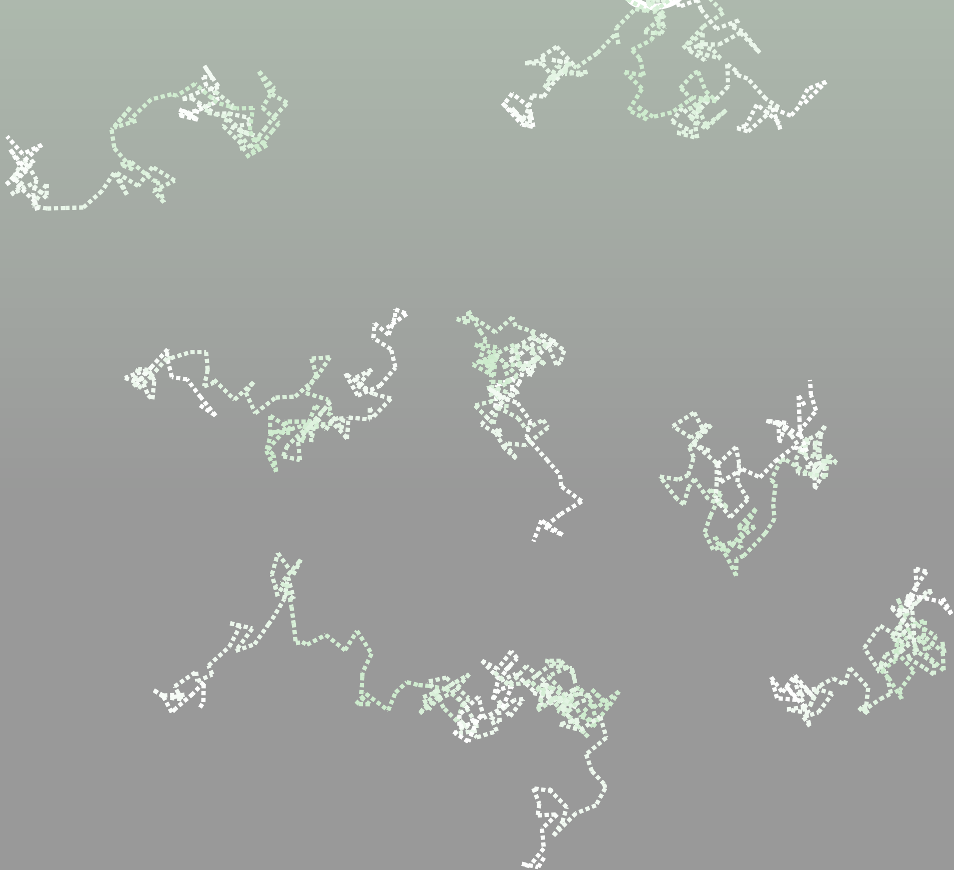
Francesco Kriegel

27. Mai 2011

Maß, Integral & Martingal



Inhaltsverzeichnis

Liste der noch zu erledigenden Punkte

To include a yellow note into a document insert the code:

```
\yellownote{
   Message into a yellow note. We just want to see how it
   will look.
}
```

Message into a yellow note. We just want to see how it will look.

and you will see the first yellow note at the margin of the page. Include more text then...

This text is only a test. This text is only a test.

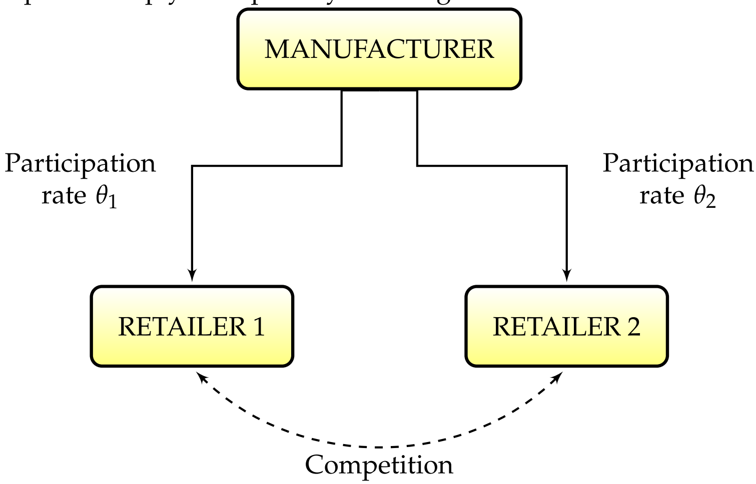
And when neccesary, change the size of the yellow note with the following command:

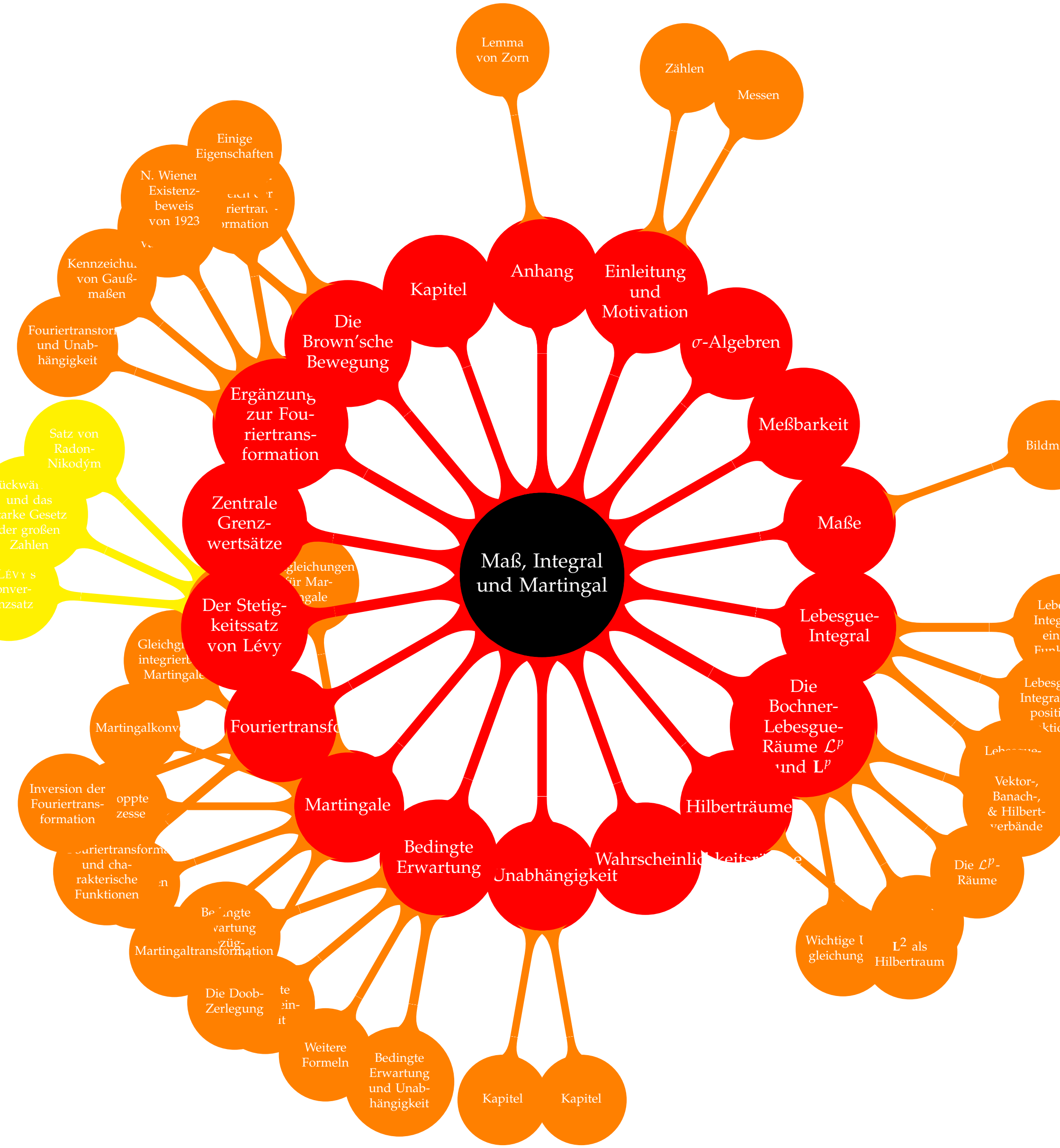
```
\resizeableyellownote{2.5}{1.5}{
   Resizeable yellow note.
}
```

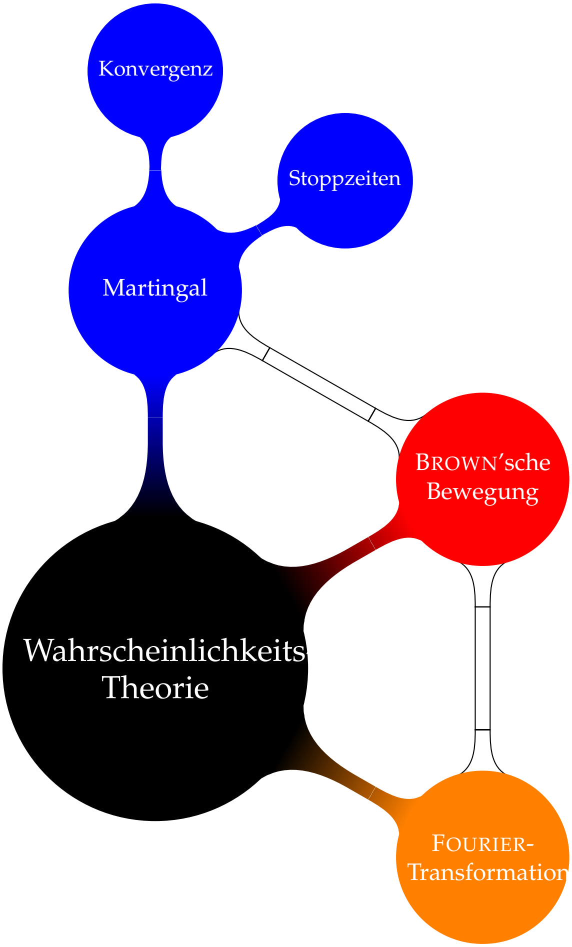
Resizeable yellow note.

to get the second one... Each of the arguments are: `{width}{height}` in centimeters. You do not need to include the unit in the argument. The instruction already knows it.

I hope this help you improve your design.




Maß, Integral und Martingal
Anhang
Lemma von Zorn
Einleitung und Motivation
Zählen
Messen
σ-Algebren
Meßbarkeit
Maße
Lebesgue-Integral
Die Bochner-Lebesgue-Räume $\mathcal{L}^p$ und L^p
Die $\mathcal{L}^p$-Räume
L^2 als Hilbertraum
Vektor-, Banach-, & Hilbert-verbände
Hilberträume
Wahrscheinlichkeitsräume
Unabhängigkeit
Kapitel
Kapitel
Bedingte Erwartung
Bedingte Erwartung und Unabhängigkeit
Weitere Formeln
Martingale
Die Doob-Zerlegung
Martingaltransformation
Inversion der Fouriertransformation
Fouriertransformation und charakterische Funktionen
Martingalkonvergenz
Gleichgradig integrierte Martingale
Der Stetigkeitssatz von Lévy
Zentrale Grenzwertsätze
Satz von Radon-Nikodým
Ergänzung zur Fouriertransformation
Kennzeichnung von Gaußmaßen
Fouriertransformation und Unabhängigkeit
N. Wieners Existenzbeweis von 1923
Einige Eigenschaften
Die Brown'sche Bewegung
Kapitel


Konvergenz
Stoppzeiten
Martingal
BROWN'sche Bewegung
Wahrscheinlichkeits-Theorie
FOURIER-Transformation

2 Einleitung und Motivation

Kapitelübersicht

2.1 Zählen

2.2 Messen

σ-Algebra 3.1

Sei Ω eine Menge. Ein System $\mathcal{A} \subseteq \wp(\Omega)$ von Teilmengen von Ω heißt *σ-Algebra* auf Ω, falls gelten:

(i) $\forall_{\mathcal{X} \subseteq_{\text{abz}} \mathcal{A}} \bigcup \mathcal{X} \in \mathcal{A}$ $(\cup_{\text{abz}}$-stabil)

(ii) $\forall_{X \in \mathcal{A}} \complement X \in \mathcal{A}$ ($\complement$-stabil)

Die Menge aller σ-Algebren auf Ω wird mit $\sigma\mathbf{Alg}(\Omega)$ bezeichnet.

Theorem 3.2

$\sigma\mathbf{Alg}(\Omega)$ ist ein Hüllensystem auf $\wp(\Omega)$, d.h. es gilt

(i) $\forall_{\mathbf{X} \subseteq \sigma\mathbf{Alg}(\Omega)} \bigcap \mathbf{X} \in \sigma\mathbf{Alg}(\Omega)$ ($\cap$-stabil)

Der zugehörige Hüllenoperator ist

$$\sigma : \begin{array}{rcl} \wp(\wp(\Omega)) & \to & \sigma\mathbf{Alg}(\Omega) \\ \mathcal{X} & \mapsto & \displaystyle\bigcap_{\substack{\mathcal{A} \in \sigma\mathbf{Alg}(\Omega) \\ \mathcal{A} \supseteq \mathcal{X}}} \mathcal{A} \end{array}$$

und hat folgende Eigenschaften:

(ii) $\forall_{\mathcal{X} \subseteq \wp(\Omega)} \mathcal{X} \subseteq \sigma(\mathcal{X})$ (extensiv)

(iii) $\forall_{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \subseteq \wp(\Omega)} \mathcal{X}_1 \subseteq \mathcal{X}_2 \implies \sigma(\mathcal{X}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{X}_2)$ (monoton)

(iv) $\forall_{\mathcal{X} \subseteq \wp(\Omega)} \sigma(\sigma(\mathcal{X})) = \sigma(\mathcal{X})$ (idempotent)

Generator 3.3

Für eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf Ω heißt ein Mengensystem $\mathcal{G} \subseteq \wp(\Omega)$ *Generator* von $\mathcal{A}$, wenn $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{A}$.

3.4

Lemma

Sei $\mathcal{A} \in \sigma\mathbf{Alg}(\Omega)$. Dann gelten:

(i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall_{\mathcal{X} \subseteq_{\text{abz}} \mathcal{A}} \bigcap \mathcal{X} \in \mathcal{A}$ ($\cap_{\text{abz}}$-stabil)

(iii) $\forall_{X\colon \Omega_0 \to \Omega}\, X^{-1}(\mathcal{A}) \in \sigma\mathbf{Alg}(\Omega_0)$ ($^{-1}$-stabil)

3.5

Borel-σ-Algebra

Für eine Topologie τ auf Ω heißt

$$\sigma(\tau)$$

Borel-σ-Algebra von τ. Die Borel-σ-Algebra der kanonischen Normtopologie auf $\mathbb{R}$ wird mit $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ oder kurz $\mathfrak{B}$ symbolisiert.

4 Meßbarkeit

messbarer Raum, messbare Menge, messbare Funktion 4.1

(i) Für eine Menge Ω und eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf Ω heißt

$$(\Omega, \mathcal{A})$$

messbarer Raum und eine Menge $A \in \mathcal{A}$ heißt $(\Omega, \mathcal{A})$-*messbar*.

(ii) Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ messbare Räume. Eine Abbildung $X\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ heißt $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$-$(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$-*messbar*, falls

$$X^{-1}(\mathcal{A}_2) \subseteq \mathcal{A}_1.$$

Theorem 4.2

Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ messbare Räume und $X\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ eine Abbildung. Dann gelten:

(i) X ist $(\Omega_1, \wp(\Omega_1))$-$(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$-messbar

(ii) X ist $(\Omega_1, X^{-1}(\mathcal{A}_2))$-$(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$-messbar

Korollar 4.3

$$\sigma(X) := X^{-1}(\mathcal{A}_2)$$

ist die kleinste σ-Algebra auf Ω_1, für die X messbar bezüglich $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ ist.

4.4 **Theorem**

Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ ein messbarer Raum, $X\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ eine Abbildung und $\mathcal{G} \subseteq \wp(\Omega_2)$. Dann gelten:

(i) $\sigma(X^{-1}(\mathcal{G})) = X^{-1}(\sigma(\mathcal{G}))$

(ii) X ist genau dann $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$-$(\Omega_2, \sigma(\mathcal{G}))$-messbar, wenn $X^{-1}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{A}_1$

4.5 **Lemma**

Seien $X\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ und $Y\colon \Omega_2 \to \Omega_3$ messbare Abbildungen. Dann ist auch deren Komposition $Y \circ X$ messbar.

4.6 **Stetigkeit und Messbarkeit**

Seien (Ω_1, τ_1) und (Ω_2, τ_2) topologische Räume. Dann ist jede (Ω_1, τ_1)-(Ω_2, τ_2)-stetige Abbildung auch $(\Omega_1, \sigma(\tau_1))$-$(\Omega_2, \sigma(\tau_2))$-messbar.

4.7 **Indikator**

Sei Ω eine Menge und $A \subseteq \Omega$. Die Abbildung

$$\mathbb{1}_A\colon \begin{array}{l} \Omega \to \{0,1\} \\ \omega \mapsto \begin{cases} 1 & (\omega \in A) \\ 0 & (\omega \notin A) \end{cases} \end{array}$$

heißt *Indikator* von A.

4.8 **Lemma**

Für eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf Ω ist eine Menge $A \subseteq \Omega$ genau dann $\mathcal{A}$-messbar, wenn $\mathbb{1}_A$ $\mathcal{A}$-$\mathfrak{B}$-messbar ist.

APPROBATIO: ($\Rightarrow$) Sei $B \in \mathfrak{B}$ eine Borelmenge. Es gilt

$$\mathbb{1}_A^{-1}(B) = \begin{cases} \Omega & (0, 1 \in B) \\ A & (0 \notin B, 1 \in B) \\ \complement A & (0 \in B, 1 \notin B) \\ \emptyset & (0, 1 \notin B). \end{cases}$$

Wenn also $A \in \mathcal{A}$ ist, dann folgt $\emptyset, \complement A, \Omega \in \mathcal{A}$ und damit $\mathbb{1}_A^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

($\Leftarrow$) Ist umgekehrt $\mathbb{1}_A^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle Borelmengen $B \in \mathfrak{B}$, dann gilt insbesondere $\mathbb{1}_A^{-1}(\{1\}) = A \in \mathcal{A}$, d.h. A ist $\mathcal{A}$-messbar.

■

reelle, numerische, einfache Funktion 4.9

Eine Abbildung mit Wertebereich $\mathbb{R}$ heißt *reelle Funktion* und eine Abbildung mit Wertebereich $\bar{\mathbb{R}}$ heißt *numerische Funktion*. Sei weiter $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω. Dann heißt eine reelle Funktion aus

$$\mathbf{S}(\mathcal{A}) := \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbb{1}_A \mid A \in \mathcal{A}\}$$

einfache Funktion.

Theorem 4.10

Eine Abbildung ist genau dann *einfach*, wenn sie von der Form

$$\sum_{A \in \mathcal{X}} \alpha_A \cdot \mathbb{1}_A$$

mit $\mathcal{X} \subseteq_{\text{endl}} \mathcal{A}$ und $\alpha \colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ ist.

Theorem 4.11

$(\mathbf{S}(\mathcal{A}), +, \cdot, \mathbb{R}, \leq, \wedge, \vee)$ ist ein Vektorverband.

4.12

Normaldarstellung

Für eine einfache Funktion $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißt eine Darstellung

$$X = \sum_{A \in \mathcal{X}} \alpha_A \cdot \mathbb{1}_A$$

mit einer endlichen $\mathcal{A}$-messbaren Partitionierung $\mathcal{X}$ von Ω und einer injektiven Koeffizientenabbildung $\alpha\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ *Normaldarstellung* von X.

4.13

Lemma

Jede einfache Funktion besitzt eine Normaldarstellung.

4.14

Korollar

Jede einfache Funktion aus $\mathbf{S}(\mathcal{A})$ ist $\mathcal{A}$-$\mathfrak{B}$-messbar.

Kapitelübersicht

Maß 5.1

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω. Ein *Maß* auf $\mathcal{A}$ ist eine Abbildung

$$\mu\colon \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall_{\mathcal{X} \subseteq_{\text{abz disj}} \mathcal{A}}\, \mu(\biguplus \mathcal{X}) = \sum \mu(\mathcal{X})$ (σ-additiv)

Dann heißt $(X, \mathcal{A}, \mu)$ auch *Maßraum*.

Definition 5.2

(i) Der Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bzw. das Maß μ heißt *σ-endlich*, wenn es eine Folge $\mathcal{X} \subseteq_{\text{abz}} \mathcal{A}$ gibt mit $\mu(\mathcal{X}) < \infty$ und $\bigcup \mathcal{X} = X$.

(ii) Der Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt *vollständig*, wenn für alle $B \in \mathcal{A}$ mit $\mu(B) = 0$ aus $A \subseteq B$ immer $A \in \mathcal{A}$ und $\mu(A) = 0$ folgt.

5.1 Bildmaße

5.3

Bildmaß

Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ messbare Räume und $X\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ eine $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_2$-messbare Abbildung. Dann ist für jedes Maß $\mu\colon \mathcal{A}_1 \to \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ auch

$$\mu_X\colon \begin{array}{r} \mathcal{A}_2 \to \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0} \\ A \mapsto \mu(X^{-1}(A)) \end{array}$$

ein Maß und heißt *Bildmaß* von μ unter X.

6 Lebesgue-Integral

Kapitelübersicht

6.1 Lebesgue-Integral für einfache Funktionen

Lebesgue-Integral 6.1

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $B \in \mathcal{A}$. Für eine positive einfache reelle Funktion mit Standarddarstellung $X = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \mathbb{1}_{A_k}$ heißt die Zahl

$$\int_B X \,\mathrm{d}\mu := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \mu(A_k \cap B) \in [0, \infty]$$

Lebesgue-Integral von X über B. Wenn das Lebesgue-Integral endlich ist, dann heißt X *μ-integrierbar*.

Lemma 6.2

Das Lebesgue-Integral ist additiv, positiv homogen und monoton.

6.3 **Lemma**

Für alle positiven einfachen reellen Funktionen X auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ist auch

$$\nu\colon A \mapsto \int_A X \, \mathrm{d}\mu$$

ein Maß auf $\mathcal{A}$.

6.2 Lebesgue-Integral für positive Funktionen

6.4 **Lebesgue-Integral**

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $B \in \mathcal{A}$. Für eine positive messbare reelle Funktion X ist das *Lebesgue-Integral* definiert als

$$\int_B X \, \mathrm{d}\mu := \bigvee_{\substack{Y \in \mathbf{S}(\mathcal{A})_+ \\ Y \leq X}} \int_B Y \, \mathrm{d}\mu.$$

Wenn das Lebesgue-Integral endlich ist, dann heißt X *μ-integrierbar*.

6.5 **Lemma**

Seien X, Y positive messbare reelle Funktionen und $A, B \in \mathcal{A}$. Dann gelten:

(i) $X|_A \leq Y|_A \implies \int_A X \, \mathrm{d}\mu \leq \int_A Y \, \mathrm{d}\mu$

(ii) $A \subseteq B \implies \int_A X \, \mathrm{d}\mu \leq \int_B X \, \mathrm{d}\mu$

(iii) $X|_A = 0 \implies \int_A X \, \mathrm{d}\mu = 0$

(iv) $\mu(A) = 0 \implies \int_A X \, \mathrm{d}\mu = 0$

Boppo-Levi 6.6

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine punktweise monoton wachsende und punktweise konvergente Folge von positiven messbaren reellen Funktionen. Dann gilt für alle $A \in \mathcal{A}$

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \int_A f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_A \bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Approbatio: $(\leq)$ Es gilt stets $f_n \leq \bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n$ und mit der Monotonie des Integrals folgt $\int f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \int \bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n \, \mathrm{d}\mu$. Der Übergang zum Supremum liefert nun das Gewünschte $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \int \bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n \, \mathrm{d}\mu$.

$(\geq)$ Sei $h \in \mathbf{S}_+$ mit $h \leq \bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n$, dann gibt es für jedes $\beta \in (0,1)$ und $\omega \in \Omega$ ein $n_{\beta,\omega} \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_{\beta,\omega}$ stets $\beta \cdot h(\omega) \leq f_n(\omega)$ ist. [1] Sei also $\beta \in (0,1)$, dann definieren wir die Mengen

$$B_n := \{\beta \cdot h \leq f_n\}.$$

Die B_n sind meßbar (denn h und alle f_n sind meßbar) und bilden eine wachsende Folge mit $B_n \uparrow \Omega$ für $n \uparrow \infty$. Nun gilt

$$\beta \cdot \mathbb{1}_{B_n} \cdot h \leq \mathbb{1}_{B_n} \cdot f_n \leq f_n.$$

Sei $h = \bigoplus_{k=0}^{l} \alpha_k \cdot \mathbb{1}_{A_k}$ eine Standarddarstellung, dann haben wir

$$\begin{aligned} \beta \cdot \sum_{k=0}^{l} \alpha_k \cdot \mu(A_k \cap B_n) &= \int \beta \cdot \mathbb{1}_{B_n} \cdot h \, \mathrm{d}\mu \\ &\leq \int f_n \, \mathrm{d}\mu \\ &\leq \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \, \mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

[1] Es gilt allgemein für konvergente wachsende Folgen $y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \ldots$ das Lemma: Wenn $x \leq \bigvee_{n\in\mathbb{N}} y_n$, dann $\forall_{\lambda\in(0,1)} \exists_{n_\lambda\in\mathbb{N}} \forall_{n\geq n_\lambda} \lambda \cdot x \leq y_n$. In der Tat: Sei $\lambda \in (0,1)$, dann gilt $\lambda \cdot x < x$ und damit $\lambda \cdot x < \bigvee_{n\in\mathbb{N}} y_n$. Angenommen, es gäbe für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $k_n \geq n$ mit $\lambda \cdot x > y_{k_n}$ und dann wäre $\lambda \cdot x \geq \bigvee_{n\in\mathbb{N}} y_{k_n} = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} y_n$ im Widerspruch zur Voraussetzung $\lambda \cdot x < \bigvee_{n\in\mathbb{N}} y_n$. Dass beide Suprema übereinstimmen, sieht man so: Zunächst gilt $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} y_{k_n} \leq \bigvee_{n\in\mathbb{N}} y_n$, denn (y_{n_k}) ist eine Teilfolge von (y_n). Andererseits folgt wegen $k_n \geq n$ stets $y_{k_n} \geq y_n$, also ist auch $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} y_{k_n} \geq \bigvee_{n\in\mathbb{N}} y_n$.

