TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Seminar Algebra
Prof. Dr. S. E. Schmidt

Sets for Mathematics – Die Kategorie der Mengen

Maik Luther
Georg Schollmeyer
Jeremias Epperlein
Francesco Kriegel

TU Dresden
Fakultät Mathematik
Institut Algebra

SS 2009

14. Juli 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen der Mengenlehre

1.1 Cantorsche Mengendefinition

Definition 1.1 (Menge nach Cantor)

Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.

1.2 Probleme mit der Mengentheorie

Der naive, unreflektierte Umgang mit Mengen führt zu Widersprüchen (Antinomie, Paradoxon) z.B.:
$M := \{X | X \text{ Menge und } X \notin X\}$
Die Menge aller Mengen, die sich selbst nicht enthalten.
Gilt $M \in M$? Nein, denn wäre M ein Element von M so würde (nach Definition von M) $M \notin M$ folgen, was ein Widerspruch zur Voraussetzung $M \in M$ ist.
Gilt $M \notin M$? Nein, denn da M eine Menge ist würde nach Definition von M folgen: $M \in M$. Dies ist Wiederum auch ein Widerspruch zur Voraussetzung $M \notin M$. Insgesamt heißt das, dass weder $M \in M$ noch $M \notin M$ gilt.

Ein Ausweg: alles heißt Klasse.
Unterteilung:

- Mengen (kleine Mengen) dürfen Elemente von Klassen sein
- Klassen (große Mengen) dürfen nicht Elemente von (anderen) Klassen sein

Ein weiteres Beispiel ist eine Variante von Russels Antinomie, die er folgendermaßen formulierte:

„Man kann einen Barbier definieren als einen, der alle diejenigen und nur diejenigen, die sich nicht selbst rasieren, rasiert. Die Frage ist: Rasiert der Barbier sich selbst?“

Es ergibt sich, dass dies keine sinnvolle Definition für einen Barbier ist. Denn wenn man auf die Frage eingeht, erkennt man: Wenn der Barbier sich nicht selbst rasiert, dann erfüllt er aber die Voraussetzung derjenigen Personen, die er rasiert. Falls er sich aber rasiert, dann gehört er zur Gruppe, die nicht vom Barbier rasiert werden.

Somit ergibt sich ein deutlicher Widerspruch.

Definition 1.2 (Menge)

Eine Klasse X heißt *Menge*, falls eine Klasse Y existiert mit : $X \in Y$

ein anderer Ausweg: Universa

Definition 1.3 (Universum)

Ein *Universum* ist eine Menge U mit folgenden Eigenschaften:

- $X \in U \Longrightarrow X \subseteq U$
- $X, Y \in U \Longrightarrow \{X, Y\} \in U$
- $X, Y \in U \Longrightarrow X \times Y \in U$
- $X \in U \Longrightarrow \mathfrak{P}(X) \in U$
- $X \in U \Longrightarrow \bigcup X \in U$
- $\omega := \{0, 1, 2, \ldots\} \in U$
- $X \in U, f \colon X \longrightarrow U$ Abbildung $\Longrightarrow f(X) \in U$

Axiom 1.4

Jede Menge ist in einem Universum enthalten.

Kleine Mengen entsprechen Elementen von U und große Mengen entspreche „dem Rest“.

2 Grundlagen aus der Kategorientheorie

2.1 Definition einer Kategorie

Definition 2.1 (Metagraph)

Ein *Metagraph* ist ein Quadrupel

$$\mathcal{G} = \langle \mathrm{Ob}, \mathrm{Mor}, \mathrm{dom}, \mathrm{cod} \rangle$$

bestehend aus

(i) einer Klasse Ob, deren Elemente *Objekte* heißen,

(ii) einer Klasse Mor, deren Elemente *Morphismen* heißen, und

(iii) zwei Klassenabbildungen

$$\mathrm{Mor} \underset{\mathrm{cod}}{\overset{\mathrm{dom}}{\rightrightarrows}} \mathrm{Ob}.$$

Für $f \in \mathrm{Mor}$ heißt $\mathrm{dom} f$ *Quelle* (engl. *domain*) und $\mathrm{cod} f$ *Ziel* (engl. *codomain*) von f, und f heißt Morphismus *von* $\mathrm{dom} f$ *nach* $\mathrm{cod} f$.

Für einen Morphismus $f \in \mathrm{Mor}$ schreiben wir $\mathrm{dom} f \xrightarrow{f} \mathrm{cod} f$ oder auch $f \colon \mathrm{dom} f \longrightarrow \mathrm{cod} f$.
Falls Ob und Mor Mengen sind, so heißt $\mathcal{G}$ *Graph*.

Definition 2.2 (Metakategorie)

Eine *Metakategorie* ist ein Tripel

$$\mathbf{C} = \langle \mathcal{G}, *, \mathrm{id} \rangle$$

bestehend aus

(i) einem Metagraph $\mathcal{G} = \langle \mathrm{Ob}, \mathrm{Mor}, \mathrm{dom}, \mathrm{cod} \rangle$,

(ii) einer Abbildung

$$*\colon \begin{aligned} \mathrm{Mor} \overset{\mathrm{Ob}}{\times} \mathrm{Mor} &\longrightarrow \mathrm{Mor} \\ \langle f, g \rangle &\longmapsto f * g \end{aligned}$$

für $\mathrm{Mor} \overset{\mathrm{Ob}}{\times} \mathrm{Mor} := \{\langle f, g\rangle \mid f, g \in \mathrm{Mor} \wedge \mathrm{cod} f = \mathrm{dom} g\}$, sodass $\mathrm{dom}(f * g) = \mathrm{dom} f$ und $\mathrm{cod}(f * g) = \mathrm{cod} g$ gelten, und $f * g$ heißt *Komposition* von f und g,

$$\begin{tikzcd} & {} \arrow[dr, "g"] & \\ {} \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, dashed, "f*g"'] & & {} \end{tikzcd}$$

(iii) einer Abbildung

$$\mathrm{id}\colon \begin{aligned} \mathrm{Ob} &\longrightarrow \mathrm{Mor} \\ A &\longmapsto \mathrm{id}_A, \end{aligned}$$

sodass $\mathrm{dom}(\mathrm{id}_A) = A = \mathrm{cod}(\mathrm{id}_A)$ gelten, und id_A heißt *identischer Morphismus* von A.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop right, "\mathrm{id}_A"] \end{tikzcd}$$

Weiterhin müssen folgende Axiome gelten:

(Ass) Die Komposition $*$ ist assoziativ, d.h. für alle $f, g, h \in \mathrm{Mor}$ gilt $(f * g) * h = f * (g * h)$.

$$\begin{tikzcd} & {} \arrow[dr, "g"] \arrow[rr, dashed, "g*h"] & & {} \\ {} \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, dashed, "f*g"'] \arrow[urrr, bend right, "f*g*h"'] & & {} \arrow[ur, "h"] & \end{tikzcd}$$

(Neu) Die identischen Morphismen sind neutrale Elemente bzgl. Komposition, d.h. für alle $f \in \mathrm{Mor}$ gilt $\mathrm{id}_{\mathrm{dom} f} * f = f = f * \mathrm{id}_{\mathrm{cod} f}$.

$$\begin{tikzcd}
& {} \arrow[dr, "f"] & \\
{} \arrow[ur, "\mathrm{id}_{\mathrm{dom} f}"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f"'] & & {} \\
& {} \arrow[ur, "\mathrm{id}_{\mathrm{cod} f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Falls $\mathcal{G}$ ein Graph ist, so heißt $\mathbf{C}$ *Kategorie*.
Schreibweisen:

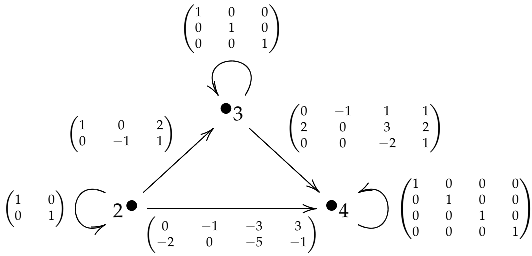
- Zur Hervorhebung der betrachteten Metakategorie $\mathbf{C}$ werden oft $\mathrm{Ob}(\mathbf{C}) := \mathrm{Ob}$ sowie $\mathrm{Mor}(\mathbf{C}) := \mathrm{Mor}$ verwendet.
- Für eine Komposition $f * g$ schreiben wir auch $f;g$, $g \circ f$ oder einfach fg.
- Es sei $\mathbf{C}(A, B) := \{f \mid A \xrightarrow{f} B\}$ die Klasse aller Morphismen von A nach B.

Beispiel: Die Kategorie **Set**:
Die Objekte sind alle Mengen (bzw. Elemente eines Universums) und die Morphismen sind alle Abbildungen, die Komposition ist die Hintereinanderausführung von Abbildungen und die identischen Morphismen sind die identischen Abbildungen auf den entsprechenden Mengen. □

Beispiel: Die Kategorie **Group**:
$\mathrm{Ob}(\mathbf{Group}) :=$ alle Gruppen $\langle G, \cdot, ^{-1}, e \rangle$
$\mathbf{Group}(A, B) :=$ Menge aller Homomorphismen der Gruppe A in die Gruppe B (Komposition ist wieder Hintereinanderausführung von Abbildungen und die identischen Morphismen sind die identischen Abbildungen: die Komposition von Homomorphismen ist wieder ein Homomorphismus und die identische Abbildung ist immer ein Homomorphismus) □

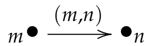
Beispiel: Die Kategorie $\mathbf{Mat}_R$:
R sei ein Ring mit Eins (z.B. $R = \mathbb{R}$).
$\mathrm{Ob}(\mathbf{Mat}_R) := \mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbf{Mat}_R(m, n) := \{(m, A, n) \mid A \in R^{m \times n}\}$

Komposition: $(m, A, n) * (n, B, p) := (m, A \cdot B, p)$ mit $A \cdot B =$ übliche Matrizenmultiplikation für $m \times n$-Matrix A und $n \times p$ - Matrix B
identische Morphismen: $n \times n$ -Einheitsmatrizen als id_n



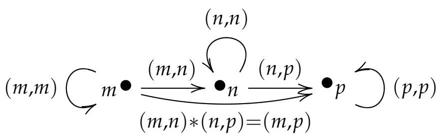
□

Beispiel: Sei M eine Menge. Für eine Relation R auf M ist der zugehörige Graph $\mathcal{G}(M, R) = \langle M, R, \pi_1, \pi_2 \rangle$. Der Schleifengraph zu M ist definiert als $\mathcal{G}(M) := \langle \{X\}, M, m \mapsto X, m \mapsto X \rangle$.



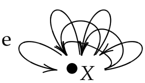
□

Beispiel: Sei M eine Menge und R eine Quasiordnung auf M. Der zugehörige Graph ist $\mathcal{G}(M, R)$ und wir setzen noch $(m, n) * (n, p) = (m, p)$ und $\mathrm{id}_m = (m, m)$ und erhalten die Kategorie $\mathbf{C}(M, R) = \langle \mathcal{G}(M, R), *, \mathrm{id} \rangle$.



□

Beispiel: Für einen Monoid $\mathcal{M} = \langle M, *, \mathrm{e} \rangle$ ist die zugehörige Schleifenkategorie definiert als $\mathbf{C}(\mathcal{M}) = \langle \mathcal{G}(M), *, X \mapsto \mathrm{e} \rangle$.



□

2.2 Spezielle Morphismen

Definition 2.3 (Typen von Morphismen)

Sei $\mathbf{C}$ eine Kategorie. Ein Morphismus $f\colon A \to B$ heißt

(i) *Split-Monomorphismus*, *split-injektiv* bzw. *rechts invertierbar*, falls ein Morphismus $g\colon B \to A$ mit $fg = \mathrm{id}_A$ existiert. Dann heißt g *Retraktion* bzw. *rechts invers* zu f.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[dl, dashed, "g"] \\ A & \end{tikzcd}$$

(ii) *Split-Epimorphismus*, *split-surjektiv* bzw. *links invertierbar*, falls ein Morphismus $g\colon B \to A$ mit $gf = \mathrm{id}_B$ existiert. Dann heißt g *Sektion* bzw. *links invers* zu f.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ & B \arrow[u, "\mathrm{id}_B"'] \arrow[ul, dashed, "g"] \end{tikzcd}$$

(iii) *Split-Bimorphismus*, *Isomorphismus*, *split-bijektiv* bzw. *invertierbar*, falls f sowohl ein Split-Monomorphismus als auch ein Split-Epimorphismus ist. Wir schreiben dafür $f\colon A \rightsquigarrow B$. Weiter heißen A und B *isomorph*, symbolisch $A \cong B$.

(iv) *Monomorphismus* bzw. *rechts kürzbar*, falls für alle Objekte X und alle Morphismen $g_1, g_2\colon X \to A$ aus $g_1 f = g_2 f$ stets $g_1 = g_2$ folgt. Wir schreiben dafür $f\colon A \hookrightarrow B$ oder auch $f\colon A \rightarrowtail B$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "g_1"] \arrow[r, shift right, "g_2"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

(v) *Epimorphismus* bzw. *links kürzbar*, falls für alle Objekte X und alle Morphismen $g_1, g_2\colon B \to X$ aus $fg_1 = fg_2$ stets $g_1 = g_2$ folgt. Wir schreiben dafür $f\colon A \twoheadrightarrow B$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, shift left, "g_1"] \arrow[r, shift right, "g_2"'] & X \end{tikzcd}$$

(vi) *Bimorphismus* bzw. *kürzbar*, falls f sowohl ein Monomorphismus als auch ein Epimorphismus ist.

