p(\sigma(x)).$$

Insgesamt ist schließlich

$$\sigma(p(x)) = p(\sigma(x)).$$

(ii) Sei x invertierbar. Wir haben die Gleichheit

$$(x - \lambda e)(-x\lambda)^{-1} = x^{-1} - \lambda^{-1}e.$$

Weiter gelten

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma(x) &\iff x - \lambda e \text{ nicht invertierbar} \\ &\iff x^{-1} - \lambda^{-1}e \text{ nicht invertierbar} \\ &\iff \lambda^{-1} \in \sigma(x^{-1}) \end{aligned}$$

und das heißt $\sigma(x^{-1}) = \sigma(x)^{-1}$.

(iii) Sei $\mathcal{A}$ kommutativ. Für $\lambda \in \sigma(x + y)$ ist $x + y - \lambda e$ nicht invertierbar und damit nach Satz 11.9 in einem echten Ideal enthalten, also in einem maximalen Ideal $\mathcal{I}$ enthalten. Nach dem Satz 11.21 gibt es einen Charakter $\omega \in \Omega$ mit $\mathcal{I} = \ker \omega$ und folglich gilt

$$0 = \omega(x + y - \lambda e) = \omega(x) + \omega(y) - \lambda,$$

d.h. $\omega(x) + \omega(y) = \lambda$. Betrachte die Elemente $x - \omega(x)e \in \ker \omega$ und $y - \omega(y)e \in \ker \omega$, für diese gelten $\omega(x) \in \sigma(x)$ und ebenso $\omega(y) \in \sigma(y)$. Es folgt

$$\lambda \in \sigma(x) + \sigma(y).$$

Die Formel für den Spektralradius $r(x)$ ist nun offensichtlich. Analog für die Multiplikation. ■

11.3 Multiplikative lineare Funktionale und kommutative Banachalgebren

Definition 11.17 (multiplikativ, Charakter)

Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra. Ein nichttrivialer Homomorphismus $\omega: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *multiplikativ* bzw. *Charakter*. Ein lineares Funktional $\omega \neq 0$ ist also genau dann multiplikativ, wenn $\omega(xy) = \omega(x)\omega(y)$ für alle $x, y \in \mathcal{A}$ gilt. Die Menge aller Charaktere bezeichnen wir mit Ω bzw. $\Omega(\mathcal{A})$.

Lemma 11.18 Sei $\mathcal{A}$ eine unitale Banachalgebra. Dann gilt für einen Charakter $\omega \in \Omega$ stets

$$\|\omega\| = \omega(e) = 1,$$

d.h. es ist

$$\Omega \subseteq \mathcal{A}_1^*$$

und dabei bezeichnet $\mathcal{A}_1^*$ die Einheitskugel in $\mathcal{A}^*$.

Beweis: Es gilt $\omega(e) = \omega(ee) = \omega(e)\omega(e)$, also folgt $\omega(e) \in \{0, 1\}$. Angenommen, es wäre $\omega(e) = 0$, dann wäre $\omega(x) = \omega(ex) = \omega(e)\omega(x) = 0$ für alle $x \in \mathcal{A}$, d.h. $\omega = 0$. Widerspruch! Unter Beachtung von $\|e\| = 1$ folgt

$$\|\omega\| = \bigvee_{\substack{x \in \mathcal{A} \\ \|x\| \leq 1}} |\omega(x)| \geq \omega(e) = 1.$$

Nun nehmen wir an, dass $\|\omega\| > 1$, also gibt es ein $x \in \mathcal{A}$ mit $\|x\| \leq 1$ und $|\omega(x)| > 1$. Setze $x_0 := x - \omega(x)e$, dann gilt $x_0 \in \ker \omega$. Wegen

$$\left\| e + \frac{x_0}{\omega(x)} \right\| = \left\| \frac{x}{\omega(x)} \right\| = \frac{\|x\|}{|\omega(x)|} \leq \frac{1}{|\omega(x)|} < 1$$

ist $- \frac{x_0}{\omega(x)}$ invertierbar nach Lemma 11.4 und damit auch x_0 . Dann wäre aber

$$1 = \omega(e) = \omega(x_0 x_0^{-1}) = \omega(x_0)\omega(x_0^{-1}) = 0$$

■

ein Widerspruch.

Satz 11.19 Sei $\mathcal{A}$ eine unitale Banachalgebra. Dann ist Ω w^* -kompakt.

Beweis: Nach dem Theorem 7.20 von BANACH-ALAOGLU ist die Einheitskugel $\mathcal{A}_1^*$ schwach- w^* -kompakt. Die Menge der Charaktere Ω ist w^* -abgeschlossen: Sei ω ein w^* -Häufungspunkt von Ω , dann gibt es ein Netz $(\omega_i)_{i \in I} \subseteq \Omega$, das w^* -konvergent gegen ω ist, d.h. es gilt $\omega_i(x) \rightarrow \omega(x)$ für jedes $i \in I$. Sofort folgt $\omega(e) = 1$ wegen $1 = \omega_i(e) \rightarrow \omega(e)$. Seien $x, y \in \mathcal{A}$. Wir haben

$$\omega_i(x) \rightarrow \omega(x) \quad \omega_i(y) \rightarrow \omega(y)$$

$$\omega_i(x+y) \rightarrow \omega(x+y) \quad \omega_i(xy) \rightarrow \omega(xy) \quad \omega_i(\mu x) \rightarrow \omega(\mu x)$$

Mit der Stetigkeit der algebraischen Operationen und mit der Eindeutigkeit von Limites (w^* -Topologie ist hausdorffsch) folgen

$$\omega(x+y) = \omega(x) + \omega(y) \quad \omega(xy) = \omega(x)\omega(y) \quad \omega(\mu x) = \mu\omega(x)$$

Das heißt $\omega \in \Omega$. Schließlich ist Ω eine w^* -abgeschlossene Teilmenge der w^* -kompakten Einheitskugel $\mathcal{A}_1^*$, also selbst w^* -kompakt. ■

Satz 11.20 Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative unitale Banachalgebra. Für ein maximales Ideal $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$ gilt

$$\mathcal{A}/\mathcal{I} \cong \mathbb{C}.$$

Beweis: Wir zeigen, dass $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ eine Divisionsalgebra ist. Dann folgt mit dem Theorem 11.12 von GELFAND-MAZUR die Behauptung. Sei $[x] \in \mathcal{A}/\mathcal{I} \setminus \{[0]\}$, d.h. $[x] \neq [0] = \mathcal{I}$ und damit $x \notin \mathcal{I}$. Angenommen $[x]$ wäre nicht invertierbar in $\mathcal{A}/\mathcal{I}$, dann ist nach Satz 11.9 $[x]$ in einem echten Ideal $\mathcal{J}$ enthalten. Dann ist das homomorphe Urbild $\text{nat}^{-1}(\mathcal{J})$ auch ein echtes Ideal und mit $\{[0]\} \subsetneq \{[0], [x]\} \subseteq \mathcal{J}$ gilt

$$\mathcal{I} = \text{nat}^{-1}([0]) \subsetneq \text{nat}^{-1}(\mathcal{J}).$$

Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass $\mathcal{I}$ ein maximales Ideal ist. ■

Lemma: Sei $\mathcal{A}$ ein linearer Raum und $f \in \mathcal{A}^* \setminus \{0\}$ ein lineares Funktional. Dann ist $\ker f$ 1-kodimensional.

Beweis: Sei $x \in \mathcal{A}$. Wegen $f \neq 0$ gibt es ein $y \in \mathcal{A}$ mit $f(y) = 1$. Dann gilt stets

$$x = \underbrace{(x - f(x)y)}_{\in \ker f} + \underbrace{f(x)y}_{\in \mathbb{K}}$$

und damit folgt $\mathcal{A} = \ker f + \text{lin}\{y\}$. Also ist $\mathcal{A}/\ker f$ 1-dimensional, d.h. $\ker f$ ist 1-kodimensional. ■

Folgerung: Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative unitale Banachalgebra und ω ein Charakter. Dann ist $\ker \omega$ ein maximales Ideal in $\mathcal{A}$.

Beweis: Nach Lemma 11.8 ist $\ker \omega$ ein Ideal und wegen obigen Lemma ist $\ker \omega$ 1-kodimensional. Mit $\omega \neq 0$ gilt $\ker \omega \neq \mathcal{A}$, d.h. $\ker \omega$ kann nicht 0-kodimensional sein. Folglich ist $\ker \omega$ maximal. ■

Satz 11.21 Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative unitale Banachalgebra. Dann ist die folgende Abbildung bijektiv:

$$\begin{aligned} \Omega &\rightarrow \mathcal{M} \\ \omega &\mapsto \ker \omega \end{aligned}$$

Beweis: (i) *injektiv:* Seien $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ mit $\ker \omega_1 = \ker \omega_2 =: \mathcal{I}$. Für $x \in \mathcal{A}$ gilt

$$(\omega_1(x) - \omega_2(x))e = \underbrace{(x - \omega_2(x)e)}_{\in \mathcal{I}} - \underbrace{(x - \omega_1(x)e)}_{\in \mathcal{I}} \in \mathcal{I}$$

und wegen $e \notin \mathcal{I}$ muss stets $\omega_1(x) - \omega_2(x) = 0$ gelten. Also folgt $\omega_1 = \omega_2$.

(ii) *surjektiv:* Sei $\mathcal{I} \in \mathcal{M}$ ein maximales Ideal. Dann gilt nach Satz 11.20 $\mathcal{A}/\mathcal{I} \cong \mathbb{C}$ vermöge eines Isomorphismus $\Phi: \mathcal{A}/\mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}$. Setze $\omega := \Phi \circ \text{nat}$, dann ist ω ein Charakter, denn $\Phi \neq 0$ und $\text{nat} \neq 0$ sind Homomorphismen. Es gilt

$$\begin{aligned} \ker \omega &= \ker(\Phi \circ \text{nat}) \\ &= \{x \in \mathcal{A} \mid \Phi(\text{nat}(x)) = 0\} \\ &= \{x \in \mathcal{A} \mid \Phi([x]) = 0\} \\ &= \{x \in \mathcal{A} \mid [x] = [0]\} \\ &= \{x \in \mathcal{A} \mid x \in \mathcal{I}\} \\ &= \mathcal{I}. \end{aligned}$$

■

Definition 11.22 (GELFAND-Transformation)

Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative unitale Banachalgebra. Dann ist die sogenannte GELFAND-Transformation definiert durch

$$\begin{aligned} &\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}(\Omega) \\ \Gamma: \quad &x \mapsto \Gamma(x) := \hat{x}: \quad \begin{array}{ll} \Omega \mapsto \mathbb{K} \\ \omega \mapsto \Gamma(x)(\omega) := \omega(x) \end{array} \end{aligned}$$

Bemerkung: (i) 0 ist stets ein nicht-invertierbares Element von $\mathcal{A}$ und liegt wegen Satz 11.9 in einem echten Ideal $\mathcal{I}$. Weiter ist $\mathcal{I}$ in einem maximalen Ideal $\mathcal{J} \in \mathcal{M}$ enthalten und damit ist $\mathcal{M}$ bzw. Ω nicht-leer.

(ii) Es gilt tatsächlich $\Gamma(x) \in \mathcal{C}(\Omega)$, denn sei $(\omega_i)_{i \in I} \subseteq \Omega$ ein gegen $\omega \in \Omega$ schwach- $*$ -konvergentes Netz. Es gilt also

$$\Gamma(x)(\omega_i) = \omega_i(x) \rightarrow \omega(x) = \Gamma(x)(\omega),$$

d.h. $\Gamma(x)$ ist netzstetig.