Aufgrund der Stetigkeit eines Maßes von unten folgt

$$\mu(A_k \cap B_n) \uparrow \mu(A_k \cap \Omega) = \mu(A_k)$$

für $n \uparrow \infty$ und weiter gilt nun

$$\beta \cdot \sum_{k=0}^{l} \alpha_k \cdot \mu(A_k) = \beta \cdot \int h \,\mathrm{d}\mu \leq \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Schließlich lassen wir $\beta \to 1$ gehen und der Übergang zum Supremum über alle positiven einfachen Funktionen $h \leq \bigvee_{n \in \mathbb{N}} f_n$ liefert dann

$$\int \bigvee_{n \in \mathbb{N}} f_n \,\mathrm{d}\mu = \bigvee_{\substack{h \in \mathbf{S}_+ \\ h \leq \bigvee_{n \in \mathbb{N}} f_n}} \int h \,\mathrm{d}\mu \leq \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

■

6.7 **Lemma**

Sei X eine positive messbare reelle Funktion und $A \in \mathcal{A}$. Dann gilt

$$\int_A X \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \mathbb{1}_A \cdot X_n \,\mathrm{d}\mu.$$

6.8 **Lemma**

Das Lebesgue-Integral ist additiv, positiv homogen und monoton.

6.9 **Korollar**

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von positiven messbaren reellen Funktionen. Dann ist $\sum_{n \in \mathbb{N}} X_n$ messbar und es gilt

$$\int_A \sum_{n \in \mathbb{N}} X_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_A X_n \,\mathrm{d}\mu.$$

6.3 Lebesgue-Integral für reelle Funktionen

Lebesgue-Integral 6.10

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $B \in \mathcal{A}$. Für eine messbare reelle Funktion X mit μ-integrierbaren Positiv- und Negativteil ist das *Lebesgue-Integral* definiert als

$$\int_B X \, \mathrm{d}\mu := \int_B X_+ \, \mathrm{d}\mu - \int_B X_- \, \mathrm{d}\mu.$$

Wenn das Lebesgue-Integral endlich ist, dann heißt X *μ-integrierbar*.

Theorem 6.11

Die Menge

$$\mathbf{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$$

der μ-integrierbaren reellen Funktionen bildet einen Banachverband.

Lemma 6.12

Das Lebesgue-Integral ist ein positives homogenes Funktional auf der Menge der μ-integrierbaren reellen Funktionen und für alle konvexen reellen Funktionen φ gilt

$$\varphi\left(\int_A X \, \mathrm{d}\mu\right) \leq \int_A \varphi \circ X \, \mathrm{d}\mu.$$

6.13

LEBESGUE's Konvergenzkriterium

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Funktionen, die μ-fast überall gegen eine messbare Funktion

$$X = \lim_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

konvergiert. Wenn $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} |X_n|$ p-fach μ-integrierbar ist, dann sind auch X und alle X_n p-fach μ-integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \|X_n - X\|_p = 0,$$

d.h. $X_n \xrightarrow{\mathbf{L}^p} X$, sowie

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \|X_n\|_p = \|X\|_p = \|\lim_{n\in\mathbb{N}} X_n\|_p.$$

auch: majorisierte Konvergenz, dominierte Konvergenz

7 Die Bochner-Lebesgue-Räume $\mathcal{L}^p$ und $\mathbf{L}^p$

Kapitelübersicht

7.1 Vektor-, Banach-, & Hilbertverbände

Definition 7.1

(i) $(\mathbf{G}, +)$ heißt *abelsche Gruppe*, wenn $+\colon \mathbf{G} \times \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ eine binäre Operation auf $\mathbf{G}$ ist und folgende Eigenschaften hat:

- $\forall x, y, z \in \mathbf{G}\colon x + (y + z) = (x + y) + z$ (assoziativ)
- $\forall x, y \in \mathbf{G}\colon x + y = y + x$ (kommutativ)
- $\exists o \in \mathbf{G}\ \forall x \in \mathbf{G}\colon x + o = x$ (neutrales Element)
- $\forall x \in \mathbf{G}\ \exists (-x) \in \mathbf{G}\colon x + (-x) = o$(inverses Element)

(ii) $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ heißt *Körper*, wenn $(\mathbb{K}, +)$ und $(\mathbb{K}, \cdot)$ abelsche Gruppen mit der folgenden Eigenschaft sind:

- $\forall x, y, z \in \mathbb{K}\colon x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (distributiv)

(iii) $(\mathbf{V}, +, \cdot, \mathbb{K}, \oplus, \odot)$ heißt *Vektorraum*, wenn $(\mathbb{K}, \oplus, \odot)$ ein Körper, $(\mathbf{V}, +)$ eine abelsche Gruppe und $\cdot\colon \mathbb{K} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ eine äußere Operation von $\mathbb{K}$ auf $\mathbf{V}$ ist mit den Eigenschaften:

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}\ \forall x \in \mathbf{V}\colon (\alpha \odot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$ (regulär)
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}\ \forall x \in \mathbf{V}\colon (\alpha \oplus \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ (distributiv)
- $\forall \alpha \in \mathbb{K}\ \forall x, y \in \mathbf{V}\colon \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$(distributiv)
- $\exists 1 \in \mathbb{K}\ \forall x \in \mathbf{V}\colon 1 \cdot x = x$ (unitär)

(iv) Ein *geordneter Vektorraum* $(\mathbf{V}, +, \cdot, \leq, \mathbb{K}, \oplus, \odot)$ ist ein Vektorraum $(\mathbf{V}, +, \cdot, \mathbb{K}, \oplus, \odot)$ und eine geordnete Menge $(\mathbf{V}, \leq)$, sodass gelten:

- $\forall x, y, z \in \mathbf{V}\colon x \leq y \implies x + z \leq y + z$ (verträglich)
- $\forall x, y \in \mathbf{V}\ \forall \alpha \in \mathbb{K}\colon x \leq y \implies \alpha \cdot x \leq \alpha \cdot y$ (verträglich)

(v) Ein *Vektorverband* $(\mathbf{V}, +, \cdot, \leq, \wedge, \vee, \mathbb{K}, \oplus, \odot)$ ist ein geordneter Vektorraum $(\mathbf{V}, +, \cdot, \leq, \mathbb{K}, \oplus, \odot)$ und ein Verband $(\mathbf{V}, \leq, \wedge, \vee)$.

(vi) Ein *normierter Vektorverband* $(\mathbf{V}, +, \cdot, \leq, \wedge, \vee, \|\cdot\|, \mathbb{K}, \oplus, \odot)$ ist ein normierter Raum $(\mathbf{V}, \|\cdot\|)$ und ein Vektorverband $(\mathbf{V}, +, \cdot, \leq, \wedge, \vee, \mathbb{K}, \oplus, \odot)$ mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$\forall_{v_1, v_2 \in \mathbf{V}} |v_1| \leq |v_2| \implies \|v_1\| \leq \|v_2\|.$$

7.2

Lemma

Sei $\mathbf{V}$ ein geordneter Vektorraum mit

$$\mathbf{V}_+ \subseteq \mathbf{V}$$

für $v_+ := v \vee 0$. Dann ist $\mathbf{V}$ ein Vektorverband.

APPROBATIO: Sei $X \in \mathbf{V}$, dann ist $X^+ \in \mathbf{V}$ und damit auch $X^- = X^+ - X \in \mathbf{V}$ sowie $|X| = X^+ + X^- \in \mathbf{V}$. Dann gilt

$$X \vee Y = \frac{1}{2} \cdot (X + Y + |X - Y|) \in \mathbf{V}$$

und

$$X \wedge Y = \frac{1}{2} \cdot (X + Y - |X - Y|) \in \mathbf{V}$$

für alle $X, Y \in \mathbf{V}$. ∎

7.3

Lemma

Sei $\mathbf{H}$ ein Hilbertraum und ein Vektorverband. Dann ist $\mathbf{H}$ genau dann ein Hilbertverband, wenn

$$\underset{x \in \mathbf{H}}{\forall} \langle x_+, x_- \rangle = 0$$

und

$$\underset{x,y \in \mathbf{H}_+}{\forall} \langle x, y \rangle \geq 0.$$

APPROBATIO: $(\Rightarrow)$ Sei $\mathbf{H}$ ein Hilbertverband, d.h. insbesondere ist $\|\cdot\|$ eine Verbandsnorm, und $X, Y \in \mathbf{H}$. Dann folgt aus $|X| \leq |Y|$ stets $\|X\| \leq \|Y\|$. Wegen $||X|| = |X|$ gilt $\||X|\| = \|X\|$ und mit

$$\|X\|^2 = \langle X, X \rangle = \langle X^+ - X^-, X^+ - X^- \rangle = \|X^+\|^2 + \|X^-\|^2 - 2 \cdot \langle X^+, X^- \rangle$$

sowie

$$\||X|\|^2 = \langle |X|, |X| \rangle = \langle X^+ + X^-, X^+ + X^- \rangle = \|X^+\|^2 + \|X^-\|^2 + 2 \cdot \langle X^+, X^-$$

erhalten wir die erste Behauptung $\langle X^+, X^- \rangle = 0$. Seien nun $X, Y \in \mathbf{H}_+$. Aus $|X - Y| \leq |X + Y|$ folgt $\|X - Y\| \leq \|X + Y\|$. Andererseits gelten

$$\|X - Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2 - 2 \cdot \langle X, Y \rangle$$

und analog

$$\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2 \cdot \langle X, Y \rangle.$$

Es ergibt sich $-2 \cdot \langle X, Y \rangle \leq 2 \cdot \langle X, Y \rangle$, also die zweite Behauptung $\langle X, Y \rangle \geq 0$.

$(\Leftarrow)$ Für alle $X \in \mathbf{H}$ gelte $\langle X_+, X_- \rangle = 0$ und für alle $X, Y \in \mathbf{H}_+$ gelte $\langle X, Y \rangle \geq 0$. Dann haben wir stets $\||X|\|^2 = \|X^+\|^2 + \|X^-\|^2 = \|X\|^2$. Seien nun $|X| \leq |Y|$, d.h. $|Y| - |X| \geq 0$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\|Y\|^2 &= \||Y|\|^2 \\
&= \langle |Y| - |X|, |Y| - |X| \rangle + \langle |X|, |Y| \rangle + \langle |Y| - |X|, |X| \rangle \\
&= \underbrace{\||Y| - |X|\|^2}_{\geq 0} + \underbrace{2 \cdot \langle \underbrace{|Y| - |X|}_{\geq 0}, \underbrace{|X|}_{\geq 0} \rangle}_{\geq 0} + \||X|\|^2 \\
&\geq \||X|\|^2 \\
&= \|X\|^2
\end{aligned}$$

$\| \cdot \|$ ist schließlich eine Verbandsnorm und $\mathbf{H}$ ein Hilbertverband. ■

Korollar 7.4

Für einen normierten Vektorverband $\mathbf{H}$ gilt

$$\underset{x \in \mathbf{H}}{\forall} \||x|\| = \|x\|.$$

Lemma 7.5

Falls die Verbandoperationen stetig in 0 sind, dann sind sie schwach-stetig.

7.6 **Theorem**

Wenn

$$\underset{x\in\mathbf{H}}{\forall}\ |||x||| \leq \|x\|$$

gilt, dann sind die Verbandoperationen stetig.

7.7 **Korollar**

Für einen normierten Vektorverband sind die Verbandoperationen stetig.

7.2 Die $\mathcal{L}^p$-Räume

7.8 **$\mathcal{L}^p$-Raum**

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(B, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $p \in [1, \infty)$. Setze

$$\|X\|_p := \left(\int_{\omega\in\Omega} \|X(\omega)\|^p \,\mathrm{d}\mu(\omega)\right)^{\frac{1}{p}},$$

dann ist

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, B, \|\cdot\|) := \{X\colon \Omega \to B \mid X^{-1}(\sigma(\tau_{\|\cdot\|})) \subseteq \mathcal{A}, \|X\|_p^p < \infty\}$$

die Menge aller $\mathcal{A}$-$\sigma(\tau_{\|\cdot\|})$-messbaren und p-fach μ-integrierbaren Abbildungen.

7.9 **Theorem**

$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, B, \|\cdot\|)$ ist ein halbnormierter Vektorverband.

Lemma 7.10

$$\underset{f\in\mathcal{L}^\infty}{\forall}\ \underset{\substack{N\in\mathcal{A}\\ \mu(N)=0}}{\exists}\ \underset{\omega\in\Omega\setminus N}{\forall} |f(\omega)| \leq \|f\|_\infty < \infty$$

APPROBATIO: Sei $f \in \mathcal{L}^\infty$, dann ist

$$\|f\|_\infty = \bigwedge_{\substack{N\in\mathcal{A}\\ \mu(N)=0}} \bigvee_{\omega\in\Omega\setminus N} |f(\omega)| < \infty.$$

Das Infimum wird sogar angenommen, denn es gibt eine Folge $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von μ-Nullmengen mit

$$\|f\|_\infty \leq \bigvee_{\omega\in\Omega\setminus N_n} |f(\omega)| \leq \|f\|_\infty + \frac{1}{n}$$

Die Vereinigung $N := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$ ist wieder eine μ-Nullmenge und dann gilt

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \|f\|_\infty \leq \bigvee_{\omega\in\Omega\setminus N} |f(\omega)| \overset{\substack{N_n\subseteq N\\ \Downarrow}}{\leq} \bigvee_{\omega\in\Omega\setminus N_n} |f(\omega)| \leq \|f\|_\infty + \frac{1}{n}$$

Der Grenzwertübergang $n \to \infty$ liefert $\bigvee_{\omega\in\Omega\setminus N} |f(\omega)| = \|f\|_\infty$ und damit schließlich die Behauptung $\forall_{\omega\in\Omega\setminus N} |f(\omega)| \leq \|f\|_\infty$. ∎

Lemma 7.11

$$f \in \mathcal{L}^\infty \iff \underset{K\in\mathbb{N}}{\exists} \mu(\{|f| > K\}) = 0$$

APPROBATIO: ($\Rightarrow$) Sei $f \in \mathcal{L}^\infty$, dann gibt es also eine μ-Nullmenge N, sodass das Supremum aller Werte $|f(\omega)|$ für $\omega \in \Omega \setminus N$ gerade mit dem Wert der ∞-Norm $\|f\|_\infty$ übereinstimmt. Damit folgt sofort, dass jeder Wert $|f(\omega)|$ kleiner gleich $\|f\|_\infty$ sein muss für

$\omega \in \complement N$, und es folgt, dass für $|f(\omega)| > \|f\|_\infty$ das ω in N liegen muss. Damit erhalten wir die Behauptung

$$\mu(\{|f| > \|f\|_\infty\}) \leq \mu(N) = 0$$

für $K := \|f\|_\infty$.

($\Leftarrow$) Sei umgekehrt $K \in \mathbb{N}$, sodass $\{|f| > K\}$ eine μ-Nullmenge ist. Dann folgt $\bigvee_{\omega \in \Omega \setminus \{|f|>K\}} |f(\omega)| \leq K$ und damit $\|f\|_\infty \leq K < \infty$.

■

7.3 Die L^p-Räume

7.12

Lemma

Die Relation $\overset{\text{f.s.}}{=}$ auf $\mathfrak{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, B, \|\cdot\|)$ mit

$$X_1 \overset{\text{f.s.}}{=} X_2 \;:\Longleftrightarrow\; \mu(\{X_1 \neq X_2\}) = 0$$

ist eine Äquivalenzrelation.

7.13

Bochner-Lebesgue-Raum, L^p-Raum

$$\mathbf{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, B, \|\cdot\|) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, B, \|\cdot\|) \big/ \overset{\text{f.s.}}{=}$$

heißt *Bochner-Lebesgue-Raum* zu $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und $(B, \|\cdot\|)$ mit der Ordnung p.

7.14

Theorem

$\mathbf{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, B, \|\cdot\|)$ ist ein Banachverband und ein Ideal in $\mathbf{L}^0(\Omega, \mathcal{A}, \mu, B, \|\cdot\|)$.

7.4 Wichtige Ungleichungen

Lemma 7.15

$$\underset{t\in[0,1]}{\forall}\ \underset{x,y\in[0,\infty)}{\forall}\ x^t \cdot y^{1-t} \leq t \cdot x + (1-t) \cdot y$$

APPROBATIO: Seien $t \in [0,1]$ und $x, y \in [0,\infty)$. Wir untersuchen die Funktion

$$h_t : z \mapsto t \cdot z + (1-t) - z^t.$$

Für alle $z \in [0,\infty)$ gilt mit Hilfe der BERNOULLI-Ungleichung

$$h_t(z) = t \cdot z + (1-t) - z^t = (1 + t \cdot z) - t - z^t \geq \underbrace{(1+z)^t}_{\substack{=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{t}{n}\cdot z^n \\ \geq z^t+1 \geq z^t+t}} - t - z^t \geq 0.$$

Wir wählen nun speziell $z = \frac{x}{y} \in [0,\infty)$, dann folgt $t \cdot \frac{x}{y} + (1-t) - \frac{x^t}{y^t} \geq 0$ und Umstellen ergibt die Behauptung. ■

YOUNG-Ungleichung 7.16

$$\underset{\substack{p,q\in[1,\infty] \\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1}}{\forall}\ \underset{x,y\in[0,\infty]}{\forall}\ x \cdot y \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

APPROBATIO: Das folgt aus dem vorhergehenden Lemma, indem wir $t = \frac{1}{p}$ bzw. $1 - t = \frac{1}{q}$ wählen und x durch x^p sowie y durch y^q ersetzen. ■

Theorem 7.17

$$\underset{p\in[1,\infty]}{\forall}\ \underset{f\in\mathcal{L}^p}{\forall}\ \underset{g\in\mathcal{L}^\infty}{\forall}\ \|f \cdot g\|_p \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_\infty$$

APPROBATIO: Wir machen eine Fallunterscheidung für p, denn die Normen $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_\infty$ müssen getrennt behandelt werden.

($p = \infty$) Seien $f \in \mathcal{L}^\infty$ und $g \in \mathcal{L}^\infty$, dann gibt es nach Lemma 7.10 eine μ-Nullmenge $N_f \in \mathcal{A}$ mit $\forall_{\omega \in \Omega \setminus N_f} |f(\omega)| \leq \|f\|_\infty < \infty$ und eine μ-Nullmenge $N_g \in \mathcal{A}$ mit $\forall_{\omega \in \Omega \setminus N_g} |g(\omega)| \leq \|g\|_\infty < \infty$. Damit gilt dann

$$\begin{aligned}
\|f \cdot g\|_\infty &= \bigwedge_{\substack{N \in \mathcal{A} \\ \mu(N)=0}} \bigvee_{\omega \in \Omega \setminus N} |(f \cdot g)(\omega)| \\
&\leq \bigwedge_{\substack{N \in \mathcal{A} \\ \mu(N)=0 \\ N \subseteq N_g}} \bigvee_{\omega \in \Omega \setminus N} |f(\omega)| \cdot \underbrace{|g(\omega)|}_{\leq \|g\|_\infty} \\
&\leq \|g\|_\infty \cdot \bigwedge_{\substack{N \in \mathcal{A} \\ \mu(N)=0 \\ N \subseteq N_g}} \bigvee_{\omega \in \Omega \setminus N} |f(\omega)| \\
&\leq \|g\|_\infty \cdot \bigwedge_{\substack{N \in \mathcal{A} \\ \mu(N)=0 \\ N \subseteq N_g \\ N \subseteq N_f}} \bigvee_{\omega \in \Omega \setminus N} \underbrace{|f(\omega)|}_{\leq \|f\|_\infty} \\
&\leq \|g\|_\infty \cdot \|f\|_\infty
\end{aligned}$$

($p < \infty$) Sei $f \in \mathcal{L}^p$ und $g \in \mathcal{L}^\infty$, d.h. $\|f\|_p < \infty$ und es gibt eine μ-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ mit $\forall_{\omega \in \Omega \setminus N} |g(\omega)| \leq \|g\|_\infty < \infty$. Damit gilt dann

$$\begin{aligned}
\|f \cdot g\|_p^p &= \int_\Omega |f \cdot g|^p \, \mathrm{d}\mu \\
&= \int_{\Omega \setminus N} |f|^p \cdot \underbrace{|g|}_{\leq \|g\|_\infty}{}^p \, \mathrm{d}\mu \\
&\leq \|g\|_\infty^p \cdot \int_{\Omega \setminus N} |f|^p \, \mathrm{d}\mu \\
&= \|g\|_\infty^p \cdot \|f\|_p^p
\end{aligned}$$

■

7.18 **Korollar**

$$\forall_{p \in [1,\infty]} \; \mathcal{L}^p \cdot \mathcal{L}^\infty \subseteq \mathcal{L}^p$$

HÖLDER-Ungleichung 7.19

$$\underset{\substack{p,q\in[1,\infty]\\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1}}{\forall}\ \underset{f\in\mathcal{L}^p}{\forall}\ \underset{g\in\mathcal{L}^q}{\forall}\ \|f\cdot g\|_1 \leq \|f\|_p\cdot\|g\|_q$$

APPROBATIO: Wir machen eine Fallunterscheidung für p und q, denn die Normen $\|\cdot\|_p$ bzw. $\|\cdot\|_q$ und $\|\cdot\|_\infty$ müssen getrennt behandelt werden.

$(p,q\in\{1,\infty\})$ Das ist gerade Theorem 7.17 für $p=1$ und $q=\infty$.

$(p,q\in(1,\infty))$ Sei $f\in\mathcal{L}^p$ und $g\in\mathcal{L}^q$. Nach der YOUNG-Ungleichung YOUNG-Ungleichung 7.16 gilt für $x(\omega):=\frac{|f(\omega)|}{\|f\|_p}$ und $y(\omega):=\frac{|g(\omega)|}{\|g\|_q}$

$$\frac{|f(\omega)|}{\|f\|_p}\cdot\frac{|g(\omega)|}{\|g\|_q}\leq\frac{|f(\omega)|^p}{p\cdot\|f\|_p^p}+\frac{|g(\omega)|^q}{q\cdot\|g\|_q^q}$$

Integration über Ω liefert

$$\begin{aligned}\frac{\|f\cdot g\|_1}{\|f\|_p\cdot\|g\|_q} &= \int_\Omega \frac{|f(\omega)|}{\|f\|_p}\cdot\frac{|g(\omega)|}{\|g\|_q}\,\mathrm{d}\mu\\ &\leq \int_\Omega \frac{|f(\omega)|^p}{p\cdot\|f\|_p^p}\,\mathrm{d}\mu+\int_\Omega\frac{|g(\omega)|^q}{q\cdot\|g\|_q^q}\,\mathrm{d}\mu\\ &=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\\ &=1\end{aligned}$$

und damit haben wir $\|f\cdot g\|_1\leq\|f\|_p\cdot\|g\|_q<\infty$, also $f\cdot g\in\mathcal{L}^1$.