(vii) *Endomorphismus*, falls $B = A$ ist.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop right, "f"] \end{tikzcd}$$

(viii) *idempotent*, falls $ff = f$ gilt.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f"'] & & A \\ & A \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

(ix) *Split-Endomorphismus*, falls f ein idempotenter Endomorphismus ist, und ein Objekt X sowie zwei Morphismen $g\colon A \to X$ und $h\colon X \to A$ mit $f = gh$ und $hg = \mathrm{id}_X$ existieren.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & A \arrow[dr, "g"] & \\ & X \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_X"'] & & X \end{tikzcd}$$

(x) *Automorphismus*, falls f sowohl ein Endomorphismus als auch ein Isomorphismus ist.

Bemerkung 2.4 (i) Ein Split-Monomorphismus ist stets eine Sektion und umgekehrt. Dual ist ein Split-Epimorphismus stets eine Retraktion und umgekehrt.

(ii) Ein idempotenter Morphismus muss ein Endomorphismus sein.

Lemma 2.5 (i) Jeder Split-Monomorphismus ist ein Monomorphismus.

(ii) Jeder Split-Epimorphismus ist ein Epimorphismus.

(iii) Jeder Split-Bimorphismus ist ein Bimorphismus.

(iv) Für einen Isomorphismus $f\colon A \to B$ sind Retraktion und Sektion gleich und eindeutig, d.h. es existiert genau ein Morphismus $g\colon B \to$

A mit $fg = \mathrm{id}_A$ und $gf = \mathrm{id}_B$. Weiter heißt g *invers* zu f, symbolisch $g = f^{-1}$.

(v) Jeder Morphismus, der sowohl ein Split-Monomorphismus als auch ein Epimorphismus ist, ist ein Split-Bimorphismus.

(vi) Jeder Morphismus, der sowohl ein Split-Epimorphismus als auch ein Monomorphismus ist, ist ein Split-Bimorphismus.

(vii) g ist eine Retraktion zu f genau dann, wenn f eine Sektion zu g ist.

(viii) g ist invers zu f genau dann, wenn f invers zu g ist.

(ix) Falls g eine Retraktion zu f ist, dann ist gf idempotent.

(x) Falls g eine Sektion zu f ist, dann ist fg idempotent.

Lemma 2.6 Ein Morphismus i ist genau dann ein Monomorphismus, wenn

$$\forall T \forall x [T \xrightarrow{x} A \Rightarrow \exists \text{ höchstens ein } s \text{ mit } [s; i = x]]$$

Lemma 2.7 Die Hintereinanderausführung zweier Monomorphismen ist wieder ein Monomorphismus.

Beweis: Seien $i : T \to S$ und $j : S \to U$ Monomorphismen. Dann gilt

$$\begin{aligned}\forall T \forall s_1, s_2 : T \to S[s_1; i; j = s_2 ij &\Rightarrow s_1; i = s_2; i \\ &\Rightarrow s_1 = s_2]\end{aligned}$$

■

2.3 Limites

Definition 2.8 (terminales Objekt)

Sei **C** eine Kategorie. Ein Objekt T heißt *terminal*, falls es für jedes Objekt X genau einen Morphismus $\tau_X \colon X \to T$ gibt.

Definition 2.9 (Produkt)

Seien A, B Objekte einer Kategorie **C**. Ein Objekt P zusammen mit zwei Morphismen $p_A \colon P \to A$ und $p_B \colon P \to B$ heißt *Produkt* von A und B, falls für alle Objekte X und alle Morphismen $f_A \colon X \to A$ und $f_B \colon X \to B$ genau ein Morphismus $f \colon X \to P$ mit $fp_A = f_A$ und $fp_B = f_B$

existiert. Wir schreiben auch $P = A \times B$ und $f = \langle f_A, f_B \rangle$.

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
X \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[urr, "f_A"] \arrow[drr, "f_B"'] & P \arrow[ur, "p_A"] \arrow[dr, "p_B"'] & \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

Definition 2.10 (Equalizer, Differenzkern)

Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon A \to B$ Morphismen einer Kategorie $\mathbf{C}$. Ein Objekt K zusammen mit einem Morphismus $k\colon K \to A$ heißt *Equalizer* oder *Differenzkern* von f und g, falls $kf = kg$ gilt und für alle Objekte X und alle Morphismen $x\colon X \to A$ mit $xf = xg$ genau ein $h\colon X \to K$ mit $x = hk$ existiert.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[dr, "x"] & & \\
K \arrow[rr, "k"'] & & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

Lemma 2.11 Ein Equalizer ist stets ein Monomorphismus.

Beweis: Sei k ein Equalizer und a und b Morphismen mit $ak = bk$. Dann existiert nach der Equalizereigenschaft genau ein Morphismus h mit $hk = ak = bk$, also muss $h = a = b$ sein.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, shift right=2, "a"'] \arrow[dl, "h"] \arrow[dl, shift left=2, "b"] \arrow[dr, "ak=bk"] & & \\
K \arrow[rr, "k"'] & & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

■

Definition 2.12 (Pullback, Faserprodukt)

Seien $f\colon A \to C$ und $g\colon B \to C$ Morphismen einer Kategorie $\mathbf{C}$. Ein Objekt P zusammen mit zwei Morphismen $p\colon P \to A$ und $q\colon P \to B$

heißt *Pullback* oder *Faserprodukt* von f und g, falls $pf = qg$ gilt und für alle Objekte X und alle Morphismen $x\colon X \to A$ und $y\colon X \to B$ mit $xf = yg$ genau ein $h\colon X \to P$ mit $hp = x$ und $hq = y$ existiert.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "x"] \arrow[ddr, bend right, "y"'] & & \\
& P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & A \arrow[d, "f"] \\
& B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

Definition 2.13 (Limes)

Sei **C** eine Kategorie. Gegeben seien zwei Abbildungen

$$J \underset{c}{\overset{d}{\rightrightarrows}} I$$

für endliche Mengen I und J, sowie Objekte X_i in **C** für jedes $i\colon 1 \to I$ und Abbildungen

$$X_{d(j)} \xrightarrow{f_j} X_{c(j)}$$

für jedes $j\colon 1 \to J$. Das *Limes* dieser Daten X_i und f_j ist ein *universelles Objekt* L zusammen mit Abbildungen

$$L \xrightarrow{\pi_i} X_i$$

für alle $i\colon 1 \to I$, so dass jeweils folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
& X_{d(j)} \arrow[dd, "f_j"'] \\
L \arrow[ur, "\pi_{d(j)}"] \arrow[dr, "\pi_{c(j)}"'] & \\
& X_{c(j)}
\end{tikzcd}$$

Die *Universalitätseigenschaft* der (L, π_i) bedeutet, dass für jedes Objekt T und Abbildungen

$$T \xrightarrow{\psi_i} X_i$$

mit $\psi_{d(j)} f_j = \psi_{c(j)}$ für alle $1 \xrightarrow{j} J$ eine eindeutig bestimmte Abbildung $T \xrightarrow{t} L$ existiert,

$$\begin{tikzcd}
 & & X_{d(j)} \arrow[dd, "f_j"] \\
T \arrow[rru, "\psi_{d(j)}"] \arrow[r, dashed, "\exists! t"] \arrow[rrd, "\psi_{c(j)}"'] & L \arrow[ru, "\pi_{d(j)}"] \arrow[rd, "\pi_{c(j)}"'] & \\
 & & X_{c(j)}
\end{tikzcd}$$

so dass $\psi_i = t\pi_i$ für alle $i\colon 1 \to I$.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, dashed, "\exists! t"] \arrow[rd, "\psi_i"'] & L \arrow[d, "\pi_i"] \\
 & X_i
\end{tikzcd}$$

Bemerkung: Es ist leicht zu sehen, dass die bisher in diesem Abschnitt definierten Konstrukte spezielle Limites sind:

(i) *Terminales Objekt:* $I = J = 0$

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, dashed, "\exists! t"] & L
\end{tikzcd}$$

(ii) *Produkt:* $I = 2$, $J = 0$

$$\begin{tikzcd}
 & & X_0 \\
T \arrow[rru, "\psi_1"] \arrow[r, dashed, "\exists! t"] \arrow[rrd, "\psi_1"'] & L \arrow[ru, "\pi_0"] \arrow[rd, "\pi_1"'] & \\
 & & X_1
\end{tikzcd}$$

(iii) *Equalizer:* $I = J = 2$ und $c = \mathrm{const.}_1$, $d = \mathrm{const.}_0$

$$\begin{tikzcd}
 & & X_0 \arrow[d, shift right, "f_0"'] \arrow[d, shift left, "f_1"] \\
T \arrow[urr, "\psi_0"] \arrow[drr, "\psi_1"'] \arrow[r, dashed, "\exists! t"] & L \arrow[ur, "\pi_0"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & \\
 & & X_1
\end{tikzcd}$$

(iv) *Pullback:* $I = 3$, $J = 2$ und $c = \mathrm{const.}_2$, $d = j \mapsto j$

$$\begin{tikzcd}
 & & X_0 \arrow[dr, "f_0"] & \\
T \arrow[urr, "\psi_0"] \arrow[drr, "\psi_1"'] \arrow[rrr, bend right, "\psi_2"] \arrow[r, dashed, "\exists! t"] & L \arrow[ur, "\pi_0"] \arrow[dr, "\pi_1"'] \arrow[rr, "\pi_2"] & & X_2 \\
 & & X_1 \arrow[ur, "f_1"'] &
\end{tikzcd}$$

3 Die Kategorie der Mengen

Definition 3.1 (Kategorie der Mengen)

Es sei **Set** die Kategorie mit

(i) $\mathrm{Ob}(\mathbf{Set}) := \{A \mid A \text{ ist Menge}\}$

(ii) $\mathrm{Mor}(\mathbf{Set}) := \{f \mid f\colon A \to B \text{ ist Abbildung} \wedge A, B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})\}$, genauer ist $\mathbf{Set}(A, B) = \{f \mid f\colon A \to B \text{ ist Abbildung}\}$

(iii) Für $f \in \mathbf{Set}(A, B)$ seien $\mathrm{dom} f := A$ und $\mathrm{cod} f := B$.

(iv) Die Komposition von f und g ist definiert durch $(f * g)(x) := g(f(x))$.

(v) Der identische Morphismus id_A ist die identische Abbildung mit $\mathrm{id}_A(x) = x$.

Satz 3.2 (Existenz von Morphismen) Ein Morphismus $f\colon X \to Y$ ist durch die Angabe der Zuordnung der Elemente der Domäne zu den Elementen der Codomäne existent.

Beweis: Der Beweis ist in zwei Teilschritte aufgegliedert. Zuerst wird die Existenz von konstanten Morphismen gezeigt und dann aus diesen auf beliebige nicht-konstante Morphismen verallgemeinert.

1. Sei eine Zuordnung von allen Elementen einer Menge X zu genau einem Element y einer Menge Y gegeben. Dann erfüllt der Morphismus $f := \tau_X y$ genau diese Zuordnung.

   $$X \xrightarrow{\tau_X} 1 \xrightarrow{y} Y$$

   Damit haben wir eine Abbildung erhalten, die jedem Element aus X das Element y aus Y zuordnet.

2. Um nun beliebige Abbildungen von einer Menge X zu einer Menge Y zu definieren, bilden wir die Summe mehrerer solcher konstanten Abbildungen aus dem ersten Teil. Dazu unterteilen wir die Menge X so in mehrere

Teile, dass alle Elemente eines Teils auf das gleiche Element abgebildet werden. Anschließend bilden wir die Summe dieser Abbildungen und haben die gesuchte Abbildung.

■

Beispiel 3.3 Sei bespielsweise $f\colon \{x,y,z\} \to \mathbb{N}$ die Abbildung, die dem Element x das Element 0, y die 1 und z die 2 zuordnet. Dann gibt es drei Abbildungen $f_x\colon \{x\} \to \mathbb{N}$, $f_y\colon \{y\} \to \mathbb{N}$ und $f_z\colon \{z\} \to \mathbb{N}$ mit $xf_x = 0$, $yf_y = 1$ und $zf_z = 2$. Es gilt nun $\{x\} + \{y\} + \{z\} \cong \{x,y,z\}$ und die nach Summeneigenschaft eindeutig existente Abbildung $f = f_x + f_y + f_z = \begin{cases} f_x \\ f_y \\ f_z \end{cases}$ erfüllt die Gleichungen $xf = xf_x = 0, yf = yf_y = 1$ und $zf = zf_z = 2$.

□

Nach Lemma 2.6 ist der Unterschied zwischen einem Monomorphismus und einer injektiven Abbildung, dass wir im ersten Fall die Kürzbarkeit für alle T haben und im injektiven Fall nur für $T = 1$. Man sieht sofort, dass diese Kürzbarkeitsforderung echt stärker ist als die der injektiven Abbildungen, somit sind Monomorphismen auch injektiv. Die umgekehrte Richtung ist im allgemeinen nicht wahr, in **Set** gilt sie aber.

Satz 3.4 Eine Abbildung ist genau dann injektiv, wenn sie ein Monomorphismus in **Set** ist.

Beweis: Wir benutzen dazu, dass 1 in **Set** ein Separator ist. Es gilt $\forall X \forall x [1 \xrightarrow{x} X \Rightarrow x; f_1 = x; f_2] \Rightarrow f_1 = f_2$. Eine Funktion ist genau dann injektiv, wenn

$$\forall x_1, x_2 : 1 \longrightarrow S[x_1; i = x_2; i \Rightarrow x_1 = x_2].$$

Seien jetzt T und $s_1, s_2 : T \longrightarrow S$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} s_1; i = s_2; i &\Rightarrow \forall x : 1 \longrightarrow S[(x; s_1); i = (x; s_2); i] \\ &\Rightarrow \forall x : 1 \longrightarrow S[\Rightarrow x; s_1 = x; s_2] \\ &\Rightarrow s_1 = s_2. \end{aligned}$$

■

3.1 Elemente, Tupel und Teile

Axiom 3.5

Set ist vollständig und kovollständig, d.h. alle Limites und alle Colimites existieren. Das initiale Objekt bezeichnen wir mit 0 und das terminale Objekt mit 1.