Theorem 11.23 (GELFAND) Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative unitale Banachalgebra. Dann gelten:

- (i) Γ ist ein unitaler Algebrenhomomorphismus.
- (ii) Γ ist stetig, genauer $\forall x \in \mathcal{A}: \|\Gamma(x)\|_\infty \leq \|x\|$.
- (iii) x ist invertierbar in $\mathcal{A}$ genau dann, wenn $\Gamma(x)$ invertierbar in $\mathcal{C}(\Omega)$ ist.
- (iv) $\ker \Gamma = \bigcap \mathcal{M}$ (Radikal von $\mathcal{A}$).
- (v) $\sigma(x) = \text{im} \Gamma(x)$, d.h. $r(x) = \|\Gamma(x)\|_\infty$.
- (vi) $\text{im} \Gamma$ trennt die Punkte von Ω .

Beweis: (i) Γ Homomorphismus: Es gilt $\Gamma(e)(\omega) = \omega(e) = 1$ für alle $\omega \in \Omega$, also ist Γ unital. Seien $x, y \in \mathcal{A}$ und $\mu \in \mathbb{C}$, dann gelten

$$\Gamma(x+y)(\omega) = \omega(x+y) = \omega(x) + \omega(y) = \Gamma(x)(\omega) + \Gamma(y)(\omega)$$

$$\Gamma(xy)(\omega) = \omega(xy) = \omega(x)\omega(y) = \Gamma(x)(\omega)\Gamma(y)(\omega)$$

$$\Gamma(\mu x)(\omega) = \omega(\mu x) = \mu\omega(x) = \mu\Gamma(x)(\omega)$$

für alle $\omega \in \Omega$, d.h. Γ ist ein Homomorphismus.

(ii) Γ stetig: Für $x \in \mathcal{A}$ haben wir

$$\|\Gamma(x)\|_\infty = \bigvee_{\omega \in \Omega} |\Gamma(x)(\omega)| = \bigvee_{\omega \in \Omega} |\omega(x)| \leq \bigvee_{\omega \in \Omega} \underbrace{\|\omega\|}_{=1} \|x\| = \|x\|.$$

(iii) Sei x invertierbar in $\mathcal{A}$. Dann ist

$$1 = \Gamma(e) = \Gamma(xx^{-1}) = \Gamma(x)\Gamma(x^{-1})$$

und es folgt $\Gamma(x)^{-1} = \Gamma(x^{-1})$.

Sei umgekehrt nun $\Gamma(x)$ invertierbar in $\mathcal{C}(\Omega)$, d.h. $\Gamma(x)$ hat keine Nullstelle auf Ω . Für alle $\omega \in \Omega$ gilt damit $x \notin \ker \omega$ und demnach liegt x in keinem maximalen Ideal, also auch in keinem echten Ideal. Folglich ist x nach Satz 11.9 invertierbar in $\mathcal{A}$.

(iv) Es gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} x \in \ker \Gamma &\iff \forall \omega \in \Omega: \omega(x) = 0 \\ &\iff \forall \omega \in \Omega: x \in \ker \omega \\ &\iff x \in \bigcap_{\omega \in \Omega} \ker \omega = \bigcap \mathcal{M}. \end{aligned}$$

(v) Wir haben

$$\begin{aligned}
 \lambda \notin \sigma(x) &\iff x - \lambda e \text{ invertierbar in } \mathcal{A} \\
 &\iff \Gamma(x - \lambda e) \text{ invertierbar in } \mathcal{C}(\Omega) \\
 &\iff \forall \omega \in \Omega: \omega(x - \lambda e) \neq 0 \\
 &\iff \forall \omega \in \Omega: \omega\left(\frac{x}{\lambda}\right) \neq \omega(e) = 1 \\
 &\iff \forall \omega \in \Omega: \Gamma(x)(\omega) = \omega(x) \neq \lambda \\
 &\iff \lambda \notin \text{im}\Gamma(x).
 \end{aligned}$$

Es folgt sogleich

$$r(x) = \bigvee_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda| = \bigvee_{\omega \in \Omega} |\omega(x)| = \|\Gamma(x)\|_\infty.$$

(vi) Seien $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ mit $\omega_1 \neq \omega_2$, also gibt es ein $x \in \mathcal{A}$ mit

$$\Gamma(x)(\omega_1) = \omega_1(x) \neq \omega_2(x) = \Gamma(x)(\omega_2).$$

■ Folglich trennt $\text{im}\Gamma$ die Punkte von Ω .

Folgerung 11.24 Die GELFAND-Transformation Γ ist ein homomorphe Einbettung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{C}(\Omega)$ genau dann, wenn $\mathcal{A}$ *halbeinfach* ist, d.h. wenn für das Radikal $\bigcap \mathcal{M} = \{0\}$ gilt.

Beweis: Sei Γ injektiv, dann folgt sofort $\ker \Gamma = \bigcap \mathcal{M} = \{0\}$. Sei umgekehrt $\ker \Gamma = \bigcap \mathcal{M} = \{0\}$, und seien $\Gamma(x) = \Gamma(y)$, dann gilt $\Gamma(x - y) = 0$ und es folgt $x = y$.

■ **Bemerkung 11.25** In diesem Fall trennt Ω auch die Punkte von $\mathcal{A}$, denn seien $x, y \in \mathcal{A}$ mit $x \neq y$, dann folgt $\Gamma(x) \neq \Gamma(y)$, d.h. es existiert ein $\omega \in \Omega$ mit $\omega(x) \neq \omega(y)$.

Satz 11.26 Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative Banachalgebra und x ein *Generator* von $\mathcal{A}$, d.h. die kleinste kommutative Banachalgebra, die x enthält, ist $\mathcal{A}$. Dann existiert ein Homöomorphismus $\tau: \Omega \rightarrow \sigma(x)$ mit

$$\Gamma(p(x)) = p \circ \tau$$

für alle Polynome p .

Beweis: Nach dem Theorem 11.23 von GELFAND gilt $\sigma(x) = \text{im}\Gamma(x) = \{\omega(x) \mid \omega \in \Omega\}$. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned}
 \tau: \quad &\Omega \rightarrow \sigma(x) \\
 &\omega \mapsto \tau(\omega) := \omega(x).
 \end{aligned}$$

Dann ist τ ersichtlich surjektiv. Seien $\tau(\omega_1) = \tau(\omega_2)$, d.h. $\omega_1(x) = \omega_2(x)$. Es gilt für alle Polynome p

$$\omega_1(p(x)) = \omega_2(p(x)).$$

Also gilt $\omega_1 = \omega_2$ auf einem dichten Unterraum von $\mathcal{A}$ und damit gilt überall $\omega_1 = \omega_2$. Demnach ist τ injektiv. Sei $(\omega_i)_{i \in I} \subseteq \Omega$ ein gegen $\omega \in \Omega$ schwach*-konvergentes Netz, dann gilt insbesondere

$$\tau(\omega_i) = \omega_i(x) \rightarrow \omega(x) = \tau(\omega)$$

und damit ist τ stetig. Nun sind die Menge der Charaktere Ω und das Spektrum $\sigma(x)$ kompakte Mengen, also ist τ als bijektive stetige Abbildung zwischen kompakten Mengen ein Homöomorphismus. Für die GELFAND-Transformation $\Gamma: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}(\Omega)$ gilt

$$\Gamma(p(x))(\omega) = \omega(p(x)) = p(\omega(x)) = p(\tau(\omega))$$

und damit $\Gamma(p(x)) = p \circ \tau$ für alle Polynome p . ■

Folgerung 11.27 Hat $\mathcal{A}$ zwei Generatoren x und y , so sind $\sigma(x)$ und $\sigma(y)$ homöomorph.

11.4 C^* -Algebren und einfachste Eigenschaften

Lemma 11.28 Sei $\mathcal{A}$ eine C^* -Algebra. Dann gelten für alle $x \in \mathcal{A}$:

(i) $\|x\| = \|x^*\|$

(ii) $r(x) = r(x^*)$

Beweis: (i) Es gelten mit der C^* -Eigenschaft der Norm

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| \leq \|x^*\| \|x\| \quad \|x^*\|^2 = \|xx^*\| \leq \|x\| \|x^*\|$$

und damit folgt $\|x\| = \|x^*\|$.

(ii) Mit (i) und dem Satz 11.13 erhalten wir

$$r(x^*) = \lim_{n \in \mathbb{N}} \|(x^*)^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \in \mathbb{N}} \|(x^n)^*\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = r(x).$$
■

Satz 11.29 Sei $\mathcal{A}$ eine C^* -Algebra. Für jedes $x \in \mathcal{A}$ gilt dann

$$\|x\| = \bigvee_{\substack{y \in \mathcal{A} \\ \|y\| \leq 1}} \|xy\| = \bigvee_{\substack{y \in \mathcal{A} \\ \|y\| \leq 1}} \|yx\|.$$

Anders ausgedrückt: Die Linksmultiplikation

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{A}) \\ l: \quad x &\mapsto l_x: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \\ &\quad y \mapsto l_x(y) := xy \end{aligned}$$

und analog die Rechtsmultiplikation r mit $r_x(y) := yx$ sind isometrische Einbettungen von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}(\mathcal{A})$.

Beweis: Es gilt

$$\bigvee_{\substack{y \in \mathcal{A} \\ \|y\| \leq 1}} \|xy\| \leq \bigvee_{\substack{y \in \mathcal{A} \\ \|y\| \leq 1}} \|x\| \|y\| = \|x\|$$

und für $y_0 := \frac{x^*}{\|x\|}$ mit $\|y_0\| = 1$ folgt mit obigen Lemma

$$\bigvee_{\substack{y \in \mathcal{A} \\ \|y\| \leq 1}} \|xy\| \geq \|xy_0\| = \frac{\|xx^*\|}{\|x\|} = \|x\|.$$

■ Analog für die Rechtsmultiplikation.

Definition (selbstadjugiert, normal, unitär, positiv, idempotent)

Sei $\mathcal{A}$ eine $*$ -Algebra. Ein Element $x \in \mathcal{A}$ heißt

- (i) *selbstadjugiert, symmetrisch* oder auch *hermitesch*, wenn $x = x^*$.
- (ii) *unitär*, wenn $x^* = x^{-1}$.
- (iii) *normal*, wenn $xx^* = x^*x$.
- (iv) *positiv*, falls $\exists y \in \mathcal{A}: x = y^*y$. Wir schreiben dafür auch $x \geq 0$.
- (v) *idempotent*, falls $x^2 = x$.

Unitäre und selbstadjugierte Elemente sind stets normal.

Satz 11.30 Sei $\mathcal{A}$ eine unitale C^* -Algebra. Für beliebiges $x \in \mathcal{A}$ gelten:

- (i) x ist invertierbar genau dann, wenn x^* invertierbar ist. Es gilt $(x^{-1})^* = (x^*)^{-1}$.
- (ii) Es gibt eine Zerlegung $x = y + iz$ mit selbstadjugierten $y, z \in \mathcal{A}$, nämlich $y = \frac{x+x^*}{2}$ und $z = \frac{x-x^*}{2i}$.
- (iii) Wenn x unitär ist, so gilt $\|x\| = 1$.
- (iv) Wenn x normal ist, dann gilt $r(x) = \|x\|$.

Beweis: (i) Sei x invertierbar, dann gilt

$$x^*(x^{-1})^* = (x^{-1}x)^* = e^* = e$$

und es folgt $(x^{-1})^* = (x^*)^{-1}$. Wegen $x^{**} = x$ folgt damit auch gleich die Umkehrung.

(ii) Das ist einfaches Nachrechnen.

(iii) Sei x unitär, d.h. $x^* = x^{-1}$. Es folgt

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| = \|x^{-1}x\| = \|e\| = 1,$$

also ist $\|x\| = 1$.

(iv) Sei x zunächst selbstadjugiert, d.h. $x = x^*$. Es gilt $\|x^2\| = \|x^*x\| = \|x\|^2$ und folglich $\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n}$. Mit Satz 11.13 haben wir dann

$$r(x) = \lim_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \in \mathbb{N}} \|x^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \in \mathbb{N}} \|x\| = \|x\|.$$

Sei nun x normal, dann ist x^*x selbstadjugiert und es ist

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| = r(x^*x) \leq r(x^*)r(x) = r(x)^2.$$

Damit gilt $\|x\| \leq r(x)$ und schließlich $r(x) = \|x\|$. ■

Satz 11.31 Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ unitale C^* -Algebren und $\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein unitaler $*$ -Homomorphismus. Dann gilt

$$\|\pi(x)\| \leq \|x\|$$

für alle $x \in \mathcal{A}$, d.h. π ist stetig.