■

Korollar 7.20

$$\underset{\substack{p,q\in[1,\infty]\\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1}}{\forall}\ \mathcal{L}^p\cdot\mathcal{L}^q\subseteq\mathcal{L}^1$$

7.21 **Lemma**

$$\underset{p\in[1,\infty)}{\forall}\ \underset{x,y\in\mathbb{R}}{\forall}\ |x+y|^p \leq 2^{p-1}\cdot(|x|^p+|y|^p)$$

APPROBATIO: Sei $p\in[1,\infty)$ und $x,y\in\mathbb{R}$. Die Funktion $t\mapsto|t|^p$ ist konvex, also gilt $|\frac{x+y}{2}|^p \leq \frac{|x|^p+|y|^p}{2}$ und damit folgt durch Multiplikation mit 2^p sofort die Behauptung. ■

7.22 **Lemma**

$$\underset{p\in[1,\infty)}{\forall}\ \underset{f,g\in\mathcal{L}^p}{\forall}\ \|f+g\|_p^p \leq 2^{p-1}\cdot(\|f\|_p^p+\|g\|_p^p)$$

APPROBATIO: Es gilt unter Beachtung des vorigen Lemmas

$$\|f+g\|_p^p = \int_\Omega |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega 2^{p-1}\cdot(|f|^p+|g|^p)\,\mathrm{d}\mu = 2^{p-1}\cdot\left(\|f\|_p^p+\|g\|_p^p\right).$$

■

7.23 **Korollar**

$$\underset{p\in[1,\infty)}{\forall}\ \mathcal{L}^p+\mathcal{L}^p\subseteq\mathcal{L}^p$$

7.24 **MINKOWSKI-Ungleichung**

$$\underset{p\in[1,\infty]}{\forall}\ \underset{f,g\in\mathcal{L}^p}{\forall}\ \|f+g\|_p \leq \|f\|_p+\|g\|_p$$

APPROBATIO: Wähle $q := \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}$ und es gilt $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_\Omega |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_\Omega |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_\Omega |f| \cdot |f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega |g| \cdot |f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu \\
&= \||f| \cdot |f+g|^{p-1}\|_1 + \||g| \cdot |f+g|^{p-1}\|_1
\end{aligned}$$

Wegen
$\||f+g|^{p-1}\|_q^q = \int_\Omega \left(|f+g|^{p-1}\right)^q \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu = \|f+g\|_p^p < \infty$
gilt $|f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q$ und mit der HÖLDER-Ungleichung
HÖLDER-Ungleichung 7.19 folgt

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &\leq \|f\|_p \cdot \||f+g|^{p-1}\|_q + \|g\|_p \cdot \||f+g|^{p-1}\|_q \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \||f+g|^{p-1}\|_q \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \|f+g\|_p^{p-1}
\end{aligned}$$

und mit einer Division durch $\|f+g\|_p^{p-1}$ erhalten wir die Behauptung. ■

HÖLDER-Interpolation 7.25

$$\underset{1\leq p\leq r\leq q\leq\infty}{\forall} \quad \underset{f\in\mathcal{L}^p\cap\mathcal{L}^q}{\forall} \|f\|_r \leq \|f\|_p^s \cdot \|f\|_q^{1-s} \quad \text{mit } s := \frac{p}{r} \cdot \frac{q-r}{q-p}$$

APPROBATIO: Zuerst wählen wir $t \in (0,1)$ mit $r = t \cdot p + (1-t) \cdot q$, d.h. $t = \frac{r-q}{p-q}$, dann gilt

$$\|f\|_r^r = \||f|^r\|_1 = \||f|^{t\cdot p} \cdot |f|^{(1-t)\cdot q}\|_1$$

Es gilt $\frac{1}{\frac{1}{t}} + \frac{1}{\frac{1}{1-t}} = 1$. Weiterhin ist $|f|^{t\cdot p} \in \mathcal{L}^{\frac{1}{t}}$ wegen

$$\||f|^{t\cdot p}\|_{\frac{1}{t}} = \left(\int_\Omega |f|^{\frac{t\cdot p}{t}} \,\mathrm{d}\mu\right)^t = \left(\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{t\cdot p}{p}} = \|f\|_p^{t\cdot p} < \infty$$

und analog gilt $|f|^{(1-t)\cdot q} \in \mathcal{L}^{\frac{1}{1-t}}$, also können wir die HÖLDER-Ungleichung HÖLDER-Ungleichung 7.19 anwenden und erhalten

$$\|f\|_r^r \leq \||f|^{t\cdot p}\|_{\frac{1}{t}} \cdot \||f|^{(1-t)\cdot q}\|_{\frac{1}{1-t}} = \|f\|_p^{t\cdot p} \cdot \|f\|_q^{(1-t)\cdot q}$$

Die Potenzierung mit $\frac{1}{r}$ liefert nun

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\frac{t\cdot p}{r}} \cdot \|f\|_q^{\frac{(1-t)\cdot q}{r}}$$

Schließlich setzen wir $s := \frac{t\cdot p}{r} = \frac{p}{r} \cdot \frac{q-r}{q-p}$, so ist $1 - s = 1 - \frac{t\cdot p}{r} = \frac{r-t\cdot p}{r} = \frac{(1-t)\cdot q}{r}$ und insgesamt haben wir also

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^s \cdot \|f\|_q^{1-s}$$

■

7.26 **Korollar**

$$\underset{1\leq p\leq r\leq q\leq\infty}{\forall} \mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^q \subseteq \mathcal{L}^r$$

7.27 **Theorem**

Sei μ ein endliches Maß, d.h. $\mu(\Omega) < \infty$.

$$\underset{1\leq p\leq q\leq\infty}{\forall} \underset{f\in\mathcal{L}^q}{\forall} \|f\|_p \leq \|f\|_q \cdot \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$

APPROBATIO: Zunächst gilt

$$\|f\|_p^p = \||f|^p\|_1 = \||f|^p \cdot \mathbb{1}_\Omega\|_1$$

und für beliebige $r, s \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ gilt nach der HÖLDER-Ungleichung HÖLDER-Ungleichung 7.19

$$\|f\|_p^p \leq \||f|^p\|_r \cdot \|\mathbb{1}_\Omega\|_s = \||f|^{p\cdot r}\|_1^{\frac{1}{r}} \cdot \mu(\Omega)^{\frac{1}{s}}.$$

Nun wählen wir speziell $r := \frac{q}{p} \geq 1$, dann ist $s = \frac{1}{1-\frac{1}{r}} = \frac{1}{1-\frac{1}{\frac{q}{p}}} = \frac{q}{q-p} \geq 1$ und weiter

$$\|f\|_p^p \leq \||f|^q\|_1^{\frac{p}{q}} \cdot \mu(\Omega)^{\frac{q-p}{q}}.$$

Schließlich erhalten wir durch Potenzierung mit $\frac{1}{p}$ das Gewünschte

$$\|f\|_p \leq \||f|^q\|_1^{\frac{1}{q}} \cdot \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} = \|f\|_q \cdot \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

■

Korollar 7.28

Sei μ ein endliches Maß, d.h. $\mu(\Omega) < \infty$.

$$\underset{1 \leq p \leq q \leq \infty}{\forall} \mathcal{L}^p \supseteq \mathcal{L}^q$$

Kapitelübersicht

Skalarprodukt, unitärer Raum, Hilbertraum

8.1

Sei X ein $\mathbb{C}$-linearer Raum. Ein *Skalarprodukt* auf X ist eine Abbildung

$$\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{C}$$

mit folgenden Eigenschaften für alle $\phi, \psi, \chi \in X$ und $\lambda \in \mathbb{C}$:

(i) $\langle\phi,\phi\rangle \geq 0$

(ii) $\langle\phi,\phi\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \phi = 0$

(iii) $\langle\phi,\psi\rangle = \overline{\langle\psi,\phi\rangle}$

(iv) $\langle\phi,\lambda\psi\rangle = \lambda\langle\phi,\psi\rangle$

(v) $\langle\phi,\psi+\chi\rangle = \langle\phi,\psi\rangle + \langle\phi,\chi\rangle$

Dann heißt $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *unitärer Raum* und ein vollständiger unitärer Raum heißt *Hilbertraum*. Wir schreiben dann auch $(\mathrm{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Lemma

8.2

Für Elemente ϕ und ψ eines Hilbertraums H gilt

$$\left(\underset{\chi\in\mathrm{H}}{\forall}\langle\phi,\chi\rangle = \langle\psi,\chi\rangle\right) \implies \phi = \psi.$$

APPROBATIO: Nach Voraussetzung gilt für alle $\chi \in \mathrm{H}$

$$0 = \langle\phi,\chi\rangle - \langle\psi,\chi\rangle = \langle\phi-\psi,\chi\rangle$$

und insbesondere für $\chi = \phi - \psi$ folgt

$$0 = \langle \phi - \psi, \phi - \psi \rangle = \|\phi - \psi\|^2.$$

Mit der Definitheit der Norm folgt $\phi - \psi = 0$, d.h. $\phi = \psi$. ■

8.3 **orthogonal**

$X, Y \in \mathbf{L}^2$ heißen *orthogonal*, wenn

$$\langle X, Y \rangle = 0.$$

Das gilt genau dann, wenn $\mathbb{E}(X \cdot Y) = 0$. Wir schreiben dafür $X \perp Y$.

orthogonale Projektion

8.4

Sei $U \subseteq \mathrm{H}$ ein nicht-leerer abgeschlossener Unterraum.

(i) Es ist
$$\mathbf{L}^2 = U \oplus U^{\perp}.$$

(ii) Es gilt
$$\bigvee_{X\in\mathbf{L}^2} \exists!_{Y\in U} \|X-Y\|_2 = \bigwedge_{Z\in U} \|X-Z\|_2$$
und
$$\|X-Y\|_2 = \bigwedge_{Z\in U} \|X-Z\|_2 \iff \bigvee_{Z\in U} (X-Y)\perp Z.$$
Die resultierende Abbildung
$$\mathcal{P}_U\colon \begin{array}{l} \mathbf{L}^2 \to U \\ X \mapsto Y \end{array}$$
heißt *orthogonale Projektion* von $\mathbf{L}^2$ auf U und ist

(a) linear, d.h.
$$\bigvee_{X,Y\in\mathbf{L}^2} \bigvee_{a,b\in\mathbb{R}} \mathcal{P}_U(a\cdot X + b\cdot Y) = a\cdot\mathcal{P}_U X + b\cdot\mathcal{P}_U Y.$$

(b) symmetrisch, d.h.
$$\bigvee_{X,Y\in\mathbf{L}^2} \langle X, \mathcal{P}_U Y\rangle = \langle \mathcal{P}_U X, Y\rangle = \langle \mathcal{P}_U X, \mathcal{P}_U Y\rangle.$$

(c) kontrahierend, d.h.
$$\bigvee_{X\in\mathbf{L}^2} \|\mathcal{P}_U X\| \le \|X\|.$$

(d) idempotent, d.h.
$$\mathcal{P}_U^2 = \mathcal{P}_U.$$

(e) eine Fortsetzung der Identität $\mathcal{I}_F$, d.h.
$$\mathcal{P}_U|_F = \mathcal{I}_F.$$

8.5 **Lemma**

Seien $\mathbf{U}_2 \leq \mathbf{U}_1 \leq \mathrm{H}$ zwei nicht-leere abgeschlossene Unterräume eines Hilbertraum **H**. Dann gilt

$$\underset{\phi \in \mathrm{H}}{\forall}\ \mathcal{P}_{\mathbf{U}_2}(\mathcal{P}_{\mathbf{U}_1}(\phi)) = \mathcal{P}_{\mathbf{U}_2}(\phi).$$

APPROBATIO: Für alle $\chi \in \mathrm{H}$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{P}_{\mathbf{U}_2}(\mathcal{P}_{\mathbf{U}_1}(\phi)), \chi \rangle &= \langle \mathcal{P}_{\mathbf{U}_1}(\phi), \mathcal{P}_{\mathbf{U}_2}(\chi) \rangle \\
&= \langle \phi, \mathcal{P}_{\mathbf{U}_1}(\underbrace{\mathcal{P}_{\mathbf{U}_2}(\chi)}_{\in \mathbf{U}_2 \subseteq \mathbf{U}_1}) \rangle \\
&= \langle \phi, \mathcal{P}_{\mathbf{U}_2}(\chi) \rangle \\
&= \langle \mathcal{P}_{\mathbf{U}_2}(\phi), \chi \rangle
\end{aligned}$$

■ und mit Lemma 8.2 folgt die Behauptung.

8.1 L^2 als Hilbertraum

8.6 **Theorem**

$\mathbf{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, B, \|\cdot\|)$ ist ein Hilbertverband und ein Ideal in $\mathbf{L}^0(\Omega, \mathcal{A}, \mu, B, \|\cdot\|)$. Die Norm ist

$$\|X\|_2 := \sqrt{\mathbb{E}X^2} = \left(\int_\Omega X^2 \, \mathrm{d}\mathbb{P} \right)^{\frac{1}{2}}$$

und das Skalarprodukt ist

$$\langle X, Y \rangle_2 = \mathbb{E}(X \cdot Y) = \int_\Omega X \cdot Y \, \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Damit gilt dann $\|X\|_2 = \sqrt{\langle X, X \rangle_2}$.

Kovarianz, Korrelation 8.7

Für $X, Y \in \mathbf{L}^2$ ist die *Kovarianz* von X und Y definiert als

$$\mathrm{Cov}(X,Y) := \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}X)\cdot(Y-\mathbb{E}Y)\right) = \mathbb{E}\left(X\cdot Y\right) - \mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y$$

und

$$\rho(X,Y) := \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathbb{V}X\cdot\mathbb{V}Y}$$

heißt *Korrelation* von X und Y. Damit heißen X und Y *unkorreliert*, wenn ihre Korrelation 0 ist und dies ist genau dann der Fall, wenn ihre Kovarianz 0 ist bzw. wenn $\mathbb{E}\left(X\cdot Y\right) = \mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y$ gilt.

9 Wahrscheinlichkeitsräume

Wahrscheinlichkeitsmaß, Wahrscheinlichkeitsraum

9.1

Ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ heißt *Wahrscheinlichkeitsraum* und $\mathbb{P}$ heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß*, wenn

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

Ergebnis, Ereignis

9.2

Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, so wird

(i) jedes Element $\omega \in \Omega$ als *Ergebnis*,

(ii) die Grundmenge Ω als *Ergebnismenge*,

(iii) jede Menge $A \in \mathcal{A}$ als *Ereignis*,

(iv) jede Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $A = \{\omega\}$ für ein $\omega \in \Omega$ als *Elementarereignis*,

(v) die Grundmenge Ω als *sicheres Ereignis*,

(vi) die leere Menge $\emptyset$ als *unmögliches Ereignis*, und

(vii) jedes Mengensystem $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ als *Ereignissystem*

bezeichnet.

9.3 **Zufallsvariable, Verteilung, stochastischer Prozess**

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein messbarer Raum.

(i) Jede $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-messbare Abbildung $X\colon \Omega \to \Omega'$ heißt *Zufallsvariable* und das Bildmaß $\mathbb{P}_X$ heißt *Verteilung* von X.

(ii) Eine Familie $(X_i)_{i\in I}$ von Zufallsvariablen $X_i\colon \Omega \to \Omega'$ heißt *stochastischer Prozess* mit *Parametermenge* I und *Zustandsraum* Ω'. Die Menge aller stochastischen Prozesse von $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ in $(\Omega', \mathcal{A}')$ definieren wir als

$$\mathfrak{P}((\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}), (\Omega', \mathcal{A}'))$$

oder auch kurz als $\mathfrak{P}$. Ein Prozess heißt *zeitdiskret*, wenn die Parametermenge abzählbar ist, ansonsten *zeitstetig*. Ein Prozess heißt *wertdiskret*, wenn der Zustandsraum abzählbar ist, ansonsten *wertstetig*. Für jedes $\omega \in \Omega$ heißt die durch $I \ni i \mapsto X_i(\omega) \in \Omega'$ definierte Abbildung *Pfad* von ω.

9.4 **Lemma**

Die Verteilung einer Zufallsvariable ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Damit wird der Bildraum der Zufallsvariable zu einem Wahrscheinlichkeitsraum.

10 Unabhängigkeit

Kapitelübersicht

10.1 Kapitel

10.2 Kapitel

11 Bedingte Erwartung

Kapitelübersicht

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{A}' \leq \mathcal{A}$ eine Unter-σ-Algebra.

Lemma 11.1

$\mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{A}', \mathbb{P}|_{\mathcal{A}'})$ ist ein abgeschlossener isometrisch eingebetteter Unter-Hilbertraum von $\mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

APPROBATIO: Jedes $X \in \mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{A}', \mathbb{P}|_{\mathcal{A}'})$ ist $\mathcal{A}'$-messbar, also auch $\mathcal{A}$-messbar. Wenn X zweifach $\mathbb{P}|_{\mathcal{A}'}$-integrierbar ist, dann haben wir

$$\begin{aligned}
\|X\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathcal{A})} &= \int_\Omega X^2 \,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int_\Omega \int_0^{X^2} \mathrm{d}t \,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int_\Omega \int_0^\infty \mathbb{1}_{[0,X^2]}(t) \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int_\Omega \int_0^\infty \mathbb{1}_{[t,\infty)}(X^2) \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int_0^\infty \int_\Omega \mathbb{1}_{[t,\infty)}(X^2) \,\mathrm{d}\mathbb{P} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}(\underbrace{\{X^2 \geq t\}}_{\in \mathcal{A}'}) \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}|_{\mathcal{A}'}(\{X^2 \geq t\}) \,\mathrm{d}t \\
&\vdots \\
&= \|X\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathcal{A}')}
\end{aligned}$$

■ Damit ist X auch $\mathbb{P}$-integrierbar.

11.2 **bedingte Erwartung**

Die orthogonale Projektion

$$\mathbb{E}(\,\cdot \mid \mathcal{A}') := \mathcal{P}_{\mathbf{L}^2(\mathcal{A}')} \colon \mathbf{L}^2(\mathcal{A}) \to \mathbf{L}^2(\mathcal{A}')$$

heißt *bedingte Erwartung* bezüglich $\mathcal{A}'$.

11.3 **Theorem**

Für alle $W \in \mathbf{L}^\infty(\mathcal{A}')$, $X, Y \in \mathbf{L}^2(\mathcal{A})$, $Z \in \mathbf{L}^2(\mathcal{A}')$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $\mathcal{A}'' \leq \mathcal{A}'$ gelten:

(a) $\mathbb{E}(a \cdot X + b \cdot Y \mid \mathcal{A}') = a \cdot \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}') + b \cdot \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{A}')$ (linear)

(b) $\langle \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}'), Y \rangle = \langle X, \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{A}') \rangle = \langle \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}'), \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{A}') \rangle$ (symmetrisch)

(c) $\|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}')\|_2 \leq \|X\|_2$ (kontrahierend)

(d) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}') \mid \mathcal{A}') = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}')$ (idempotent)

(e) $\mathbb{E}(Z \mid \mathcal{A}') = Z$ (pull-out)

(f) $\|X - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}')\|_2 = \bigwedge_{Z \in \mathbf{L}^2(\mathcal{A}')} \|X - Z\|_2$ (abstandsminimal)

(g) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}') \mid \mathcal{A}'') = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}'')$ (tower property)

(h) $\mathbb{E}(W \cdot X \mid \mathcal{A}') = W \cdot \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}')$ (pull-out)

(i) $\mathbb{E}(Z \cdot X \mid \mathcal{A}') = Z \cdot \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}')$ (pull-out)

(j) $0 \leq X \leq 1 \implies 0 \leq \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}') \leq 1$ (Markov-Eigenschaft)

(k) $X \leq Y \implies \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}') \leq \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{A}')$ (monoton)

(l) $|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}')| \leq \mathbb{E}(|X| \mid \mathcal{A}')$ (Dreiecksungleichung)

(m) $\mathbb{E}(X \mid \{\emptyset, \Omega\}) = \mathbb{E}X$

(n) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}')) = \mathbb{E}X$ (tower property)

APPROBATIO: Die Eigenschaften (a) bis (f) sind genau die Eigenschaften aus orthogonale Projektion 8.4 und (h) ist genau Lemma 8.5. Seien $W \in \mathbf{L}^\infty(\mathcal{A}')$, $X, Y \in \mathbf{L}^2(\mathcal{A})$, $Z \in \mathbf{L}^2(\mathcal{A}')$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $\mathcal{A}'' \leq \mathcal{A}'$.

(h) Es gilt

$$\begin{aligned}
\underset{U \in \mathbf{L}^2(\mathcal{A}')}{\forall} \langle W \cdot X - W \cdot \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}'), U\rangle &= \mathbb{E}(W \cdot (X - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}')) \cdot U) \\
&= \langle \underbrace{X - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}')}_{\perp \mathbf{L}^2(\mathcal{A}')}, \underbrace{W \cdot U}_{\in \mathbf{L}^2(A')} \rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

d.h. $W \cdot X - W \cdot \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}')$ steht orthogonal zu allen $U \in \mathbf{L}^2(\mathcal{A}')$ und damit folgt mit der Eindeutigkeit der orthogonalen Projektion orthogonale Projektion 8.4

$$\mathbb{E}(W \cdot X \mid \mathcal{A}') = W \cdot \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}').$$

(i) Seien $W \in \mathbf{L}^1(\mathcal{A}')$, $X \in \mathbf{L}^1(\mathcal{A})$ und $A \in \mathcal{A}'$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_A W \cdot X \, \mathrm{d}\mathbb{P} &= \langle \mathbb{1}_A \cdot W, X\rangle \\
&= \langle \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \cdot W \mid \mathcal{A}'), X\rangle \\
&= \langle \mathbb{1}_A \cdot W, \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}')\rangle \\
&= \int_A \underbrace{W \cdot \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}')}_{\in \mathbf{L}^1(\mathcal{A}')} \, \mathrm{d}\mathbb{P}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich $\mathbb{E}(W \cdot X \mid \mathcal{A}') = W \cdot \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}')$.

(j),(k) Sei $X \geq 0$ und $\Gamma := \{\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}') < 0\} \in \mathcal{A}'$, dann ist $\mathbb{1}_\Gamma \in \mathbf{L}^\infty(\mathcal{A}') \subseteq \mathbf{L}^2(\mathcal{A}')$ und

$$\langle \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}'), \mathbb{1}_\Gamma\rangle = \int_\Gamma \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}') \, \mathrm{d}\mathbb{P} \leq 0.$$

Weiter haben wir

$$0 \geq \langle \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}'), \mathbb{1}_\Gamma\rangle = \langle X, \mathbb{E}(\mathbb{1}_\Gamma \mid \mathcal{A}')\rangle = \langle \underbrace{X}_{\geq 0}, \underbrace{\mathbb{1}_\Gamma}_{\geq 0} \rangle \geq 0$$

und somit

$$0 = \langle X, \mathbb{1}_\Gamma\rangle = \int_\Gamma \underbrace{X}_{\geq 0} \, \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Also ist Γ eine Nullmenge und demnach gilt die Behauptung

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}') \overset{\text{f.s.}}{\geq} 0.$$

Sei nun $X \leq Y$, dann können wir wegen $Y - X \geq 0$ den ersten Teil verwenden und erhalten $\mathbb{E}(Y - X \mid \mathcal{A}') \overset{\text{f.s.}}{\geq} 0$. Die Linearität der bedingten Erwartung liefert

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}') \overset{\text{f.s.}}{\leq} \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{A}').$$

Wenn schließlich $X \leq 1$ ist, dann folgt
$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}') \overset{\text{f.s.}}{\leq} \mathbb{E}(\underbrace{1}_{\in \mathbf{L}^\infty(\mathcal{A}')} \mid \mathcal{A}') = 1.$

(l) Es gilt stets $\pm X \leq |X|$, also folgt mit (i) und der Linearität

$$\pm\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}') \leq \mathbb{E}(|X| \mid \mathcal{A}')$$

und demnach $|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}')| \leq \mathbb{E}(|X| \mid \mathcal{A}')$

(m) $\mathbf{L}^2(\{\emptyset, \Omega\})$ besteht nur aus den konstanten Funktionen, d.h.

$$\mathbf{L}^2(\{\emptyset, \Omega\}) \cong \mathbb{R}.$$

Die bedingte Erwartung $\mathbb{E}(X \mid \{\emptyset, \Omega\})$ als Projektion auf diesen Unterraum kann also mit einer reellen Zahl c identifiziert werden, und ist diejenige konstante Funktion c mit minimalen Abstand von X unter allen konstanten Funktionen. Für den Abstand gilt

$$\|X - c\|^2 = \mathbb{E}((X - c)^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2 \cdot c \cdot \mathbb{E}(X) + c^2$$

und dieser wird minimal für $c = \mathbb{E}(X)$, und das bedeutet

$$\mathbb{E}(X, \{\emptyset, \Omega\}) = \mathbb{E}(X).$$

(n) Das folgt aus (g) und (m) wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}')) &\overset{(m)}{=} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}') \mid \{\emptyset, \Omega\}) \\
&\overset{(g)}{=} \mathbb{E}(X \mid \{\emptyset, \Omega\}) \\
&\overset{(m)}{=} \mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

■

Theorem 11.4

Die bedingte Erwartung $\mathbb{E}(\,\cdot \mid \mathcal{A}')$ ist $\mathbf{L}^1$-stetig und lässt sich eindeutig auf $\mathbf{L}^1(\mathcal{A})$ fortsetzen:

$$\mathbb{E}(\,\cdot \mid \mathcal{A}'):\quad \begin{aligned} \mathbf{L}^1(\mathcal{A}) &\to \mathbf{L}^1(\mathcal{A}') \\ X &\mapsto \lim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}((-n)\vee X\wedge n \mid \mathcal{A}') \end{aligned}$$

Die Eigenschaften in **??** ??.**??** gelten dann entsprechend.

APPROBATIO: Wir zeigen zuerst, dass die bedingte Erwartung (als Projektion auf einen $\mathbf{L}^2$-Unterraum) $\mathbf{L}^1$-stetig ist. Dann zeigen wir, dass eine Fortsetzung auf $\mathbf{L}^1$ existiert und sogar eindeutig ist.

($\mathbf{L}^1$-Stetigkeit) Sei $X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{A})$. Es gilt stets

$$\begin{aligned} \|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}')\|_1 &= \mathbb{E}\left(|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}')|\right) \\ &\le \mathbb{E}(\mathbb{E}(|X| \mid \mathcal{A}')) \\ &= \mathbb{E}(|X|) \\ &= \|X\|_1, \end{aligned}$$

d.h. die bedingte Erwartung bezüglich $\mathcal{A}'$ ist $\mathbf{L}^1$-stetig.