Definition 3.6 (Element, Tupel, Teil)

Sei A eine Menge.

(i) Ein Morphismus $a\colon 1 \to A$ heißt *Element* von A.

(ii) Ein Morphismus $a\colon T \to A$ heißt *Tupel* von A.

(iii) Ein Monomorphismus $i\colon U \hookrightarrow A$ heißt *Teil* von A.

Man beachte insbesondere, dass Untermengen keine Mengen sind, sondern Morphismen. Auch Elemente sind Morphismen, die sozusagen auf das Element in der Menge zeigen.

Definition 3.7 (Inklusion)

Sei A eine Menge.

(i) Ein Tupel a von A heißt *enthalten in* einem Teil i von A, falls eine Abbildung $\overline{a}$ mit $a = \overline{a}i$ existiert.

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, dashed, "\overline{a}"] \arrow[dr, "a"'] & & U \arrow[dl, hook', "i"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Wir schreiben dafür $a \in_A i$ oder einfach $a \in i$.

(ii) Eine Teilmenge i von A heißt *enthalten in* einem Teil j von A, falls eine Abbildung h mit $i = hj$ existiert.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, dashed, "h"] \arrow[dr, hook, "i"'] & & V \arrow[dl, hook', "j"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Wir schreiben dafür $i \subseteq_A j$ oder einfach $i \subseteq j$.

Bemerkung 3.8 (i) Falls $i = hj$ ein Monomorphismus ist, dann ist auch h ein Monomorphismus, denn aus $s_1h = s_2h$ folgt $s_1i = s_1hj = s_2hj = s_2i$ und damit $s_1 = s_2$.

(ii) Jedes Element ist ein Tupel.

(iii) Teile sind stets auch Tupel und für zwei Teile i, j gilt $i \subseteq j$ genau dann wenn $i \in j$.

(iv) Elemente sind stets Monomorphismen, da es für jede Menge A überhaupt nur eine Abbildung $A \to 1$ gibt (weil 1 ein terminales Objekt ist), d.h. jedes Element ist ein Teil und für jedes Element a und jeden Teil i gilt $a \in i$ genau dann wenn $a \subseteq i$.

Satz 3.9 Seien a ein Tupel und i, j, k Teile einer Menge A.

(i) $[a \in i \wedge t\colon S \to T] \implies ta \in i$

(ii) $[a \in i \wedge i \subseteq j] \implies a \in j$

(iii) $[i \subseteq j \wedge j \subseteq k] \implies i \subseteq k$

Beweis: (i) Das Tupel a ist enthalten im Teil i, also existiert ein Morphismus $\bar{a}$ mit $a = \bar{a}i$. Es folgt $ta = t\bar{a}i$, d.h. $ta \in i$.

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[dr, "t"'] & & & \\
& T \arrow[rr, dashed, "\bar{a}"] \arrow[dr, "a"'] & & U \arrow[dl, hook', "i"] \\
& & A &
\end{tikzcd}$$

(ii) analog zu (iii).

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[rr, dashed, "\bar{a}"] \arrow[dr, "a"'] & & U \arrow[dl, hook', "i"'] \arrow[dd, dashed, "h"] \\
& A & \\
& & V \arrow[ul, hook', "j"]
\end{tikzcd}$$

(iii) Der Teil i ist enthalten im Teil j, daher gibt es einen Morphismus h mit $i = hj$, und analog existiert wegen $j \subseteq k$ ein g mit $j = gk$. Insgesamt folgt $i = hgk$, also $i \subseteq k$.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, dashed, "h"] \arrow[dr, hook, "i"'] & & V \arrow[dl, hook', "j"] \arrow[dd, dashed, "g"] \\
& A & \\
& & W \arrow[ul, hook, "k"]
\end{tikzcd}$$

$\blacksquare$

Satz 3.10 Seien i und j Teile einer Menge A.

(i) $[\forall a\colon T \to A\ [a \in i \Rightarrow a \in j]] \iff i \subseteq j$

(ii) $[\forall a\colon 1 \to A\ [a \in i \Rightarrow a \in j]] \iff i \subseteq j$

Beweis: (i) $(\Rightarrow)$ Wegen $i = \mathrm{id}_U i$ gilt $i \in i$. Also folgt $i \in j$, d.h. es existiert ein h mit $i = hj$, und demnach $i \subseteq j$.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, dashed, "\mathrm{id}_U"] \arrow[dr, "i"'] & & U \arrow[dl, hook', "i"] \arrow[dd, dashed, "h"] \\
& A & \\
& & V \arrow[ul, hook, "j"]
\end{tikzcd}$$

$(\Leftarrow)$ folgt aus 3.9(ii).

(ii) $(\Rightarrow)$ Wegen 3.9(i) und $i \in i$ gilt $ui \in i$ für alle $u\colon 1 \to U$. Folglich gilt auch $ui \in j$, also existiert ein v mit $ui = vj$. Nun ist j ein Monomorphismus, daher ist v eindeutig. Für alle Elemente $u\colon 1 \to U$ gibt es also genau ein Element $v\colon 1 \to V$, sodass $ui = vj$ ist. Demnach gibt es eine Abbildung $h\colon U \to V$ mit $ui = uhj$ für alle $u\colon 1 \to U$, d.h. $i = hj$, also $i \subseteq j$.

$$\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "v"] & \\
U \arrow[rr, dashed, "h"] \arrow[dr, hook, "i"'] & & V \arrow[dl, hook', "j"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

$(\Leftarrow)$ folgt aus (i) mit $T = 1$.

■

Definition 3.11 (äquivalent)

Zwei Teile i und j einer Menge A heißen *äquivalent*, falls $i \subseteq j$ und $j \subseteq i$ gelten. Wir schreiben dafür $i \equiv_A j$ oder einfach $i \equiv j$.

Korollar 3.12 Es gilt

$$i \equiv j \iff [\forall a\colon T \to A\ [a \in i \Leftrightarrow a \in j]]$$

und auch:

$$i \equiv j \iff [\forall a\colon 1 \to A\ [a \in i \Leftrightarrow a \in j]].$$

3.2 Charakteristische Funktionen

Wir suchen eine Möglichkeit, einen Teil einer Menge A nicht als Abbildung in A (d.h. mit Codomäne A), sondern als Abbildung aus A (d.h. mit Domäne A) zu charakterisieren. Dazu benötigen wir eine Menge Ω von Wahrheitswerten und ein ausgezeichnetes Element von Ω, das wir als den Wert *wahr* betrachten.

Axiom 3.13

Es gibt eine Menge Ω mit genau zwei Elementen $\mathrm{true}\colon 1 \to \Omega$ und $\mathrm{false}\colon 1 \to \Omega$, die *Wahrheitswerte* heißen. Ω ist eine Summe

$$\begin{cases} \mathrm{true} \\ \mathrm{false} \end{cases} : 1 + 1 \rightsquigarrow \Omega.$$

Definition 3.14 (Indikator)

Ein Morphismus $\chi_i \colon A \to \Omega$ heißt *Indikator* oder *charakteristische Funktion* eines Teils i einer Menge A, falls für alle Tupel a von A

$$a \in i \iff a\chi_i = \tau_T \mathrm{true}$$

gilt. Dabei ist τ_T der eindeutige Morphismus $\tau_T \colon T \to 1$.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[rr, dashed, "\bar{a}"] \arrow[dr, "a"'] & & U \arrow[dl, hook', "i"] \arrow[dr, "!\tau_U"] & \\
& A \arrow[dr, "\chi_i"'] & & 1 \arrow[dl, "\mathrm{true}"] \\
& & \Omega &
\end{tikzcd}$$

Axiom 3.15

Es gibt eine bis auf Äquivalenz eineindeutige Beziehung zwischen den Teilen einer Menge A und den Abbildungen $A \to \Omega$, d.h.

(i) Jeder Morphismus $\chi \colon A \to \Omega$ ist der Indikator eines Teils von A, genauer ist ein Pullback i von χ und true stets ein Teil von A.

(ii) Jeder Teil i von A hat einen eindeutigen Indikator $\chi \colon A \to \Omega$, genauer ist $a\chi = \mathrm{true}$ für alle Elemente $a \colon 1 \to A$ mit $a \in i$ und $a\chi = \mathrm{false}$ für alle Elemente $a \colon 1 \to A$ mit $a \notin i$.

Satz 3.16 Für Teile $i \colon U \hookrightarrow A$ und $j \colon V \hookrightarrow A$ einer Menge A sind äquivalent:

(i) $i \equiv j$

(ii) $\exists h \colon U \rightsquigarrow V[i = hj]$

(iii) $\chi_i = \chi_j$

Beweis: ((i)⇒(ii)) Sei $i \equiv j$, d.h. $i \subseteq j$ und $j \subseteq i$, also existieren zwei Morphismen $f\colon U \to V$ und $g\colon V \to U$ mit $i = fj$ und $j = gi$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[dr, hook, "i"'] & & V \arrow[ll, shift left, "g"] \arrow[dl, hook', "j"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Nun gilt $\mathrm{id}_U i = i = fj = fgi$, also $fg = \mathrm{id}_U$ und analog $gf = \mathrm{id}_V$. Damit ist $h := f = g^{-1}$ der gesuchte Isomorphismus.

((i)⇐(ii)) Sei h ein Isomorphismus mit $i = hj$. Es folgt sofort $i \subseteq j$ und mit

$$j = \mathrm{id}_V j = h^{-1}hj = h^{-1}i$$

folgt auch $j \subseteq i$.

((i)⇒(iii)) Für ein beliebiges Tupel $a\colon T \to A$ gilt

$$a\chi_i = \tau_T \mathrm{true} \iff a \in i \iff a \in j \iff a\chi_j = \tau_T \mathrm{true}$$

und damit ist χ_i der Indikator von j und dual χ_j der Indikator von i. Weiter hat jeder Teil nach 3.15 einen eindeutigen Indikator, also folgt $\chi_i = \chi_j$.

((i)⇐(iii)) Wir benutzen 3.12. Sei dazu a ein Tupel von A, dann gilt

$$a \in i \iff a\chi_i = \tau_T \mathrm{true} \iff a\chi_j = \tau_T \mathrm{true} \iff a \in j$$

■ und damit $i \equiv j$.

3.3 Konstruktionen mit Teilen

Definition 3.17 (Restriktion)

Für eine Abbildung $f\colon A \to B$ und einen Teil i von A heißt die Komposition if *Restriktion* oder *Einschränkung* von f auf i. Wir schreiben dafür auch $f|i$ oder $f|_i$.

$$U \overset{i}{\hookrightarrow} A \xrightarrow{f} B$$

3.3.1 Urbild

Eine in vielen Gebieten der Mathematik auftretende Konstruktion von Teilen einer Menge ist das Bildern des Urbilds unter einer Funktion.

Definition 3.18 (Urbild)

Für eine Abbildung $f\colon A \to B$ und einen Teil $j\colon V \hookrightarrow B$ heißt ein Teil $i\colon U \hookrightarrow A$ *Urbild* von j unter f, falls

$$a \in i \iff af \in j$$

für alle Elemente $a\colon T \to A$ gilt.

Satz 3.19 Ein Teil $i\colon U \hookrightarrow A$ ist *Urbild* von j unter f genau dann, wenn i ein Pullback von f und j ist.

Beweis: ($\Rightarrow$) Sei $i\colon U \hookrightarrow A$ ein *Urbild* von j unter f, d.h. es gilt $a \in i \iff af \in j$ für alle Elemente $a\colon T \to A$. Wegen $i \in i$ folgt $if \in j$, also existiert ein $\overline{f}$ mit $if = \overline{f}j$. Sei nun $a\colon T \to A$ und $\overline{b}\colon T \to V$ mit $af = \overline{b}j$, d.h. es ist $af \in j$ und damit $a \in i$. Folglich gibt es ein $\overline{a}\colon T \to U$ mit $a = \overline{a}i$. Weil i ein Monomorphismus ist, muss $\overline{a}$ eindeutig sein. Weiter gilt noch $\overline{b}j = af = \overline{a}if = \overline{a}\overline{f}j$ und demnach ist $\overline{b} = \overline{a}\overline{f}$, denn j ist ein Monomorphismus. Insgesamt ist i und $\overline{f}$ ein Pullback von f und j.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, "\overline{a}"] \arrow[drr, "\overline{b}"] \arrow[ddr, "a"'] & & \\
& U \arrow[r, "\overline{f}"'] \arrow[d, hook, "i"] & V \arrow[d, hook, "j"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

($\Leftarrow$) Sei i und $\overline{f}$ ein Pullback von f und j. Wir zeigen zuerst, dass i ein Monomorphismus ist. Sei also $xi = yi$, dann folgt $xif = yif = y\overline{f}j$. Wegen der Pullback-Eigenschaft existiert genau ein z mit $zi = xi$ und damit haben wir $z = x = y$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, bend left, "x"] \arrow[dr, "y"] \arrow[dr, bend right, "z"'] \arrow[ddr, bend right, "xi=yi"'] & & \\
& U \arrow[r, "\overline{f}"'] \arrow[d, "i"] & V \arrow[d, hook, "j"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Sei nun $a \in i$, dann gibt es ein $\overline{a}$ mit $a = \overline{a}i$. Folglich ist $af = \overline{a}if = \overline{a}\overline{f}j$ und damit $af \in j$. Sei umgekehrt $af \in j$, also existiert ein $\overline{b}$ mit $af = \overline{b}j$. Mit der Pullback-Eigenschaft erhalten wir ein $\overline{a}$ mit $a = \overline{a}i$, d.h. $a \in i$.