Beweis: Sei $x \in \mathcal{A}$. Für $\lambda \notin \sigma(x)$ ist $x - \lambda e$ invertierbar, also ist auch $\pi(x - \lambda e) = \pi(x) - \lambda e$ invertierbar, d.h. $\lambda \notin \sigma(\pi(x))$. Es gilt demnach

$$\sigma(\pi(x)) \subseteq \sigma(x) \quad \text{und} \quad r(\pi(x)) \leq r(x).$$

Weiter haben wir

$$\|\pi(x)\|^2 = \|\pi(x)^* \pi(x)\| = r(\pi(x)^* \pi(x)) = r(\pi(x^* x)) \leq r(x^* x) = \|x^* x\| = \|x\|^2$$

■ und das bedeutet $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$.

Folgerung 11.32 Auf einer $*$ -Algebra $\mathcal{A}$ kann es höchstens eine $\mathcal{C}^*$ -Norm geben.

Beweis: Seien $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ zwei $\mathcal{C}^*$ -Normen auf $\mathcal{A}$. Die identische Abbildung $\text{id}: (\mathcal{A}, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathcal{A}, \|\cdot\|_2)$ ist ein $*$ -Isomorphismus, also folgt mit Satz 11.31 die Gleichheit der beiden Normen. ■

Satz 11.33 Sei $\mathcal{A}$ eine unitale $\mathcal{C}^*$ -Algebra. Für einen Charakter ω gelten:

- (i) $\omega(x) \in \mathbb{R}$ für alle selbstadjugierten $x \in \mathcal{A}$.
- (ii) $\omega(x^*) = \overline{\omega(x)}$ für alle $x \in \mathcal{A}$.
- (iii) ω ist positiv, d.h. $\omega(x^* x) \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{A}$.
- (iv) $|\omega(x)| = 1$ für alle unitären $x \in \mathcal{A}$.

Beweis: (i) Sei $x = x^*$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} |\omega(x + ite)|^2 &\leq \underbrace{\|\omega\|^2}_{=1} \|x + ite\|^2 \\ &= \|\underbrace{(x + ite)^*}_{=x - ite} (x + ite)\| \\ &= \|x^2 + t^2 e\| \\ &\leq \|x\|^2 + t^2. \end{aligned}$$

Sei $\omega(x) = \alpha + i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann ist

$$\begin{aligned} \|x\|^2 + t^2 &\geq |\omega(x + ite)|^2 \\ &= |\omega(x) + it|^2 \\ &= |\alpha + i(\beta + t)|^2 \\ &= \alpha^2 + (\beta + t)^2 \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t + t^2 \end{aligned}$$

und es folgt

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \leq \|x\|^2$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Demnach muss $\beta = 0$ sein.

(ii) Sei $x = y + iz$ eine selbstadjungierte Zerlegung, dann ist

$$\omega(x^*) = \omega(y - iz) = \omega(y) - i\omega(z) = \overline{\omega(y) + i\omega(z)} = \overline{\omega(y + iz)} = \overline{\omega(x)}.$$

(iii) Sei $x \in \mathcal{A}$, dann gilt

$$\omega(x^*x) = \omega(x^*)\omega(x) = \overline{\omega(x)}\omega(x) = |\omega(x)|^2 \geq 0.$$

(iv) Sei $x^* = x^{-1}$, dann folgt

$$|\omega(x)|^2 = \overline{\omega(x)}\omega(x) = \omega(x^*x) = \omega(e) = 1.$$

Folgerung 11.34 Es gilt $\sigma(x^*) = \overline{\sigma(x)}$ für alle $x \in \mathcal{A}$.

Beweis:

$$\sigma(x^*) \stackrel{11.23}{\Downarrow} \text{im}\Gamma(x^*) = \{\omega(x^*) \mid \omega \in \Omega\} \stackrel{11.33}{\Downarrow} \{\overline{\sigma(x)} \mid \omega \in \Omega\} = \overline{\text{im}\Gamma(x)} \stackrel{11.23}{\Downarrow} \overline{\sigma(x)}$$

11.5 Kommutative $\mathcal{C}^*$ -Algebren

Theorem 11.35 (GELFAND-NEUMARK) Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative unitale $\mathcal{C}^*$ -Algebra. Dann ist die Gelfand-Transformation $\Gamma: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}(\Omega)$ ein isometrischer $*$ -Isomorphismus.

Beweis: (i) Γ $*$ -Homomorphismus: Wir wissen bereits aus dem Theorem 11.23 von GELFAND, dass Γ ein unitaler Homomorphismus ist. Mit Satz 11.33 folgt

$$\overline{\Gamma(x)(\omega)} = \overline{\omega(x)} = \omega(x^*) = \Gamma(x^*)(\omega)$$

für jedes $\omega \in \Omega$. Damit ist stets $\overline{\Gamma(x)} = \Gamma(x^*)$, d.h. Γ ist tatsächlich ein $*$ -Homomorphismus.

(ii) Γ isometrisch: Nach dem Theorem 11.23 von GELFAND gilt stets $\|\Gamma(x)\|_\infty = r(x)$ und weil in kommutativen $*$ -Algebren jedes Element normal ist, folgt mit Satz 11.30 $r(x) = \|x\|$. Insgesamt ist also

$$\|\Gamma(x)\|_\infty = \|x\|$$

für alle $x \in \mathcal{A}$, d.h. Γ ist isometrisch.

(iii) Γ injektiv: Sei $\Gamma(x) = \Gamma(y)$, dann folgt

$$0 = \|\Gamma(x) - \Gamma(y)\| = \|\Gamma(x - y)\| = \|x - y\|.$$

Also ist $x = y$ und demnach Γ injektiv.

(iv) Γ *surjektiv*: Die Voraussetzungen im Satz 3.7 von STONE-WEIERSTRASS sind erfüllt:

- $\text{im}\Gamma$ ist eine Unteralgebra von $\mathcal{C}(\Omega)$, denn Γ ist ein Homomorphismus.
- $\text{im}\Gamma$ enthält die konstante Funktion $\Gamma(e)$, denn es gilt

$$\Gamma(e)(\omega) = \omega(e) = 1$$

für alle $\omega \in \Omega$.

- Für eine Funktion $\Gamma(x) \in \text{im}\Gamma$ ist wegen (i) auch die konjugierte Funktion $\overline{\Gamma(x)} = \Gamma(x^*) \in \text{im}\Gamma$.
- $\text{im}\Gamma$ trennt die Punkte von Ω nach dem Theorem 11.23 von GELFAND.

Also folgt, dass $\text{im}\Gamma$ dicht in $\mathcal{C}(\Omega)$ liegt. Weiter ist Γ stetig, also ist $\text{im}\Gamma$ abgeschlossen. Schließlich gilt

$$\text{im}\Gamma = \mathcal{C}(\Omega)$$

■ und damit ist Γ surjektiv.

Folgerung 11.36 Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative unitale C^* -Algebra. Dann gelten für $x \in \mathcal{A}$ stets:

- (i) x ist selbstadjugiert genau dann, wenn $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$.
- (ii) x ist unitär genau dann, wenn $\sigma(x) \subseteq \mathbb{C}_1 := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$.
- (iii) x ist positiv genau dann, wenn $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}_+$.
- (iv) x ist idempotent genau dann, wenn $\sigma(x) \subseteq \{0, 1\}$.

Beweis: Es gilt stets $\text{im}\Gamma(x) = \sigma(x)$ nach Theorem 11.23 von GELFAND.

(i)

$$\begin{aligned} x = x^* &\iff \Gamma(x) = \overline{\Gamma(x)} \\ &\iff \forall \omega \in \Omega: \omega(x) = \overline{\omega(x)} \\ &\iff \sigma(x) \subseteq \mathbb{R} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} x^{-1} = x^* &\iff \Gamma(x)^{-1} = \overline{\Gamma(x)} \\ &\iff 1 = \Gamma(x)\overline{\Gamma(x)} = |\Gamma(x)|^2 \\ &\iff \forall \omega \in \Omega: |\omega(x)| = 1 \\ &\iff \sigma(x) \subseteq \mathbb{C}_1 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} x = y^*y &\iff \Gamma(x) = \overline{\Gamma(y)}\Gamma(y) = |\Gamma(y)|^2 \geq 0 \\ &\iff \forall \omega \in \Omega: \omega(x) \geq 0 \\ &\iff \sigma(x) \subseteq \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} x = x^2 &\iff \Gamma(x) = \Gamma(x)^2 \\ &\iff \forall \omega \in \Omega: \omega(x) \in \{0, 1\} \\ &\iff \sigma(x) \subseteq \{0, 1\} \end{aligned}$$

■

Theorem 11.37 (GELFAND-NEUMARK-SEGAL) Jede C^* -Algebra $\mathcal{A}$ ist isometrisch $*$ -isomorph zu einer C^* -Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ für einen geeigneten Hilbertraum $\mathcal{H}$. (Meist ist $\mathcal{H}$ nicht separabel.)

11.6 Der stetige Funktionenkalkül in C^* -Algebren

Theorem 11.38 (Stetiger Funktionenkalkül) Sei $\mathcal{A}$ eine unitale C^* -Algebra und $x = x^* \in \mathcal{A}$. Dann existiert eine injektive stetige Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi_x: \mathcal{C}(\sigma(x)) &\rightarrow \mathcal{A} \\ f &\mapsto \Phi_x(f) := f(x) \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Φ_x ist ein isometrischer $*$ -Isomorphismus von $\mathcal{C}(\sigma(x))$ auf die kommutative C^* -Algebra $\mathcal{C}^*(x) \subseteq \mathcal{A}$, d.h. insbesondere $\|f\|_\infty = \|f(x)\|$.
- (ii) $f(x)$ ist stets normal. Außerdem ist $f(x)$ selbstadjugiert genau dann, wenn f auf $\sigma(x)$ nur reelle Werte annimmt.
- (iii) Für $y \in \mathcal{A}$ folgt aus $xy = yx$ stets $f(x)y = yf(x)$ für alle $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$.

Beweis: (i) Sei $x = x^*$, dann gilt nach Folgerung 11.36 stets $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$ und damit liegt die Menge der Polynome $\mathcal{P}(\sigma(x))$ dicht in $\mathcal{C}(\sigma(x))$ nach dem Approximationssatz 3.5 von WEIERSTRASS. Betrachte ein Polynom $p \in \mathcal{P}(\sigma(x))$,

dann ist $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ und $\overline{p(t)} = \sum_{k=0}^n \overline{a_k} t^k$. Definiere eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\sigma(x)) &\rightarrow \mathcal{A} \\ \Phi_x: \quad p &\mapsto \Phi_x(p) := p(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k. \end{aligned}$$

Dann ist Φ_x isometrisch, denn es gilt

$$\|\Phi_x(p)\| = \|p(x)\| \stackrel{(ii), 11.30}{=} \underset{\downarrow}{=} r(p(x)) = \bigvee_{\lambda \in \sigma(p(x))} |\lambda| \stackrel{11.16}{=} \underset{\downarrow}{=} \bigvee_{\lambda \in p(\sigma(x))} |\lambda| = \|p\|_\infty.$$

Folglich ist Φ_x auch injektiv. Das Bild aller Polynome unter Φ_x ist dicht in der von x erzeugten C^* -Algebra $C^*(x)$ (das ist die kleinste $*$ -Unteralgebra von $\mathcal{A}$, die x und e enthält), also ist Φ_x ein isometrischer $*$ -Isomorphismus von $\mathcal{P}(\sigma(x))$ auf eine dichte $*$ -Unteralgebra $\mathcal{C}_p^*(x)$ von $C^*(x)$. Nun setzen wir Φ_x von dem dichten Unterraum $\mathcal{P}(\sigma(x))$ auf $\mathcal{C}(\sigma(x))$ fort. Die Fortsetzung hat dann die gewünschten Eigenschaften. Sei nämlich $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$, dann gibt es nach dem Approximationssatz 3.5 von WEIERSTRASS eine Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\sigma(x))$ von Polynomen, die gegen f konvergiert. Damit ist auch die Fortsetzung isometrisch wegen

$$\|f(x)\| = \left\| \lim_{n \in \mathbb{N}} p_n(x) \right\| = \lim_{n \in \mathbb{N}} \|p_n(x)\| = \lim_{n \in \mathbb{N}} \|p_n\|_\infty = \left\| \lim_{n \in \mathbb{N}} p_n \right\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

Weil $p_n(x)$ stets in der dichten $*$ -Unteralgebra $\mathcal{C}_p^*(x)$ liegt, folgt $f(x) \in C^*(x)$. Wegen der Stetigkeit der algebraischen Operationen ist auch die Fortsetzung ein $*$ -Homomorphismus. Die Fortsetzung $\Phi_x: \mathcal{C}(\sigma(x)) \rightarrow C^*(x)$ muss auch surjektiv sein, denn $\mathcal{P}(\sigma(x))$ ist dicht in $\mathcal{C}(\sigma(x))$ und $\mathcal{C}_p^*(x)$ ist dicht in $C^*(x)$.