(Existenz) Sei $X \in \mathbf{L}^1(\mathcal{A})$. Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$X_n := (-n)\vee X \wedge n$$

liegt in $\mathbf{L}^\infty \subseteq \mathbf{L}^2$ (wegen $|X_n| \le n$) und konvergiert punktweise gegen X. Weil

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} |X_n| = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} |(-n)\vee X\wedge n| = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} |X|\wedge n = |X|\wedge \bigvee_{n\in\mathbb{N}} n = |X|\wedge\infty = |X|$$

nach Voraussetzung integrierbar ist, erhalten wir mit LEBESGUE's Konvergenzkriterium 6.13

$$X_n \xrightarrow{\mathbf{L}^1} X.$$

Weiter ist $(\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{A}'))_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\mathbf{L}^1$-Cauchfolge wegen

$$\|\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{A}') - \mathbb{E}(X_m \mid \mathcal{A}')\|_1 \le \|X_n - X_m\|_1 \to 0$$

und damit konvergent im Banachverband $\mathbf{L}^1(\mathcal{A})$. Der Grenzpunkt sei

$$E := \lim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{A}').$$

Haben wir eine weitere Folge $(X_n')_{n\in\mathbb{N}}$ mit $X_n' \xrightarrow{\mathbf{L}^1} X$, dann gilt

$$\begin{aligned}\|E - \mathbb{E}(X_n' \mid \mathcal{A}')\|_1 &\leq \|E - \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{A}')\|_1 + \|\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{A}') - \mathbb{E}(X_n' \mid \mathcal{A}')\|_1 \\ &\leq \|E - \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{A}')\|_1 + \|X_n - X_n'\|_1 \\ &\leq \|E - \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{A}')\|_1 + \|X_n - X\|_1 + \|X - X_n'\|_1 \\ &\to 0\end{aligned}$$

und folglich ist $(\mathbb{E}(X_n' \mid \mathcal{A}'))_{n\in\mathbb{N}}$ auch konvergent gegen E. Insgesamt ist also E eindeutig durch X bestimmt und wir definieren

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}') := E = \lim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{A}').$$

(Fortsetzung) Jedes $X \in \mathbf{L}^2(A)$ ist $\mathbf{L}^1$-Grenzpunkt der konstanten Folge $(X)_{n\in\mathbb{N}}$ und damit gilt $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}') = \lim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}')$.

(Eindeutigkeit) Für $X \in \mathbf{L}^1(\mathcal{A})$ betrachten wir wieder die $\mathbf{L}^2(\mathcal{A})$-Folge mit $X_n := (-n) \vee X \wedge n$. Sind $\mathbb{E}_1(\,\cdot \mid \mathcal{A}')$ und $\mathbb{E}_2(\,\cdot \mid \mathcal{A}')$ zwei $\mathbf{L}^1$-stetige Fortsetzungen der bedingten Erwartung $\mathbb{E}(\,\cdot \mid \mathcal{A}')$ auf $\mathbf{L}^1(\mathcal{A})$, so gilt

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \mathbb{E}_1(X_n \mid \mathcal{A}') = \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{A}') = \mathbb{E}_2(X_n \mid \mathcal{A}')$$

und folglich

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_1(X \mid \mathcal{A}') &= \mathbb{E}_1(\lim_{n\in\mathbb{N}} X_n \mid \mathcal{A}') \\ &= \lim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}_1(X_n \mid \mathcal{A}') \\ &= \lim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}_2(X_n \mid \mathcal{A}') \\ &= \mathbb{E}_2(\lim_{n\in\mathbb{N}} X_n \mid \mathcal{A}') \\ &= \mathbb{E}_2(X \mid \mathcal{A}').\end{aligned}$$

(Eigenschaften) Die Gültigkeit der Eigenschaften aus Theorem 11.3 lässt sich mit Hilfe von approximierenden $\mathbf{L}^2$-Folgen und den Konvergenzsätzen zeigen.

■

11.5 **Theorem**

Sei $\mathcal{G}$ ein $\cap$-stabiler Generator von $\mathcal{A}'$ mit einer wachsenden Folge $G_n \uparrow \Omega$. Dann sind die folgenden Aussagen für $X \in \mathbf{L}^1(\mathcal{A})$ und $Y \in \mathbf{L}^1(\mathcal{A}')$ äquivalent:

(i) $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}') = Y$

(ii) $\forall_{A\in\mathcal{A}'} \int_A X \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A Y \,\mathrm{d}\mathbb{P}$

(iii) $\forall_{G\in\mathcal{G}} \int_G X \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_G Y \,\mathrm{d}\mathbb{P}$

APPROBATIO: Für $A \in \mathcal{A}'$ und $X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{A})$ gilt stets

$$\int_A \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}')\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \langle \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}'), \mathbb{1}_A \rangle = \langle X, \mathbb{E}(\underbrace{\mathbb{1}_A}_{\in \mathbf{L}^\infty(\mathcal{A})} \mid \mathcal{A}') \rangle = \langle X, \mathbb{1}_A \rangle = \int_A X\,\mathrm{d}\mathbb{P}$$

und das gilt sogar für $X \in \mathbf{L}^1(\mathcal{A})$, indem wir eine approximierende $\mathbf{L}^2$-Folge für X betrachten und den Lebesgue'schen Konvergenzsatz LEBESGUE's Konvergenzkriterium 6.13 anwenden.

(i)⇒(ii) Sei $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}') = Y$ und $A \in \mathcal{A}'$, dann gilt

$$\int_A X\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}')\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A Y\,\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

(i)⇐(ii) Wir betrachten die beiden Mengen $A^\pm := \{\pm(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}') - Y) > 0\} \in \mathcal{A}'$, nun gilt

$$\begin{aligned}\int_{A^+} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}') - Y\,\mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_{A^+} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}')\,\mathrm{d}\mathbb{P} - \int_{A^+} Y\,\mathrm{d}\mathbb{P} \\ &= \int_{A^+} X\,\mathrm{d}\mathbb{P} - \int_{A^+} Y\,\mathrm{d}\mathbb{P} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Folglich ist A^+ eine Nullmenge und analog auch A^-. Insgesamt gilt also $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}') = Y$ fast sicher.

(ii)⇒(iii) klar wegen $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}'$.

(ii)⇐(iii) Durch Umformung der Voraussetzung erhalten wir

$$\mu(A) := \int_A X^+ + Y^-\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A Y^+ + X^-\,\mathrm{d}\mathbb{P} =: \nu(A),$$

d.h. zwei Maße μ und ν auf $\mathcal{A}'$, die auf dem Generator $\mathcal{G}$ übereinstimmen. Nach dem Maßeindeutigkeitssatz folgt $\mu = \nu$ auf $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{A}'$.

■

11.1 Bedingte Erwartung und Unabhängigkeit

11.6

Theorem

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{A}', \mathcal{A}'' \leq \mathcal{A}$ Unter-σ-Algebren. Dann gelten für alle Zufallsvariablen $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$:

(i) $\mathcal{A}' \perp\!\!\!\perp \sigma(X, \mathcal{A}'') \implies \mathbb{E}(X \mid \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}'')) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}'')$

(ii) $X \perp\!\!\!\perp \mathcal{A}' \implies \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}') = \mathbb{E}(X)$

Grob gesagt: Unabhängigkeit ändert nichts an der (bedingten) Erwartung.

APPROBATIO: (i) $\sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ wird erzeugt von dem Mengensystem

$$\mathcal{G} := \{A' \cap A'' \mid A' \in \mathcal{A}',\ A'' \in \mathcal{A}''\},$$

denn einerseits haben wir $\mathcal{A}', \mathcal{A}'' \subseteq \mathcal{G}$ wegen $\Omega \in \mathcal{A}', \mathcal{A}''$, d.h.

$$\sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}'') \subseteq \sigma(\mathcal{G})$$

und andererseits gilt $\mathcal{G} \subseteq \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ und damit

$$\sigma(\mathcal{G}) \subseteq \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}'').$$

Seien nun $A' \in \mathcal{A}'$ und $A'' \in \mathcal{A}''$, dann ist

$$\begin{aligned}
\int_{A' \cap A''} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}'') \, \mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_\Omega \underbrace{\mathbb{1}_{A'}}_{\in \mathbf{L}^\infty(\mathcal{A}')} \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{A''} \cdot \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}'')}_{\in \mathbf{L}^\infty(\mathcal{A}'') \cdot \mathbf{L}^2(\mathcal{A}'') \subseteq \mathbf{L}^2(\mathcal{A}'')} \, \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&\overset{\mathcal{A}' \perp\!\!\!\perp \mathcal{A}''}{=} \int_\Omega \mathbb{1}_{A'} \, \mathrm{d}\mathbb{P} \cdot \int_\Omega \mathbb{1}_{A''} \cdot \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}'') \, \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&\overset{\text{Theorem11.5}}{=} \int_\Omega \mathbb{1}_{A'} \, \mathrm{d}\mathbb{P} \cdot \int_\Omega \mathbb{1}_{A''} \cdot X \, \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&\overset{\mathcal{A}' \perp\!\!\!\perp X}{=} \int_{A' \cap A''} X \, \mathrm{d}\mathbb{P}
\end{aligned}$$

Weil $\mathcal{G}$ $\cap$-stabil ist und die gegen Ω aufsteigende Folge $(\Omega)_{n \in \mathbb{N}}$ enthält, folgt mit Theorem 11.5

$$\mathbb{E}(X \mid \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}'')) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}'').$$

(ii) Zunächst gilt, dass jede σ-Algebra auf Ω unabhängig von $\{\emptyset, \Omega\}$ ist, also ist sowohl $\mathcal{A}'$ als auch X unabhängig von $\{\emptyset, \Omega\}$. Zusammen mit der Voraussetzung $\mathcal{A}' \perp\!\!\!\perp X$ ist also

$$\{X, \mathcal{A}', \{\emptyset, \Omega\}\}$$

eine unabhängige Familie und mit dem Blocklemma folgt

$$\mathcal{A}' \perp\!\!\!\perp \sigma(X, \{\emptyset, \Omega\}).$$

Mit dem ersten Teil haben wir nun

$$\mathbb{E}(X \mid \underbrace{\sigma(\mathcal{A}', \underbrace{\{\emptyset, \Omega\}}_{\subseteq \mathcal{A}'})}_{=\mathcal{A}'}) = \underbrace{\mathbb{E}(X \mid \{\emptyset, \Omega\})}_{=\mathbb{E}(X)}.$$

■

11.2 Weitere Formeln

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$ eine Unter-σ-Algebra.

Lemma 11.7

Sei $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion.

(i) Es gilt

$$\underset{x>y>z}{\forall} \frac{v(x) - v(y)}{x - y} \geq \frac{v(x) - v(z)}{x - z} \geq \frac{v(y) - v(z)}{y - z}$$

(ii) Die Rechtsableitung v'_+ existiert und jede Tangente an v liegt unterhalb von v, d.h.

$$\underset{x,y\in\mathbb{R}}{\forall} v'_+(y) \cdot (x - y) + v(y) \leq v(x).$$

(iii) v lässt sich überall als Supremum der linearen Funktionen unterhalb von v darstellen, d.h.

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} v(x) = \bigvee_{\substack{a,b\in\mathbb{R} \\ \underset{y\in\mathbb{R}}{\forall} a\cdot y+b\leq v(y)}} a \cdot x + b.$$

APPROBATIO: (i) Seien $x > y > z$, dann gibt es ein $t \in (0,1)$ mit $y = t \cdot x + (1-t) \cdot z$. Wegen der Konvexität von v gilt damit

$$v(y) \leq t \cdot v(x) + (1-t) \cdot v(z)$$

und durch Umformen erhalten wir

$$v(y) - v(x) \leq (1-t) \cdot (v(z) - v(x))$$

$$v(y) - v(z) \leq t \cdot (v(x) - v(z))$$

Außerdem gelten

$$y - x = (1-t) \cdot (z - x)$$

$$y - z = t \cdot (x - z)$$

und Einsetzen in die beiden obigen Ungleichung liefert

$$\frac{v(y) - v(x)}{y - x} \geq \frac{v(z) - v(x)}{z - x}$$

$$\frac{v(y) - v(z)}{y - z} \leq \frac{v(x) - v(z)}{x - z}$$

Insgesamt haben wir also

$$\frac{v(x) - v(y)}{x - y} \geq \frac{v(x) - v(z)}{x - z} \geq \frac{v(y) - v(z)}{y - z}$$

(ii) Seien $y < x < \xi < z$, dann gilt nach (i)

$$\frac{v(x) - v(y)}{x - y} \leq \frac{v(\xi) - v(x)}{\xi - x} \leq \frac{v(x) - v(z)}{x - z}$$

Folglich ist $\frac{v(\xi)-v(x)}{\xi-x}$ beschränkt und monoton fallend für $\xi \downarrow x$, also konvergent und der Grenzwert ist endlich. Also existiert an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ die Rechtsableitung $v'_+(x) = \lim_{\xi \downarrow x} \frac{v(\xi)-v(x)}{\xi-x}$ (und v ist auch rechtsstetig) und der Grenzwertübergang $\xi \downarrow x$ in obigen Ungleichungen ergibt

$$\frac{v(x) - v(y)}{x - y} \leq v'_+(x) \leq \frac{v(x) - v(z)}{x - z}$$

und daraus folgt leicht die Behauptung.

(iii) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\forall_{y\in\mathbb{R}}\, a\cdot y + b \leq v(y)$ gilt insbesondere $a\cdot x + b \leq v(x)$ und der Übergang zum Supremum ändert daran nichts, d.h.

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall}\, v(x) \geq \bigvee_{\substack{a,b\in\mathbb{R}\\ \underset{y\in\mathbb{R}}{\forall}\, a\cdot y+b\leq v(y)}} a\cdot x + b.$$

Das Supremum wird sogar angenommen für $a_x := v'_+(x)$ und $b_x := v(x) - v'_+(x)\cdot x$, denn $t_x\colon y \mapsto a_x \cdot y + b_x$ ist die Tangente an v im Punkt x, und liegt unterhalb von v nach (ii), d.h. es gilt

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall}\, v(x) = t_x(x) = a_x\cdot x + b_x \leq \bigvee_{\substack{a,b\in\mathbb{R}\\ \underset{y\in\mathbb{R}}{\forall}\, a\cdot y+b\leq v(y)}} a\cdot x + b.$$

■

11.8

bedingter Jensen

Es gilt für alle Zufallsvariablen $X \in \mathbf{L}^1(\mathcal{A})$ und alle konvexen Funktionen $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $v\circ X \in \mathbf{L}^1(\mathcal{A})$

$$v \circ \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}') \leq \mathbb{E}(v\circ X \mid \mathcal{A}').$$

Insbesondere ist also für alle $p \geq 1$ und alle $X \in \mathbf{L}^p(\mathcal{A})$

$$|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}')|^p \leq \mathbb{E}(|X|^p \mid \mathcal{A}').$$

APPROBATIO: Nach vorhergehenden Lemma gilt

$$\underset{\omega\in\Omega}{\forall}\, v(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}')(\omega)) = \bigvee_{\substack{a,b\in\mathbb{R}\\ \underset{y\in\mathbb{R}}{\forall}\, a\cdot y+b\leq v(y)}} \underbrace{a\cdot \mathbb{E}(X\mid \mathcal{A}')(\omega) + b}_{=\mathbb{E}(\underbrace{a\cdot X+b}_{\leq v\circ X}\mid \mathcal{A}')(\omega)}$$

und damit ergibt sich

$$v \circ \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}') \leq \mathbb{E}(v\circ X \mid \mathcal{A}').$$

■

11.9 **bedingter Boppo-Levi] Für alle positiven aufsteigenden Folgen $X_n \uparrow X$ in $\mathbf{L}^1(\mathcal{A})$) gilt**

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{A}') = \mathbb{E}(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} X_n \mid \mathcal{A}').$$

APPROBATIO: Weil X_n wächst, ist auch $\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{A}')$ eine wachsende Folge. Für alle $A \in \mathcal{A}'$ gilt dann

$$\begin{aligned}\int_A \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{A}')\,\mathrm{d}\mathbb{P} &= \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \int_A \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{A}')\,\mathrm{d}\mathbb{P}\\ &= \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \int_A X_n\,\mathrm{d}\mathbb{P}\\ &= \int_A \bigvee_{n\in\mathbb{N}} X_n\,\mathrm{d}\mathbb{P}\end{aligned}$$

■ und das bedeutet $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{A}') = \mathbb{E}(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} X_n \mid \mathcal{A}')$.

11.10 **bedingter Fatou**

Für alle positiven Folgen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{L}^1(\mathcal{A})$ mit $\liminf_{n\to\infty} X_n \in \mathbf{L}^1(\mathcal{A})$ gilt

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{A}') \geq \mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} X_n \mid \mathcal{A}').$$

APPROBATIO:

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{A}') &= \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \bigwedge_{m\geq n} \mathbb{E}(\underbrace{X_m}_{\geq \bigwedge_{m\geq n} X_m} \mid \mathcal{A}')\\ &\geq \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(\bigwedge_{m\geq n} X_m \mid \mathcal{A}')\\ &= \mathbb{E}(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \bigwedge_{m\geq n} X_m \mid \mathcal{A}')\\ &= \mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} X_n \mid \mathcal{A}')\end{aligned}$$

■

bedingter Lebesgue 11.11

Es gilt für alle konvergenten Folgen $X_n \to X$ in $\mathbf{L}^1(\mathcal{A})$ mit Majorante $Y \in \mathbf{L}^1$ (d.h. $|X_n| \leq Y$)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{A}') = \mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} X_n \mid \mathcal{A}').$$

APPROBATIO: Weil Y eine Majorante der Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, sind $(Y \pm X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive Folgen. Wegen $X_n \to X$ gilt $Y \pm X_n \to Y \pm X$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{A}') \pm \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{A}') &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Y \pm X_n \mid \mathcal{A}') \\
&\geq \mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} (Y \pm X_n) \mid \mathcal{A}') \\
&= \mathbb{E}(Y \pm X \mid \mathcal{A}') \\
&= \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{A}') \pm \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}')
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung. ■

11.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Aus der elementaren Wahrscheinlichkeitstheorie kennen wir bereits die klassische bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. Diese Definition soll nun verallgemeinert werden.
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{A}' \leq \mathcal{A}$ eine Unter-σ-Algebra.

11.12

bedingte Wahrscheinlichkeit

Die Abbildung

$$\mathbb{P}(\,\cdot \mid \mathcal{A}')\colon \begin{array}{l} \mathcal{A} \to \mathbf{L}^2(\mathcal{A}') \\ A \mapsto \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mid \mathcal{A}') \end{array}$$

heißt *bedingte Wahrscheinlichkeit* bezüglich $\mathcal{A}'$.

11.13

Theorem

Seien $A, B \in \mathcal{A}$ und P eine höchstens abzählbare Partitionierung von Ω, dann gelten:

(i) $\mathbb{E}(X \mid \sigma(\{B\})) = \mathbb{1}_B \cdot \int X \,\mathrm{d}\mathbb{P}(\,\cdot \mid B) + \mathbb{1}_{\complement B} \cdot \int X \,\mathrm{d}\mathbb{P}(\,\cdot \mid \complement B)$

(ii) $\mathbb{E}(X \mid \sigma(P)) = \sum_{B \in P} \mathbb{1}_B \cdot \int X \,\mathrm{d}\mathbb{P}(\,\cdot \mid B)$

(iii) $\mathbb{P}(A \mid \sigma(\{B\})) = \mathbb{1}_B \cdot \mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{1}_{\complement B} \cdot \mathbb{P}(A \mid \complement B)$

(iv) $\mathbb{P}(A \mid \sigma(P)) = \sum_{B \in P} \mathbb{1}_B \cdot \mathbb{P}(A \mid B)$

APPROBATIO: Zuerst machen wir uns klar, dass

$$\sigma(\{B\}) = \{\emptyset, B, \complement B, \Omega\}$$

ist. Damit ist eine Funktion genau dann messbar bezüglich $\sigma(\{B\})$, wenn sie von der Form

$$a \cdot \mathbb{1}_B + b \cdot \mathbb{1}_{\complement B},$$

und weiter gilt also insbesondere für endliche Maßräume (d.h. auch für Wahrscheinlichkeitsräume)

$$\mathbf{L}^2(\sigma(\{B\})) = \{a \cdot \mathbb{1}_B + b \cdot \mathbb{1}_{\complement B} \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

(i) Weil $\mathbb{E}(X \mid \sigma(\{B\}))$ ein Element aus $\mathbf{L}^2(\sigma(\{B\}))$ ist, müssen wir $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\mathbb{E}(X \mid \sigma(\{B\})) = a \cdot \mathbb{1}_B + b \cdot \mathbb{1}_{\complement B}$ bestimmen.

(a) Zunächst haben wir

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_B \cdot X \mid \sigma(\{B\})) = \mathbb{1}_B \cdot \mathbb{E}(X \mid \sigma(\{B\})) = a \cdot \mathbb{1}_B.$$

Weiter ist dann mit der Tower Property der bedingten Erwartung

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_B \cdot X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_B \cdot X \mid \sigma(\{B\})) = \mathbb{E}(a \cdot \mathbb{1}_B) = a \cdot \mathbb{P}(B),$$

und folglich ist

$$a = \frac{\mathbb{E}(\mathbb{1}_B \cdot X)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \cdot \int_B X \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\Omega X \,\mathrm{d}\mathbb{P}(\,\cdot \mid B).$$

(b) Analog folgt

$$b = \int_\Omega X \,\mathrm{d}\mathbb{P}(\,\cdot \mid B).$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X \mid \sigma(\{B\})) &= \mathbb{E}((\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_{\complement B}) \cdot X \mid \sigma(\{B\})) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{1}_B \cdot X \mid \sigma(\{B\})) + \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\complement B} \cdot X \mid \sigma(\{B\})) \\
&= a \cdot \mathbb{1}_B + b \cdot \mathbb{1}_{\complement B} \\
&= \mathbb{1}_B \cdot \int_\Omega X \,\mathrm{d}\mathbb{P}(\,\cdot \mid B) + \mathbb{1}_{\complement B} \cdot \int_\Omega X \,\mathrm{d}\mathbb{P}(\,\cdot \mid \complement B).
\end{aligned}$$

(ii) analog zu (i), da war ja $\{B, \complement B\}$ auch eine endliche Partitionierung von Ω.

(iii) Das folgt recht schnell aus (i) mit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \mid \sigma(\{B\})) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mid \sigma(\{B\})) \\
&= \mathbb{1}_B \cdot \int_\Omega \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mathbb{P}(\,\cdot \mid B) + \mathbb{1}_{\complement B} \cdot \int_\Omega \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mathbb{P}(\,\cdot \mid \complement B) \\
&= \mathbb{1}_B \cdot \mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{1}_{\complement B} \cdot \mathbb{P}(A \mid \complement B).
\end{aligned}$$

(iv) Wie (iii) aus (i) folgt, so folgt das hier aus (ii).

■

11.4 Bedingte Erwartung bezüglich $\sigma(Y)$

11.14

Theorem

Seien X, Y reelle Zufallsvariablen und $X \in \mathbf{L}^1$. Dann existiert eine $\mathbb{P}_Y$-fast sicher eindeutige messbare Abbildung $\mathbb{E}(X \mid Y = y) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathbb{E}(X \mid Y) \overset{\text{f.s.}}{=} \mathbb{E}(X \mid Y = y) \circ Y$$

und

$$\underset{B \in \mathfrak{B}}{\forall} \int_B \mathbb{E}(X \mid Y = y)(y) \, \mathrm{d}\mathbb{P}$$

12 Martingale

Kapitelübersicht

Lemma 12.1

Seien $X_1, \ldots, X_n$ reelle Zufallsvariablen und $S_k := \sum_{i=1}^k X_i$. Dann gilt

$$\sigma(X_1, \ldots, X_n) = \sigma(S_1, \ldots, S_n).$$

APPROBATIO: Jede Zufallsvariable $S_k = X_1 + \cdots + X_k$ ist $\sigma(X_1, \ldots, X_k)$-messbar, also auch $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$-messbar. Damit folgt

$$\sigma(S_1, \ldots, S_n) \subseteq \sigma(X_1, \ldots, X_n).$$

Setze $S_0 := 0$. Andererseits gilt $X_k = S_k - S_{k-1}$, also ist X_k stets $\sigma(S_k, S_{k-1})$-messbar und demnach auch $\sigma(S_1, \ldots, S_n)$-messbar, d.h.

$$\sigma(X_1, \ldots, X_n) \subseteq \sigma(S_1, \ldots, S_n).$$

■

12.2

Filtration

(i) Eine Menge I heißt *aufsteigend geordnet*, wenn eine Ordnungsrelation $\leq$ auf I mit der Eigenschaft

$$\underset{i,j\in I}{\forall}\ \underset{k\in I}{\exists}\ i \leq k,\ j \leq k$$

existiert.

(ii) Sei I aufsteigend geordnet. Eine Familie $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ von Unter-σ-Algebren von $\mathcal{A}$ heißt *Filtration* in $\mathcal{A}$, wenn sie monoton wachsend ist, also wenn

$$\underset{i\leq j}{\forall}\ \mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j.$$

(iii) Die von einer Filtration $\mathcal{F}$ in $\mathcal{A}$ erzeugte σ-Algebra heißt *terminale σ-Algebra*

$$\mathcal{F}_\infty := \sigma\Big(\bigcup_{i\in I} \mathcal{F}_i\Big).$$

adaptierter Prozess, vorhersagbarer Prozess 12.3

Seien $\mathcal{F}$ eine Filtration in $\mathcal{A}$ und X ein reeller stochastischer Prozess, sodass beide die gleiche Indexmenge I haben. Dann heißt

$$(X, \mathcal{F})$$

(i) *adaptierter reeller Prozess* bzw. X heißt $\mathcal{F}$*-adaptiert*, wenn jede Zufallsvariable X_i auch $\mathcal{F}_i$-messbar ist, d.h.

$$\underset{i \in I}{\forall} X_i^{-1}(\mathfrak{B}) \subseteq \mathcal{F}_i.$$

(ii) *vorhersagbarer reeller Prozess* bzw. X heißt $\mathcal{F}$*-vorhersagbar*, wenn X zeitdiskret (d.h. $I \cong \mathbb{N}$) und jede Zufallsvariable X_n auch $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar ist.