$\blacksquare$

Folgerung 3.20 Zwei Urbilder von j unter f sind äquivalent. Daher schreiben wir $f^{-1}(j)$ für das Urbild von j unter f.

Satz 3.21 (i) $\chi\colon A \to \Omega$ ist die charakteristische Funktion eines Teils i genau dann, wenn i das Urbild von true unter χ ist.

(ii) Wenn χ die charakteristische Funktion eines Teils j ist, dann ist für ein beliebiges f stets $f\chi$ die charakteristische Funktion des Urbildes von j unter f.

(iii) Das Urbild vom Urbild von k unter g unter f ist das Urbild von k unter fg.

Beweis: (i) Es gilt $a\chi = \tau_T \mathrm{true} \iff a\chi \in \mathrm{true}$.

(ii) Wir haben $a \in i \iff af \in j \iff af\chi = \tau_T \mathrm{true}$.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"'] & V \arrow[r] \arrow[d, hook, "j"] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "\chi"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

(iii) Es ist $a \in i \iff af \in j \iff afg \in k$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & C \arrow[r, "\chi"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$\blacksquare$

3.3.2 Durchschnitt

Satz 3.22 Sei f ein Monomorphismus und i das Urbild von j unter f. Dann ist auch $m = if$ ein Teil von B und es gilt

$$b \in m \iff [b \in j \wedge b \in f]$$

für alle Elemente $b\colon T \to B$.

Beweis: Sei $b \in m$, also existiert ein $\overline{b}$ mit $b = \overline{b}m$. Es folgt $b = \overline{b\overline{f}}j$ sowie $b = \overline{b}if$, d.h. $b \in j$ und $b \in f$.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[ddrr, bend right, "b"'] & & U \arrow[dl, hook', "i"'] \arrow[dr, hook, "\overline{f}"] \arrow[dd, hook, "m"] & \\
& A \arrow[dr, hook, "f"'] & & V \arrow[dl, hook', "j"] \\
& & B &
\end{tikzcd}$$

Sei umgekehrt $b \in j$ und $b \in f$, also gibt es ein a mit $b = af$, d.h. $af \in j$ und damit $a \in i$. Demnach existiert ein $\overline{a}$ mit $a = \overline{a}i$ und weiter gilt $b = af = \overline{a}if = \overline{a}m$, d.h. $b \in m$. ■

Definition 3.23 (Durchschnitt)

Ein Teil $m\colon W \hookrightarrow A$ heißt *Durchschnitt* der Teile i und j von A, falls für alle Elemente $a\colon T \to A$

$$a \in m \iff [a \in i \wedge a \in j]$$

gilt.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[ddrr, bend right, "a"'] & & W \arrow[dl, hook'] \arrow[dr, hook] \arrow[dd, hook, "m"] & \\
& U \arrow[dr, hook, "i"'] & & V \arrow[dl, hook', "j"] \\
& & A &
\end{tikzcd}$$

Satz 3.24 Zwei Durchschnitte von Teilen i und j einer Menge sind stets äquivalent. Wir schreiben daher $i \cap j$ für den Durchschnitt.

Korollar 3.25 Für einen Monomorphismus f ist das Urbild von j unter f gleich dem Durchschnitt von j und f.

Satz 3.26 Es gelten:

(i) $i \cap j \subseteq i$

(ii) $i \cap j \equiv j \cap i$

(iii) $[i \subseteq j \wedge i \subseteq k] \implies i \subseteq j \cap k$

(iv) $f^{-1}(j_1 \cap j_2) \equiv f^{-1}(j_1) \cap f^{-1}(j_2)$

Satz 3.27 Die Elemente eines Produkts $A \times B$ sind genau die Abbildungen $\langle a, b\rangle \colon T \to A \times B$ für Elemente $a \colon T \to A$ und $b \colon T \to B$.

Beweis: Sei $x \colon T \to A \times B$ ein Element von $A \times B$, dann ist $a = xp_A$ ein Element von A und $b = xp_B$ ein Element von B. Wegen der Produkt-Eigenschaft gibt es genau ein $\langle a, b\rangle \colon T \to A \times B$ mit $a = \langle a, b\rangle p_A$ und $b = \langle a, b\rangle p_B$, daher ist $x = \langle a, b\rangle$.

$$\begin{tikzcd}
& & A \\
T \arrow[urr, "a"] \arrow[r, dashed, "\langle a,b\rangle"] \arrow[drr, "b"'] & A \times B \arrow[ur, "p_A"'] \arrow[dr, "p_B"] & \\
& & B
\end{tikzcd}$$

Sei umgekehrt $a \colon T \to A$ ein Element von A und $b \colon T \to B$ ein Element von B. Wegen der Produkt-Eigenschaft gibt es genau ein $\langle a, b\rangle \colon T \to A \times B$, und dieses ist ein Element von $A \times B$. $\blacksquare$

Bemerkung 3.28 Für Abbildungen $f \colon A \to B$, $g \colon A \to C$ und $h \colon B \times C \to D$ schreiben wir auch $fhg = \langle f, g\rangle h$ für die Abbildung $\langle f, g\rangle h \colon A \to D$. Das wird auch *Infix-Notation* genannt.

Definition 3.29 (Konjunktion)

Die Abbildung $\wedge \colon \Omega \times \Omega \to \Omega$ mit

$$\text{true} \wedge \text{true} = \text{true}$$

und

$$\text{true} \wedge \text{false} = \text{false} \wedge \text{true} = \text{false} \wedge \text{false} = \text{false}$$

heißt *Konjunktion*. Für zwei Abbildungen $f \colon A \to \Omega$ und $g \colon A \to \Omega$ heißt die Abbildung $f \wedge g = \langle f, g\rangle \wedge$ auch *Konjunktion* von f und g.

Satz 3.30 Seien i und j Teile einer Menge A mit den Indikatoren χ_i und χ_j. Dann hat der Durchschnitt $i \cap j$ den Indikator $\chi_i \wedge \chi_j$, d.h. es gilt

$$\chi_{i \cap j} = \chi_i \wedge \chi_j.$$

3.3.3 Summe

Wir möchten nun die Summe zweier Mengen definieren. Anschaulich soll die Summe S zweier Mengen A_0 und A_1 aus zwei Teilen bestehen, die sich nicht überlappen und die die gleiche Mächtigkeit haben wie unsere Ausgangsmengen und sie soll darüberhinaus keine weiteren Elemente haben. Wenn wir jetzt zwei Abbildungen $A_0 \xrightarrow{f_0} B$ und $A_1 \xrightarrow{f_1} B$ haben, möchten wir diese zu einer Abbildung auf der Summe fortsetzen können, indem wir auf den Teil der A_0 entspricht f_0 und auf den anderen Teil f_1 anwenden. Da S keine weiteren Elemente enthalten soll, ist damit die Abbildung auch eindeutig festgelegt. Die Tatsache dass eine solche Abbildung immer existiert, impliziert anschaulich, dass sich die beiden Teile von S nicht überlappen dürfen.

Definition 3.31

Die Summe zweier Mengen A_0 und A_1 ist eine Menge S zusammen mit zwei Morphismen $A_0 \xrightarrow{i_0} S \xrightarrow{i_1} A_1$, so dass

$$\forall B, f_0, f_1 : A_0 \xrightarrow{f_0} B \xleftarrow{f_1} A_1 [\exists! f : S \to B[i_0; f = f_0 \wedge i_1; f = f_1]] \quad (3.1)$$

Man beachte, dass die Summe zweier Objekte nicht nur ein Objekt ist, sondern auch zwei Abbildungen enthält.

Axiom 3.32 (Binäre Summe)

Zwei Mengen A_0 und A_1 haben eine Summe $A_0 \xrightarrow{i_0} S \xleftarrow{i_1} A_1$.

Wenn A Summe von A_0 und A_1 ist, schreiben wir kurz $A = A_0 + A_1$, was gleichbedeutend mit der Existenz von i_0 und i_1 ist, die (3.1) erfüllen.

3.3.4 Komplement

Definition 3.33 (Komplement)

Sei i ein Teil einer Menge A. Ein Teil j von A heißt *Komplement* von i, falls

$$\hookrightarrow^{i} A \xleftarrow[j]{} \hookleftarrow$$

eine Summe ist.

Satz 3.34 j ist Komplement von i genau dann, wenn für alle T und alle Elemente $a \colon T \to A$

$$a \in i \iff a \notin j$$

gilt. Dies gilt sogar für $T = 1$.

Satz 3.35 Falls j_1 und j_2 Komplemente eines Teils i sind, dann sind sie äquivalent. Wir schreiben daher $\complement i$ für das Komplement von i.

Korollar 3.36 Es gilt

$$j \equiv \complement i \iff [\forall a \colon T \to A\ [a \in i \Leftrightarrow a \notin j]]$$

und auch

$$j \equiv \complement i \iff [\forall a \colon 1 \to A\ [a \in i \Leftrightarrow a \notin j]].$$

Satz 3.37 Sei i ein Teil einer Menge A mit dem Indikator χ_i. Dann hat das Komplement $\complement i$ den Indikator $\neg\chi_i$, d.h. es gilt

$$\chi_{\complement i} = \neg\chi_i.$$

3.3.5 Bild und Kern

Definition 3.38 (Kern, Bild)

Sei $f \colon A \to B$ eine Abbildung.

(i) Sei k der Equalizer von $p_0 f$, $p_1 f$ und q der Coequalizer von kp_0, kp_1, dann heißt q *Kern* von f.

$$\begin{tikzcd} R_f \arrow[r, hook, "k"] & A \times A \arrow[r, two heads, shift left, "p_0"] \arrow[r, two heads, shift right, "p_1"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "q"'] & B \\ & & I & \end{tikzcd}$$

(ii) Dual sei k^* der Coequalizer von fi_0, fi_1 und q^* der Equalizer von $i_0 k^*$, $i_1 k^*$, dann heißt q^* *Bild* von f.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, hook, shift left, "i_0"] \arrow[r, hook, shift right, "i_1"'] & B + B \arrow[r, two heads, "k^*"] & R_f^* \\ & I^* \arrow[u, hook, "q^*"'] & & \end{tikzcd}$$

Aus Lemma 2.11 erhalten wir

Folgerung 3.39 (i) Der Kern ist eine Partition der Domäne von f.

(ii) Das Bild ist eine Teilmenge der Codomäne von f.

Theorem 3.40 Sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung mit dem Kern q und dem Bild q^*.

$$\begin{tikzcd}
R_f \arrow[r, hook, "k"] & A \times A \arrow[r, shift left, two heads, "p_0"] \arrow[r, shift right, two heads, "p_1"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "q"'] & B \arrow[r, shift left, hook, "i_0"] \arrow[r, shift right, hook, "i_1"'] & B + B \arrow[r, two heads, "k^*"] & R_f^* \\
& & I \arrow[r, squiggly, "h"'] & I^* \arrow[u, hook, "q^*"'] & &
\end{tikzcd}$$

Dann gelten:

(i) Es gibt genau einen Isomorphismus h mit $f = qhq^*$.

(ii) Für $b\colon 1 \to B$ gilt $b \in q^*$ genau dann, wenn ein $a\colon 1 \to A$ mit $b = af$ existiert.

(iii) Für $a_0, a_1\colon 1 \to A$ gilt $a_0 f = a_1 f$ genau dann, wenn $a_0 q = a_1 q$ ist.

Beweis: (i) Weil q ein Coequalizer ist, gibt es genau ein g mit $f = qg$. Als ein Coequalizer ist q epi und hat damit nach dem Auswahlaxiom eine Sektion t, d.h. es gilt $tq = \mathrm{id}_I$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, two heads, "q"'] & B \\
I \arrow[u, shift right, hook, "t"'] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Dual gibt es genau ein g^* mit $f = g^*q^*$, denn q^* ist ein Equalizer. Dual ist q^* als Equalizer mono und hat eine Retraktion t^* mit $q^*t^* = \mathrm{id}_{I^*}$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g^*"'] & B \arrow[d, shift right, two heads, "t^*"'] \\
& I^* \arrow[u, shift right, hook, "q^*"']
\end{tikzcd}$$

Damit setzen wir $h = tft^*$ und es gilt

$$qhq^* = qtft^*q^* = qgt^*q^* = ft^*q^* = g^*q^* = f.$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, two heads, "q"'] & B \arrow[d, shift right, two heads, "t^*"'] \\
I \arrow[u, shift right, hook, "t"'] \arrow[r, "h"'] & I^* \arrow[u, shift right, hook, "q^*"']
\end{tikzcd}$$

Für eine Abbildung h' mit $f = qh'q^*$ gilt stets

$$h' = tqh'q^*t^* = tft^* = h,$$

also ist h eindeutig. Es verbleibt zu zeigen, dass h iso ist. Dazu zeigen wir zuerst, dass hq^* mono ist. Es ist

$$hq^* = tqhq^* = tf = g,$$

sei also $xg = x'g$. Dann gilt

$$\langle xt, x't\rangle p_0 f = xtf = xg = x'g = x'tf = \langle xt, x't\rangle p_1 f$$

und es existiert ein w mit $\langle xt, x't\rangle = wk$, denn k ist Equalizer von $p_0 f$,$p_1 f$. Mit der Coequalizer-Eigenschaft von q folgt nun

$$x = xtq = \langle xt, x't\rangle p_0 q = wkp_0 q = wkp_1 q = \langle xt, x't\rangle p_1 q = x'tq = x',$$

d.h. $g = hq^*$ ist mono. Also ist auch h mono.