Die noch folgenden Eigenschaften werden für ein Polynom p gezeigt. Für eine stetige Funktion f folgen sie durch Betrachten einer approximierenden Polynomfolge für f mit Beachtung der Stetigkeit der algebraischen Operationen.

(ii) $p(x)$ ist normal, denn es gilt

$$p(x)^* p(x) = \overline{p(x)} p(x) = \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{\substack{i+j=k \\ =a_j \overline{a_i}}} \overline{a_i} a_j \right) x^k = p(x) \overline{p(x)} = p(x) p(x)^*.$$

Weiter ist $p(x)$ selbstadjugiert genau dann, wenn $\sigma(p(x)) \subseteq \mathbb{R}$ (Folgerung 11.36). Für ein Polynom gilt aber nach dem Spektralabbildungssatz 11.16 stets $p(\sigma(x)) = \sigma(p(x))$ und damit folgt

$$p(\sigma(x)) \subseteq \mathbb{R}.$$

(iii) Sei $y \in \mathcal{A}$ mit $xy = yx$. Dann gilt für ein Polynom $p \in \mathcal{P}(\sigma(x))$

$$p(x)y = \sum_{k=0}^n a_k x^k y = \sum_{k=0}^n a_k y x^k = y \sum_{k=0}^n a_k x^k = yp(x).$$

Satz 11.39 Sei $\mathcal{A}$ eine unitale C^* -Algebra und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ eine C^* -Unteralgebra mit dem gleichen Einselement. Dann gilt

$$\sigma_{\mathcal{B}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$$

für alle $x \in \mathcal{B}$.

Beweis: Wegen $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ folgt bereits

$$\sigma_{\mathcal{A}}(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (x - \lambda e)^{-1} \notin \mathcal{A}\} \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (x - \lambda e)^{-1} \notin \mathcal{B}\} = \sigma_{\mathcal{B}}(x).$$

Zum Beweis der anderen Inklusionsrichtung zeigen wir, dass aus $x \in \mathcal{B}$ mit $x^{-1} \in \mathcal{A}$ stets $x^{-1} \in \mathcal{B}$ folgt. Dann impliziert $(x - \lambda e)^{-1} \notin \mathcal{B}$ nämlich $(x - \lambda e)^{-1} \notin \mathcal{A}$, d.h. $\sigma_{\mathcal{B}}(x) \subseteq \sigma_{\mathcal{A}}(x)$.

(i) Sei zunächst $x = x^* \in \mathcal{B}$ mit $x^{-1} \in \mathcal{A}$, d.h. $0 \notin \sigma_{\mathcal{A}}(x)$ also auch $0 \notin \sigma_{\mathcal{B}}(x)$. Dann ist die Abbildung

$$f: \sigma_{\mathcal{B}}(x) \rightarrow \mathbb{C} \\ \lambda \mapsto \lambda^{-1}$$

stetig, also $f \in \mathcal{C}(\sigma_{\mathcal{B}}(x))$. Betrachte die von x erzeugte $*$ -Unteralgebra $\mathcal{C}^*(x) \subseteq \mathcal{B}$. Nach dem stetigen Funktionenalkül 11.38 gilt $f(x) \in \mathcal{C}^*(x)$. Für alle $\lambda \in \sigma_{\mathcal{B}}(x)$ gilt $\lambda f(\lambda) = 1$ und mit 11.38 folgt $xf(x) = e$, d.h. $f(x) = x^{-1} \in \mathcal{B}$.

(ii) Sei nun $x \in \mathcal{B}$ beliebig mit $y := x^{-1} \in \mathcal{A}$. Dann ist $x^*x \in \mathcal{B}$ selbstadjugiert und invertierbar mit $(x^*x)^{-1} = x^{-1}(x^*)^{-1} = yy^*$. Es folgt $yy^* \in \mathcal{B}$ nach (i) und damit gilt

$$x^{-1} = yy^*x^* \in \mathcal{B}$$

wegen $yy^*x^* = y(xy)^* = y$.

Satz 11.40 (Spektralabbildungssatz) Sei $\mathcal{A}$ eine unitale C^* -Algebra und $x \in \mathcal{A}$ selbstadjugiert. Dann gilt für $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$ stets

$$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x)).$$

Beweis: Sei $\mathcal{C}^*(x)$ die kleinste C^* -Unteralgebra von $\mathcal{A}$, die x und das Einselement enthält, dann gilt nach dem Satz 11.39 $\sigma(f(x)) = \sigma_{\mathcal{C}^*(x)}(f(x))$. Mit dem Funktionenalkül 11.38 gilt $\mathcal{C}^*(x) \cong \mathcal{C}(\sigma(x))$, also folgt insgesamt

$$\sigma(f(x)) = \sigma_{\mathcal{C}(\sigma(x))}(f).$$

Schließlich gilt noch

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\mathcal{C}(\sigma(x))}(f) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid f - \lambda \text{ nicht invertierbar}\} \\
 &= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists \mu \in \sigma(x): f(\mu) = \lambda\} \\
 &= \{f(\mu) \mid \mu \in \sigma(x)\} \\
 &= f(\sigma(x)).
 \end{aligned}$$

Theorem 11.41 (Stetiger Funktionalkalkül) Sei $\mathcal{A}$ eine unitale $\mathcal{C}^*$ -Algebra und $x \in \mathcal{A}$ normal. Ferner sei $\mathcal{P}(\sigma(x))$ die Menge aller Polynome auf $\sigma(x) \subseteq \mathbb{C}$ der Art

$$p(z) = \sum_{m,n=0}^N c_{m,n} z^m \bar{z}^n.$$

Dann gelten:

(i) $\Omega = \Omega(\mathcal{C}^*(x))$ ist homöomorph zu $\sigma(x)$.

(ii) Die Abbildung

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{P}(\sigma(x)) \rightarrow \mathcal{C}^*(x) \\
 \Phi_x: \quad &p \mapsto p(x) := \sum_{m,n=0}^N c_{m,n} x^m (x^*)^n
 \end{aligned}$$

lässt sich eindeutig zu einem isometrischen $*$ -Isomorphismus von $\mathcal{C}(\sigma(x))$ nach $\mathcal{C}^*(x)$ fortsetzen.

Beweis: (i) Nach dem Theorem 11.23 von GELFAND gilt $\sigma(x) = \text{im} \Gamma(x) = \{\omega(x) \mid \omega \in \Omega\}$. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned}
 &\Omega \rightarrow \sigma(x) \\
 \tau: \quad &\omega \mapsto \tau(\omega) := \omega(x).
 \end{aligned}$$

Dann ist τ ersichtlich surjektiv. Seien $\tau(\omega_1) = \tau(\omega_2)$, d.h. $\omega_1(x) = \omega_2(x)$. Es folgt

$$\omega_1(x^*) \stackrel{11.33}{\Downarrow} \overline{\omega_1(x)} = \overline{\omega_2(x)} \stackrel{11.33}{\Downarrow} \omega_2(x^*)$$

und damit gilt auch für alle $p \in \mathcal{P}(\sigma(x))$

$$\omega_1(p(x)) = \omega_2(p(x)).$$

Also gilt $\omega_1 = \omega_2$ auf dem dichten Unterraum $\Phi_x(\mathcal{P}(\sigma(x))) \subseteq \mathcal{C}^*(x)$ und damit gilt überall $\omega_1 = \omega_2$. Demnach ist τ injektiv. Sei $(\omega_i)_{i \in I} \subseteq \Omega$ ein gegen $\omega \in \Omega$ schwach*-konvergentes Netz, dann gilt insbesondere

$$\tau(\omega_i) = \omega_i(x) \rightarrow \omega(x) = \tau(\omega)$$

und damit ist τ stetig. Nun sind die Menge der Charaktere Ω und das Spektrum $\sigma(x)$ kompakte Mengen, also ist τ als bijektive stetige Abbildung zwischen kompakten Mengen ein Homöomorphismus.

(ii) Für die GELFAND-Transformation $\Gamma: \mathcal{C}^*(x) \rightarrow \mathcal{C}(\Omega)$ gilt

$$\Gamma(p(x))(\omega) = \omega(p(x)) = p(\omega(x)) = p(\tau(\omega))$$

und damit $\Gamma(p(x)) = p \circ \tau$ für alle Polynome $p \in \mathcal{P}(\sigma(x))$. Mit der Abbildung

$$\gamma: \begin{array}{l} \mathcal{C}(\sigma(x)) \rightarrow \mathcal{C}(\Omega) \\ f \mapsto f \circ \tau \end{array}$$

definiere

$$\Phi_x := \Gamma^{-1} \circ \gamma: \mathcal{C}(\sigma(x)) \rightarrow \mathcal{C}(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}^*(x).$$

Dann ist dies die gesuchte Fortsetzung, denn für jedes Polynom $p \in \mathcal{P}(\sigma(x))$ gilt

$$\Phi_x(p) = \Gamma^{-1}(\gamma(p)) = \Gamma^{-1}(p \circ \tau) = \Gamma^{-1}(\Gamma(p(x))) = p(x).$$

Φ_x ist ein isometrischer *-Isomorphismus, denn:

- Γ^{-1} ist ein isometrischer *-Isomorphismus,
- γ ist wegen

$$\|f \circ \tau\|_\infty = \bigvee_{\omega \in \Omega} |f(\tau(\omega))| = \bigvee_{\omega \in \Omega} |f(\omega(x))| = \bigvee_{\lambda \in \sigma(x)} |f(\lambda)| = \|f\|_\infty$$

eine Isometrie, also auch injektiv,

- γ ist surjektiv, denn für $g \in \mathcal{C}(\Omega)$ ist $f := g \circ \tau^{-1} \in \mathcal{C}(\sigma(x))$ und es gilt $\gamma(f) = g \circ \tau^{-1} \circ \tau = g$,
- γ ist ein *-Homomorphismus, also insgesamt auch ein isometrischer *-Isomorphismus. ■

12 Das Spektraltheorem

12.1 Topologien in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

Definition 12.1 (starke Operatortopologie, schwache Operatortopologie)

(i) Die *gleichmäßige Topologie* $\tau_{\|\cdot\|}$

$$\|\cdot\|: T \mapsto \|T\| := \bigvee_{\substack{\phi \in \mathcal{H} \\ \|\phi\| \leq 1}} \|T\phi\|$$

(ii) Die *starke Operatortopologie* τ_s

$$(\|\cdot\|_\phi: T \mapsto \|T\|_\phi := \|T\phi\|)_{\phi \in \mathcal{H}}$$

(iii) Die *schwache Operatortopologie* τ_w

$$(\|\cdot\|_{\phi,\psi}: T \mapsto \|T\|_{\phi,\psi} := |\langle \phi, T\psi \rangle|)_{\phi,\psi \in \mathcal{H}}$$

Bemerkung 12.2 (i) Die schwache Operatortopologie ist nicht die schwache Topologie im dualen Paar.