Wir definieren

$$\mathfrak{P}^p(\mathcal{F})$$

als die Menge aller $\mathcal{F}$-adaptierten $\mathbf{L}^p$-Prozesse, und

$$\mathfrak{P}^p_{\mathrm{pre}}(\mathcal{F})$$

als die Menge aller $\mathcal{F}$-vorhersagbaren $\mathbf{L}^p$-Prozesse.

Martingal 12.4

Ein adaptierter reeller $\mathbf{L}^p$-Prozess $(X, \mathcal{F})$ heißt $\mathbf{L}^p$*-Martingal*, wenn

$$\underset{i \leq j}{\forall} X_i = \mathbb{E}(X_j \mid \mathcal{F}_i)$$

gilt. Wir definieren

$$\mathfrak{M}^p(\mathcal{F})$$

als die Menge aller $\mathbf{L}^p$-Martingale bezüglich $\mathcal{F}$. $(X, \mathcal{F})$ heißt $\mathbf{L}^p$*-Submartingal*, wenn $X_i \leq \mathbb{E}(X_j \mid \mathcal{F}_i)$, bzw. $\mathbf{L}^p$*-Supermartingal*, wenn $X_i \geq \mathbb{E}(X_j \mid \mathcal{F}_i)$ für alle $i \leq j$ ist. Die Menge aller Submartingale ist $\mathfrak{M}^p_{\uparrow}(\mathcal{F})$ und die Menge aller Supermartingale ist $\mathfrak{M}^p_{\downarrow}(\mathcal{F})$.

12.5 **Lemma**

(i) Martingale haben konstanten Erwartungswert, d.h. für ein Martingal $(X, \mathcal{F})$ ist die Erwartungswertfolge $(\mathbb{E}(X_i))_{i \in I}$ konstant.

(ii) Submartingale haben steigenden Erwartungswert.

(iii) Supermartingale haben fallenden Erwartungswert.

APPROBATIO: Sei $(X, \mathcal{F})$ ein Martingal und seien i, j Indizes.

(i) Es gibt einen Index k mit $i \leq k$ und $j \leq k$, und dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_i) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_k \mid \mathcal{F}_i)) \\ &= \mathbb{E}(X_k) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_k \mid \mathcal{F}_j)) \\ &= \mathbb{E}(X_j). \end{aligned}$$

(ii) Sei $i \leq j$. Wir haben

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_i) &\leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_j \mid \mathcal{F}_i)) \\ &= \mathbb{E}(X_j). \end{aligned}$$

(iii) analog zu (ii).

■

12.6 **Lemma**

Ein adaptierter zeitdiskreter Prozess $(X, \mathcal{F})$ ist genau dann ein Martingal, wenn

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n.$$

Analog für Sub- und Supermartingale.

APPROBATIO: ($\Rightarrow$) trivial.

($\Leftarrow$) Sei $i \leq j$, d.h. es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $i + k = j$. Wir machen eine vollständige Induktion über k.

(IA) Für $k = 0$ gilt $\mathbb{E}(X_i \mid \mathcal{A}_i) = X_i$ wegen der Adaption. Für $k = 1$ gilt $\mathbb{E}(X_{i+1} \mid \mathcal{A}_i) = X_i$ nach Voraussetzung.

(IS) Nun haben wir

$$\mathbb{E}(X_{i+k+1} \mid \mathcal{A}_i) \overset{\text{tower}}{=} \mathbb{E}(\underbrace{\mathbb{E}(X_{i+k+1} \mid \mathcal{A}_{i+k})}_{=X_{i+k}} \mid \mathcal{A}_i) \overset{\text{(IV)}}{=} X_i.$$

■

Lemma 12.7

Sei $\mathcal{F}$ eine Filtration. Dann gelten:

(i) $\mathfrak{M}^p(\mathcal{F})$, $\mathfrak{M}^p_\uparrow(\mathcal{F})$ und $\mathfrak{M}^p_\downarrow(\mathcal{F})$ sind lineare Räume.

(ii) $\mathfrak{M}^p_\downarrow(\mathcal{F})$ ist $\wedge$-stabil.

(iii) $\mathfrak{M}^p_\uparrow(\mathcal{F})$ ist $\vee$-stabil.

(iv) Wenn $(X_i, \mathcal{A}_i)_{i\in I}$ ein $\mathbf{L}^p$-Submartingal ist, dann ist

$$(X_{i+}, \mathcal{A}_i)_{i\in I}$$

ein $\mathbf{L}^p$-Submartingal.

(v) Wenn $(X_i, \mathcal{A}_i)_{i\in I}$ ein $\mathbf{L}^p$-(Sub-)Martingal und $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine (monoton steigende und) konvexe Abbildung mit $\varphi \circ X_i \in \mathbf{L}^p$ ist, dann ist

$$(\varphi \circ X_i, \mathcal{A}_i)_{i\in I}$$

ein $\mathbf{L}^p$-Submartingal.

(vi) $\mathfrak{M}^p(\mathcal{F}) = \mathfrak{M}^p_\uparrow(\mathcal{F}) \cap \mathfrak{M}^p_\downarrow(\mathcal{F})$

(vii) $\mathfrak{M}^p_\uparrow(\mathcal{F}) = -\mathfrak{M}^p_\downarrow(\mathcal{F})$

APPROBATIO: (i) Seien $(X_i, \mathcal{A}_i)_{i\in I}$ und $(Y_i, \mathcal{A}_i)_{i\in I}$ zwei adaptierte reelle $\mathbf{L}^p$-Prozesse. Weil $\mathbf{L}^p$ ein Banachverband ist, folgt dass $(\alpha \cdot X_i + \beta \cdot Y_i, \mathcal{A}_i)_{i\in I}$ auch ein adaptierter reeller $\mathbf{L}^p$-Prozess ist. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wenn beide Prozesse Martingale sind, dann gelten $\mathbb{E}(X_j \mid \mathcal{A}_i) = X_i$ und $\mathbb{E}(X_j \mid \mathcal{A}_i) = X_i$ für alle $i \leq j$. Es folgt

$$\mathbb{E}(\alpha \cdot X_j + \beta \cdot Y_j \mid \mathcal{A}_i) = \alpha \cdot \mathbb{E}(X_j \mid \mathcal{A}_i) + \beta \cdot \mathbb{E}(Y_j \mid \mathcal{A}_i) = \alpha \cdot X_i + \beta \cdot Y_i$$

und damit ist $(\alpha \cdot X_i + \beta \cdot Y_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$ ein $\mathbf{L}^p$-Martingal. Analog für Super- und Submartingale.

(ii) Seien $(X_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$ und $(Y_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$ zwei adaptierte reelle $\mathbf{L}^p$-Prozesse. Weil $\mathbf{L}^p$ ein Banachverband ist, folgt dass $(X_i \wedge Y_i)_{i \in I}$ auch ein adaptierter reeller $\mathbf{L}^p$-Prozess ist. Wenn beide Prozesse Supermartingale sind, dann gelten $\mathbb{E}(X_j \mid \mathcal{A}_i) \leq X_i$ und $\mathbb{E}(Y_j \mid \mathcal{A}_i) \leq Y_i$ für alle $i \leq j$. Es folgt

$$\mathbb{E}(X_j \wedge Y_j \mid \mathcal{A}_i) \leq \mathbb{E}(X_j \mid \mathcal{A}_i) \wedge \mathbb{E}(Y_j \mid \mathcal{A}_i) \leq X_i \wedge Y_i$$

und damit ist $(X_i \wedge Y_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$ ein $\mathbf{L}^p$-Supermartingal.

(iii) analog zu (ii).

(iv) folgt mit $X_+ = X \vee 0$ aus (iii).

(v) Sei $(X_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$ ein Martingal und $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Abbildung mit $\varphi \circ X_i \in \mathbf{L}^1$. Dann gilt

$$\mathbb{E}(\varphi \circ X_j \mid \mathcal{A}_i) \geq \varphi \circ \mathbb{E}(X_j \mid \mathcal{A}_i) = \varphi \circ X_i$$

nach der Ungleichung von Jensen bedingter Jensen 11.8 und damit ist $(\varphi \circ X_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$ ein Submartingal. Wenn aber $(X_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$ nur ein Submartingal und φ zusätzlich monoton wachsend ist, so folgt

$$\mathbb{E}(\varphi \circ X_j \mid \mathcal{A}_i) \geq \varphi \circ \mathbb{E}(X_j \mid \mathcal{A}_i) \geq \varphi \circ X_i$$

und $(\varphi \circ X_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$ ist ein Submartingal.

(vi) ersichtlich.

(vii) nicht schwer.

■

12.1 Die Doob-Zerlegung

Doob-Zerlegung 12.8

Sei $\mathcal{F}$ eine abzählbare Filtration.

(i) Für jeden adaptierten zeitdiskreten $\mathbf{L}^p$-Prozess $(X, \mathcal{F})$ gibt es eine fast sicher eindeutige Zerlegung in ein $\mathbf{L}^p$-Martingal $(Y, \mathcal{F})$ sowie einen vorhersagbaren $\mathbf{L}^p$-Prozess $(Z, \mathcal{F})$, sodass
$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} X_n = Y_n + Z_n$$
gilt. Dann heißt $(Y, Z, \mathcal{F})$ *Doob-Zerlegung* von $(X, \mathcal{F})$ und $(Z, \mathcal{F})$ heißt *Kompensator*.
$$\mathfrak{P}^p(\mathcal{F}) = \mathfrak{M}^p(\mathcal{F}) \oplus \mathfrak{P}^p_{\text{pre}}(\mathcal{F})$$

(ii) $(X, \mathcal{F})$ ist genau dann ein $\mathbf{L}^p$-Submartingal, wenn der Kompensator $(Z, \mathcal{F})$ fast sicher wächst, d.h. wenn
$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} Z_n \overset{\text{f.s.}}{\leq} Z_{n+1}.$$

APPROBATIO: (i) Der $\mathbf{L}^p$-Prozess mit
$$Z_n := \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k - X_{k-1} \mid \mathcal{A}_{k-1})$$
ist nach Definition vorhersagbar. Der $\mathbf{L}^p$-Prozess mit
$$Y_n := X_n - Z_n$$
ist ein $\mathbf{L}^p$-Martingal, denn es gilt
$$\mathbb{E}(Y_n - Y_{n-1} \mid \mathcal{A}_{n-1}) = \mathbb{E}(X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{A}_{n-1}) - \mathbb{E}(Z_n - Z_{n-1} \mid \mathcal{A}_{n-1}) = 0.$$

(ii) Die Gleichung $Z_n := \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k - X_{k-1} \mid \mathcal{A}_{k-1})$ ist notwendig und hinreichend, d.h. Z_n ist eindeutig und damit ist auch eindeutig durch $Y_n = X_n - Z_n$ bestimmt. Also folgt
$\mathbb{P}(\{Y_n \neq Y'_n\}) = \mathbb{P}(\{Z_n \neq Z'_n\}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit ist
$$\mathbb{P}(\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} Y_n = Y'_n,\ Z_n = Z'_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\{Y_n = Y'_n\} \cap \{Z_n = Z'_n\})\right) = 1.$$

(iii) Wenn $(Y_n, Z_n, \mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Doob-Zerlegung von $(X_n, \mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, so ist

$$\mathbb{E}(X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{A}_{n-1}) = \mathbb{E}(Y_n - Y_{n-1} \mid \mathcal{A}_{n-1}) + \mathbb{E}(Z_n - Z_{n-1} \mid \mathcal{A}_{n-1}) = Z_n - Z$$

Folglich ist $(X_n, \mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann ein Submartingal, wenn der Prozess $(Z_n, \mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast sicher monoton wachsend ist.

■

12.9 **Lemma**

Für jedes $\mathbf{L}^2$-Martingal $(X, \mathcal{F})$ gilt

$$\underset{i\le j}{\forall}\ \mathbb{E}((X_j - X_i)^2 \mid \mathcal{F}_i) = \mathbb{E}(X_j^2 - X_i^2 \mid \mathcal{F}_i).$$

Approbatio: Sei $(X, \mathcal{F})$ ein $\mathbf{L}^2$-Martingal und $i \le j$, dann haben wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((X_j - X_i)^2 \mid \mathcal{F}_i) &= \mathbb{E}(X_j^2 \mid \mathcal{F}_i) - 2\cdot\mathbb{E}(X_j \cdot X_i \mid \mathcal{F}_i) + \mathbb{E}(X_i^2 \mid \mathcal{F}_i)\\
&= \mathbb{E}(X_j^2 \mid \mathcal{F}_i) - 2\cdot\mathbb{E}(X_j \mid \mathcal{F}_i)\cdot X_i + X_i^2\\
&= \mathbb{E}(X_j^2 \mid \mathcal{F}_i) - 2\cdot X_i^2 + X_i^2\\
&= \mathbb{E}(X_j^2 \mid \mathcal{F}_i) - \mathbb{E}(X_i^2 \mid \mathcal{F}_i)\\
&= \mathbb{E}(X_j^2 - X_i^2 \mid \mathcal{F}_i).
\end{aligned}$$

■

Kompensator 12.10

Es sei $(X, \mathcal{F})$ ein $\mathbf{L}^2$-Martingal. Dann ist

$$(X^2, \mathcal{F})$$

ein $\mathbf{L}^1$-Submartingal und es gibt einen eindeutig bestimmten wachsenden vorhersagbaren $\mathbf{L}^1$-Prozess $(\langle X\rangle, \mathcal{F})$ sodass

$$(X^2 - \langle X\rangle, \mathcal{F})$$

ein $\mathbf{L}^1$-Martingal ist mit $X_0^2 = \langle X\rangle_0$ und

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \mathbb{E}((X_n - X_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}((X_n^2 - X_{n-1}^2) \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \langle X\rangle_n - \langle X\rangle_{n-1}$$

gilt.

APPROBATIO: Sei $(X_n, \mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $\mathbf{L}^2$-Martingal. Dann ist $(X_n^2, \mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $\mathbf{L}^1$-Submartingal. Nach Doob-Zerlegung 12.8 gibt es nun ein reelles $\mathbf{L}^1$-Martingal $(Y_n, \mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie einen fast sicher monoton wachsenden vorhersagbaren reellen $\mathbf{L}^1$-Prozess $(\langle X\rangle_n, \mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass $X_n^2 - \langle X\rangle_n = Y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Insgesamt ist also

$$(X_n^2 - \langle X\rangle_n, \mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

ein $\mathbf{L}^1$-Martingal. Außerdem gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ noch

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((X_n - X_{n-1})^2 \mid \mathcal{A}_{n-1}) &= \mathbb{E}(X_n^2 - 2\cdot X_n \cdot X_{n-1} + X_{n-1}^2 \mid \mathcal{A}_{n-1}) \\
&= \mathbb{E}(X_n^2 \mid \mathcal{A}_{n-1}) - 2\cdot \mathbb{E}(X_n \cdot X_{n-1} \mid \mathcal{A}_{n-1}) + \mathbb{E}(X_{n-1}^2 \mid \mathcal{A}_{n-1}) \\
&= \mathbb{E}(X_n^2 \mid \mathcal{A}_{n-1}) - 2\cdot X_{n-1} \cdot \underbrace{\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{A}_{n-1})}_{=X_{n-1}} + X_{n-1}^2 \\
&= \mathbb{E}(X_n^2 \mid \mathcal{A}_{n-1}) - \underbrace{X_{n-1}^2}_{=\mathbb{E}(X_{n-1}^2 \mid \mathcal{A}_{n-1})} \\
&= \mathbb{E}(X_n^2 - X_{n-1}^2 \mid \mathcal{A}_{n-1})
\end{aligned}$$

Weil nun $(X_n^2 - \langle X\rangle_n, \mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal ist, gilt also

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n^2, \mathcal{A}_{n-1}) - \mathbb{E}(\langle X\rangle_n, \mathcal{A}_{n-1}) &= \mathbb{E}(X_n^2 - \langle X\rangle_n, \mathcal{A}_{n-1}) \\
&= X_{n-1}^2 - \langle X\rangle_{n-1} \\
&= \mathbb{E}(X_{n-1}^2, \mathcal{A}_{n-1}) - \mathbb{E}(\langle X\rangle_{n-1}, \mathcal{A}_{n-1})
\end{aligned}$$

und Umstellen ergibt

$$\mathbb{E}(X_n^2 - X_{n-1}^2 \mid \mathcal{A}_{n-1}) = \mathbb{E}(\langle X\rangle_n \mid \mathcal{A}_{n-1}) - \mathbb{E}(\langle X\rangle_{n-1} \mid \mathcal{A}_{n-1}) = \langle X\rangle_n - \langle X\rangle_{n-1}.$$

■

12.2 Martingaltransformation

12.11 **Prozesstransformation**

Der Operator

$$\bullet : \begin{array}{l} \mathfrak{P} \times \mathfrak{P} \to \mathfrak{P} \\ (X, Y) \mapsto X \bullet Y = ((X \bullet Y)_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\sum_{k=1}^{n} X_k \cdot (Y_k - Y_{k-1}))_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

heißt *Prozesstransformator* und $X \bullet Y$ heißt *Prozesstransformation* von Y mit X.

12.12 **Lemma**

Der Prozesstransformator ist linear in beiden Komponenten.

12.13 **Martingaltransformation**

Seien $\mathcal{F}$ eine Filtration und $p, q \in [0, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gelten:

(i) $\mathfrak{P}^p_{\text{pre}}(\mathcal{F}) \bullet \mathfrak{M}^q(\mathcal{F}) \subseteq \mathfrak{M}^1(\mathcal{F})$

(ii) $\mathfrak{P}^p_{\text{pre}_+}(\mathcal{F}) \bullet \mathfrak{M}^q_\uparrow(\mathcal{F}) \subseteq \mathfrak{M}^1_\uparrow(\mathcal{F})$

(iii) $\mathfrak{P}^\infty_{\text{pre}}(\mathcal{F}) \bullet \mathfrak{M}^p(\mathcal{F}) \subseteq \mathfrak{M}^p(\mathcal{F})$

(iv) $\mathfrak{P}^\infty_{\text{pre}_+}(\mathcal{F}) \bullet \mathfrak{M}^p_\uparrow(\mathcal{F}) \subseteq \mathfrak{M}^p_\uparrow(\mathcal{F})$

APPROBATIO: Zunächst wissen wir, dass wegen der Hoelder-Ungleichung jedes $(C \bullet X)_n$ eine $\mathbf{L}^1$-Zufallsvariable ist; anders gesagt ist $((C \bullet X)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein reeller stochastischer $\mathbf{L}^1$-Prozess.

(adaptiert) Der Prozess $((C \bullet X)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist per Definition adaptiert, wenn jede Zufallsvariable $(C \bullet X)_n$ stets $\mathcal{A}_n$-messbar ist. Weil aber nach Vorraussetzung $(C_n, \mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $(X_n, \mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beide adaptiert sind, folgt auch die Adaption von $((C \bullet X)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(Martingal) Für die Martingaleigenschaft müssen wir zeigen, dass für alle $i \leq j$ stets $\mathbb{E}((C \bullet X)_j \mid \mathcal{A}_i) = (C \bullet X)_i$ gilt. Sei also $i \leq j$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((C \bullet X)_j \mid \mathcal{A}_i) &= \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{j} C_k \cdot (X_k - X_{k-1}) \mid \mathcal{A}_i) \\
&= \sum_{k=1}^{j} \mathbb{E}(C_k \cdot (X_k - X_{k-1}) \mid \mathcal{A}_i) \\
&= \sum_{k=1}^{i} C_k \cdot (X_k - X_{k-1}) + \sum_{k=i+1}^{j} C_k \cdot \underbrace{\mathbb{E}(X_k - X_{k-1} \mid \mathcal{A}_i)}_{\substack{=\mathbb{E}(X_k|\mathcal{A}_i)-\mathbb{E}(X_{k-1}|\mathcal{A}_i) \\ =X_i - X_i = 0}} \\
&= \sum_{k=1}^{i} C_k \cdot (X_k - X_{k-1}) \\
&= (C \bullet X)_i
\end{aligned}$$

(Submartingal) Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt ähnlich wie oben

$$\mathbb{E}((C \bullet X)_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k \cdot (X_k - X_{k-1})}_{=(C\bullet X)_n} + \underbrace{C_{n+1}}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{A}_n)}_{\substack{=\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{A}_n)-\mathbb{E}(X_n|\mathcal{A}_n) \\ =\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{A}_n)-X_n \geq 0}} .$$

■

12.14

Theorem

Sei $\mathcal{F}$ eine abzählbare Filtration. Dann gelten:

(i) Der Kompensator der Martingaltransformation von $X \in \mathfrak{M}^2(\mathcal{F})$ mit $C \in \mathfrak{P}^{\infty}_{\text{pre}}(\mathcal{F})$ ist

$$\langle C \bullet X \rangle = C^2 \bullet \langle X \rangle.$$

(ii) Die Abbildung

$$C\bullet\colon (X, \mathcal{F}) \mapsto (C \bullet X, \mathcal{F})$$

ist eine $\mathbf{L}^2$-Isometrie auf $\mathfrak{M}^2(\mathcal{F})$ für alle $\mathcal{F}$-vorhersagbaren $\mathbf{L}^\infty$-Prozesse C, d.h. es gilt

$$\mathbb{E}((C \bullet X)_n^2) = \mathbb{E}((C^2 \bullet \langle X \rangle)_n).$$

(iii) Es gilt

$$\forall_{i \le j} \mathbb{E}(((C \bullet X)_j - (C \bullet X)_i)^2 \mid \mathcal{F}_i) = \mathbb{E}(\langle C \bullet X \rangle_j - \langle C \bullet X \rangle_i \mid \mathcal{F}_i).$$

APPROBATIO: (i) Nach Martingaltransformation 12.13 ist $C \bullet X$ ein $\mathbf{L}^2$-Martingal. Wegen Kompensator 12.10 ist dann $(C \bullet X)^2$ ein $\mathbf{L}^1$-Submartingal mit dem eindeutigen Kompensator $\langle C \bullet X \rangle$. Wenn wir nun $\langle C \bullet X \rangle = C^2 \bullet \langle X \rangle$ zeigen wollen, dann genügt wegen der Eindeutigkeit zu zeigen, dass

(a) $C^2 \bullet \langle X \rangle$ ein vorhersagbarer wachsender $\mathbf{L}^1$-Prozess ist, und

(b) $(C \bullet X)^2 - \langle C \bullet X \rangle$ ein $\mathbf{L}^1$-Martingal ist.

Kümmern wir uns um die erste Bedingung (a). Nach Definition ist

$$(C^2 \bullet \langle X \rangle)_n = \sum_{k=1}^{n} C_k^2 \cdot (\langle X \rangle_k - \langle X \rangle_{k-1}).$$

Weil C und $\langle X \rangle$ vorhersagbar sind, ist auch $C^2 \bullet \langle X \rangle$ vorhersagbar. Weil C^2 positiv ist und $\langle X \rangle$ wächst, ist auch $C^2 \bullet \langle X \rangle$ wachsend.

Verbleibt die Eigenschaft (b).

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((C \bullet X)_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}((\sum_{k=1}^{n+1} C_k \cdot (X_k - X_{k-1}))^2 \mid \mathcal{F}_n) \\
&= \mathbb{E}(\sum_{k,l=1}^{n+1} C_k \cdot C_l \cdot (X_k - X_{k-1}) \cdot (X_l - X_{l-1}) \mid \mathcal{F}_n) \\
&= 2 \cdot \mathbb{E}(\sum_{k<l=1}^{n+1} C_k \cdot C_l \cdot (X_k - X_{k-1}) \cdot (X_l - X_{l-1}) \mid \mathcal{F}_n) \\
&\quad + \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n+1} C_k^2 \cdot (X_k - X_{k-1})^2 \mid \mathcal{F}_n) \\
&= 2 \cdot \sum_{k<l=1}^{n} C_k \cdot C_l \cdot (X_k - X_{k-1}) \cdot (X_l - X_{l-1}) \\
&\quad + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot C_{n+1} \cdot (X_k - X_{k-1}) \cdot \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) \mid \mathcal{F}_n) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} C_k^2 \cdot (X_k - X_{k-1})^2 + C_{n+1}^2 \cdot \mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^2 \mid \mathcal{F}_n) \\
&= (C \bullet X)_n^2 + C_{n+1}^2 \cdot \mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^2 \mid \mathcal{F}_n)
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\mathbb{E}((C \bullet X)_{n+1}^2 - (C \bullet X)_n^2 \mid \mathcal{F}_n) = C_{n+1}^2 \cdot \mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^2 \mid \mathcal{F}_n)$$

und damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\langle C \bullet X \rangle_n &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}((C \bullet X)_k^2 - (C \bullet X)_{k-1}^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} C_k^2 \cdot \mathbb{E}((X_k - X_{k-1})^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} C_k^2 \cdot \mathbb{E}(X_k^2 - X_{k-1}^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} C_k^2 \cdot (\langle X \rangle_k - \langle X \rangle_{k-1}^2) \\
&= (C^2 \bullet \langle X \rangle)_n
\end{aligned}$$

(ii) Weil $(C \bullet X)^2 - \langle C \bullet X \rangle$ ein $\mathbf{L}^1$-Martingal ist und Martingale einen konstanten Erwartungswert haben gilt

$$\mathbb{E}((C \bullet X)_n^2 - \langle C \bullet X \rangle_n) = \mathbb{E}(\underbrace{(C \bullet X)_0^2 - \langle C \bullet X \rangle_0}_{=0}) = 0.$$

(iii) Weil $(C \bullet X)^2 - \langle C \bullet X \rangle$ ein $\mathbf{L}^1$-Martingal ist, haben wir zunächst

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((C \bullet X)_j^2 - \langle C \bullet X \rangle_j \mid \mathcal{F}_i) &= (C \bullet X)_i^2 - \langle C \bullet X \rangle_i \\ &= \mathbb{E}((C \bullet X)_i^2 - \langle C \bullet X \rangle_i \mid \mathcal{F}_i)\end{aligned}$$

und daraus folgt nun

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\langle C \bullet X \rangle_j - \langle C \bullet X \rangle_i \mid \mathcal{F}_i) &= \mathbb{E}((C \bullet X)_j^2 - (C \bullet X)_i^2 \mid \mathcal{F}_i) \\ &= \mathbb{E}(((C \bullet X)_j - (C \bullet X)_i)^2 \mid \mathcal{F}_i).\end{aligned}$$

■

12.3 Stoppzeiten

Im gesamten Kapitel sei $\mathbb{N}_\infty := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, wobei die Filtration $\mathcal{F}$ abzählbar ist.