$$\begin{tikzcd}
R_f \arrow[r, hook, "k"] & A \times A \arrow[r, shift left, two heads, "p_0"] \arrow[r, shift right, two heads, "p_1"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "q"'] & B \\
& T \arrow[ul, "w"] \arrow[u, "\langle xt, x't\rangle"] \arrow[r, shift left, "x"] \arrow[r, shift right, "x'"'] & I \arrow[u, shift right, hook, "t"'] \arrow[ur, "g"] \arrow[r, squiggly, "h"'] & I^* \arrow[u, hook, "q^*"']
\end{tikzcd}$$

Dual folgt, dass qh epi ist. Wir haben

$$qh = qhq^*t^* = ft^* = g^*$$

und sei $g^*x^* = g^*x^{*\prime}$. Dann ist

$$fi_0 \left\{ {t^*x^* \atop t^*x^{*\prime}} \right. = ft^*x^* = g^*x^* = g^*x^{*\prime} = ft^*x^{*\prime} = fi_1 \left\{ {t^*x^* \atop t^*x^{*\prime}} \right.$$

und weil k^* ein Coequalizer von fi_0, fi_1 ist, gibt es ein w^* mit $\left\{ {t^*x^* \atop t^*x^{*\prime}} \right. = k^*w^*$. Weiter folgt mit der Equalizer-Eigenschaft von q^*

$$x^* = q^*t^*x^* = q^*i_0 \left\{ {t^*x^* \atop t^*x^{*\prime}} \right. = q^*i_0k^*w^* = q^*i_1k^*w^* = q^*i_1 \left\{ {t^*x^* \atop t^*x^{*\prime}} \right. = q^*t^*x^{*\prime} = x^{*\prime},$$

d.h. $g^* = qh$ ist epi und damit auch h.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "g^*"'] & B \arrow[r, hook, shift left, "i_0"] \arrow[r, hook, shift right, "i_1"'] \arrow[d, shift right, "t^*"'] & B + B \arrow[r, "k^*"] \arrow[d, "\left\{ {t^*x^* \atop t^*x^{*\prime}} \right."'] & R_f^* \arrow[dl, "w^*"] \\
I \arrow[r, squiggly, "h"'] & I^* \arrow[u, hook, shift right, "q^*"'] \arrow[r, shift left, "x^*"] \arrow[r, shift right, "x^{*\prime}"'] & T^* &
\end{tikzcd}$$

Schließlich ist h iso, weil h mono und epi ist.

(ii) Sei $b\colon 1 \to B$ mit $b \in q^*$, d.h. es gibt ein $\overline{b}$ mit $b = \overline{b}q^*$. Setze $a = \overline{b}h^{-1}t$, dann gilt
$$af = \overline{b}h^{-1}tf = \overline{b}h^{-1}g = \overline{b}h^{-1}hq^* = \overline{b}q^* = b.$$
Sei umgekehrt $b\colon 1 \to B$ und $a\colon 1 \to A$ mit $b = af$. Dann ist
$$b = af = aqhq^*$$
und demnach gilt $b \in q^*$.

(iii) Seien $a_0, a_1\colon 1 \to A$ und zunächst $a_0 f = a_1 f$, d.h. wegen $f = qhq^*$ ist $a_0qhq^* = a_1qhq^*$. Weil hq^* mono ist, folgt $a_0q = a_1q$.
Sei umgekehrt $a_0q = a_1q$, so ergibt sich $a_0f = a_0qhq^* = a_1qhq^* = a_1f$.

(iv) Sei $\langle a_0, a_1\rangle \in k$, d.h. es gibt ein v mit $\langle a_0, a_1\rangle = vk$. Nun gilt
$$a_0f = \langle a_0, a_1\rangle p_0f = vkp_0f = vkp_1f = \langle a_0, a_1\rangle p_1f = a_1f.$$
Umgekehrt sei $a_0f = a_1f$, d.h. $\langle a_0, a_1\rangle p_0f = \langle a_0, a_1\rangle p_1f$. Weil k ein Equalizer von p_0f, p_1f ist, gibt es ein v mit $\langle a_0, a_1\rangle = vk$, also ist $\langle a_0, a_1\rangle \in k$.

(v) Sei $afi_0k^* = bi_1k^*$, es folgt $afi_1k^* = bi_1k^*$ Umgekehrt sei $af = b$, dann gilt $afi_0k^* = afi_1k^* = bi_1k^*$. ■

4 Colimites, Epimorphismen und das Auswahlaxiom

4.1 Dualität von Limites und Colimites

Jede Limitkonstruktion hat eine zugehörige duale Colimitkonstruktion. Die entsprechende universelle Eigenschaft wird dabei durch Umdrehen aller Pfeile beschrieben. Z.B. hat das initiale Objekt 1 die Eigenschaft, dass es von 1 in jedes andere Objekt genau einen Pfeil gibt. Dual dazu gibt es von jedem Objekt genau einen Pfeil in das terminale Objekt 0.

Definition 4.1 (Coprodukt)

Ein Objekt C einer Kategorie zusammen mit zwei Morphismen $i_A : A \longrightarrow C; i_B : B \longrightarrow C$ heißt Coprodukt (oder Summe, vgl. (3.31)) von A und B, falls für jedes Objekt Y und beliebige Morphismen $f : A \longrightarrow Y$ und $g : B \longrightarrow Y$ genau ein Morphismus

$$\left\{ \begin{smallmatrix} f \\ g \end{smallmatrix} \right. : C \dashrightarrow Y$$

existiert mit:

$$i_A * \left\{ \begin{smallmatrix} f \\ g \end{smallmatrix} \right. = f$$

und

$$i_B * \left\{ \begin{smallmatrix} f \\ g \end{smallmatrix} \right. = g.$$

Das Coprodukt C von zwei Objekten A und B ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und wird mit $A + B$ bezeichnet.

Definition 4.2 (Cokern)

Ein Morphismus $q : B \longrightarrow Q$ heißt Cokern oder Coequalizer für die Morphismen $f : A \longrightarrow B$ und $g : A \longrightarrow B$, falls $f * q = g * q$ gilt und falls es für jedes Objekt Y und für jeden Morphismus $y : B \longrightarrow Y$ mit $f * y = g * y$ genau einen Morphismus $\bar{y} : Q \longrightarrow Y$ gibt mit: $q * \bar{y} = y$.

4.2 Epimorphismen und Split-Surjektionen

Definition 4.3 (Epimorphismus)

Ein Epimorphismus f ist ein Morphismus, der linkskürzbar ist, d.h. es gilt:
$\forall \Phi, \Psi : f * \Phi = f * \Psi \Longrightarrow \Phi = \Psi$

Satz 4.4 Eine Abbildung i (in **Set**) ist ein Monomorphismus genau dann, wenn die Projektionen des Pullbacks von i mit sich selbst gleich sind.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[d, "\pi_1"'] & A \arrow[d, "i"] \\ A \arrow[r, "i"'] & B \end{tikzcd}$$

Beweis: „$\Longrightarrow$“:
Sei $i : A \longrightarrow B$ ein Monomorphismus sowie $\pi_0 : P \longrightarrow A$ und $\pi_1 : P \longrightarrow A$ die Projektionen eines beliebigen Pullbacks von i mit sich selbst. Dann gilt insbesondere (Pullbackeigenschaft): $\pi_0 * i = \pi_1 * i$. Aus der rechtskürzbarkeit von i folgt sofort: $\pi_0 = \pi_1$.

„$\Longleftarrow$“:
Seien $x_0 : T \longrightarrow A$ und $x_1 : T \longrightarrow A$ beliebig mit: $x_0 * i = x_1 * i$ sowie $\pi_0 : P \longrightarrow A, \pi_1 : P \longrightarrow A$ ein Pullback von i mit sich selbst und: $\pi_0 = \pi_1$. Wegen der Pullbackeigenschaft existiert (genau) ein $x : T \longrightarrow P$ mit: $x * \pi_0 = x_0$ und $x * \pi_1 = x_1$. Mit $\pi_0 = \pi_1$ folgt: $x_0 = x * \pi_0 = x * \pi_1 = x_1$. Also ist i rechtskürzbar.

■

Satz 4.5 Eine Abbildung $P : X \longrightarrow Y$ ist ein Epimorphismus genau dann, wenn sie surjektiv ist.

Beweis: „$\Longrightarrow$“:

Sei P Epimorphismus. Dann ist P auch surjektiv, denn wäre dies nicht der Fall würde ein $y_0 \in Y$ existieren mit: $x * P \neq y_0$ für alle $x \in X$. Betrachte nun die zweielementige Menge $V = 2$ und die charakteristische Funktion

$$\Psi_1 : Y \longrightarrow V$$

des einelementigen Teils y_0 sowie die konstante Funktion

$$\Psi_0 : Y \longrightarrow V : y \mapsto 0.$$

Dann gilt für alle $x \in X$:

$$(P * \Psi_1)(x) = \Psi_1(P(x)) = 0 = \Psi_0(P(x)) = (P * \Psi_0)(x)$$

denn Ψ_0 ist konstant 0 und $\Psi_1(y)$ ist nur für $y = y_0$ gleich 1, es gibt aber kein x mit $P(x) = y_0$. Also wäre $P * \Psi_1 = P * \Psi_0$ und somit würde $\Psi_1 = \Psi_0$ folgen, was im Widerspruch zu $\Psi_1(y_0) = 1 \neq 0 = \Psi_0(y_0)$ steht. Das heißt, dass P surjektiv sein muss.
„ $\Longleftarrow$ “:

Seien nun $V, \Psi_0 : Y \longrightarrow V$ sowie $\Psi_1 : Y \longrightarrow V$ beliebig mit: $P * \Psi_0 = P * \Psi_1$.
Sei nun $y \in Y$ beliebig. Da P surjektiv ist existiert ein $x \in X$ mit $x * P = P(x) = y$.
da $P * \Psi_0 = P * \Psi_1$ gilt folgt:

$$\Psi_0(y) = \Psi_0(P(x)) = (P * \Psi_0)(x) = (P * \Psi_1)(x) = \Psi_1(P(x)) = \Psi_1(y).$$

Da y beliebig war folgt insgesamt : $\Psi_0 = \Psi_1$, also ist P ein Epimorphismus. ■

Definition 4.6 (Split-Surjektion)

Ein Morphismus $p : X \longrightarrow Y$ heißt *split-surjektiv*, falls gilt:

$$\forall T \forall y : T \xrightarrow{y} Y \exists x : x * p = y.$$

$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dl, dotted, "x"'] \arrow[dr, "y"] & \\
X \arrow[rr, "p"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

Satz 4.7 Ein Morphismus $p : X \longrightarrow Y$ ist split-surjektiv genau dann, wenn p ein Linksinverses besitzt.

Beweis: „ $\Longrightarrow$ “:
Sei p split-surjektiv, betrachte $T = Y$ und $y = 1_Y$ den identischen Morphismus auf Y. Dann existiert ein x mit $x * p = y = 1_Y$.

„ $\Longleftarrow$ “:
Sei s ein linksinverser Morphismus zu p, sowie T ein beliebiges Objekt und $y : T \longrightarrow Y$ ebenfallls beliebig. Dann erfüllt x definiert durch $x = y * s$ die Bedingung $x * p = (y * s) * p = y * (s * p) = y$. ■

Satz 4.8 Jeder Morphismus p, der ein Linksinverses besitzt ist ein Epimorphismus (also linkskürzbar).

Beweis: gelte $p * a = p * b$ für Morphismen a, b, p und sei s ein linksinverser Morphismus zu p. Dann folgt: $s * (p * a) = s * (p * b)$ und somit: $a = 1 * a = (s * p) * a = s * (p * a) = s * (p * b) = (s * p) * b = 1 * b = b$. ■

Die Umkehrung dieses Satzes gilt im Allgemeinen nicht. In der Kategorie **Set** entspricht sie genau dem Auswahlaxiom, was später noch deutlich wird.

Axiom 4.9 (Auswahlaxiom (a))

Jede surjektive Abbildung in **Set** hat ein Linksinverses

Definition 4.10 (Faser)

Für jedes $p : X \longrightarrow Y$ und jedes $y : 1 \longrightarrow Y$ ist die *Faser* von p bezüglich y definiert als die Domäne X_y des Urbildes des einelementigen Teils y.

$$\begin{tikzcd} X_y \arrow[r, hook, "p^{-1}[y]"] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\ 1 \arrow[r, "y"'] & Y \end{tikzcd}$$

Satz 4.11 Jedes Linksinverse s zu einer Abbildung p wählt zu jedem $y \in Im(p)$ ein Element des Urbildes $p^{-1}(y) := \{x \in \mathrm{dom}(p) : p(x) = y\}$ aus.

Beweis: Sei $y \in Im(p)$. Dann gilt: $y = (s * p)(y) = p(s(y))$ also ist $s(y) \in p^{-1}(y)$ ■

Eine übliche mengentheoretische Formulierung des Auswahlaxioms ist folgende: „Sei A eine Familie von nichtleeren Mengen $(X_i)_{i \in I}$, dann gibt es eine Funktion f, die jedem $i \in I$ genau ein $x_i \in X_i$ zuordnet.
Dies ist genau äquivalent zu unserer Formulierung des Auswahlaxioms: jede Familie A von nichtleeren Mengen $(X_i)_{i \in I}$ (parametrisiert durch die Indexmenge I) kann (bis auf Isomorphie) dargestellt werden als Familie von Fasern einer Abbildung p mit Codomäne I. Dabei ist p gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(p) &= \tilde{A} := \bigcup_{i \in I} X_i \times \{i\} \\ \mathrm{cod}(p) &= I \\ p((x, j)) &= j \qquad\qquad \text{falls } x \in X_j \end{aligned}$$

für $j \in I$ und X_i ist darstellbar als $X_i = \pi_1(p^{-1}(i))$ (dabei ist π_1 die Projektion auf die erste Komponente). Das p surjektiv ist bedeutet genau, dass alle X_i nichtleer sind und aus dem Auswahlaxiom folgt, dass p ein Linksinverses s, also eine Auswahlfunktion besitzt, die für $i \in I$ ein Element des Urbildes $p^{-1}(i) = X_i \times i \cong X_i$ auswählt. Andersherum kann aus der üblichen Formulierung des Auswahlaxioms unsere Formulierung gewonnen werden: wähle zu einem surjektiven $p : X \longrightarrow Y$ ein Linksinverses s definiert durch: $s : Y \longrightarrow X, y \mapsto x \in p^{-1}(y) \neq \emptyset$. Dann ist s nach Auswahlaxiom wohldefiniert und es folgt für alle $y \in Y$:

$(s * p)(y) = p(s(y)) = p(x)$ für x mit $p(x) = y$ also $p(s(y)) = y$ und somit insgesamt: $s * p = 1_Y$.