(ii) Die starke Operatortopologie ist die schwächste lokalkonvexe Topologie auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, für die alle Abbildungen

$$E_\phi: \begin{array}{l} \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{H} \\ T \mapsto T\phi \end{array}$$

für $\phi \in \mathcal{H}$ stetig sind.

(iii) Die schwache Operatortopologie ist die schwächste lokalkonvexe Topologie auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, für die alle Abbildungen

$$E_{\phi,\psi}: \begin{array}{l} \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C} \\ T \mapsto \langle \phi, T\psi \rangle \end{array}$$

für $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ stetig sind.

Satz 12.3 Es gilt

$$\tau_w \subsetneq \tau_s \subsetneq \tau_{\|\cdot\|}.$$

Satz 12.4 (i) Alle $*$ -Algebra-Operationen in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ sind $\tau_{\|\cdot\|}$ -stetig. Die Multiplikation ist in beiden Faktoren gleichzeitig stetig.

(ii) Die Addition ist τ_s -stetig und τ_w -stetig.

(iii) Die $*$ -Operation ist τ_w -stetig, aber nicht τ_s -stetig.

(iv) Die Multiplikation ist jeweils in einem Faktor τ_s -stetig und τ_w -stetig.

(v) Die Multiplikation ist in beiden Faktoren gleichzeitig τ_s -folgenstetig, aber nicht τ_w -folgenstetig.

12.2 Spektraltheorem und Diagonalisierung

Definition (σ -Algebra, Maß)

Sei X eine Menge.

(i) Ein System $\mathcal{S} \subseteq \wp(X)$ von Teilmengen von X heißt σ -Algebra auf X , falls gelten:

- $\forall \mathcal{X} \subseteq_{\text{abz}} \mathcal{S}: \bigcup \mathcal{X} \in \mathcal{S}$
- $\forall X \in \mathcal{S}: \complement X \in \mathcal{S}$

(ii) Eine Abbildung $\mu: \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ heißt (positives) Maß, falls $\mu(\emptyset) = 0$ und μ ist σ -additiv, d.h. für alle Folgen $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ von disjunkten Mengen gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n).$$

(iii) Das Tripel $(X, \mathcal{S}, \mu)$ heißt dann auch Maßraum.

(iv) Der Maßraum $(X, \mathcal{S}, \mu)$ bzw. das Maß μ heißt σ -endlich, wenn es eine Folge $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ gibt mit $\mu(B_n) < \infty$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = X$.

(v) Der Maßraum $(X, \mathcal{S}, \mu)$ heißt vollständig, wenn für $B \in \mathcal{S}$ mit $\mu(B) = 0$ aus $A \subseteq B$ immer $A \in \mathcal{S}$ und $\mu(A) = 0$ folgt.

(vi) Der Maßraum $(X, \mathcal{S}, \mu)$ heißt separabel, wenn $\mathcal{S}$ ein abzählbares Erzeugendensystem besitzt.

Definition (reguläres Borelmaß)

Sei (K, τ) ein kompakter topologischer Raum.

- (i) Die kleinste σ -Algebra $\sigma(\tau)$ auf K , die alle offenen Mengen von K enthält, heißt *borelsche σ -Algebra* auf K .
- (ii) Eine Abbildung $\mu: \sigma(\tau) \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt *komplexes Borelmaß*, falls $\mu(\emptyset) = 0$ und für alle Folgen $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \sigma(\tau)$ von disjunkten Mengen gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n).$$

- (iii) Für ein komplexes Borelmaß μ ist durch

$$|\mu|(B) := \bigvee_{Z \in \text{Part} B} \sum_{E \in Z} |\mu(E)|$$

ein positives Borelmaß erklärt und $|\mu|$ heißt *Variation* von μ .

- (iv) Ein positives Borelmaß $\mu: \sigma(\tau) \rightarrow [0, \infty]$ heißt *regulär*, wenn für alle kompakten $C \subseteq K$ stets $\mu(C) < \infty$ sowie für alle Mengen $B \in \sigma(\tau)$

$$\mu(B) = \bigvee_{\substack{C \text{ kompakt} \\ C \subseteq B}} \mu(C) = \bigwedge_{\substack{O \text{ offen} \\ O \supseteq B}} \mu(O)$$

gilt. Ein komplexes Borelmaß μ heißt *regulär*, wenn die Variation $|\mu|$ regulär ist.

- (v) Die Menge der regulären positiven Borelmaße sei $\mathcal{M}_+(K)$ und die Menge aller regulären komplexen Borelmaße bezeichnen wir mit

$$\mathcal{M}(K).$$

Durch

$$\|\mu\| := |\mu|(K)$$

wird eine Norm in $\mathcal{M}(K)$ definiert, bezüglich der der Raum dieser Maße vollständig ist.

Theorem 12.5 (RIESZ-MARKOV) Sei X ein lokalkompakter topologischer Raum. Es gilt $(\mathcal{C}_c(X)')_+ \cong \mathcal{M}_+(X)$ und

$$\mathcal{C}_c(X)' \cong \mathcal{M}(X)$$

mit dem isometrischen Isomorphismus

$$j: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}(X) & \rightarrow & \mathcal{C}_c(X)' \\ \mu & \mapsto & \int_X \cdot d\mu: \mathcal{C}_c(X) \rightarrow \mathbb{K} \\ & & f \mapsto \int_X f d\mu. \end{array}$$

Beweis: Die isometrische Isomorphie $(\mathcal{C}_c(X)')_+ \cong \mathcal{M}_+(X)$ zwischen den positiven Funktionalen auf $\mathcal{C}_c(X)$ und den positiven Maßen auf X sieht man so:

- (i) *j Homomorphismus:* Das gilt nach fundamentalen Sätzen der Maßtheorie.
- (ii) *j isometrisch:* Sei $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$, dann ist

$$\left\| \int_X \cdot d\mu \right\| = \bigvee_{\substack{f \in \mathcal{C}_c(X) \\ \|f\| \leq 1}} \left| \int_X f d\mu \right| \leq \bigvee_{\substack{f \in \mathcal{C}_c(X) \\ \|f\| \leq 1}} \int_X \|f\| d\mu = \int_X 1 d\mu = \mu(X) = \|\mu\|$$

und

$$\left\| \int_X \cdot d\mu \right\| = \bigvee_{\substack{f \in \mathcal{C}_c(X) \\ \|f\| \leq 1}} \left| \int_X f d\mu \right| \geq \int_X 1 d\mu = \mu(X) = \|\mu\|.$$

Aus der Isometrie folgt auch die Injektivität von j .

- (iii) *j surjektiv:* Sei $F \in \mathcal{C}_c(X)'$. Sei $O \subseteq X$ offen. Wir wollen χ_O von unten durch Funktionen $f \in \mathcal{C}_c(X)$ approximieren und setzen

$$\tilde{\mu}(O) := \bigvee_{\substack{f \in \mathcal{C}_c(X) \\ 0 \leq f \leq 1 \\ \text{supp } f \subseteq O}} F(f).$$

Für eine beliebige Menge $B \subseteq X$ definiere

$$\tilde{\mu}(B) := \bigwedge_{\substack{O \text{ offen} \\ O \supseteq B}} \tilde{\mu}(O).$$

Dann ist $\tilde{\mu}$ ein äußeres Maß und dieses wird auf eine geeignete σ -Algebra eingeschränkt, dann erhält man unter Beachtung des Fortsetzungssatzes von CARATHÉODORY das gesuchte $\mu \in \mathcal{M}(X)$ mit $F = \int_X \cdot d\mu$.

Nun geht man von den positiven Maßen und positiven Operatoren zu den signierten Maßen und den reellwertigen Operatoren über. Mit Benutzung der *Hahn-Jordan-Zerlegung* $\mu = \mu_+ - \mu_-$ für positive Maße μ_+, μ_- können wir die eben gezeigten Aussagen auf den signierten Fall übertragen. Schließlich benutzt man die signierten Maße zur Behandlung der komplexen Maße. ■

Bemerkung: Das obige Theorem von RIESZ-MARKOV besagt Folgendes: Sei X ein lokalkompakter Raum und F ein positives lineares Funktional auf $\mathcal{C}_c(X)$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes positives Maß μ auf einer σ -Algebra $\mathcal{S}$, die alle Borelmengen von X enthält, sodass

$$F(f) = \int_X f d\mu$$

für alle $f \in \mathcal{C}_c(X)$ gilt. Dieses Maß μ ist regulär, d.h. es gelten

- (i) $\mu(K) < \infty$ für alle kompakten $K \subseteq X$,
- (ii) $\mu(B) = \bigwedge_{B \subseteq O \text{ offen}} \mu(O)$ für alle $B \in \mathcal{S}$,
- (iii) $\mu(B) = \bigvee_{B \supseteq K \text{ kompakt}} \mu(K)$ für alle $B \in \mathcal{S}$.

Außerdem ist $(X, \mathcal{S}, \mu)$ vollständig, d.h. für $B \in \mathcal{S}$ mit $\mu(B) = 0$ folgt aus $A \subseteq B$ stets $A \in \mathcal{S}$ und $\mu(A) = 0$.

Definition 12.6 (diagonalisierbar)

Ein Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt *diagonalisierbar*, wenn es einen separablen σ -endlichen Maßraum $(X, \mathcal{S}, \mu)$, eine Funktion $f \in L_\infty(X)$ und einen unitären Operator $W: L_2(X, \mathcal{S}, \mu) \rightarrow \mathcal{H}$ gibt, sodass

$$WM_f W^{-1} = T$$

gilt. Dabei ist M_f der Multiplikationsoperator

$$\begin{aligned} & L_2(X, \mathcal{S}, \mu) \rightarrow L_2(X, \mathcal{S}, \mu) \\ M_f: & \quad g \mapsto M_f(g): \begin{array}{l} X \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto M_f(g)(x) := f(x)g(x). \end{array} \end{aligned}$$

Lemma 12.7 Seien $(\mathcal{H}_n)_n$ ein endliches oder abzählbares System von Hilberträumen und $(T_n)_n$ ein System von diagonalisierbaren Operatoren $T_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ mit $\bigvee_n \|T_n\| < \infty$. Dann ist die direkte Summe

$$\mathcal{H} := \bigoplus_n \mathcal{H}_n := \{\phi = (\phi_n)_n \mid \phi_n \in \mathcal{H}_n, \sum_n \|\phi_n\|_{\mathcal{H}_n}^2 < \infty\}$$

ein Hilbertraum und

$$T := \bigoplus_n T_n: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \\ \phi \mapsto T\phi := (T_n \phi_n)_n$$

ist diagonalisierbar auf $\mathcal{H}$.

Beweis: Seien alle $T_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ diagonalisierbar und $\bigvee_n \|T_n\| < \infty$, es gibt also

- σ -endliche Maßräume $(X_n, \mathcal{S}_n, \mu_n)$,
- Funktionen $f_n \in L_\infty(X_n)$,
- unitäre Operatoren $W_n: L_2(X_n, \mathcal{S}_n, \mu_n) \rightarrow \mathcal{H}_n$

mit $W_n M_{f_n} W_n^{-1} = T_n$ für alle n . Definiere einen Maßraum als Produktraum der X_n

$$(X, \mathcal{S}, \mu) := \bigotimes_n (X_n, \mathcal{S}_n, \mu_n),$$

dann ist dieser auch σ -endlich. Es lässt sich $L_\infty(X)$ in natürlicher Weise mit $\bigoplus_n L_\infty(X_n)$ identifizieren, denn es gilt stets $g = \bigoplus_n g|_{X_n}$. Ebenso für L_2 . Wir definieren damit

$$f := \bigoplus_n f_n \in L_\infty(X)$$

und den Operator

$$W := \bigoplus_n W_n: L_2(X, \mathcal{S}, \mu) \rightarrow \mathcal{H}.$$

Ersichtlich ist auch W unitär und es gilt

$$W M_f W^{-1} = T$$

nach der komponentenweisen Konstruktion von W und f . Es folgt, dass T diagonalisierbar ist.