Stoppzeit 12.15

Eine Abbildung

$$\tau \colon \Omega \to \mathbb{N}_\infty$$

heißt *Stoppzeit* (oder auch *Optionszeit* oder *Markovzeit*), wenn

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Die Menge aller Stoppzeiten bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oder kurz $\mathfrak{S}$.

Lemma 12.16

Sei $\tau \colon \Omega \to \mathbb{N}_\infty$ eine Abbildung, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) τ ist eine Stoppzeit

(ii) $\forall_{n \in \mathbb{N}} \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$

(iii) $\forall_{n \in \mathbb{N}} \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$

(iv) $\forall_{n \in \mathbb{N}} \{\tau \geq n+1\} \in \mathcal{F}_n$

Approbatio: (i)$\Leftrightarrow$(ii) nach Definition.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Wenn τ eine Stoppzeit ist, dann ist stets $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ und damit erhalten wir

$$\{\tau = n\} = \underbrace{\{\tau \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \setminus \underbrace{\{\tau \leq n-1\}}_{\in \mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n.$$

(ii)$\Leftarrow$(iii) Sei umgekehrt stets $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$, dann gilt

$$\{\tau \leq n\} = \bigcup_{m \leq n} \underbrace{\{\tau = m\}}_{\in \mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n.$$

(ii)⇔(iv) folgt aus $\complement\{\tau \geq n+1\} = \{\tau \leq n\}$.
■

12.17

Lemma

(i) Jede konstante Abbildung $\tau \equiv n$ ist eine Stoppzeit.

(ii) Für jede höchstens abzählbare Familie $\tau = (\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stoppzeiten sind auch das Infimum $\bigwedge \tau$ und das Supremum $\bigvee \tau$ Stoppzeiten.

APPROBATIO: (i) Das folgt sofort aus dem vorangegangenen Lemma, denn wenn $\tau \equiv m$ eine konstante Abbildung ist, dann gilt

$$\{\tau = n\} = \begin{Bmatrix} \Omega & (n = m) \\ \emptyset & (n \neq m) \end{Bmatrix} \in \mathcal{F}_n.$$

(ii) Sei $\tau = (\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine höchstens abzählbare Familie von Stoppzeiten.

($\bigwedge$) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\{\bigwedge \tau \leq n\} = \{\bigwedge_{m\in\mathbb{N}} \tau_m \leq n\} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \underbrace{\{\tau_m \leq n\}}_{\in\mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n.$$

($\bigvee$) Für alle $n \in \mathbb{N}$ haben wir analog $\{\bigvee \tau \leq n\} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}}\{\tau_m \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

■

assoziierte σ-Algebra, assoziierte Zufallsvariable 12.18

Sei τ eine Stoppzeit.

(i) Die Menge

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F}_\infty \mid \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}$$

ist eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$ und heißt *assoziierte σ-Algebra zu τ*.

(ii) Für einen zeitdiskreten Prozess X ist

$$X_\tau : \omega \mapsto \begin{cases} X_{\tau(\omega)}(\omega) & (\tau(\omega) < \infty) \\ 0 & (\tau(\omega) = \infty) \end{cases}$$

eine $\mathcal{F}_\tau$-messbare Zufallsvariable und heißt *assoziierte Zufallsvariable zu τ*.

APPROBATIO: (i) Wenn wir zeigen wollen, dass die Menge $\mathcal{F}_\tau$ eine σ-Algebra ist, dann müssen wir zeigen, dass sie abgeschlossen gegen abzählbare Vereinigungen und Komplemente ist. Sei also $\mathcal{X}$ eine abzählbare Teilmenge von $\mathcal{F}_\tau$, dann gilt

$$\underset{X\in\mathcal{X}}{\forall} X \in \mathcal{F}_\infty \quad \wedge \quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} X \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Nun ist $\mathcal{F}_\infty$ nach Definition eine σ-Algebra, also folgt erstmal $\bigcup \mathcal{X} \in \mathcal{F}_\infty$. Analog sind auch alle $\mathcal{F}_n$ σ-Algebren und enthalten damit ebenso

$$\bigcup \mathcal{X} \cap \{\tau \leq n\} = \bigcup_{X\in\mathcal{X}} \underbrace{(X \cap \{\tau \leq n\})}_{\in\mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n.$$

Verbleibt die Abgeschlossenheit gegen Komplementbildung. Sei $X \in \mathcal{F}_\tau$, dann gilt $\complement X \in \mathcal{F}_\infty$ und

$$\begin{aligned} X \cup \{\tau > n\} &= (X \cup \{\tau > n\}) \cap \Omega \\ &= (X \cup \{\tau > n\}) \cap (\{\tau \leq n\} \cup \{\tau > n\}) \\ &= \underbrace{(X \cap \{\tau \leq n\})}_{\in\mathcal{F}_n} \cup \underbrace{\{\tau > n\}}_{\in\mathcal{F}_n} \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, und das ist nichts anderes als
$\complement X \cap \{\tau \leq n\} = \complement(X \cup \{\tau > n\}) \in \mathcal{F}_n$ weil jedes $\mathcal{F}_n$ eine σ-Algebra ist.

(ii) Die zu τ assoziierte Zufallsvariable können wir zerlegen vermöge

$$X_\tau = \sum_{n \in \mathbb{N}} X_n \cdot \mathbb{1}_{\{\tau = n\}}.$$

Wenn wir nun zeigen wollen, dass X_τ auch $\mathcal{F}_\tau$-messbar ist, dann müssen wir zeigen, dass das Urbild jeder reellen Borelmenge bezüglich X_τ in der assoziierten σ-Algebra $\mathcal{F}_\tau$ liegt. Sei also $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Das Urbild $X_\tau^{-1}(B) = \{X_\tau \in B\}$ liegt genau dann in $\mathcal{F}_\tau$, wenn

- es in $\mathcal{F}_\infty$ liegt,

$$\{X_\tau \in B\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{X_n \cdot \mathbb{1}_{\{\tau = n\}} \in B\}}_{=\{X_n \in B\} \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n} \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_\infty$$

  und

- für alle $n \in \mathbb{N}$ sein Schnitt mit $\{\tau \leq n\}$ stets in $\mathcal{F}_n$ liegt.

$$\begin{aligned} \{X_\tau \in B\} \cap \{\tau \leq n\} &= \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{X_m \cdot \mathbb{1}_{\{\tau = m\}} \in B\} \cap \{\tau \leq n\} \\ &= \bigcup_{m \leq n} \underbrace{\{X_m \cdot \mathbb{1}_{\{\tau = m\}} \in B\}}_{\in \mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_n} \\ &\in \mathcal{F}_n \end{aligned}$$

■

12.19 **Lemma**

Seien τ_1 und τ_2 zwei Stoppzeiten. Dann gelten:

(i) $\{\tau_1 \leq \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_1} \cup \mathcal{F}_{\tau_2}$

(ii) $\tau_1 \leq \tau_2 \implies \mathcal{F}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_2}$

APPROBATIO: (i) Es gilt

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \{\tau_1 \leq \tau_2\} = \underbrace{\{\tau_1 \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \cup \underbrace{\{n \leq \tau_2\}}_{\substack{=\complement\{\tau_2 \leq n-1\} \\ \in \mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n}} \in \mathcal{F}_n$$

und damit folgt $\{\tau_1 \leq \tau_2\} \in \mathcal{F}_\infty$ sowie

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \{\tau_1 \leq \tau_2\} \cap \{\tau_1 \leq n\} \in \mathcal{F}_n,$$

d.h. $\{\tau_1 \leq \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_1}$. Analog folgt auch $\{\tau_1 \leq \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_2}$.

(ii) Sei $\tau_1 \leq \tau_2$, d.h. $\{\tau_1 \leq n\} \supseteq \{\tau_2 \leq n\}$. Für jede Menge $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$ gilt dann $A \in \mathcal{F}_\infty$ und

$$A \cap \{\tau_2 \leq n\} = \underbrace{A \cap \{\tau_1 \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \{\tau_2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n,$$

also $A \in \mathcal{F}_{\tau_2}$.

■

Lemma 12.20

Für jede konstante und endliche Stoppzeit stimmt die assoziierte σ-Algebra mit einer der σ-Algebren der Filtration überein, d.h. wenn $\tau \equiv n$ ist, dann gilt $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_n$.

APPROBATIO: Für $\tau \equiv n$ gilt $\{\tau \leq m\} = \begin{cases} \Omega & (m \geq n) \\ \emptyset & (m < n) \end{cases}$.

($\subseteq$) Sei $A \in \mathcal{F}_\tau$, dann gilt zunächst $A \in \mathcal{F}_\infty$ und $A \cap \{\tau \leq m\} \in \mathcal{F}_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$, also folgt $A \in \mathcal{F}_n$ für $m = n$.

($\supseteq$) Für $A \in \mathcal{F}_n$ gilt nach Definition stets $A \in \mathcal{F}_\infty$. Weiterhin gilt

$$A \cap \{\tau \leq m\} = \left\{\begin{matrix} A \cap \Omega & (m \geq n) \\ A \cap \emptyset & (m < n) \end{matrix}\right\} \in \mathcal{F}_m$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$.

■

12.4 gestoppte Prozesse

12.21

gestoppter Prozess, gestoppte Filtration

Sei τ eine Stoppzeit.

(i) Für eine Filtration $\mathcal{F}$ ist

$$\mathcal{F}^\tau = (\mathcal{F}_n^\tau)_{n\in\mathbb{N}} := (\mathcal{F}_{\tau\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$$

auch eine Filtration und heißt *gestoppte Filtration* von $\mathcal{F}$ an τ.

(ii) Für einen $\mathcal{F}$-adaptierten Prozess X ist

$$X^\tau = (X_n^\tau)_{n\in\mathbb{N}} := (X_{\tau\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$$

ein $\mathcal{F}^\tau$-adaptierter Prozess und heißt *gestoppter Prozess* von X an τ.

APPROBATIO: (i) Für $m \leq n$ folgt $\tau \wedge m \leq \tau \wedge n$ und damit $\mathcal{F}_{\tau\wedge m} \subseteq \mathcal{F}_{\tau\wedge n}$.

(ii) Das gilt weil jede Zufallsvariable $X_{\tau\wedge n}$ stets $\mathcal{F}_{\tau\wedge n}$-messbar ist.

■

12.22

Lemma

$$\begin{aligned} X_n^\tau = X_{\tau\wedge n} &= X_\tau \cdot \mathbb{1}_{\{\tau\leq n\}} + X_n \cdot \mathbb{1}_{\{\tau>n\}} \\ &= \bigoplus_{m\leq n} X_m \cdot \mathbb{1}_{\{\tau=m\}} \oplus X_n \cdot \mathbb{1}_{\{\tau>n\}}. \end{aligned}$$

12.23

Theorem

Sei X ein adaptierter Prozess und τ eine Stoppzeit. Der gestoppte Prozess X^τ ist $\mathcal{F}$-adaptiert.

APPROBATIO: Das folgt aus dem vorigen Lemma, denn alle $X_m \cdot \mathbb{1}_{\{\tau=m\}}$ sind $\mathcal{F}_m$-messbar, also auch $\mathcal{F}_n$-messbar für $m \leq n$, und $X_n \cdot \mathbb{1}_{\{\tau>n\}}$ ist $\mathcal{F}_n$-messbar. ■

Lemma 12.24

Für eine Stoppzeit τ gilt

$$\mathbb{1}_{\{\tau \leq n\}}(\omega) = \mathbb{1}_{[0,n]}(\tau(\omega)) = \mathbb{1}_{[\tau(\omega),\infty)}(n).$$

Theorem 12.25

(i) Der Prozess C mit

$$C_n(\omega) := \mathbb{1}_{[0,\tau(\omega)]}(n) = \mathbb{1}_{[n,\infty)}(\tau(\omega)) = \mathbb{1}_{\{\tau \geq n\}}(\omega)$$

ist $\mathcal{F}$-vorhersagbar und die Prozesstransformation von X mit C ist gerade der gestoppte Prozess X^τ.

(ii) Wenn X ein Submartingal ist, dann ist auch X^τ ein Submartingal. Insbesondere gilt dann $\mathbb{E}(X_0) \leq \mathbb{E}(X_{n\wedge\tau})$ für alle Indizes $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Wenn X ein Martingal ist, dann ist auch X^τ ein Martingal. Insbesondere gilt dann $\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_{n\wedge\tau})$ für alle Indizes $n \in \mathbb{N}$.

APPROBATIO: (i) C ist vorhersagbar, denn $\{\tau \geq n\} = \complement\{\tau \leq n-1\}$

ist $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
(C \bullet X)_n &= \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot (X_k - X_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{\tau \geq k\}} \cdot (X_k - X_{k-1}) \\
&= \mathbb{1}_{\{\tau \geq n\}} \cdot X_n + \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\left(\mathbb{1}_{\{\tau \geq k\}} - \mathbb{1}_{\{\tau \geq k+1\}}\right)}_{=\mathbb{1}_{\{\tau = k\}}} \cdot X_k + \underbrace{\mathbb{1}_{\{\tau \geq 0\}}}_{=\Omega} \cdot X_0 \\
&= X_n \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} + \sum_{k \leq n} X_k \cdot \mathbb{1}_{\{\tau = k\}} + X_0 \\
&= X_n^\tau + X_0
\end{aligned}$$

(ii) folgt mit (i) aus dem Satz über die Martingaltransformation.

(iii) folgt aus (ii), denn sowohl X als auch $-X$ sind Submartingale,

■

12.26 **optional sampling, optional stopping**

Sei X ein $\mathbf{L}^p$-Submartingal und τ eine f.s. endliche Stoppzeit. Dann ist X_τ eine $\mathbf{L}^p$-Zufallsvariable mit $\mathbb{E}(X_\tau) \geq \mathbb{E}(X_0)$, wenn mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) $\tau \in \mathbf{L}^\infty$

(ii) $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} |X_n| \in \mathbf{L}^\infty$

(iii) $\tau \in \mathbf{L}^p$ und $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} |X_{n+1} - X_n| \in \mathbf{L}^\infty$

Approbatio: (i) Sei τ eine f.s. beschränkte Stoppzeit. Nach Lemma 7.11 gibt es ein $K \in \mathbb{N}$, sodass $\{\tau > K\}$ eine μ-Nullmenge ist, und dann gilt

$$X_{\tau \wedge K} = X_\tau \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{\{\tau \leq K\}}}_{\overset{\text{f.s.}}{=} \mathbb{1}_\Omega} \oplus X_K \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{\{\tau > K\}}}_{\overset{\text{f.s.}}{=} \mathbb{1}_\emptyset} \overset{\text{f.s.}}{=} X_\tau.$$

Damit erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
\|X_\tau\|_p &= \|X_{\tau\wedge K}\|_p \\
&= \|\bigoplus_{n\leq K} X_n \cdot \mathbb{1}_{\{\tau=n\}}\|_p \\
&\leq \sum_{n\leq K} \|X_n \cdot \mathbb{1}_{\{\tau=n\}}\|_p \\
&\leq \sum_{n\leq K} \|X_n\|_p \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Außerdem gilt noch $\mathbb{E}(X_0) \leq \mathbb{E}(X_{\tau\wedge K}) = \mathbb{E}(X_\tau)$.

(ii) Sei X f.s. beschränkt, d.h.

(iii) Sei τ eine $\mathbf{L}^p$-Stoppzeit und der Differenzenprozess $(X_{n+1} - X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ f.s. beschränkt. ■

Theorem 12.27

Sei X ein adaptierter $\mathbf{L}^1$-Prozess. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) X ist ein Submartingal.

(ii) $\forall_{\substack{\tau_1,\tau_2\in\mathfrak{S}_{\text{bound}}\\ \tau_1\leq\tau_2}} \mathbb{E}(X_{\tau_1}) \leq \mathbb{E}(X_{\tau_2})$

(iii) $\forall_{\substack{\tau_1,\tau_2\in\mathfrak{S}_{\text{bound}}\\ \tau_1\leq\tau_2}} \forall_{A\in\mathcal{F}_{\tau_1}} \int_A X_{\tau_1}\,\mathrm{d}\mathbb{P} \leq \int_A X_{\tau_2}\,\mathrm{d}\mathbb{P}$

(iv) $\forall_{\substack{\tau_1,\tau_2\in\mathfrak{S}_{\text{bound}}\\ \tau_1\leq\tau_2}} X_{\tau_1} \leq \mathbb{E}(X_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_{\tau_1})$

APPROBATIO: (i)⇒(ii) Sei X ein Submartingal, dann gibt es eine DOOB-Zerlegung $X = Y + Z$ mit einem Martingal Y und einem f.s. wachsenden Prozess Z. Außerdem seien τ_1 und τ_2 f.s. beschränkte Stoppzeiten mit $\tau_1 \leq \tau_2$. Es folgt zunächst $Z_{\tau_1} \leq Z_{\tau_2}$ und damit gilt

$$X_{\tau_2} - X_{\tau_1} = Y_{\tau_2} - Y_{\tau_1} + Z_{\tau_2} - Z_{\tau_1} \geq Y_{\tau_2} - Y_{\tau_1}$$

Durch Integration erhalten wir

$$\mathbb{E}X_{\tau_2} - \mathbb{E}X_{\tau_1} \geq \mathbb{E}Y_{\tau_2} - \mathbb{E}Y_{\tau_1} = \mathbb{E}Y_0 - \mathbb{E}Y_0 = 0$$

und durch Umformen erhalten wir die Behauptung.

(ii)⇒(iii) Seien τ_1 und τ_2 f.s. beschränkte Stoppzeiten mit $\tau_1 \leq \tau_2$ und sei $A \in \mathcal{F}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_2}$. Setze $\tau := \tau_1 \cdot \mathbb{1}_A + \tau_2 \cdot \mathbb{1}_{\complement A}$, dann gilt

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \{\tau \leq n\} = \underbrace{\left(A \cap \{\tau_1 \leq n\}\right)}_{\in \mathcal{F}_n} \uplus \underbrace{\left(\complement A \cap \{\tau_2 \leq n\}\right)}_{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n.$$

Es gilt stets $\mathbb{1}_A = 1 - \mathbb{1}_{\complement A}$ und daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_\tau &= \mathbb{E}(X_{\tau_1} \cdot \mathbb{1}_A + X_{\tau_2} \cdot \mathbb{1}_{\complement A}) \\ &= \mathbb{E}(X_{\tau_1} \cdot \mathbb{1}_A + X_{\tau_2} - X_{\tau_2} \cdot \mathbb{1}_A) \\ &= \mathbb{E}(X_{\tau_1} \cdot \mathbb{1}_A) + \mathbb{E}X_{\tau_2} - \mathbb{E}(X_{\tau_2} \cdot \mathbb{1}_A) \end{aligned}$$

Außerdem ist $\tau \leq \tau_2 \cdot \mathbb{1}_A + \tau_2 \cdot \mathbb{1}_{\complement A} = \tau_2$, also erhalten wir mit der Voraussetzung (ii) $\mathbb{E}X_\tau \leq \mathbb{E}X_{\tau_2}$ und weiter
$\mathbb{E}(X_{\tau_1} \cdot \mathbb{1}_A) \leq \mathbb{E}(X_{\tau_2} \cdot \mathbb{1}_A)$.

(i)⇐(iii) Wähle $\tau_1 \equiv n$ und $\tau_2 \equiv n + 1$ und beachte Lemma 12.6.

(iii)⇔(iv) Das ist genau Theorem 11.5.

■

12.5 Martingalkonvergenz

aufsteigende Überquerung 12.28

Seien $a < b$ und $N \in \mathbb{N}$. Für einen zeitdiskreten Prozess X definieren wir die Zufallsvariable

$$U_N[a,b]\colon \begin{array}{l} \Omega \to \mathbb{N} \\ \omega \mapsto \displaystyle\bigvee_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ \exists_{\substack{\sigma_1,\tau_1,\dots,\sigma_k,\tau_k\in\mathbb{N} \\ 0\le\sigma_1<\tau_1<\dots<\sigma_k<\tau_k\le N}} \forall_{\substack{j\in\mathbb{N} \\ 0\le j\le k}} X_{\sigma_j}(\omega)\le a<b\le X_{\tau_j}(\omega)}} k \end{array}$$

und $U_N[a,b](\omega)$ ist die Anzahl der *aufsteigenden Überquerungen* der Folge $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ über das endliche Rechteck $[a,b] \times [0,N]$. Durch Supremumsbildung definieren wir eine weitere Zufallsvariable

$$U[a,b]\colon \begin{array}{l} \Omega \to \mathbb{N}_\infty \\ \omega \mapsto \displaystyle\bigvee_{N\in\mathbb{N}} U_N[a,b](\omega) \end{array}$$

und $U[a,b](\omega)$ ist die Anzahl der *aufsteigenden Überquerungen* der Folge $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ über das unendliche Rechteck $[a,b] \times \mathbb{N}$.

Lemma 12.29

Es gilt $0 \le U_N[a,b] \le \lceil \frac{N}{2} \rceil$.

APPROBATIO: Wegen der Bedingung
$0 \le \sigma_1 < \underbrace{\tau_1}_{\ge 1} < \dots < \underbrace{\sigma_k}_{\ge 2(k-1)} < \underbrace{\tau_k}_{\ge 2k-1} \le N$ folgt $2k-1 \le N$, d.h. $k \le \frac{N+1}{2}$. Weil k eine natürliche Zahl ist, folgt $k \le \lceil \frac{N}{2} \rceil$. ■

12.30 **Theorem**

Für einen zeitdiskreten Prozess X gilt an der Stelle $\omega \in \Omega$

$$(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert} \iff \forall_{\substack{a,b\in\mathbb{Q}\\ a<b}} U[a,b](\omega) < \infty$$

APPROBATIO: Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert genau dann, wenn $\liminf_{n\to\infty} a_n < \limsup_{n\to\infty} a_n$. Weil die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ dicht in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ liegen, ist dies äquivalent zu

$$\exists_{a,b\in\mathbb{Q}} \liminf_{n\to\infty} a_n < a < b < \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Das ist genau dann der Fall, wenn unendlich viele Folgenglieder a_n über und unter dem Rechteck $[a,b] \times \mathbb{N}$ liegen, und das ist gleichbedeutend dazu, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das Rechteck $[a,b] \times \mathbb{N}$ unendlich oft überquert. ■

12.31 **Lemma**

Die Abbildungen $\sigma_j, \tau_j \colon \Omega \to \mathbb{N}$ mit $\tau_0 :\equiv 0$ und

$$\sigma_j(\omega) := \bigwedge_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k>\tau_{j-1}(\omega)\\ X_k(\omega)\le a}} k \wedge N \qquad \tau_j(\omega) := \bigwedge_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k>\sigma_j(\omega)\\ X_k(\omega)\ge b}} k \wedge N$$

sind Stoppzeiten mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $0 \equiv \tau_0 \le \sigma_1 \le \tau_1 \le \cdots \le \sigma_N \le \tau_N \equiv N$

(ii) $\forall_{j\le U_N[a,b](\omega)} \tau_{j-1}(\omega) < \sigma_j(\omega) < \tau_j(\omega)$

(iii) $\forall_{j> U_N[a,b](\omega)} \sigma_j(\omega) = \tau_j(\omega) = N$

APPROBATIO: Der Beweis lässt sich induktiv führen. Zunächst wird im Induktionsanfang gezeigt, dass τ_0 eine Stoppzeit ist. Dann wird im Induktionsschritt gezeigt, dass σ_j eine Stoppzeit ist, wenn τ_{j-1} eine Stoppzeit ist, bzw. analog dass τ_j eine Stoppzeit ist, wenn σ_j eine Stoppzeit ist.

(IA) Nach Lemma Lemma 12.17 ist τ_0 eine Stoppzeit.

(IS) Setze

$$\sigma_j'(\omega) := \bigwedge_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k>\tau_{j-1}(\omega)\\ X_k(\omega)\leq a}} k,$$

dann genügt es nach Lemma Lemma 12.17 zu zeigen, dass σ_j' eine Stoppzeit ist. Es gilt

$$\{\sigma_j' = n\} = \underbrace{\{n > \tau_{j-1}\}}_{\substack{=\{\tau_{j-1}\leq n-1\}\\ \in\mathcal{F}_{n-1}\subseteq\mathcal{F}_n\\ \Leftarrow\tau_{j-1}\in\mathfrak{S}(\mathcal{F})}} \cap \underbrace{\{X_n \leq a\}}_{\substack{\in\mathcal{F}_n\\ \Leftarrow X\in\mathfrak{M}^1_\uparrow(\mathcal{F})}} \cap \bigcap_{m<n} \Big(\underbrace{\{m \leq \tau_{j-1}\}}_{\substack{=\{\tau_{j-1}\geq m\}\\ \in\mathcal{F}_{m-1}\subseteq\mathcal{F}_n\\ \Leftarrow\tau_{j-1}\in\mathfrak{S}(\mathcal{F})}} \cup \underbrace{\{X_m > a\}}_{\substack{\in\mathcal{F}_m\subseteq\mathcal{F}_n\\ \Leftarrow X\in\mathfrak{M}^1_\uparrow(\mathcal{F})}}\Big) \in \mathcal{F}_n$$

und damit ist σ_j nach Lemma Lemma 12.16 eine Stoppzeit. Für τ_j analog.