4.3 Partitionen und Äquivalenzrelationen

Der duale Begriff zum Begriff „Teil“ ist der Begriff „Partition“.

Definition 4.12 (Partition)

Eine Partition eines Objektes A ist eine surjektiver Morphismus p mit Domäne A. Die Fasern von p heißen Komponenten der Partition.

Bemerkung 4.13 Sei $A \xrightarrow{p} I$ ein surjektiver Morphismus und für jedes $1 \xrightarrow{i} I$ sei A_i die Komponente von p bezüglich i. Dann sind alle A_i nichtleere Teile von A (vgl. Satz 7.11). Weiterhin liegt jedes Element von A in genau einem A_i.

Definition 4.14 (Relation)

Eine Relation R von X und Y ist ein Teil $R \overset{(p_0,p_1)}{\hookrightarrow} X \times Y$ des Produkts von X und Y. Die zu einer Relation $R \overset{(p_0,p_1)}{\hookrightarrow} X \times Y$ inverse Relation R^{-1} ist die Relation $R \overset{(p_1,p_0)}{\hookrightarrow} Y \times X$ mit den Projektionen p_1 und p_0.

Definition 4.15 (Reflexivität)

Eine Relation $R \overset{(p_0,p_1)}{\hookrightarrow} X \times X$ heißt *reflexiv*, wenn es einen Morphismus $X \xrightarrow{r} R$ gibt mit $r * p_0 = 1_X = r * p_1$.

Definition 4.16 (Symmetrie)

Eine Relation $R \overset{(p_0,p_1)}{\hookrightarrow} X \times X$ heißt *symmetrisch*, wenn gilt:

$$R^{-1} \subseteq_{X \times X} R.$$

Definition 4.17 (Transitivität)

Eine Relation $R \overset{(p_0,p_1)}{\hookrightarrow} X \times X$ heißt *transitiv*, wenn für verallgemeinerte Elemente $\langle x, y \rangle$ und $\langle y, z \rangle$ von $X \times X$ gilt:

$$\langle x, y \rangle \in R \& \langle y, z \rangle \in R \Longrightarrow \langle x, z \rangle \in R.$$

Definition 4.18 (Äquivalenzrelation)

Eine Relation heßt *Äquivalenzrelation*, wenn sie reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

Definition 4.19

Sei $X \overset{p}{\twoheadrightarrow} I$ eine Partition von X. Dann wird mit $R_p \overset{(p_0,p_1)}{\longrightarrow} A \times A$ das Pullback

$$\begin{tikzcd} R_p \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "p_1"'] & X \arrow[d, two heads, "p"] \\ X \arrow[r, two heads, "p"'] & I \end{tikzcd}$$

von

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, two heads, "p"] \\ X \arrow[r, two heads, "p"'] & I \end{tikzcd}$$

bezeichnet.

Definition 4.20

Sei $R \hookrightarrow X \times X$ eine Relation. Dann wird mit $X \xrightarrow{p_R} P_R$ der Coequalizer

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, shift left, "p_0"] \arrow[r, shift right, "p_1"'] & X \arrow[r, "p_R"] & P_R \end{tikzcd}$$

von

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, shift left, "p_0"] \arrow[r, shift right, "p_1"'] & X \end{tikzcd}$$

bezeichnet.

Satz 4.21 Wenn p eine Partition von X ist, dann gilt: $p = p_{R_p}$. Ist R eine Äquivalenzrelation auf X, dann gilt: $R = R_{p_R}$

4.4 Split Images

Es gibt eine Version des Auswahlaxioms, die ohne die Forderung der Surjektivität des Ausgangsmorphismus auskommt:

Axiom 4.22 (Auswahlaxiom (b))

Für jeden Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ mit $X \neq \emptyset$ existiert ein Morphismus $Y \xrightarrow{g} X$ mit: $f * g * f = f$.

Satz 4.23 In der Kategorie **Set** sind diese beiden Formulierungen äquivalent.

Beweis: $b) \implies a)$:

Sei $X \xrightarrow{f} Y$ ein surjektiver Morphismus und $x \neq \emptyset$. dann existiert nach b) ein Morphismus $Y \xrightarrow{g} X$ mit: $f * g * f = f$. Da f nach Voraussetzung surjektiv, also linkskürzbar war folgt: $g * f = 1_Y$ und somit hat f ein Linksinverses.
$a) \implies b)$:

Beweisidee: Sei $\emptyset \neq X \xrightarrow{f} Y$. Betrachte die kanonische Fakorisierung

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{im_f} \arrow[dr, hook, "i"] & \\ X \arrow[ur, "f^*"] \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd}$$

$X \xrightarrow{f^*} \mathrm{im_f} \xhookrightarrow{i} Y$. Dabei ist f^* die Einschränkung von f im Bildbereich auf die Menge $\mathrm{im_f}$ und i die kanonische Einbettung von $\mathrm{im_f}$ in Y. Dann existiert nach a) ein Linksinverses $\mathrm{im_f} \xrightarrow{a} X$ mit $a * f^* = id_{\mathrm{im_f}}$. Betrachte weiterhin die Abbildung $Y \xrightarrow{b} \mathrm{im_f} : y \mapsto \begin{cases} y \text{ falls } y \in \mathrm{im_f} \\ f(x) \text{ sonst} \end{cases}$
(dabei ist $x \in X \neq \emptyset$ beliebig gewählt).

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{im_f} \arrow[dl, shift left, "a"] \arrow[dr, hook, "i"] & \\
X \arrow[ur, shift left, "f^*"] \arrow[rr, "f"'] & & Y \arrow[ul, shift left, "b"]
\end{tikzcd}$$

Setze nun $g := b * a$ und es folgt: $f * g * f = f * b * a * f = f * b * a * f^* * i = f * b * id_{\mathrm{im_f}} * i = f * b * i = f$. Beachte, dass die Möglichkeit der Konstruktion von b in der abstrakten Kategorie **Set** noch gerechtfertigt werden muss. ■

5 Mengen von Abbildungen und Exponentiation

5.1 Produkte von Morphismen

Für einen Morphismus f in ein kartesisches Produkt $Y_0 \times Y_1$ entstehen durch die Komposition von f mit den natürlich gegebenen Projektionen p_0 und p_1 die Funktionen $f_0 := f * p_0$ und $f_1 := f * p_1$. Diese werden als Tupeling von f bezeichnet. Andersherum existiert für je zwei Morphismen f_0 und f_1 mit Codomänen Y_0 und Y_1 und gleicher Domäne ein Morphismus f mit Codomäne $Y_0 \times Y_1$. Dieser ist genau der in der Definition des Produktes eindeutig bestimmte Morphismus f mit: $f * p_0 = f_0$ und $f * p_1 = f_1$. Dieser wird auch mit $\langle f_0, f_1 \rangle$ bezeichnet. Es kann also aus f_0 und f_1 $\langle f_0, f_1 \rangle$ konstruiert werden und umgekehrt. Dies soll im Folgenden durch folgendes Diagramm symbolisiert werden:

$$\frac{X \xrightarrow{\langle f_0, f_1 \rangle} Y_0 \times Y_1}{X \xrightarrow{f_0} Y_0, X \xrightarrow{f_1} Y_1} \downarrow\uparrow$$

Es gibt also eine $1 - 1$ Beziehung zwischen den Prozessen:

- Tupeling von zwei Morphismen mit gleicher Domäne
- Komponentenweises Betrachten eines Morphismus mit einem Produkt als Codomäne

Diese $1 - 1$ Beziehung soll durch die Pfeile $\downarrow\uparrow$ symboisiert werden. Ein Beispiel für ein Tupeling ist folgendes:

$$\frac{X \xrightarrow{\langle 1_x, 1_x \rangle} X \times X}{X \xrightarrow{1_x} X, X \xrightarrow{1_x} X} \downarrow\uparrow$$

$\langle 1_x, 1_x \rangle$ wird als Diagonale σ_X bezeichnet.

Wir betrachten nun zwei Morphismen $X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$ und $X_1 \xrightarrow{f_1} Y_1$mit verschiedenen Domänen. Dann haben die Kompositionen der Projektionen $X_0 \times X_1 \xrightarrow{p_0} X_0$ und $X_0 \times X_1 \xrightarrow{p_1} X_1$ des Produktes von $X_0 \times X_1$ mit den

Funktionen f_0 und f_1 die gleiche Domäne $X_0 \times X_1$ und sind somit Tupelbar. Das Tupeling $\langle p_0 * f_0, p_1 * f_1 \rangle$ wird auch mit $f_0 \times f_1$ bzw. als Produkt von f_0 und f_1 bezeichnet.

Satz 5.1 (Funktorialität des Produktes) Seien $X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$, $X_1 \xrightarrow{f_1} Y_1$, $Y_0 \xrightarrow{g_0} Z_0$ und $Y_1 \xrightarrow{g_1} Z_1$ Morphismen. Dann gilt:
$(f_0 \times f_1) * (g_0 \times g_1) = (f_0 * g_0) \times (f_1 * g_1)$.

Beweis: Zu zeigen: $(f_0 \times f_1) * (g_0 \times g_1) = (f_0 * g_0) \times (f_1 * g_1)$
d.h. es ist zu zeigen: $\langle p_0 * f_0, p_1 * f_1 \rangle * \langle q_0 * g_0, q_1 * g1 \rangle = \langle p_0 * f_0 * g_0, p_1 * f_1 * g_1 \rangle$. Dabei sind p_0 bzw. p_1 die Projektionen von $X_0 \times X_1$ in X_0 bzw. X_1 und q_0 bzw. p_1 die Projektionen von $Y_0 \times Y_1$ in Y_0 bzw. Y_1. Es ist also zu zeigen, dass $\langle p_0 * f_0, p_1 * f_1 \rangle * \langle q_0 * g_0, q_1 * g1 \rangle =: a * b$ das Tupeling von $p_0 * f_0 * g_0 := c$ und $p_1 * f1 * g_1 =: d$ ist. D.h. zu zeigen ist: $a * b * r_0 = c$ und $a * b * r_1 = d$. Dabei ist r_0 bzw. r_1 die Projektion von $Z_0 \times Z_1$ in Z_0 bzw. Z_1. Es gilt: $c = p_0 * f_0 * g_0 = a * q_0 * g_0$, da a das Tupeling von $p_0 * f_0$ und $p_1 * f_1$ ist. Weiterhin gilt: $a * q_0 * g_0 = a * b * r_0$, da b das Tupeling von $q_0 * g_0$ und $q_1 * g_1$ ist. Also gilt: $a * b * r_0 = c$. Analog gilt: $d = p_1 * f_1 * g_1 = a * q_1 * g_1 = a * b * r_1$. ■

5.2 Exponentiation

Seien A und B Mengen. Dann gibt es die Menge aller Abbildungen von A nach B. Diese wird gewöhnlich mit B^A bezeichnet. Ein Morphismus $A \xrightarrow{f} B$ ist also selbst wieder ein Element der Menge B^A. Dies versuchen wir im Folgenden für die abstrakte Kategorie **Set** zu axiomatisieren.

Axiom 5.2 (Exponentiation)

Für zwei Objekte B, Y in **Set** existiert ein Objekt Y^B und ein sogenannter Auswertungsmorphismus $Y^B \times B \xrightarrow{\text{eval}} Y$ mit folgender universellen Eigenschaft: Für jedes Objekt X und jeden Morphismus $X \times B \xrightarrow{f} Y$ existiert genau ein Morphismus $X \xrightarrow{\ulcorner f \urcorner} Y^B$ mit $(\ulcorner f \urcorner \times 1_B) * \text{eval} = f$.
Außerdem gilt: $\ulcorner \text{eval} \urcorner = 1_{Y^B}$

Speziell für $X = 1$ wird klar, dass zu jedem Morphismus $B \xrightarrow{\tilde{f}} Y$ ein Element $1 \xrightarrow{\ulcorner f \urcorner} Y^B \in Y^B$ gehört: Da $B \times 1 \cong B$ existiert ein Isomorphismus $B \times 1 \xrightarrow{i} B$ und es kann ein Morhismus $f := i * \tilde{f}$ definiert werden. Es gibt dann das Objekt Y^B und einen Morphismus $Y^B \times B \xrightarrow{\text{eval}} Y$ sowie einen eindeutig bestimmten Morpismus $1 \xrightarrow{\ulcorner f \urcorner} Y^B$ also ein Element von Y^B, so dass gilt: $(\ulcorner f \urcorner \times 1_B) * \text{eval} \ = f$. Dabei entspricht in **Set** eval der Funktion $Y^B \times B \longrightarrow Y : (f, x) \mapsto f(x)$ und $\ulcorner f \urcorner$ ist gegeben durch: $(\ulcorner f \urcorner)(1) = \tilde{f}$ und es gilt für alle $b \in B$: $f((b,1)) = \tilde{f}(b) = \text{eval}\,((\tilde{f}, b)) = ((\ulcorner f \urcorner \times 1_B) * \text{eval}\,)((b,1))$.