Definition 12.8 (zyklisch)

Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ein Element $\phi \in \mathcal{H}$ heißt *zyklisch* für T , wenn $\mathcal{C}^*(T)\phi$ dicht in $\mathcal{H}$ ist.

Lemma 12.9 Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ für einen separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann gibt es eine endliche oder abzählbare Folge $(\mathcal{H}_n)_n$ von Hilberträumen mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Die direkte Summe ist $\mathcal{H} = \bigoplus_n \mathcal{H}_n$.
- (ii) Es gilt stets $\mathcal{H}_n \neq \{0\}$.
- (iii) Die $\mathcal{H}_n$ sind paarweise orthogonal.

- (iv) Alle $\mathcal{H}_n$ sind $\mathcal{C}^*(T)$ -invariant, d.h. $S\mathcal{H}_n \subseteq \mathcal{H}_n$ für alle $S \in \mathcal{C}^*(T)$.
- (v) Jedes $\mathcal{H}_n$ besitzt ein zyklisches Element ϕ_n für $T|_{\mathcal{H}_n} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$.

Beweis: Betrachte die durch die Teilmengeninklusion $\subseteq$ geordnete Menge

$$\begin{aligned} \mathcal{X} := \{X = \{\mathcal{H}_i \mid i \in I_X, \\ \mathcal{H}_i \subseteq \mathcal{H}, \\ \mathcal{H}_i \neq \{0\} \\ \mathcal{H}_i \perp \mathcal{H}_j \text{ für } i \neq j \\ \mathcal{H}_n \text{ } \mathcal{C}^*(T)\text{-invariant} \\ \mathcal{H}_i \text{ besitzt zyklisches Element } \phi_i \text{ für } T|_{\mathcal{H}_i} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_i)\}\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{X}$ ist nichtleer, denn sei $\phi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, dann ist $\mathcal{C}^*(T)\phi$ dicht in $\mathcal{H}_0 := \overline{\mathcal{C}^*(T)\phi}$, also ist $X_0 := \{\mathcal{H}_0\} \in \mathcal{X}$. Sei nun $\mathcal{K}$ eine Kette in $\mathcal{X}$, dann ist $\bigcup \mathcal{K}$ eine obere Schranke für $\mathcal{K}$ und liegt in $\mathcal{X}$. Nach dem Lemma A.1 von ZORN hat $\mathcal{X}$ ein maximales Element

$$F_{\max} = \{\mathcal{H}_i \mid i \in I_{\max}\}.$$

Weil $\mathcal{H}$ separabel ist, kann $I_{\max}$ und damit auch $F_{\max}$ höchstens abzählbar sein, d.h. o.E.d.A. ist $I_{\max} \subseteq \mathbb{N}$. Weiter gilt

$$\mathcal{H} = \tilde{\mathcal{H}} := \bigoplus_{n \in F_{\max}} \mathcal{H}_n,$$

andernfalls wäre nämlich $\tilde{\mathcal{H}}^\perp \neq \{0\}$ auch $\mathcal{C}^*(T)$ -invariant, denn sei $S \in \mathcal{C}^*(T)$ und $\phi \in \tilde{\mathcal{H}}^\perp$, dann gilt

$$\langle \psi, S\phi \rangle = \underbrace{\langle S^* \psi, \phi \rangle}_{\in \tilde{\mathcal{H}}} = 0$$

für alle $\psi \in \tilde{\mathcal{H}}$, also $S\phi \in \tilde{\mathcal{H}}^\perp$. Auch wäre für $\phi \in \tilde{\mathcal{H}}^\perp \setminus \{0\}$ dann $\mathcal{C}^*(T)\phi$ dicht in $\mathcal{H}_0 := \overline{\mathcal{C}^*(T)\phi} \subseteq \tilde{\mathcal{H}}^\perp$, und $\overline{\mathcal{C}^*(T)\phi}$ ist natürlich $\mathcal{C}^*(T)$ -invariant. Demnach wäre

$$F_{\max} \subsetneq F_{\max} \cup \{\mathcal{H}_0\} \in \mathcal{X}.$$

Widerspruch! ■

Satz 12.10 Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normal. Wenn ein zyklisches Element für T existiert, dann ist T diagonalisierbar.

Beweis: Sei $\phi \in \mathcal{H}$ ein zyklisches Element für T . Nach dem stetigen Funktionalkalkül 11.41 ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi_T: \mathcal{C}(\sigma(T)) &\rightarrow \mathcal{C}^*(T) \\ f &\mapsto f(T) \end{aligned}$$

ein isometrischer $*$ -Isomorphismus. Definiere ein lineares Funktional

$$\begin{aligned} \rho: \mathcal{C}(\sigma(T)) &\rightarrow \mathbb{C} \\ f &\mapsto \rho(f) := \langle \phi, f(T)\phi \rangle, \end{aligned}$$

dann gelten:

- ρ ist positiv:

$$\begin{aligned} \rho(\bar{f}f) &= \langle \phi, (\bar{f}f)(T)\phi \rangle \\ &= \langle \phi, \overline{f(T)}f(T)\phi \rangle \\ &= \langle \phi, f(T)^*f(T)\phi \rangle \\ &= \langle f(T)\phi, f(T)\phi \rangle \\ &= \|f(T)\phi\|^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

- ρ ist stetig:

$$|\rho(f)| = |\langle \phi, f(T)\phi \rangle| \leq \|\phi\| \|f(T)\phi\| \leq \|\phi\|^2 \|f(T)\| = \|\phi\|^2 \|f\|_\infty.$$

Es gilt also $\rho \in (\mathcal{C}(\sigma(T)))'_+$ und damit existiert nach dem Theorem 12.5 von RIESZ-MARKOV ein positives reguläres Borelmaß $\mu \in \mathcal{M}_+(\sigma(T))$, sodass

$$\rho(f) = \int_{\sigma(T)} f \, d\mu = \langle \phi, f(T)\phi \rangle$$

gilt. Wir definieren nun einen Operator

$$\begin{aligned} W: \mathcal{C}(\sigma(T)) &\rightarrow \mathcal{H} \\ f &\mapsto f(T)\phi, \end{aligned}$$

dann gelten:

- $\mathcal{C}(\sigma(T))$ ist dicht in $L_2(\sigma(T), \mu)$.
- Nach 11.41 gilt $\mathcal{C}(\sigma(T)) \cong \mathcal{C}^*(T)$, und weil ϕ ein zyklisches Element ist, ist $\mathcal{C}^*(T)\phi$ dicht in $\mathcal{H}$ und demnach ist auch das Bild im W dicht in $\mathcal{H}$.
- W ist isometrisch:

$$\begin{aligned} \langle Wf, Wg \rangle &= \langle f(T)\phi, g(T)\phi \rangle \\ &= \langle \phi, f(T)^*g(T)\phi \rangle \\ &= \langle \phi, (\bar{f}g)(T)\phi \rangle \\ &= \rho(\bar{f}g) \\ &= \int_{\sigma(T)} \bar{f}g \, d\mu \\ &= \langle f, g \rangle \end{aligned}$$

Nun lässt sich W zu einem surjektiven und isometrischen, d.h. unitären Operator $W: L_2(\sigma(T), \mu) \rightarrow \mathcal{H}$ fortsetzen. Es gilt stets

$$W(M_f(g)) = W(fg) = (fg)(T)\phi = f(T)g(T)\phi = f(T)W(g)$$

und damit folgt für $f := \text{id} \in L_\infty(\sigma(T))$ sofort

$$WM_f = TW.$$

Also ist T diagonalisierbar. ■

Theorem 12.11 (Spektraltheorem) Jeder normale Operator auf einem separablen Hilbertraum ist diagonalisierbar.

Beweis: Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normal. Nach dem Lemma 12.9 gibt es eine Zerlegung

$$\mathcal{H} = \bigoplus_n \mathcal{H}_n$$

und jedes $\mathcal{H}_n$ enthält ein zyklisches Element für $T|_{\mathcal{H}_n} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$. Also sind nach dem Satz 12.10 alle Einschränkungen $T|_{\mathcal{H}_n}$ diagonalisierbar, denn natürlich sind sie als Einschränkung eines normalen Operators selbst normal. Mit Lemma 12.7 erhalten wir schließlich die Diagonalisierbarkeit von

$$T = \bigoplus_n T|_{\mathcal{H}_n}.$$
■

12.3 Darstellungen kommutativer C^* -Algebren und Spektralmaße

Definition 12.12 (*-Darstellung)

Sei $\mathcal{A}$ eine unitale C^* -Algebra und $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Dann heißt ein $*$ -Homomorphismus

$$\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

auch **-Darstellung* von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{H}$. Eine Darstellung π von $\mathcal{A}$ heißt *nicht entartet*, wenn das Bild $\text{im}\pi$ die Punkte von $\mathcal{H}$ trennt.

Bemerkung: (i) Sei π eine $*$ -Darstellung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{H}$. Das Bild $\text{im}\pi$ trennt die Punkte von $\mathcal{H}$, falls aus $\pi(x)\phi = 0$ für alle $x \in \mathcal{A}$ stets $\phi = 0$ folgt.

(ii) π ist nicht entartet genau dann, wenn $\pi(\mathcal{A})\mathcal{H}$ dicht in $\mathcal{H}$ ist.

Definition (Borelfunktion)

Sei (X, τ) kompakt, metrisierbar und $\sigma(\tau)$ die borelsche σ -Algebra auf X . Eine Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *Borelfunktion*, wenn sie $\sigma(\tau)$ -messbar ist, d.h. wenn das Urbild einer Borelmenge stets eine Borelmenge ist. Den Raum aller beschränkten Borelfunktionen bezeichnen wir mit

$$\mathfrak{B}(X)$$

und dieser ist normiert mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$.

Bemerkung: (i) $\mathfrak{B}(X)$ ist eine $\mathcal{C}^*$ -Algebra, die $\mathcal{C}(X)$ enthält.

(ii) Der Unterschied zwischen $\mathfrak{B}(X)$ und $\mathcal{C}(X)$ ist signifikant: $\mathcal{C}(X)$ ist separabel, $\mathfrak{B}(X)$ nicht. $\mathcal{C}(X)$ enthält nichttriviale Projektoren, wenn X nicht zusammenhängend ist. $\mathfrak{B}(X)$ wird sogar von den Projektoren erzeugt.

Definition 12.13 (σ -Darstellung)

Eine $*$ -Darstellung $\pi: \mathfrak{B}(X) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt σ -Darstellung von $\mathfrak{B}(X)$ in $\mathcal{H}$, wenn für jede $\|\cdot\|_\infty$ -beschränkte Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{B}(X)$, die punktweise gegen 0 konvergiert, d.h.

$$\forall x \in X: f_n(x) \rightarrow 0,$$

die Folge der Operatoren $(\pi(f_n))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ in der starken Operator-topologie gegen 0 konvergiert, d.h.

$$\forall \phi \in \mathcal{H}: \pi(f_n)\phi \rightarrow 0.$$

Bemerkung: Für die Anwendung ist es wichtig, dass in der Definition die Konvergenz in der starken Operator-topologie durch die Konvergenz in der schwachen Operator-topologie ersetzt werden kann. Aus der starken Konvergenz folgt die schwache Konvergenz. Sei umgekehrt π eine $*$ -Darstellung von $\mathfrak{B}(X)$ in $\mathcal{H}$, sodass für jede $\|\cdot\|_\infty$ -beschränkte Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{B}(X)$, die punktweise gegen 0 konvergiert, die Folge der Operatoren $(\pi(f_n))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ in der schwachen Operator-topologie gegen 0 konvergiert, d.h.

$$\forall \phi, \psi \in \mathcal{H}: \langle \psi, \pi(f_n)\phi \rangle \rightarrow 0.$$

Dann folgt

$$\|\pi(f_n)\phi\|^2 = \langle \pi(f_n)\phi, \pi(f_n)\phi \rangle = \langle \phi, \pi(f_n)^* \pi(f_n)\phi \rangle = \langle \phi, \pi(\overline{f_n} f_n)\phi \rangle \rightarrow 0$$

wegen $\overline{f_n}f_n \in \mathfrak{B}(X)$ und $(\overline{f_n}f_n)(x) = |f_n(x)|^2 \rightarrow 0$. Also konvergiert $(\pi(f_n))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ in der starken Operatortopologie gegen 0.