■

DOOB's Upcrossing Estimate Lemma 12.32

Für ein zeitdiskretes Submartingal $(X, \mathcal{F})$ lässt sich die Anzahl der aufsteigenden Überquerungen über $[a, b] \times [0, N]$ im Erwartungswert nach oben abschätzen durch

$$\mathbb{E}U_N[a, b] \leq \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{E}(X_N - a)^+.$$

APPROBATIO: Wir benutzen die Stoppzeiten aus dem vorangegangenen Lemma, dann gilt

$$\forall_{\omega\in\Omega} \ \forall_{j=1}^{U_N[a,b](\omega)} \ \underbrace{X_{\tau_j(\omega)}(\omega)}_{\geq b} - \underbrace{X_{\sigma_j(\omega)}(\omega)}_{\leq a} \geq b-a$$

und daraus folgt durch Aufsummieren

$$(b-a)\cdot U_N[a,b] \leq \sum_{j=1}^{U_N[a,b]} X_{\tau_j} - X_{\sigma_j} = \sum_{j=1}^{N} X_{\tau_j} - X_{\sigma_j}.$$

Wegen $X_{\tau_1(\omega)}(\omega) - a \geq b - a$ im Fall $U_N[a,b](\omega) \geq 1$, und durch Umsortieren lässt sich die Ungleichung auch so formulieren:

$$(b-a)\cdot U_N[a,b] \leq (X_{\tau_1} - a) + \sum_{j=2}^{N} X_{\tau_j} - X_{\sigma_j} = \underbrace{(X_{\underbrace{\tau_N}_{\equiv N}} - a)}_{\leq (X_N - a)^+} + \sum_{j=2}^{N} X_{\tau_{j-1}} - X_{\sigma_j}.$$

Schließlich folgt durch Erwartungswertbildung

$$(b-a)\cdot \mathbb{E}U_N[a,b] \leq \mathbb{E}(X_N - a)^+ + \sum_{j=2}^{N} \underbrace{\mathbb{E}X_{\tau_{j-1}} - \mathbb{E}X_{\sigma_j}}_{\substack{\leq 0 \\ \Leftarrow X \in \mathfrak{M}^1_{\uparrow}(\mathcal{F})}} \leq \mathbb{E}(X_N - a)^+$$

■

12.33

Lemma

Für beliebige reelle Funktionen f und g gilt stets

$$(f-g)^+ \leq f^+ + |g|.$$

APPROBATIO: Durch eine Zerlegung der Funktionen und eine entsprechende Fallunterscheidung ist der Beweis einfach.

$$(f-g)^+(x) = \begin{cases} f(x) - g(x) & (f(x) \geq g(x)) \\ 0 & (f(x) \leq g(x)) \end{cases}$$

$$(f^+ + |g|)(x) = \begin{cases} f(x) + g(x) & (f(x) \geq 0, g(x) \geq 0) \\ f(x) - g(x) & (f(x) \geq 0, g(x) \leq 0) \\ -g(x) & (f(x) \leq 0, g(x) \leq 0) \\ g(x) & (f(x) \leq 0, g(x) \geq 0) \end{cases}$$

■

Konvergenz von Submartingalen 12.34

Ein Submartingal $(X,\mathcal{F})$ mit $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}X_n^+ < \infty$ konvergiert fast sicher, genauer existiert eine bezüglich $\mathcal{F}_\infty$ integrierbare reelle Zufallsvariable X_∞, die fast überall der punktweise Limes von X ist, also

$$\underset{X_\infty\in\mathbf{L}^1(\mathcal{F}_\infty)}{\exists} X_n \overset{\text{f.s.}}{\to} X_\infty.$$

APPROBATIO: Zunächst gilt für beliebige $a < b$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}U[a,b] &= \mathbb{E}\bigvee_{N\in\mathbb{N}} U_N[a,b] \\ &\overset{\substack{\text{BL}\\ \Downarrow}}{=} \bigvee_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{E}U_N[a,b] \\ &\overset{\substack{\text{DUE}\\ \Downarrow}}{\leq} \frac{1}{b-a}\bigvee_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_N-a)^+ \\ &\overset{\substack{\text{Lemma 12.33}\\ \Downarrow}}{\leq} \frac{1}{b-a}\bigvee_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{E}X_N^+ + |a| \\ &< \infty,\end{aligned}$$

und daraus folgt $U[a,b] \overset{\text{f.s.}}{<} \infty$. Also konvergiert nach Satz Theorem 12.30 das Submartingal X fast überall, d.h. es existiert eine Zufallsvariable X_∞

mit $X \overset{\text{f.s.}}{\to} X_\infty$. Weiterhin haben wir noch

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_\infty| &= \mathbb{E} \liminf_{n\to\infty} |X_n| \\
&\overset{\substack{\text{Fatou}\\ \Downarrow}}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n| \\
&= \liminf_{n\to\infty} \underbrace{\mathbb{E}(2 \cdot X_n^+ - X_n)}_{=2\cdot \mathbb{E}X_n^+ - \underbrace{\mathbb{E}X_n}_{\substack{\geq \mathbb{E}X_1 \\ \Leftarrow X \in \mathfrak{M}_\uparrow^1(\mathcal{F})}}} \\
&\leq 2 \cdot \underbrace{\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n^+}_{\leq \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}X_n^+} - \mathbb{E}X_1 \\
&< \infty
\end{aligned}$$

■ und es ergibt sich $X_\infty \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}_\infty)$ sowie $|X_\infty| \overset{\text{f.s.}}{<} \infty$.

12.35

Korollar

Ein zeitdiskreter Prozess X konvergiert fast überall, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) X ist ein Submartingal mit $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}X_n^+ < \infty$.

(ii) X ist ein Supermartingal mit $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}X_n^- < \infty$.

(iii) X ist ein Martingal mit $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}|X_n| < \infty$.

12.36

$\mathbf{L}^p$-beschränkt

Ein (Sub-/Super-)Martingal $(X_i)_{i\in I}$ heißt $\mathbf{L}^p$*-beschränkt*, wenn

$$\bigvee_{i\in I} \mathbb{E}|X_i|^p < \infty.$$

Lemma 12.37

Sei $1 \leq p \leq q$. Dann gelten:

(i) $(X, \mathcal{F})$ $\mathbf{L}^p$-beschränkt $\Longrightarrow$ $(X, \mathcal{F})$ $\mathbf{L}^p$-Martingal

(ii) $(X, \mathcal{F})$ $\mathbf{L}^q$-beschränkt $\Longrightarrow$ $(X, \mathcal{F})$ $\mathbf{L}^p$-beschränkt

APPROBATIO: (i)

$$\begin{aligned}(X,\mathcal{F})\ \mathbf{L}^p\text{-beschränkt} &\Longleftrightarrow \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}|X_n|^p < \infty \\ &\Longrightarrow \forall_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}|X_n|^p < \infty \\ &\Longleftrightarrow (X,\mathcal{F})\ \mathbf{L}^p\text{-Martingal}\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}(X,\mathcal{F})\ \mathbf{L}^q\text{-beschränkt} &\Longleftrightarrow \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E} \underbrace{|X_n|^q}_{=|X_n|^q\cdot\mathbb{1}_{\{|X_n|\leq 1\}}+|X_n|^q\cdot\mathbb{1}_{\{|X_n|>1\}}} < \infty \\ &\Longleftrightarrow \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|^q\cdot\mathbb{1}_{\{|X_n|\leq 1\}}) < \infty \\ &\qquad \wedge \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(\underbrace{|X_n|^q\cdot\mathbb{1}_{\{|X_n|>1\}}}_{\geq|X_n|^p\cdot\mathbb{1}_{\{|X_n|>1\}}}) < \infty \\ &\Longrightarrow \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\mathbb{E}(|X_n|^p\cdot\mathbb{1}_{\{|X_n|\leq 1\}})}_{\leq 1} < \infty \\ &\qquad \wedge \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|^p\cdot\mathbb{1}_{\{|X_n|>1\}}) < \infty \\ &\Longleftrightarrow \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}|X_n|^p < \infty \\ &\Longleftrightarrow (X,\mathcal{F})\ \mathbf{L}^p\text{-beschränkt}\end{aligned}$$

■

12.38

Lemma

Für ein $\mathbf{L}^2$-Martingal $(X, \mathcal{F})$ gelten:

(i) $\forall_{l \leq m} \, X_m - X_l \perp \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_l)$

(ii) $\forall_{j \leq k \leq l \leq m} \langle X_k - X_j, X_m - X_l \rangle = 0$

APPROBATIO: (i) Sei $l \leq m$ und $Z \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_l)$, dann ist

$$\begin{aligned}
\langle X_m - X_l, Z \rangle &= \mathbb{E}((X_m - X_l) \cdot Z) \\
&\overset{\substack{\text{tower} \\ \Downarrow}}{=} \mathbb{E}\mathbb{E}((X_m - X_l) \cdot Z \mid \mathcal{F}_l) \\
&\overset{\substack{\text{pullout} \\ \Downarrow}}{=} \mathbb{E}(Z \cdot \underbrace{\mathbb{E}(X_m - X_l \mid \mathcal{F}_l)}_{\substack{=0 \\ \Leftarrow X \in \mathfrak{M}^2(\mathcal{F})}}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(ii) folgt aus (i) wegen $X_k - X_j \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_k) \subseteq \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_l)$.

■

12.39

Korollar

Für ein $\mathbf{L}^2$-Martingal $(X, \mathcal{F})$ gilt

$$\mathbb{E}X_n^2 = \mathbb{E}X_0^2 + \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(X_j - X_{j-1})^2.$$

APPROBATIO: X_n lässt sich als Teleskopsumme

$X_n = X_0 + \sum_{j=1}^n (X_j - X_{j-1})$ darstellen und damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X_n^2 &= \mathbb{E}(X_0 + \sum_{j=1}^n (X_j - X_{j-1}))^2 \\
&\overset{\substack{X_0 \perp \sum_{j=1}^n (X_j - X_{j-1}) \\ \Downarrow}}{=} \mathbb{E}X_0^2 + \underbrace{\mathbb{E}((X_1 - X_0) + \sum_{j=2}^n (X_j - X_{j-1}))^2}_{\overset{\substack{X_1 - X_0 \perp \sum_{j=2}^n (X_j - X_{j-1}) \\ \Downarrow}}{=} \mathbb{E}(X_1 - X_0)^2 + \underbrace{\mathbb{E}((X_2 - X_1) + \sum_{j=3}^n (X_j - X_{j-1}))^2}_{= \dots}} \\
&= \mathbb{E}X_0^2 + \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_j - X_{j-1})^2.
\end{aligned}$$

■

Lemma 12.40

Ein $\mathbf{L}^2$-Martingal X ist genau dann $\mathbf{L}^2$-beschränkt, wenn

$$\sum_{j=1}^\infty \mathbb{E}(X_j - X_{j-1})^2 < \infty.$$

APPROBATIO:

$$\begin{aligned}
(X, \mathcal{F}) \ \mathbf{L}^2\text{-beschränkt} &\iff \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}X_n^2 < \infty \\
&\overset{\substack{\text{Korollar 12.39} \\ \Downarrow}}{\iff} \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \left(\mathbb{E}X_0^2 + \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_j - X_{j-1})^2 \right) < \infty \\
&\iff \sum_{j=1}^\infty \mathbb{E}(X_j - X_{j-1})^2 < \infty
\end{aligned}$$

■

abschließbar 12.41

Ein Submartingal $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *abschließbar*, wenn es eine Zufallsvariable X_∞ gibt, sodass $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_\infty}$ wieder ein Submartingal ist.

12.42 **Konvergenz von $\mathbf{L}^2$-Martingalen**

Ein $\mathbf{L}^2$-beschränktes Martingal $(X, \mathcal{F})$ konvergiert fast sicher und in $\mathbf{L}^2$ gegen eine Zufallsvariable $X_\infty \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_\infty)$, also

$$\underset{X_\infty \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_\infty)}{\exists} \quad X_n \xrightarrow{\mathbf{L}^2} X_\infty.$$

Außerdem ist dann $(X, \mathcal{F})$ abschließbar, d.h. $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_\infty}$ ist auch ein $\mathbf{L}^2$-Martingal.

APPROBATIO: Weil $(X, \mathcal{F})$ ein $\mathbf{L}^2$-beschränktes Martingal ist, ist es nach Lemma 12.37 auch $\mathbf{L}^1$-beschränkt und damit folgt wegen Konvergenz von Submartingalen 12.34

$$\underset{X_\infty \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}_\infty)}{\exists} \quad X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X_\infty.$$

Sei $j < k$, dann ist $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\mathbf{L}^2$-Cauchyfolge, denn es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_k - X_j)^2 &= \mathbb{E}\left(\sum_{l=j+1}^{k} (X_l - X_{l-1})\right)^2 \\
&= \sum_{l=j+1}^{k} \mathbb{E}(X_l - X_{l-1})^2 \\
&\xrightarrow{j,k \to \infty} 0.
\end{aligned}$$

Weil $\mathbf{L}^2$ vollständig ist, hat das Martingal einen $\mathbf{L}^2$-Limes $X'_\infty \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_\infty)$. Also konvergiert $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch fast sicher gegen X'_∞, und es folgt aufgrund der Eindeutigkeit des fast sicheren Grenzpunkts $X_\infty \overset{\text{f.s.}}{=} X'_\infty$. Insgesamt gilt nun

$$\underset{X_\infty \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_\infty)}{\exists} \quad X_n \xrightarrow{\mathbf{L}^2} X_\infty.$$

Wegen der Martingaleigenschaft ist die Erwartungswertfolge $(\mathbb{E}X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstant und konvergiert damit gegen $\mathbb{E}X_0$. Weil X_∞ der $\mathbf{L}^2$-Limes von $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist, konvergiert $(\mathbb{E}X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\mathbb{E}X_\infty$ und es folgt $\mathbb{E}X_\infty = \mathbb{E}X_0$, denn der Grenzwert ist eindeutig. Also ist auch die Erwartungswertfolge $(\mathbb{E}X_n)_{n \in \mathbb{N}_\infty}$ konstant, also ist das Martingal $(X, \mathcal{F})$ nach Theorem 12.27 abschließbar. ∎

Theorem 12.43

Es sei $X \subseteq \mathbf{L}^2$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X_n = 0$. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{V}X_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ konvergiert fast sicher.}$$

Falls $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} |X_n| \overset{\text{f.s.}}{\leq} c < \infty$, dann gilt auch die Rückrichtung.

APPROBATIO: ($\Rightarrow$) Zunächst gilt $\mathbb{V}X_n = \mathbb{E}(X - \underbrace{\mathbb{E}X}_{=0})^2 = \mathbb{E}X_n^2$.

$$\left(\sum_{k=1}^{n} X_k, \sigma(X_1, \ldots, X_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

ist ein $\mathbf{L}^2$-beschränktes Martingal, denn es gilt für $i \leq j$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{j} X_k, \sigma(X_1, \ldots, X_i)) &= \sum_{k=1}^{j} \mathbb{E}(X_k, \sigma(X_1, \ldots, X_i)) \\
&\overset{\substack{\text{Theorem11.6} \\ \Downarrow}}{=} \sum_{k=1}^{i} X_k + \sum_{k=i+1}^{j} \underbrace{\mathbb{E}(X_k)}_{=0} \\
&= \sum_{k=1}^{i} X_k.
\end{aligned}$$

Folglich konvergiert $\sum_{k=1}^{n} X_k$ fast sicher, nach Konvergenz von $\mathbf{L}^2$-Martingalen 12.42.

($\Leftarrow$) Sei umgekehrt $\sum_{k=1}^{n} X_k$ fast sicher konvergent und $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} |X_n| \overset{\text{f.s.}}{\leq} c < \infty$. Weil $(\sum_{k=1}^{n} X_k, \sigma(X_1, \ldots, X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ein $\mathbf{L}^2$-Martingal ist, gibt es nach Kompensator 12.10 einen eindeutig bestimmten wachsenden vorhersagbaren $\mathbf{L}^1$-Prozess $(\langle \sum_{k=1}^{n} X_k \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass $((\sum_{k=1}^{n} X_k)^2 - \langle \sum_{k=1}^{n} X_k \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ ein

Martingal ist und es gilt

$$\begin{aligned}
\langle \sum_{k=1}^{n} X_k \rangle &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}((\sum_{k=1}^{j} X_k - \sum_{k=1}^{j-1} X_k)^2 \mid \sigma(X_1, \ldots, X_{j-1})) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(X_j^2 \mid \sigma(X_1, \ldots, X_{j-1})) \\
&\overset{\substack{X_j \perp\!\!\!\perp \sigma(X_1,\ldots,X_{j-1}) \\ \Downarrow}}{=} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E} X_j^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{V} X_j.
\end{aligned}$$

Für $\gamma > 0$ ist $\tau_\gamma \colon \Omega \to \mathbb{N}$ mit

$$\tau_\gamma(\omega) := \bigwedge_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ |\sum_{j=1}^{k} X_j| > \gamma}} k$$

eine Stoppzeit, denn es gilt

$$\{\tau_\gamma = n\} = \underbrace{\{|\sum_{j=1}^{n} X_j| > \gamma\}}_{\in \sigma(X_1,\ldots,X_n)} \cap \bigcap_{m<n} \underbrace{\{|\sum_{j=1}^{m} X_j| \leq \gamma\}}_{\in \sigma(X_1,\ldots,X_m) \subseteq \sigma(X_1,\ldots,X_n)} \in \sigma(X_1, \ldots, X_n).$$

Damit ist nach Theorem 12.25 auch $((\sum_{k=1}^{\tau_\gamma \wedge n} X_k)^2 - \sum_{j=1}^{\tau_\gamma \wedge n} \mathbb{V} X_j)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Martingal mit

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{\tau_\gamma \wedge 0} X_k\right)^2 - \sum_{j=1}^{\tau_\gamma \wedge 0} \mathbb{V} X_j\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{\tau_\gamma \wedge n} X_k\right)^2 - \sum_{j=1}^{\tau_\gamma \wedge n} \mathbb{V} X_j\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{\tau_\gamma \wedge n} X_k\right)^2 - \sum_{j=1}^{\tau_\gamma \wedge n} \mathbb{V} X_j.
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$
\begin{aligned}
|\sum_{k=1}^{\tau_\gamma \wedge n} X_k| &\leq \begin{cases} \gamma & (n < \tau_\gamma) \\ |\sum_{k=1}^{\tau_\gamma} X_k| & (n \geq \tau_\gamma) \end{cases} \\
&= \gamma \cdot \mathbb{1}_{\{n<\tau_\gamma\}} + |\sum_{k=1}^{\tau_\gamma} X_k| \cdot \mathbb{1}_{\{n \geq \tau_\gamma\}} \\
&\leq \gamma \cdot \mathbb{1}_{\{n<\tau_\gamma\}} + \underbrace{|\sum_{k=1}^{\tau_\gamma} X_k - \sum_{k=1}^{\tau_\gamma - 1} X_k|}_{=|X_{\tau_\gamma}| \leq c} \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{\{n \geq \tau_\gamma\}}}_{\leq 1} + \underbrace{|\sum_{k=1}^{\tau_\gamma - 1} X_k|}_{\leq \gamma} \cdot \mathbb{1}_{\{n \geq \tau_\gamma\}} \\
&\leq \gamma + c.
\end{aligned}
$$

Also folgt $\sum_{j=1}^{\tau_\gamma \wedge n} \mathbb{V} X_j \leq (\gamma + c)^2$. Weil nach Voraussetzung $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ fast sicher konvergiert, gibt es ein γ_0 mit $\tau_{\gamma_0} \overset{\text{f.s.}}{=} \infty$, und demnach ist

$$
\sum_{j=1}^{\tau_{\gamma_0} \wedge n} \mathbb{V} X_j \overset{\text{f.s.}}{=} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{V} X_j \leq (\gamma + c)^2.
$$

Schließlich ist $(\sum_{j=1}^{n} \mathbb{V} X_j)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt, also konvergert, und das ist nichts anderes als

$$
\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{V} X_j < \infty.
$$

■

12.6 Gleichgradig integrierbare Martingale

12.44

gleichgradig integrierbar

Ein stochastischer Prozess $(X_i)_{i\in I}$ heißt *gleichgradig integrierbar* (kurz: *ggi*, auch: *equi-integrierbar*), wenn

$$\lim_{R\to\infty} \bigvee_{i\in I} \int_{\{|X_i|>R\}} |X_i| \,\mathrm{d}\mathbb{P} = 0.$$

12.45

Lemma

Sei $(X_i)_{i\in I}$ ggi, dann gelten:

(i) $\forall_{J\subseteq I} (X_j)_{j\in J}$ ggi

(ii) $(X_i)_{i\in I}$ $\mathbf{L}^1$-beschränkt.

APPROBATIO: (i) Es gilt

$$\begin{aligned}(X_i)_{i\in I} \text{ ggi} &\iff \lim_{R\to\infty} \underbrace{\bigvee_{i\in I} \int_{\{|X_i|>R\}} |X_i| \,\mathrm{d}\mathbb{P}}_{\geq \bigvee_{j\in J} \int_{\{|X_j|>R\}} |X_j| \,\mathrm{d}\mathbb{P}} = 0 \\ &\implies \lim_{R\to\infty} \bigvee_{j\in J} \int_{\{|X_j|>R\}} |X_j| \,\mathrm{d}\mathbb{P} = 0 \\ &\iff (X_j)_{j\in J} \text{ ggi}\end{aligned}$$

(ii) Sei $(X_i)_{i\in I}$ ggi, dann existiert ein $R_1 > 0$ mit $\bigvee_{i\in I} \int_{\{|X_i|>R_1\}} |X_i| \,\mathrm{d}\mathbb{P} \leq 1$ und damit folgt

$$\mathbb{E}|X_i| = \int |X_i| \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \underbrace{\int_{\{|X_i|>R_1\}} |X_i| \,\mathrm{d}\mathbb{P}}_{\leq 1} + \underbrace{\int_{\{|X_i|\leq R_1\}} |X_i| \,\mathrm{d}\mathbb{P}}_{\leq R_1}.$$

Durch Supremumsbildung erhält man $\bigvee_{i\in I} \mathbb{E}|X_i| \leq 1 + R_1 < \infty$, also ist $(X_i)_{i\in I}$ $\mathbf{L}^1$-beschränkt.

■

Lemma 12.46

Für $X \in \mathbf{L}^1(\mathcal{A})$ gelten:

(i) $\{X\}$ ist ggi.

(ii) $\{\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \leq \mathcal{A}\}$ ist ggi.

APPROBATIO: (i) Weil $X \in \mathbf{L}^1$ ist, gilt zunächst $\mathbb{P}\{|X| = \infty\} = 0$ und damit folgt $\mathbb{1}_{\{|X|>R\}} \xrightarrow[R\to\infty]{\text{f.s.}} 0$. Weiter haben wir

$$\int_{\{|X|>R\}} |X| \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int \underbrace{|X| \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{\{|X|>R\}}}_{\xrightarrow[R\to\infty]{\text{f.s.}} 0}}_{\leq |X| \in \mathbf{L}^1} \, \mathrm{d}\mathbb{P} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

(ii) Sei $\mathcal{F} \leq \mathcal{A}$, dann gilt nach der JENSEN-Ungleichung $|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F})| \leq \mathbb{E}(|X| \mid \mathcal{F})$ und mit der Tower-Eigenschaft folgt $\mathbb{E}|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F})| \leq \mathbb{E}(|X|)$. Für $R, S > 0$ gilt nun

$$\begin{aligned}
&\int_{\{|\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|>R\}} |\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F})| \, \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&\leq \int_{\{|\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|>R\}} \mathbb{E}(|X| \mid \mathcal{F}) \, \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int_{\{|\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|>R\}} |X| \, \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int_{\{|\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|>R\}\cap\{|X|>S\}} |X| \, \mathrm{d}\mathbb{P} + \underbrace{\int_{\{|\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|>R\}\cap\{|X|\leq S\}} |X| \, \mathrm{d}\mathbb{P}}_{\leq S \cdot \underbrace{\mathbb{P}\{|\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|>R\}}_{\leq \frac{S}{R} \cdot \mathbb{E}|\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|}} \\
&\leq \int_{\{|X|>S\}} |X| \, \mathrm{d}\mathbb{P} + \frac{S}{R} \cdot \mathbb{E}|X| \\
&\xrightarrow[S\to\infty]{} 0 + \frac{S}{R} \cdot \mathbb{E}|X| \\
&\xrightarrow[R\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

■

12.47 **Theorem**

Ein reeller stochastischer Prozess X ist ggi, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) X ist $\mathbf{L}^p$-beschränkt für ein $p > 1$.

(ii) X besitzt eine $\mathbf{L}^1$-Majorante, d.h. $\exists_{Y\in\mathbf{L}^1} \forall_{i\in I} |X_i| \leq Y$.