Satz 5.3 Für jeden Morphismus $Y_1 \xrightarrow{\varphi} Y_2$ und jedes Objekt $B \neq \emptyset$ existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $Y_1^B \xrightarrow{\varphi^B} Y_2^B$ mit der Eigenschaft: $\ulcorner g \urcorner * \varphi^B = \ulcorner g * \varphi \urcorner$ für alle $B \xrightarrow{g} Y_1$.

Beweis: Existenz:
Setze $\varphi^B := \ulcorner(\text{eval}_1 * \varphi)\urcorner$.
Dabei ist eval_1 der Auswertungsmorphismus zu B und Y_1 sowie eval_2 der Auswertungsmorphismus zu B und Y_2. Zu zeigen ist: für einen beliebigen Morphismus $B \xrightarrow{g} Y_1$ gilt: $\ulcorner g \urcorner * \varphi^B = \ulcorner g * \varphi \urcorner$. Da $\ulcorner g * \varphi \urcorner$ nach unserem Axiom eindeutig bestimmt ist, genügt es zu zeigen, dass gilt: $(\ulcorner g \urcorner * \varphi^B \times 1_B) * \text{eval}_2 = g * \varphi$:
$(\ulcorner g \urcorner * \varphi^B \times 1_B) * \text{eval}_2 = (\ulcorner g \urcorner * \ulcorner \text{eval}_1 * \varphi \urcorner \times 1_B) * \text{eval}_2 = (\ulcorner g \urcorner \times 1_B) * (\ulcorner \text{eval}_1 * \varphi \urcorner \times 1_B) * \text{eval}_2 = \ulcorner g \urcorner \times 1_B * \text{eval}_1 * \varphi = g * \varphi$.
Eindeutigkeit:
Sei nun $Y_1^B \xrightarrow{\psi} Y_2^B$ ein weiterer Morphismus mit: $\ulcorner g \urcorner * \psi = \ulcorner g * \varphi \urcorner$ für alle $B \xrightarrow{g} Y_1$. Dann betrachte speziell $g = \text{eval}_1$. Es folgt:

$$\varphi^B = 1_{Y^B} * \varphi^B = \ulcorner \text{eval}_1 \urcorner * \varphi^B = \ulcorner \text{eval}_1 * \varphi \urcorner = \ulcorner \text{eval}_1 \urcorner * \psi = 1_{Y^B} * \psi = \psi.$$

■

Satz 5.4 Für zwei Morphismen $Y_1 \xrightarrow{\varphi} Y_2 \xrightarrow{\psi} Y_3$ gilt:
$(\varphi * \psi)^B = \varphi^B * \psi^B$

Beweis: Es ist nur zu zeigen, dass für beliebiges $B \xrightarrow{g} Y_1$ gilt:
$\ulcorner g \urcorner * (\varphi^B * \psi^B) = \ulcorner g * (\varphi * \psi) \urcorner$:

$$\ulcorner g \urcorner * (\varphi^B * \psi^B) = (\ulcorner g \urcorner * \varphi^B) * \psi^B = (\ulcorner g * \varphi \urcorner) * \psi^B = \ulcorner (g * \varphi) * \psi \urcorner = \ulcorner g * (\varphi * \psi) \urcorner$$

■

Satz 5.5 Zu einem Morphismus $B_2 \xrightarrow{\beta} B_1$ existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $Y^{B_1} \xrightarrow{Y^\beta} Y^{B_2}$ mit: $\ulcorner g \urcorner * Y^\beta = \ulcorner \beta * g \urcorner$ für alle $B_1 \xrightarrow{g} Y$.

Beweis: Existenz:
setze $a := (\beta \times 1_{Y^{B1}}) * \mathrm{eval}_1$ und $Y^\beta := \ulcorner a \urcorner$.
Dann ist zu zeigen: $(\ulcorner g \urcorner * \ulcorner a \urcorner \times 1_{B_2}) * \mathrm{eval}_2 = \beta * g$. Sei dazu $b \in B_2$. Dann folgt:
$((\ulcorner g \urcorner * \ulcorner (\beta \times 1_{Y^{B_1}}) * \mathrm{eval}_1 \urcorner \times 1_{B_2}) * \mathrm{eval}_2)(b) = \mathrm{eval}_2(\ulcorner (\beta \times 1_{Y^{B_1}}) * \mathrm{eval}_1 \urcorner (\ulcorner g \urcorner), b) =$
$((\beta \times 1_{Y^{B_1}}) * \mathrm{eval}_1)(b, \ulcorner g \urcorner) = \mathrm{eval}_1(\beta(b), \ulcorner g \urcorner) = g(\beta(b)) = (\beta * g)(b)$
Die Eindeutigkeit folgt aus der Tatsache, dass $\ulcorner g \urcorner \in Y^{B_1}$ beliebig war und dass 1 Separator ist. ■

Satz 5.6 Für zwei Morphismen $B_3 \xrightarrow{\alpha} B_2 \xrightarrow{\beta} B_1$ gilt:
$Y^{\alpha * \beta} = Y^\beta * Y^\alpha$

Beweis: Für alle $B \xrightarrow{g} Y^{B_3}$ gilt:
$\ulcorner g \urcorner * (Y^\beta * Y^\alpha) = (\ulcorner g \urcorner * Y^\beta) * Y^\alpha = \ulcorner \beta * g \urcorner * Y^\alpha = \ulcorner \alpha * (\beta * g) \urcorner = \ulcorner (\alpha * \beta) * g \urcorner$.
Damit ist wegen der Eindeutigkeit von $Y^{\alpha * \beta}$ die Gleichheit $Y^{\alpha * \beta} = Y^\beta * Y^\alpha$ gezeigt. ■

Satz 5.7 Es existiert ein Morphismus $Y_2^{Y_1} \times Y_1^B \xrightarrow{\ulcorner c \urcorner} Y_2^B$ mit:
$(\ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner g \urcorner) * \ulcorner c \urcorner = \ulcorner g * \varphi \urcorner$ für alle $B \xrightarrow{g} Y_1 \xrightarrow{\varphi} Y_2$.

Beweis: setze $c := (1_{Y_2^{Y_1}} \times \mathrm{eval}_1) * \mathrm{eval}_2$. Es ist zu zeigen:
$((\ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner g \urcorner) * \ulcorner c \urcorner \times 1_B) * \mathrm{eval}_2 = g * \varphi$
Sei dazu $b \in B$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} &\mathrm{eval}_2((\ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner g \urcorner) * \ulcorner c \urcorner \times 1_B)(b) = c(\ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner g \urcorner, b) \\ &= \mathrm{eval}_2(\ulcorner \varphi \urcorner, \mathrm{eval}_1(\ulcorner g \urcorner, b)) = \varphi(g(b)) = (g * \varphi)(b) \end{aligned}$$

■

Wir betrachten nun einen beliebigen Teil $A \hookrightarrow B$ eines Objekts B. Dieser kann durch seine charakteristische Funktion $B \xrightarrow{a} 2$ repräsentiert werden:

$$\frac{B \xrightarrow{a} 2}{A \hookrightarrow B}$$

Wir können diese Bijektion mit dem Exponentiationsaxiom auch so darstellen:

$$\frac{1 \xrightarrow{\ulcorner a \urcorner} 2^B}{A \hookrightarrow B}$$

Die Elemente des Objekts 2^B können als Namen der Teile von B aufgefasst werden. Speziell ist die Anzahl der Elemente von 2^B genau die Anzahl der Teile von B. Die Auswertungsmorphismus drückt in diesem Fall genau aus, ob ein Element b in einem Teil i enthalten ist:

$$2^B \times B \xrightarrow{\text{eval}} 2$$
$$\text{eval}\,(\ulcorner\varphi\urcorner, b) = b * \varphi$$

Ist φ die charakteristische Funktion des Teiles i, so können wir für den Wahrheitswert der Aussage, dass b ein Element von i ist definieren:

$$[b \in i] := \text{eval}\,(\ulcorner\varphi\urcorner, b)$$

Satz 5.8 Sei $B_2 \xrightarrow{\beta} B_1$ ein Morphismus. Dann vermittelt der Morphismus $2^{B_1} \xrightarrow{2^\beta} 2^{B_2}$ die Bildung des Urbildes von beliebigen Teilen von B_1 bezüglich β.

Beweis: Sei $T \overset{j}{\hookrightarrow} B_1$ ein Teil von B_1 und χ_1 die zugehörige charakteristische Funktion. Dann beschreibt $\ulcorner\chi_2\urcorner := \ulcorner\chi_1\urcorner * 2^\beta$ die charakteristische Funktion des Urbildes i von j, denn sei $a \in B_2$. Dann gilt $\chi_2(a) = \mathit{true} \Leftrightarrow \chi_1(\beta(a)) = \mathit{true} \Leftrightarrow \chi_1(a * \beta) = \mathit{true} \Leftrightarrow a * \beta \in j \Leftrightarrow a \in i$. ∎

Um die exponentielle Schreibweise zu rechtfertigen werden wir nun zeigen, dass die Anzahl der Abbildungen von B nach Y für endliches B und Y gleich der Anzahl der Elemente von Y hoch die Anzahl der Elemente von B ist:

Satz 5.9 Es gilt:

1. $Y^0 \xrightarrow{\sim} 1$
2. $Y^{A+B} \xrightarrow{\sim} Y^A \times Y^B$

Beweis: 1. Ein Morphismus $1 \longrightarrow Y^0$ ist per Exponentiationsaxiom äquivalent zu einem Morphismus $1 \times 0 \longrightarrow Y$, welcher wiederum äquivalent zu einem Morphismus $0 \times 1 \longrightarrow Y$ bzw. $0 \longrightarrow Y^1$ ist. Da 0 ein initiales Objekt ist existiert (genau) ein Morphismus $0 \longrightarrow Y^1$ bzw. $1 \longrightarrow Y^0$. Weiterhin existiert ein Morphismus $Y^0 \longrightarrow 1$, da 1 terminales Objekt ist. Die Komposition dieser beiden Morphismen ist genau der identische Morphismus, da

es nur genau einen Morphismus in 1 gibt.
Andersherum muß auch der Morphismus $Y^0 \longrightarrow 1 \longrightarrow Y^0$ der identische Morphismus sein, da er zu einem Morphismus $0 \longrightarrow Y$ äquivalent ist und da 0 initiales Objekt ist.

2. Betrachte die Injektionen i_A, i_B in die Summe $A + B$. Diese induzieren Morphismen $Y^{A+B} \longrightarrow Y^A$ bzw. $Y^{A+B} \longrightarrow B$. Diese können zu einem Morphismus $Y^{A+B} \stackrel{(Y^{i_A}, Y^{i_B})}{\longrightarrow} Y^A \times Y^B$ gepaart werden. Dies ist der Morphismus, von dem wir zeigen werden, dass er invertierbar ist. Wir müssen also einen Morphismus $Y^A \times Y^B \longrightarrow Y^{A+B}$ bzw. äquivalent dazu einen Morphismus $A + B \longrightarrow Y^{Y^A \times Y^B}$ konstruieren. So ein Morphismus kann aus einem Copaar von Morphismen $A \longrightarrow Y^{Y^A \times Y^B}$ und $B \longrightarrow Y^{Y^A \times Y^B}$ zusammengesetzt werden. Dieses Copaar ist wiederum äquivlent zu zwei Morphismen $Y^A \times Y^B \longrightarrow Y^A$ und $Y^A \times Y^B \longrightarrow Y^B$. Wählen wir für solche Morphismen die Projektionen so erhalten wir mit den obengenannten Äquivalenzen den gesuchten inversen Morphismus $Y^A \times Y^B \longrightarrow Y^{A+B}$. Da bei diesem Morphismus ein Paar $(\ulcorner f_A \urcorner, \ulcorner f_B \urcorner)$ in das Copaar $\ulcorner \begin{cases} f_A \\ f_B \end{cases} \urcorner$ übergeht ist dieser Morphismus wirklich der inverse Morphismus zum Morphismus $Y^{A+B} \stackrel{(Y^{i_A}, Y^{i_B})}{\longrightarrow} Y^A \times Y^B$, da bei diesem wiedrum $\ulcorner f \urcorner$ in das Paar $(\ulcorner f_{i_A} \urcorner, \ulcorner f_{i_B} \urcorner)$ übergeht.