Theorem 12.14 Sei X ein kompakter metrisierbarer Raum und $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Dann lässt sich jede nicht entartete $*$ -Darstellung π von $\mathcal{C}(X)$ in $\mathcal{H}$ eindeutig zu einer σ -Darstellung $\tilde{\pi}$ von $\mathfrak{B}(X)$ in $\mathcal{H}$ fortsetzen.

Beweis: Definiere $\mu_{\phi, \psi}(\Delta) := \langle \phi, \tilde{\pi}(\chi_\Delta) \psi \rangle$. Wir schreiben

$$\langle \phi, \tilde{\pi}(f) \psi \rangle = \int_X f \, d\mu_{\phi, \psi}.$$

Definition 12.15 (Spektralmaß)

Sei X eine Menge, $\mathcal{S}$ eine σ -Algebra auf X und $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Ein *Spektralmaß* für $(X, \mathcal{S}, \mathcal{H})$ ist eine Abbildung

$$E: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) Für alle $\Delta \in \mathcal{S}$ ist $E(\Delta)$ ein Orthoprojektor.
- (ii) Es ist $E(\emptyset) = 0$ und $E(X) = I$.
- (iii) E ist σ -additiv, d.h. für jede Folge $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen $\Delta_n \in \mathcal{S}$ gilt

$$E\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} E(\Delta_n).$$

Bemerkung 12.16 Die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} E(\Delta_n)$ konvergiert in der starken Operatortopologie und ist der Orthoprojektor auf den kleinsten abgeschlossenen Unterraum von $\mathcal{H}$, der alle projizierten Mengen $E(\Delta_n)\mathcal{H}$ enthält.

Lemma 12.17 Sei E ein Spektralmaß auf $(X, \mathcal{S}, \mathcal{H})$. Dann gelten für alle $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{S}$:

- (i) E ist monoton wachsend, d.h. aus $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$ folgt $E(\Delta_1) \leq E(\Delta_2)$, d.h. $E(\Delta_1)\mathcal{H} \subseteq E(\Delta_2)\mathcal{H}$.
- (ii) Die Spektralmaße für disjunkte Mengen stehen orthogonal: Aus $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ folgt $E(\Delta_1) \perp E(\Delta_2)$, d.h. $E(\Delta_1)\mathcal{H} \perp E(\Delta_2)\mathcal{H}$.

- (iii) Das Spektralmaß des Durchschnitts ist das Produkt der Spektralmaße: Es gilt stets $E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1)E(\Delta_2)$.

Beweis: (i) Sei $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$, dann ist $\Delta_2 = \Delta_1 \cup (\Delta_2 \setminus \Delta_1)$ und es folgt mit der σ -Additivität

$$E(\Delta_2) = E(\Delta_1) + \underbrace{E(\Delta_2 \setminus \Delta_1)}_{\geq 0} \geq E(\Delta_1).$$

- (ii) Seien $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$, also gilt $\Delta_1 \subseteq \mathbb{C}\Delta_2$ und mit (i) folgt wegen $E(\mathbb{C}\Delta_2) + E(\Delta_2) = E(X) = I$

$$E(\Delta_1) \leq E(\mathbb{C}\Delta_2) = I - E(\Delta_2).$$

Weiter ist

$$\text{im} E(\Delta_1) \subseteq \text{im}(I - E(\Delta_2)) = \ker(E(\Delta_2)) = \text{im}(E(\Delta_2)^*)^\perp = \text{im}(E(\Delta_2))^\perp$$

und demnach $E(\Delta_1) \perp E(\Delta_2)$.

- (iii) Die Mengen $\Delta_1 \setminus \Delta_2$, $\Delta_2 \setminus \Delta_1$ und $\Delta_1 \cap \Delta_2$ sind paarweise disjunkt, also sind $E(\Delta_1 \setminus \Delta_2)$, $E(\Delta_2 \setminus \Delta_1)$ und $E(\Delta_1 \cap \Delta_2)$ nach (ii) paarweise orthogonal. Ferner haben wir

$$E(\Delta_1) = E(\Delta_1 \setminus \Delta_2) + E(\Delta_1 \cap \Delta_2)$$

$$E(\Delta_2) = E(\Delta_2 \setminus \Delta_1) + E(\Delta_1 \cap \Delta_2)$$

und damit folgt

$$E(\Delta_1)E(\Delta_2) = E(\Delta_1 \cap \Delta_2)^2 = E(\Delta_1 \cap \Delta_2).$$

Lemma 12.18 Sei E ein Spektralmaß für $(X, \mathcal{S}, \mathcal{H})$. Seien $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ fest. Dann ist $E_{\phi, \psi}$ mit

$$E_{\phi, \psi}(\Delta) := \langle \phi, E(\Delta)\psi \rangle$$

ein σ -additives, komplexes Maß auf $(X, \mathcal{S})$ und es gilt $\|E_{\phi, \psi}\| \leq \|\phi\| \|\psi\|$. Speziell für $\phi = \psi$ ist $E_{\phi, \phi}$ ein gewöhnliches Maß.

Beweis: Es gilt

$$E_{\phi, \psi}(\emptyset) = \langle \phi, \underbrace{E(\emptyset)\psi}_{=0} \rangle = 0.$$

Sei $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen, dann gilt

$$\begin{aligned} E_{\phi, \psi}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n\right) &= \langle \phi, E\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n\right)\psi \rangle \\ &= \langle \phi, \sum_{n \in \mathbb{N}} E(\Delta_n)\psi \rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \phi, E(\Delta_n)\psi \rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} E_{\phi, \psi}(\Delta_n). \end{aligned}$$

Ferner haben wir

$$\begin{aligned}
 \|E_{\phi,\psi}\| &= |E_{\phi,\psi}|(X) \\
 &= \bigvee_{Z \in \text{Part} X} \sum_{\Delta \in Z} |E_{\phi,\psi}(\Delta)| \\
 &= \bigvee_{Z \in \text{Part} X} \sum_{\Delta \in Z} \underbrace{\alpha_\Delta}_{|\cdot|=1} E_{\phi,\psi}(\Delta) \\
 &= \bigvee_{Z \in \text{Part} X} \sum_{\Delta \in Z} \alpha_\Delta \langle \phi, E(\Delta) \psi \rangle \\
 &= \bigvee_{Z \in \text{Part} X} \langle \phi, \sum_{\Delta \in Z} \alpha_\Delta E(\Delta) \psi \rangle \\
 &\leq \bigvee_{Z \in \text{Part} X} \underbrace{\|\phi\| \left\| \sum_{\Delta \in Z} \alpha_\Delta E(\Delta) \psi \right\|}_{\leq \|\psi\|} \\
 &= \|\phi\| \|\psi\|.
 \end{aligned}$$

■

Satz 12.19 Sei E ein Spektralmaß für $(X, \mathcal{S}, \mathcal{H})$ und $f \in \mathfrak{B}(X, \mathcal{S})$ eine Borelfunktion. Dann gibt es einen eindeutigen Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit folgender Eigenschaft: Für alle $\varepsilon > 0$ und für jede disjunkte Zerlegung $X = \bigcup_{k=1}^n \Delta_k$ mit $\Delta_k \in \mathcal{S}$ sowie

$$\bigvee_{x,y \in \Delta_k} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ und für alle $x_k \in \Delta_k$ gilt stets

$$\left\| T - \sum_{k=1}^n f(x_k) E(\Delta_k) \right\| < \varepsilon.$$

Ferner ist $\|T\| \leq \|f\|_\infty$ und wir schreiben $T = \int_X f \, dE$.

Beweis: Die Abbildung

$$(\phi, \psi) \mapsto \int_X f \, dE_{\phi,\psi}$$

ist eine stetige Sesquilinearform, denn es gilt

$$\left| \int_X f \, dE_{\phi,\psi} \right| \leq \|f\|_\infty E_{\phi,\psi}(X) = \|f\|_\infty \langle \phi, \psi \rangle \leq \|f\|_\infty \|\phi\| \|\psi\|.$$

Nach dem Satz 8.22 von RIESZ gibt es ein eindeutig bestimmtes $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit

$$\langle \phi, T\psi \rangle = \int_X f \, dE_{\phi,\psi}$$

und T erfüllt die geforderten Eigenschaften. Wegen $|\langle \phi, T\psi \rangle| \leq \|f\|_\infty \|\phi\| \|\psi\|$ gilt $\|T\| \leq \|f\|_\infty$.

Satz 12.20 Sei E ein Spektralmaß für $(X, \mathcal{S}, \mathcal{H})$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(X, \mathcal{S}) &\rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ \pi: f &\mapsto \int_X f \, dE \end{aligned}$$

eine $*$ -Darstellung von $\mathfrak{B}(X, \mathcal{S})$ in $\mathcal{H}$.

Beweis: Die Linearität von π ist einfach, ebenso die $*$ -Eigenschaft $\pi(\bar{f}) = \pi(f)^*$. Die Multiplikativität ist etwas aufwändiger; verwende dazu den vorigen Satz.

Folgerung 12.21 Sei X ein kompakter (metrisierbarer) Hausdorff-Raum, $\mathcal{S}$ die σ -Algebra der Borelmengen von X und E ein Spektralmaß für $(X, \mathcal{S}, \mathcal{H})$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(X) &\rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ \pi: f &\mapsto \int_X f \, dE \end{aligned}$$

eine $*$ -Darstellung von $\mathcal{C}(X)$ in $\mathcal{H}$.

Theorem 12.22 Sei X ein kompakter metrisierbarer Hausdorff-Raum und $\mathcal{S}$ die σ -Algebra der Borelmengen von X . Ferner sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum und $\pi: \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine $*$ -Darstellung. Dann existiert ein Spektralmaß E für $(X, \mathcal{S}, \mathcal{H})$, sodass

$$\pi(f) = \int_X f \, dE$$

für alle $f \in \mathcal{C}(X)$ gilt. Außerdem kommutiert $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit allen $\pi(f)$ genau dann, wenn T mit dem Spektralmaß E kommutiert.

Beweis: Nach dem Theorem 12.14 lässt sich π eindeutig zu einer σ -Darstellung $\tilde{\pi}$ von $\mathfrak{B}(X, \mathcal{S})$ in $\mathcal{H}$ fortsetzen. Setze

$$E(\Delta) := \tilde{\pi}(\chi_\Delta)$$

für jedes $\Delta \in \mathcal{S}$, dann ist E ein Spektralmaß für $(X, \mathcal{S}, \mathcal{H})$, denn:

- (i) Sei $\Delta \in \mathcal{S}$. Weil χ_Δ idempotent und selbstadjugiert ist und $\tilde{\pi}$ ein $*$ -Homomorphismus ist, ist auch $E(\Delta) = \tilde{\pi}(\chi_\Delta)$ idempotent und selbstadjugiert, d.h. ein Orthoprojektor.