APPROBATIO: (i) Es gilt zunächst

$$\begin{aligned}\int_{\{|X_n|>R\}} |X_n| \,\mathrm{d}\mathbb{P} &< \int_{\{|X_n|>R\}} |X_n| \cdot \frac{|X_n|^{p-1}}{R^{p-1}} \,\mathrm{d}\mathbb{P} \\ &= R^{1-p} \cdot \int_{\{|X_n|>R\}} |X_n|^p \,\mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\leq \underbrace{R^{1-p}}_{\xrightarrow[R\to\infty]{}0} \cdot \underbrace{\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\int_{\{|X_n|>R\}} |X_n|^p \,\mathrm{d}\mathbb{P}}_{\leq \mathbb{E}|X_n|^p}}_{<\infty}\end{aligned}$$

und daraus ergibt sich

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|X_n|>R\}} |X_n| \,\mathrm{d}\mathbb{P} \leq R^{1-p} \cdot \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|X_n|>R\}} |X_n|^p \,\mathrm{d}\mathbb{P} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

(ii) Wir haben

$$\begin{aligned}\int_{\{|X_n|>R\}} |X_n| \,\mathrm{d}\mathbb{P} &\leq \int_{\{|X_n|>R\}} Y \,\mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\leq \int_{\{Y>R\}} Y \,\mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\xrightarrow[R\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

■

12.48 **VITALI** *[Vitali]*

Für einen $\mathbf{L}^1$-Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, der im Maß gegen ein X_∞ konvergiert, sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) X ist ggi.

(ii) X konvergiert in $\mathbf{L}^1$.

(iii) $\mathbb{E}|X|$ konvergiert in $\mathbb{R}$.

APPROBATIO: (i)$\Rightarrow$(ii) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ggi. Setze $\chi_n(x) := -n \vee x \wedge n$ für $n \in \mathbb{N}$, dann gilt stets $|x - \chi_n(x)| \le |x| \cdot \mathbb{1}_{\{|x|\ge n\}}$. Wir zeigen nun, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\mathbf{L}^1$-Cauchyfolge ist. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, dann ist

$$\begin{aligned} |X_m - X_n| &\le |X_m - \chi_k(X_m)| + |\chi_k(X_m) - \chi_k(X_n)| + |\chi_k(X_n) - X_n| \\ &\le |X_m| \cdot \mathbb{1}_{\{|X_m|\ge k\}} + |\chi_k(X_m) - \chi_k(X_n)| + |X_n| \cdot \mathbb{1}_{\{|X_n|\ge k\}} \end{aligned}$$

und demnach

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X_m - X_n| &\le \mathbb{E}(|X_m| \cdot \mathbb{1}_{\{|X_m|\ge k\}}) + \mathbb{E}|\chi_k(X_m) - \chi_k(X_n)| + \mathbb{E}(|X_n| \cdot \mathbb{1}_{\{|X_n|\ge k\}}) \\ &\le \underbrace{2 \cdot \bigvee_{l\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_l| \cdot \mathbb{1}_{\{|X_l|\ge k\}})}_{\xrightarrow[l\to\infty]{}0} + \mathbb{E}\underbrace{|\chi_k(X_m) - \chi_k(X_n)|}_{\xrightarrow[m,n\to\infty]{}0}. \end{aligned}$$

Also ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\mathbf{L}^1$-Cauchyfolge und damit konvergent gegen ein X'_∞ im vollständigen Raum $\mathbf{L}^1$. Folglich konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch im Maß gegen X'_∞ und weil Grenzwerte im Maß fast sicher eindeutig sind, folgt schließlich $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{L}^1} X_\infty$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen X_∞ in $\mathbf{L}^1$, dann ist $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n - X_\infty| = 0$. Mit der umgekehrten $\mathbf{L}^1$-MINKOWSKI-Ungleichung folgt daraus $\lim_{n\to\infty} |\mathbb{E}|X_n| - \mathbb{E}|X_\infty|| = 0$, d.h. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n| = \mathbb{E}|X_\infty|$.

(i)$\Leftarrow$(iii) Setze

$$\psi_R(x) := \begin{cases} 1 & (|x| \le R-1) \\ R - |x| & (R-1 \le |x| \le R) \\ 0 & (R \le |x|) \end{cases},$$

dann gilt stets

- $0 \le \psi_R \le 1$
- $\psi_R \xrightarrow[R\to\infty]{} 1$
- $\mathbb{1}_{\{|X|>R\}} \le 1 - \psi_R(X)$

Weiter sei noch $f_R(x) := |x| \cdot \psi_R(x)$ mit der Eigenschaft

- $0 \le f_R(x) \le |x|$
- $\forall_{x\in\mathbb{R}}\, f_R(x) \xrightarrow[R\to\infty]{} |x|$

dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\{|X_n|>R\}} |X_n| \,\mathrm{d}\mathbb{P} &\le \int (1 - \psi_R(X_n)) \cdot |X_n| \,\mathrm{d}\mathbb{P} \\ &= \mathbb{E}|X_n| - \mathbb{E}f_R(X_n) \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}|X_\infty| - \mathbb{E}f_R(X_\infty) \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|X_n|>R\}} |X_n| \,\mathrm{d}\mathbb{P} \leq \mathbb{E}|X_\infty| - \mathbb{E}\underbrace{f_R(X_\infty)}_{\xrightarrow[R\to\infty]{}|X_\infty|} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

■

12.49 **Lemma**

Ein $\mathbf{L}^1$-konvergentes Submartingal ist abschließbar.

APPROBATIO: Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Submartingal, das gegen X_∞ in $\mathbf{L}^1$ konvergiert. Für $n \in \mathbb{N}$ und $F \in \mathcal{F}_n$ gilt dann $X_n \cdot \mathbb{1}_F \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{L}^1} X_\infty \cdot \mathbb{1}_F$ wegen

$$\mathbb{E}|X_n \cdot \mathbb{1}_F - X_\infty \cdot \mathbb{1}_F| \leq \mathbb{E}|X_n - X_\infty| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Also folgt für $n < m$

$$\int_F X_n \,\mathrm{d}\mathbb{P} \leq \int_F X_m \,\mathrm{d}\mathbb{P} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_F X_\infty \,\mathrm{d}\mathbb{P},$$

d.h. es gilt stets $\int_F X_n \,\mathrm{d}\mathbb{P} \leq \int_F X_\infty \,\mathrm{d}\mathbb{P}$ und damit ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abschließbar. ■

12.50 **Theorem** *[GGIKonvergenz]*

Für ein Submartingal $(X, \mathcal{F})$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) X ist ggi.

(ii) X konvergiert fast sicher und in $\mathbf{L}^1$.

(iii) X konvergiert in $\mathbf{L}^1$.

Ist zudem $(X, \mathcal{F})$ ein Martingal, dann auch noch:

(iv) X ist abschließbar.

APPROBATIO: (i)⇒(ii) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ggi, dann gilt

$$\mathbb{E}|X_n| = \int |X_n| \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \underbrace{\int_{\{|X_n|\le R\}} |X_n| \,\mathrm{d}\mathbb{P}}_{\le R} + \underbrace{\int_{\{|X_n|>R\}} |X_n| \,\mathrm{d}\mathbb{P}}_{\xrightarrow[R\to\infty]{} 0},$$

also folgt $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\underbrace{|X_n|}_{\ge X_n^+} < \infty$. Nach Konvergenz von Submartingalen 12.34 konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast sicher gegen ein $X_\infty \in \mathbf{L}^1$. Also konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch gegen X_∞, und mit dem Satz von VITALI 12.48 folgt die Konvergenz in $\mathbf{L}^1$.

(ii)⇒(iii) trivial.

(i)⇐(iii) Weil aus der $\mathbf{L}^1$-Konvergenz die $\mathbb{P}$-Konvergenz folgt, erhalten wir aus dem Satz von VITALI 12.48, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ggi ist.

(i)⇒(iv) folgt aus dem vorangegangenen Lemma.

(i)⇐(iv) Wenn $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abschließbar ist, dann gibt es ein $X_\infty \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}_\infty)$ mit $\mathbb{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_n) = X_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Lemma Lemma 12.46 ist

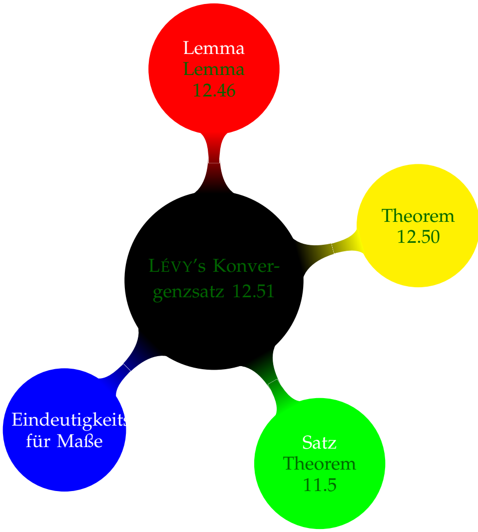
$$\big(\mathbb{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}')\big)_{\mathcal{F}'\le\mathcal{F}_\infty} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

ggi.

■

12.7 Anwendungen von Martingalen

12.7.1 P. Lévy's Konvergenzsatz



12.51

Lévy's Konvergenzsatz *[Levy]*

$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.s.},\mathbf{L}^1} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_\infty)$

Sei $X \in \mathbf{L}^1(\mathcal{A})$ und $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration in $\mathcal{A}$. Dann gilt

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.s.},\mathbf{L}^1} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_\infty).$$

Approbatio: Wir definieren ein Martingal $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_\infty}$ mit $X_n := \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n)$ für $n \in \mathbb{N}_\infty$[1], dann ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_\infty}$ ggi nach Lemma Lemma 12.46 und damit konvergent und abschließbar nach Theorem 12.50, d.h. es gibt ein $Y \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}_\infty)$ mit $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.s.},\mathbf{L}^1} Y$ und $\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_n) = X_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_\infty$. Wir müssen nun noch zeigen, dass $Y \overset{\text{f.s.}}{=} X_\infty = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_\infty)$

[1] Die Adaptiertheit ist trivial, da ja X_n gerade die Projektion von X in $\mathbf{L}^1(\mathcal{F}_n)$ ist. Die Martingaleigenschaft folgt aus der Tower-Eigenschaft: Sei $m \leq n$, dann gilt $\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n) \mid \mathcal{F}_m) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_m) = X_m$.

ist, denn dann folgt $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.s.},\mathbf{L}^1} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_\infty)$. Es gilt

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_n) \overset{\text{tower}}{=} X_n \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n) \overset{\text{tower}}{=} \mathbb{E}(\underbrace{\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_\infty)}_{=X_\infty} \mid \mathcal{F}_n)$$

und daraus ergibt sich durch zweimalige Anwendung von Satz Theorem 11.5

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{F\in\mathcal{F}_n}{\forall} \int_F Y \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F X_\infty \,\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Weiter folgt

$$\underset{F\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n}{\forall} \underbrace{\int_F Y^+ + X_\infty^- \,\mathrm{d}\mathbb{P}}_{=:\mu F} = \underbrace{\int_F X_\infty^+ + Y^- \,\mathrm{d}\mathbb{P}}_{=\nu F}$$

und wir erhalten damit zwei Maße μ, ν, die auf dem $\cap$-stabilen Erzeuger $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n$ von $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n)$ übereinstimmen. Nach dem Eindeutigkeitssatz für Maße sind μ und ν auf ganz $\mathcal{F}_\infty$ gleich, d.h. wir haben

$$\underset{F\in\mathcal{F}_\infty}{\forall} \int_F Y^+ + X_\infty^- \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_F X_\infty^+ + Y^- \,\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Weil X_∞ und Y messbar bezüglich $\mathcal{F}_\infty$ sind, ist auch $\{X_\infty > Y\}$ messbar bezüglich $\mathcal{F}_\infty$, und es ergibt sich

$$\int_{\{X_\infty>Y\}} X_\infty - Y \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{\{X_\infty>Y\}} X_\infty \,\mathrm{d}\mathbb{P} - \int_{\{X_\infty>Y\}} Y \,\mathrm{d}\mathbb{P} = 0$$

sowie analog $\int_{\{Y>X_\infty\}} Y - X_\infty \,\mathrm{d}\mathbb{P} = 0$. Insgesamt folgt $\mathbb{P}\{X_\infty \neq Y\} = 0$, d.h. $X_\infty \overset{\text{f.s.}}{=} Y$. ■

Korollar 12.52

Sei $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration in $\mathcal{A}$. Dann gilt

$$\underset{F\in\mathcal{F}_\infty}{\forall}\ \mathbb{E}(\mathbb{1}_F \mid \mathcal{F}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.s.}} \mathbb{1}_F$$

APPROBATIO: Sei $F \in \mathcal{F}_\infty$. Wähle $X := \mathbb{1}_F \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}_\infty)$ in LÉVY's Konvergenzsatz 12.51, dann ergibt sich

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_F \mid \mathcal{F}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.s.},\mathbf{L}^1} \mathbb{E}(\mathbb{1}_F \mid \mathcal{F}_\infty) = \mathbb{1}_F.$$

■

12.53

Korollar

Sei $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen σ-Algebren und $\mathcal{T}_\infty := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sigma\left(\bigcup_{k\geq n} \mathcal{A}_k\right)$ die terminale σ-Algebra. Dann gilt für alle terminalen Ereignisse $T \in \mathcal{T}_\infty$

$$\mathbb{P}T \in \{0,1\}.$$

Approbatio: Wir setzen $\mathcal{F}_n := \sigma\left(\bigcup_{k\leq n} \mathcal{A}_k\right)$ und $\mathcal{T}_n := \sigma\left(\bigcup_{k\geq n} \mathcal{A}_k\right)$, dann ist nach dem Blocklemma für unabhängige Ereignissysteme $\{\mathcal{F}_n, \mathcal{T}_{n+1}\}$ unabhängig für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil $\mathcal{T}_{n+1} \supseteq \mathcal{T}_\infty$, folgt stets $\mathcal{F}_n \perp\!\!\!\perp \mathcal{T}_\infty$. Also ergibt sich wegen $T \in \mathcal{T}_\infty$ stets $\sigma(\mathbb{1}_T) = \sigma\{T\} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_n$, d.h. $\mathbb{1}_T$ und $\mathcal{F}_n$ sind unabhängig. Nun können wir Theorem 11.6 anwenden, d.h. es gilt $\mathbb{E}(\mathbb{1}_T \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\mathbb{1}_T$, und erhalten

$$\mathbb{P}T = \mathbb{E}\mathbb{1}_T = \mathbb{E}(\mathbb{1}_T \mid \mathcal{F}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.s.}, \mathbf{L}^1} \mathbb{1}_T.$$

■

12.54

Lemma

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen und $A := \limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$. Dann gilt:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}A_n < \infty \implies \mathbb{P}A = 0$$

Wenn die Ereignisse A_n paarweise unabhängig sind, dann gilt auch die Umkehrung, bzw. äquivalent dazu:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}A_n = \infty \implies \mathbb{P}A = 1$$

12.7.2 Rückwärtsmartingale und das starke Gesetz der großen Zahlen

Netz 12.55

Seien I und X Mengen. Eine Abbildung

$$\alpha : \begin{array}{l} I \to X \\ i \mapsto \alpha_i \end{array}$$

heißt *Netz* in X mit *Indexmenge* I.

Filtration, Martingal 12.56

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(I, \leq)$ eine quasigeordnete Menge, d.h. $\leq$ ist reflexiv und transitiv.

(i) Ein monotones Netz $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ von Unter-σ-Algebren von $\mathcal{A}$ heißt *Filtration* in $\mathcal{A}$, d.h. es gilt

$$\forall_{i \leq j} \mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j.$$

(ii) Sei $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ eine Filtration. Ein stochastischer Prozess $(X_i)_{i \in I}$ heißt $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$-*adaptiert*, wenn jede Zufallsvariable X_i messbar bezüglich $\mathcal{F}_i$ ist.

(iii) Ein adaptierter stochastischer Prozess $(X_i, \mathcal{F}_i)_{i \in I}$ mit

$$\forall_{i \leq j} \mathbb{E}(X_j \mid \mathcal{F}_i) = X_i$$

heißt *Martingal*.

12.57 **vorwärts/rückwärts gerichtet**

Eine Menge I heißt *vorwärts gerichtet*, wenn es eine Quasiordnung $\leq$ auf I gibt, sodass

$$\forall_{i,j \in I} \exists_{k \in I} \, i \leq k, \; j \leq k.$$

Dual heißt I *rückwärts gerichtet*, wenn eine Quasiordnung $\leq$ existiert, sodass es für alle $i, j \in I$ ein $k \in I$ mit $k \leq i$ sowie $k \leq j$ gibt.

12.58 **Einige gerichtete Indexmengen**

(i) Vorwärts gerichtete Indexmengen:

- $(\mathbb{N}, \leq) \cong (-\mathbb{N}, \geq)$
- $(\mathbb{R}_+, \leq) \cong (\mathbb{R}_-, \geq)$
- $(\mathcal{X}, \subseteq)$ für eine $\cup$-stabile Menge $\mathcal{X} \subseteq \wp(X)$
- $(\mathcal{X}, \supseteq)$ für eine $\cap$-stabile Menge $\mathcal{X} \subseteq \wp(X)$
- $(I_1, \leq_1) \times (I_2, \leq_2)$ für zwei vorwärts gerichtete Indexmengen $(I_1, \leq_1)$ und $(I_2, \leq_2)$
- $(X, \trianglelefteq_z)$ mit $x \trianglelefteq_z y :\Leftrightarrow \|x - z\| \geq \|y - z\|$ für ein $z \in X$ und einen normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$

(ii) Rückwärts gerichtete Indexmengen:

- $(I, \geq)$ für eine vorwärts gerichtete Indexmenge $(I, \leq)$
- $(-\mathbb{N}, \leq) \cong (\mathbb{N}, \geq)$
- $(\mathbb{R}_-, \leq) \cong (\mathbb{R}_+, \geq)$

Beispiele fertigstellen.

vorwärts/rückwärts konvergent

12.59

Ein *Netz* $\alpha\colon I \to X$ in einem topologischen Raum (X, τ) mit einer vorwärts gerichteten Indexmenge $(I, \leq)$ heißt *vorwärts konvergent* gegen $\alpha_\infty \in X$, falls

$$\underset{U \in \mathfrak{U}(\alpha_\infty)}{\forall} \ \underset{i \in I}{\exists} \ \underset{j \geq i}{\forall} \ \alpha_j \in U.$$

Notation $\alpha_\infty = \lim_{i \to \infty} \alpha_i$ oder $\alpha_i \xrightarrow[i \to \infty]{} \alpha_\infty$. Dual heißt ein Netz mit einer rückwärts gerichteten Indexmenge *rückwärts konvergent* gegen $\alpha_{-\infty} \in X$, wenn für jede Umgebung $U \in \mathfrak{U}(\alpha_{-\infty})$ ein Index $i \in I$ existiert, sodass für alle kleineren Indizes $j \leq i$ die Netzglieder $\alpha_j \in U$ liegen. Notation $\alpha_{-\infty} = \lim_{i \to -\infty} \alpha_i$ oder $\alpha_i \xrightarrow[i \to -\infty]{} \alpha_{-\infty}$.

Vorwärts-/Rückwärtsmartingal

12.60

Die σ-Algebra $\mathcal{F}_{-\infty} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ heißt *initiale σ-Algebra* und dual heißt $\mathcal{F}_\infty := \sigma \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$ *terminale σ-Algebra*. Ein Martingal $(X_i, \mathcal{F}_i)_{i \in I}$ heißt *Vorwärtsmartingal*, falls die Indexmenge $(I, \leq)$ vorwärts gerichtet ist, bzw. dual *Rückwärtsmartingal* für eine rückwärts gerichtete Indexmenge $(I, \leq)$.

Konvergenz von Rückwärtsmartingalen

12.61

Sei $(X_n)_{n \in -\mathbb{N}}$ ein Martingal bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in -\mathbb{N}}$ mit

$$\bigcap_{n \in -\mathbb{N}} \mathcal{F}_n =: \mathcal{F}_{-\infty} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_{-2} \subseteq \mathcal{F}_{-1} \subseteq \mathcal{F}_0.$$

Dann konvergiert das Martingal fast sicher und in $\mathbf{L}^1$.

$$\underset{X_{-\infty} \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}_{-\infty})}{\exists} \ X_n \xrightarrow[n \to -\infty]{\mathbf{L}^1,\ \text{f.s.}} X_{-\infty}$$

Beweis aufschreiben.

■ APPROBATIO: Ähnlich wie bei den Vorwärtsmartingalen.

12.62 **Korollar**

$$X_{-\infty} \overset{\text{f.s.}}{=} \mathbb{E}(X_0 \mid \mathcal{F}_{-\infty})$$

12.63 **Korollar**

Sei $X \in \mathbf{L}^1(\mathcal{A})$ und $(\mathcal{F}_n)_{n \in -\mathbb{N}}$ eine Filtration in $\mathcal{A}$. Dann gilt

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n) \xrightarrow[n \to -\infty]{\mathbf{L}^1,\ \text{f.s.}} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_{-\infty})$$

12.64 **KOLMOGOROV's SLLN**

Für eine Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von iid Zufallsvariablen gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n \to \infty]{\text{f.s.}} \mathbb{E}X_1.$$

12.7.3 Satz von Radon-Nikodým

12.65 **Konvergenz von Martingalen**

Ein ggi Martingal $(X, \mathcal{F}, I)$ ist fast sicher eindeutig abschließbar, d.h.

$$\underset{X_\infty \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}_\infty)}{\overset{\text{f.s.}}{\exists!}} X_i \xrightarrow[i \to \infty]{\mathbf{L}^1} X_\infty$$

absolutstetig 12.66

Seien μ, ν zwei Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Wenn

$$\mu(N) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu(N) = 0$$

dann heißt ν *absolutstetig* bezüglich μ. Notation $\nu \ll \mu$.

Radon-Nikodým 12.67

Seien μ, ν zwei σ-endliche Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Dann gilt:

$$\nu \ll \mu \quad \Longleftrightarrow \quad \overset{\text{f.s.}}{\underset{f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})^+}{\exists!}} \nu = \int f \, \mathrm{d}\mu$$

f heißt *Dichte* oder Radon-Nikodým-*Ableitung* von ν bezüglich μ. Notation $f = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$.

12.8 Ungleichungen für Martingale

13 Fouriertransformation

Kapitelübersicht

13.1 Fouriertransformationen und charakterische Funktionen

FOURIER-Transformation *[Fourier-Transformation]* 13.1

Der Funktor

$$\mathcal{F}\colon \begin{array}{l} \mathcal{M}_b \to \mathbb{C}^{\mathbb{R}^d} \\ \mu \mapsto \mathcal{F}[\mu] := \hat{\mu}\colon \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \\ \xi \mapsto \mathcal{F}[\mu](\xi) := \hat{\mu}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\, \mu(\mathrm{d}x) \end{array} \end{array}$$

heißt FOURIER-*Transformation*. Der Funktor

$$\mathcal{F}\colon \begin{array}{l} \mathbb{C}^{\mathbb{R}^d} \cap \mathbf{L}^1(\mathrm{d}x) \to \mathbb{C}^{\mathbb{R}^d} \\ f \mapsto \mathcal{F}[f] := \hat{f}\colon \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \\ \xi \mapsto \mathcal{F}[f](\xi) := \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} f(x)\, \mathrm{d}x \end{array} \end{array}$$

heißt FOURIER-*Transformation*.

13.2 Inversion der Fouriertransformation

14 Der Stetigkeitssatz von Lévy

15 Zentrale Grenzwertsätze

16 Ergänzungen zur Fouriertransformation

Kapitelübersicht

16.1 Fouriertransformation und Unabhängigkeit

16.2 Kennzeichung von Gaußmaßen

16.3 Die Struktur von Zufallsvariablen

16.4 Der Wertebereich der Fouriertransformation

17 Die Brown'sche Bewegung

Kapitelübersicht

17.1 N. Wiener's Existenzbeweis von 1923

17.2 Einige Eigenschaften

A.1 Lemma von Zorn

halbgeordnet, Kette, obere Schranke, maximales Element A.1

(i) Eine Menge X heißt *halbgeordnet*, wenn in X eine binäre Relation $\leq \subseteq X \times X$ erklärt ist mit den Eigenschaften:

- $\Delta_X \subseteq \leq$ (reflexiv)
- $\leq \cap \leq^{-1} \subseteq \Delta_X$ (antisymmetrisch)
- $\leq ; \leq \subseteq \leq$ (transitiv)

(ii) Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt *totalgeordnet* oder *Kette* in X, falls

$$Y \times Y \subseteq \leq \cup \leq^{-1} .$$

(iii) Ein Element $x \in X$ heißt *obere Schranke* von $Y \subseteq X$, falls

$$Y \times \{x\} \subseteq \leq .$$

(iv) Ein Element $x \in X$ heißt *maximales Element* von X, wenn

$$x \leq \subseteq \{x\}.$$

Ein maximales Element muss keine obere Schranke sein.

ZORN A.2

Eine halbgeordnete Menge, in der jede Kette eine obere Schranke besitzt, hat ein maximales Element.

Wir benutzen das Lemma von ZORN als Axiom. Das ZORNsche Lemma ist äquivalent zum Auswahlaxiom. Typische Anwendungen sind reine (nicht-konstruktive) Existenzaussagen; Standardbeispiele hierfür sind:

- Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.

- Jeder Hilbertraum besitzt eine Orthonormalbasis.
- Jedes Ideal eines unitären Rings ist in einem maximalen Ideal enthalten.

Index