(ii) Es gelten:

$$E(\emptyset) = \tilde{\pi}(\chi_{\emptyset}) = \tilde{\pi}(0) = 0$$

$$E(X) = \tilde{\pi}(\chi_X) = \tilde{\pi}(1) = I$$

(iii) Sei $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ eine Folge paarweiser disjunkter Mengen. Dann haben wir zunächst die endliche Additivität

$$E\left(\bigcup_{n \leq k} \Delta_n\right) = \tilde{\pi}(\chi_{\bigcup_{n \leq k} \Delta_n}) = \tilde{\pi}\left(\sum_{n \leq k} \chi_{\Delta_n}\right) = \sum_{n \leq k} \tilde{\pi}(\chi_{\Delta_n}) = \sum_{n \leq k} E(\Delta_n).$$

Weiter folgt

$$\begin{aligned} \|E\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n\right) - \sum_{n \leq k} E(\Delta_n)\phi\|^2 &= \|E\left(\bigcup_{n > k} \Delta_n\right)\phi\|^2 \\ &= \langle E\left(\bigcup_{n > k} \Delta_n\right)\phi, E\left(\bigcup_{n > k} \Delta_n\right)\phi \rangle \\ &= \langle \phi, E\left(\bigcup_{n > k} \Delta_n\right)\phi \rangle \\ &= \langle \phi, \tilde{\pi}(\chi_{\bigcup_{n > k} \Delta_n})\phi \rangle \rightarrow 0, \end{aligned}$$

denn $\tilde{\pi}$ ist eine σ -Darstellung. Also folgt die σ -Additivität

$$E\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} E(\Delta_n).$$

Nun verbleibt noch die Kommutierungseigenschaft. Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

$$\begin{aligned} &\forall f \in \mathfrak{B}(X, \mathcal{S}): T\pi(f) = \pi(f)T \\ \iff &\forall f \in \mathfrak{B}(X, \mathcal{S}) \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}: \int_X f \, dE_{\phi, T\psi} = \langle \phi, \pi(f)T\psi \rangle = \langle T^*\phi, \pi(f)\psi \rangle = \int_X f \, dE_{T^*\phi, \psi} \\ \iff &\forall \phi, \psi \in \mathcal{H}: E_{\phi, T\psi} = E_{T^*\phi, \psi} \\ \iff &\forall \Delta \in \mathcal{S} \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}: E_{\phi, T\psi}(\Delta) = \langle \phi, E(\Delta)T\psi \rangle = \langle \phi, TE(\Delta)\psi \rangle = E_{T^*\phi, \psi}(\Delta) \\ \iff &\forall \Delta \in \mathcal{S}: TE(\Delta) = E(\Delta)T. \end{aligned}$$

■

Theorem 12.23 (Spektraltheorem) Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein normaler Operator. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Spektralmaß auf der Borel- σ -Algebra $\mathcal{S}$ von $\sigma(T)$, sodass gelten:

(i) $T = \int_{\sigma(T)} z dE(z)$, und allgemein

$$f(T) = \int_{\sigma(T)} f(z) dE(z)$$

für alle $f \in \mathfrak{B}(\sigma(T))$.

(ii) Wenn $G \subseteq \sigma(T)$ offen und nichtleer, dann ist $E(G) \neq 0$, d.h. $\text{supp} E = \sigma(T)$.

(iii) Für alle $S \in \mathcal{C}^*(T)$ gilt: $ST = TS$ und $ST^* = T^*S \iff \forall \Delta \in \mathcal{S}: TE(\Delta) = E(\Delta)T$.

Beweis: (i) Der stetige Funktionenkalkül aus Theorem 11.41

$$\Phi_T: \begin{array}{l} \mathcal{C}(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{C}^*(T) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ f \mapsto f(T) \end{array}$$

ist eine $*$ -Darstellung von $\mathcal{C}(\sigma(T))$ in $\mathcal{H}$, also gibt es nach dem Theorem 12.22 ein Spektralmaß E für $(\sigma(T), \mathcal{S}, \mathcal{H})$ mit

$$f(T) = \Phi_T(f) = \int_{\sigma(T)} f dE.$$

Speziell für $f = \text{id}$ erhalten wir $T = \Phi_T(\text{id}) = \int_{\sigma(T)} \text{id} dE$.

(ii) Sei $G \subseteq \sigma(T)$ offen und nichtleer. Wähle ein kompaktes $A \subseteq G$. Auch $B := \sigma(T) \setminus G$ ist kompakt. Setze

$$u(x) := \frac{\|x - B\|}{\|x - A\| + \|x - B\|},$$

dann gilt $u(x) = 1$ für $x \in A$ und $u(x) = 0$ für $x \in B$. Weiter ist u stetig und es gilt $0 \leq u \leq \chi_G$ sowie $u \neq 0$, also folgt

$$E(G) = \tilde{\pi}(\chi_G) \geq \tilde{\pi}(u) = \pi(u) \neq 0.$$

(iii) Nach dem Theorem 12.22 kommutiert T mit dem Spektralmaß E genau dann, wenn T mit allen $\Phi_T(f)$ für $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ kommutiert. Die $\Phi_T(f)$ sind aber gerade Operatoren $S \in \mathcal{C}^*(T)$.

■

Bemerkung 12.24 (i) Die Darstellung

$$T = \int_{\sigma(T)} z \, dE(z)$$

heißt *Spektralzerlegung* von T .

(ii) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(X) &\rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ \Phi_T: \quad f &\mapsto f(T) = \int_{\sigma(T)} f(z) \, dE(z) \end{aligned}$$

heißt *Borelfunktionenkalkül*.

A Anhang

A.1 Lemma von Zorn

Definition (halbgeordnet, Kette, obere Schranke, maximales Element)

- (i) Eine Menge X heißt *halbgeordnet*, wenn in X eine binäre Relation $\leq \subseteq X \times X$ erklärt ist mit den Eigenschaften:
- $\Delta_X \subseteq \leq$ (reflexiv)
 - $\leq \cap \leq^{-1} \subseteq \Delta_X$ (antisymmetrisch)
 - $\leq ; \leq \subseteq \leq$ (transitiv)

- (ii) Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt *totalgeordnet* oder *Kette* in X , falls

$$Y \times Y \subseteq \leq \cup \leq^{-1}.$$

- (iii) Ein Element $x \in X$ heißt *obere Schranke* von $Y \subseteq X$, falls

$$Y \times \{x\} \subseteq \leq.$$

- (iv) Ein Element $x \in X$ heißt *maximales Element* von X , wenn

$$x \leq \subseteq \{x\}.$$

Ein maximales Element muss keine obere Schranke sein.

Lemma A.1 (ZORN) Eine halbgeordnete Menge, in der jede Kette eine obere Schranke besitzt, hat ein maximales Element.

Wir benutzen das Lemma von ZORN als Axiom. Das ZORNsche Lemma ist äquivalent zum Auswahlaxiom. Typische Anwendungen sind reine (nicht-konstruktive) Existenzaussagen; Standardbeispiele hierfür sind:

- Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.
- Jeder Hilbertraum besitzt eine Orthonormalbasis.

- Jedes Ideal eines unitären Rings ist in einem maximalen Ideal enthalten.

Literaturverzeichnis

- [DP02] DAVEY, Brian A.; PRIESTLEY, Hilary A.: *Lattices and Order*. 2. Auflage. Cambridge University Press, 2002. – ISBN 9780521784511
- [Fis05] FISCHER, Gerd: *Lineare Algebra*. 15. Auflage. Vieweg+Teubner, 2005. – ISBN 9783834800312
- [Heu06] HEUSER, Harro: *Funktionalanalysis: Theorie und Anwendung*. 4. Auflage. Vieweg+Teubner, 2006. – ISBN 9783835100268
- [JS05] JANTZEN, Jens C.; SCHWERMER, Joachim: *Algebra*. 1. Auflage. Springer, 2005. – ISBN 9783540213802
- [Que01] QUERENBURG, Boto von: *Mengentheoretische Topologie*. 3. Auflage. Springer, 2001. – ISBN 9783540677901
- [Wer06] WERNER, Dirk: *Einführung in die höhere Analysis*. 1. Auflage. Springer, 2006. – ISBN 9783540342854
- [Wer07] WERNER, Dirk: *Funktionalanalysis*. 6. Auflage. Springer, 2007. – ISBN 9783540725336

Index

- F_σ -Menge, 68
- G_δ -Menge, 68
- *-Algebra, 141
- *-Darstellung, 179
- C^* -Algebra, 141
- σ -Algebra, 172
- σ -Darstellung, 180
- äquivalent, 12, 51
- äußerer Punkt, 16

- abgeschlossen, 4, 15, 83
- abschließbar, 85
- Abschluss, 15, 85, 86
- absolutkonvex, 105
- absorbierend, 78
- abzählbarkompakt, 30
- abzählbarkonvex, 78
- adjugierten Operator, 122
- Algebra, 139
- algebraischer Dualraum, 89
- Annulator, 103

- Baireraum, 68
- Banachalgebra, 141
- Banachraum, 43
- Basis, 16
- Berührungspunkt, 16
- beschränkt, 53
- bidualer Raum, 99
- Borelfunktion, 180

- Cauchyfolge, 6
- Charakter, 154

- diagonalisierbar, 175
- dicht, 15
- Dimension, 120
- direkte Summe, 118
- dualer Operator, 101
- duales Paar, 109

- Eichfunktional, 95
- Einschränkung, 85
- endlichdimensional, 60
- erste Baire'sche Kategorie, 68
- erstes Abzählbarkeitsaxiom, 63

- fett, 68
- Filter, 38
- finale Topologie, 23
- Folge, 6
- folgenkompakt, 30
- folgenstetig, 6
- Fortsetzung, 85
- Fundamentalsystem, 107

- Gelfand-Transformation, 156
- gleichgradig stetig, 60
- Graph, 83

- Häufungspunkt, 16, 20
- halbgeordnet, 189
- hausdorffsch, 16
- Hilbertraum, 115
- Hyperebene, 96

- Ideal, 58, 144
- idempotent, 160

- initiale Topologie, 23
- innerer Punkt, 16
- Inneres, 16
- invariant, 128
- isolierter Punkt, 16
- isometrisch, 127

- Kette, 189
- kommutativ, 141
- kompakt, 27, 57
- konvergent, 6, 20, 40
- konvex, 90, 105
- kreisförmig, 105
- Kugel, 4

- linearer Operator, 53
- lokalkompakt, 30
- lokalconvexer Raum, 107

- Maß, 172
- mager, 68
- maximales Element, 189
- Metrik, 3
- metrischer Raum, 3
- metrisierbar, 14
- Minkowski-Funktional, 95
- multiplikativ, 154

- Netz, 20
- netzstetig, 22
- nirgends dicht, 68
- Norm, 43
- normal, 160
- normiert, 141

- obere Schranke, 189
- offen, 4, 15, 77
- orthogonal, 115
- orthogonales Komplement, 103, 118
- Orthonormalbasis, 119
- Orthonormalsystem, 115

- Orthoprojektor, 127

- Polare, 111
- positiv, 160
- positiver Operator, 55
- präkompakt, 32
- punktweise beschränkt, 60
- punktweise Konvergenz, 74

- Rand, 16
- Randpunkt, 16
- Raum
 - metrischer, 3
- reduzierend, 128
- reflexiv, 100
- reguläres Borelmaß, 173
- relativkompakt, 30

- schwächer, 51
- schwach konvergent, 131
- schwache Operatortopologie, 171
- schwache Topologie, 110
- selbstadjugiert, 160
- separabel, 63
- Skalarprodukt, 115
- Spektralmaß, 181
- Spektrum, 147
- stärker, 51
- starke Operatortopologie, 171
- stetig, 6, 18
- Subbasis, 16
- sublinear, 90
- summierbar, 119

- Teilnetz, 21
- Topologie, 14
- topologisch äquivalent, 11
- topologische Eigenschaft, 26
- topologischer Dualraum, 56
- topologischer Raum, 14
- topologischer Vektorraum, 105

totalbeschränkt, 32

totalgeordnet, 189

trennbar, 96

Umgebung, 4, 15

Umgebungsbasis, 16

unitär, 160

unitärer Raum, 115

unital, 141

Vervollständigung, 66

vollständig, 6

vollstetig, 131

zulässige Topologie, 110

zweite Baire'sche Kategorie, 68

zweites Abzählbarkeitsaxiom, 63

zyklisch, 176