■

Beachte, dass Satz 5.9 den inversen Prozess der Äquivalenz

$$\frac{A+B \longrightarrow Y}{A \longrightarrow Y, B \longrightarrow Y} \downarrow\uparrow$$

beschreibt:

$$\frac{A \longrightarrow Y, B \longrightarrow Y}{1 \longrightarrow Y^A, 1 \longrightarrow Y^B} \downarrow$$

$$\frac{1 \longrightarrow Y^A, 1 \longrightarrow Y^B}{1 \longrightarrow Y^A \times Y^B} \downarrow$$

$$\frac{1 \longrightarrow Y^A \times Y^B}{1 \longrightarrow Y^{A+B}} \downarrow$$

$$\frac{1 \longrightarrow Y^{A+B}}{A + B \longrightarrow Y} \downarrow$$

Satz 5.10 Es gilt:

1. $1^B \xrightarrow{\sim} 1$
2. $(Y_0 \times Y_1)^B \xrightarrow{\sim} Y_0^B \times Y_1^B$

Beweis:
1. Da es genau einen Morphismus $B \longrightarrow 1$ bzw. $1 \longrightarrow 1^B$ gibt, gibt es jeweils genau einen Morphismus $1 \longrightarrow 1^B \longrightarrow 1$ bzw. $1^B \longrightarrow 1 \longrightarrow 1^B$. Dieser muss deshalb jeweils der 1-Morphismus sein. Also sind 1^B und 1 isomorph.
2. Der Morphismus (π_0^B, π_1^B) besitzt einen inversen Morphismus $Y_0^B \times Y_1^B \longrightarrow (Y_0 \times Y_1)^B$. Dieser kann durch einen Morphismus $Y_0^B \times Y_1^B \times B \xrightarrow{\epsilon} Y_0 \times Y_1$ mit:
$(\ulcorner g_0 \urcorner, \ulcorner g_1 \urcorner, b) * \epsilon = (b * g_0, b * g_1)$ konstruiert werden. ■

Satz 5.11 Es gilt:

1. $Y \xrightarrow{\sim} Y^1$
2. $Y^{X \times B} \xrightarrow{\sim} (Y^B)^X$

Beweis:
1. Betrachte den Morphismus $Y \times 1 \xrightarrow{\pi_Y} Y$. Dieser definiert einen Morphismus $Y \longrightarrow Y^1$. Dieser besitzt den inversen Morphismus $(1_{Y^1}, 1^{Y^1}) *$ eval $: Y^1 \longrightarrow Y$.
2. Betrachte die Morphismen:

$$\frac{\dfrac{Y^{X \times B} \xrightarrow{?} (Y^B)^X}{Y^{X \times B} \times X \xrightarrow{?} (Y^B)}}{Y^{X \times B} \times X \times B \xrightarrow{\text{eval}} Y}$$

bzw.

$$\frac{(Y^B)^X \xrightarrow{?} Y^{X \times B}}{(Y^B)^X \times (X \times B) \xrightarrow{?} Y}$$

$$((Y^B)^X \times X) \times B \overset{(\text{eval}_X \times 1_B) * \text{eval}_B}{\longrightarrow} Y$$

Grob gesprochen entspricht der erste Morphismus $\ulcorner f \urcorner \mapsto \ulcorner x \mapsto (x,.) * f \urcorner$ und der zweite enspricht $\ulcorner \varphi \urcorner \mapsto \ulcorner (x,b) \mapsto b * (x * \varphi) \urcorner$. Diese beiden Morphismen sind zueinander invers. ■

Beispiel 5.12 In der Kategorie der geordneten Mengen mit monotonen Abbildungen als Morphismen gilt das Exponentiationsaxiom. □

Beweis: Seien $(B, \leq_B)$ und $(Y, \leq_Y)$ geordnete Mengen. Dann wähle für das Objekt Y^B die Menge aller monotonen Abbildungen von B nach Y mit der Ordnung $\leq_{Y^B}$ definiert durch: $f \leq_{Y^B} g :\iff \forall b \in B : f(b) \leq_Y g(b)$. Dies ist in der Tat eine geordnete Menge.

Definiere nun die Auswertungsfunktion $Y^B \times B \overset{\text{eval}}{\longrightarrow} Y : (f,b) \mapsto f(b)$. Diese Funktion ist wirklich monoton, denn sei $(f,b) \leq (g,c)$, d.h. $f \leq_{Y^B} g$ und $b \leq_B c$. Dann gilt: $\text{eval}\,((f,b)) = f(b) \leq_Y f(c) \leq_Y g(c) = \text{eval}\,((g,c))$.

Sei nun weiter $(X, \leq_X)$ eine weitere beliebige geordnete Menge und $X \times B \overset{f}{\longrightarrow} Y$ eine monotone Abbildung. Definiere dann $\ulcorner f \urcorner : X \longrightarrow Y^B : x \mapsto f(x,.)$. dies ist eine monotone Abbildung, denn sei $x_1 \leq_X x_2$. Dann folgt $f(x_1,.) \leq_Y f(x_2,.)$, denn für $b_1 \leq_B b_2$ folgt $(x_1, b_1) \leq (x_2, b_2)$ und f ist monoton.
Für $x \in X, f \in Y^B$ und $b \in B$ gilt nun:
$((\ulcorner f \urcorner \times 1_B) * \text{eval}\,)(x,b) = \text{eval}\,(f(x,.),b) = f(x,b)$.Die Auswertungsfunktion eval erfüllt also die universelle Eigenschaft. Außerdem zeigt die obige Gleichung, dass für $f \in Y^B$ die zugeordnete Funktion $\ulcorner f \urcorner$ eindeutig bestimmt ist. Es ist nun noch zu zeigen, das $\ulcorner \text{eval}\, \urcorner = 1_{Y^B}$ gilt:
Für $f \in Y^B$ und $b \in B$ gilt: $((1_{Y^B} \times 1_B) * \text{eval}\,)(f,b) = \text{eval}\,(f,b)$, also folgt $\ulcorner \text{eval}\, \urcorner = 1_{Y^B}$. ■

6 Konsequenzen und Anwendungen der Exponentiation

6.1 Verhalten von Mono- und Epimorphismen unter Exponentiation

Jede Kürzbarkeitsaussage ist im Prinzip nichts anderes als die Aussage, dass ein bestimmter algebraischer Prozess „ìnjektiv“ ist. Dies zeigt sich z.B. in der Konzeption von Monomorphismen, wo der algebraische Prozess der Rechtsmultiplikation mit einem Monomorphismus f injektiv ist, d.h.:

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 : \varphi_1 * f = \varphi_2 * f \Longrightarrow \varphi_1 = \varphi_2.$$

In der Sprache von Funktionenräumen können wir die Äquivalenz

$$f \quad injektiv \iff f \quad Monomorphismus$$

durch die Beziehung

$$X \xrightarrow{f} Y \quad injektiv \iff \forall T : [X^T \xrightarrow{f^T} Y^T \quad injektiv]$$

ausdrücken, denn f^T ist injektiv auf Elementen $1 \longrightarrow X^T$ falls für beliebige $T \xrightarrow{x_1} X$ und $T \xrightarrow{x_2} X$ die Implikation

$$x_1 * f = x_2 * f \Longrightarrow x_1 = x_2$$

gilt. Dies wird klar, wenn man bedenkt, dass die Wirkung von f^T durch $f^T(\ulcorner x \urcorner) = \ulcorner f(x) \urcorner$ für beliebige $T \xrightarrow{x} X$ gegeben ist. Sei nun f ein Epimorphismus. Da die Linkskürzbarkeitseigenschaft

$$f * \varphi_1 = f * \varphi_2 \Longrightarrow \varphi_1 = \varphi_2$$

auch nichts anderes als die Injektivität der Linksmultiplikation mit f ist, können wir auch die Epimorphismuseigenschaft mit Hilfe der Exponentiation charakterisieren.

Lemma: Für gegebenes $X \xrightarrow{f} Y$ und gegebenes V ist der Morphismus

$$V^Y \xrightarrow{Vf} V^X$$

genau dann injektiv (auf Elementen), wenn die Implikation

$$f * \varphi_1 = f * \varphi_2 \Longrightarrow \varphi_1 = \varphi_2$$

gilt, also wenn f ein Epimorphismus ist.

Beweis: Dies folgt direkt aus der Tatsache, dass $V^f(\ulcorner\varphi\urcorner)$ gegeben ist durch $\ulcorner f * \varphi\urcorner$. ■

Bemerkung 6.1 Die Definitionen von Mono- bzw. Epimorphismen sind zueinander formal dual in dem Sinne, dass die Diagramme in der einen Definition den Diagrammen in der anderen Definitionen entsprechen, wenn man nur die Pfeilrichtungen umkehrt. Wenn man an die Kategorie der Mengen denkt, ist natürlich klar, dass formal duale Konstruktionen nicht immer wieder als Mengen bzw. Morphismen interpretiert werden können, z.B. ist der duale Morphismus zu einer leeren Abbildung $\emptyset \longrightarrow A$ mit $A \neq \emptyset$ keine Abbildung mehr. Andererseits existiert für beliebiges V und für ein beliebiges Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left] & Y \arrow[l, dashed, shift left] \end{tikzcd}$$

ein zugehöriges Diagramm

$$\begin{tikzcd} V^X \arrow[r, dashed, shift right] & V^Y \arrow[l, shift right] \end{tikzcd}$$

und dieses besitzt alle Kommutativitätseigenschaften (Aussagen über Gleichheit von Kompositionen), die bereits das ursprüngliche Diagramm besaß, bloß dass die Reihenfolge der Komposition umgedreht wurde. Dieser Prozess wird als konkrete Dualität bezüglich V bezeichnet. Die formale Dualität und die konkrete Dualität bezüglich einem gegebenem V sind nicht immer identisch. Für die Kategorie der Mengen ist $V = 2$ ein interresantes Objekt für die Betrachtung von konkreter Dualität.

Satz 6.2 $X \xrightarrow{f} Y$ ist Epimorphismus genau dann, wenn $2^Y \xrightarrow{2^f} 2^X$ ein Monomorphismus ist.

Beweis: Sei f eine Epimorphismus und φ_1, φ_2 gegeben mit:

$$\ulcorner\varphi_1\urcorner * 2^f = \ulcorner\varphi_2\urcorner * 2^f.$$

Das heißt aber gerade

$$\ulcorner f * \varphi_1 \urcorner = \ulcorner f * \varphi_2 \urcorner \text{ bzw. } f * \varphi_1 = f * \varphi_2$$

und mit der vorausgesetzten Linkskürzbarkeit von f folgt $\varphi_1 = \varphi_2$ bzw. $\ulcorner \varphi_1 \urcorner = \ulcorner \varphi_2 \urcorner$.

Sei nun 2^f ein Monomorphismus, d.h. f ist auf 2 linkskürzbar:

$$\forall Y \xrightarrow{\varphi_1} 2, Y \xrightarrow{\varphi_2} 2 : \quad f * \varphi_1 = f * \varphi_2 \Longrightarrow \varphi_1 = \varphi_2$$

Wenn wir nun für φ_1 die charakteristische Funktion des Bildes von f und für φ_2 die konstant wahre Funktion wählen ergibt sich $f * \varphi_1 = f * \varphi_2$ und deshalb $\varphi_1 = \varphi_2$, d.h. das Bild von f ist gleich Y und f ist surjektiv, also ein Epimorphismus. ■

Satz 6.3 $X \xrightarrow{f} Y$ ist Monomorphismus geanau dann, wenn $2^Y \xrightarrow{2^f} 2^X$ ein Epimorphismus ist.

Beweis: Seien $T \xrightarrow{x_1} X$ und $T \xrightarrow{x_2} X$ gegeben mit $x_1 * f = x_2 * f$. Dann gilt mit Hilfe der konkreten Dualität

$$2^f * 2^{x_1} = 2^f * 2^{x_2}.$$

Wenn 2^f ein Epimorphismus ist folgt $x_1 = x_2$ und somit folgt insgesamr, dass f selbst ein Monomorphismus ist. Sei nun f ein Monomorphismus. Wir müssen zeigen, dass

$$2^Y \xrightarrow{2^f} 2^X$$

ein Epimorphismus ist, dazu reicht es, zu zeigen, dass 2^f surjektiv ist: Sei deshalb $\ulcorner \varphi \urcorner$ ein Element von 2^X. Es ist zu zeigen, dass ein $\ulcorner \psi \urcorner$ existiert mit: $2^f * \ulcorner \psi \urcorner = \ulcorner \varphi \urcorner$, d.h. es muss gelten:

$$f * \psi = \varphi.$$

Nun ist aber φ nach Konstruktion die charakteristische Funktion eines Teiles i von X und f ist nach Voraussetzung ein Teil von Y, dehalb können wir für ψ die charakteristische Funktion der Komposition dieser Teile wählen und es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = 1 &\iff x \in i \\ \psi(y) = 1 &\iff y \in i * f \end{aligned}$$

Es gilt nun weiter:

$$\begin{aligned} (f * \psi)(x) = 1 &\iff \psi(f(x)) = 1 \\ &\iff f(x) \in i * f \\ &\iff x \in i \\ &\iff \varphi(x) = 1. \end{aligned}$$

Das zeigt aber genau $f * \psi = \varphi$, was zu zeigen war. ■

6.2 Cantor's Diagonalargument

Georg Cantor bewies vor mehr als hundert Jahren ein Theorem, welches unter anderem beinhaltete, dass alle Mengen weniger mächtig als ihre Potenzmengen sind:

$$X < 2^X \qquad \text{für alle Mengen } X.$$

Dies war neu für unendliche Mengen und steht im Kontrast zu anderen Konstruktionen mit unendlichen Mengen, wie z.B. dem Produkt. Es gilt z.B.:

$$2 \times X \cong X, \qquad X \times X \cong X, \qquad X^n \cong X.$$

In der Tat führt die Potenzmengenkonstruktion zu einer unendlichen Folge aufsteigender Kardinalität:

$$X < 2^X < 2^{2^X} < 2^{2^{2^X}} < ...$$

Eine sehr grundlegende Konsequenz aus Cantor's Theorem ist die Feststellung, dass es keine universelle Menge U geben kann, so dass jede beliebige Menge X ein Teil $X \hookrightarrow U$ von U ist. Denn gäbe es so ein U, dann könnten wir $X = 2^U$ wählen und würden mit Satz 6.3 schließen, dass die zugehörige Abbildung

$$2^U \longrightarrow 2^X = 2^{2^U}$$

surjektiv ist, was im Widerspruch zu Cantor's Theorem ist, denn die Existenz einer surjektiven Abbildung von einer Menge X in ihre Potenzmenge 2^X heißt nichts anderes, als das X mindestens so mächtig ist, wie 2^X. Cantor's Methode des Beweises seines Theorems wird oft als „Diagonalargument“ bezeichnet, weil die Diagonalabbildung

$$\sigma_X : X \longrightarrow X \times X : x \mapsto (x, x)$$

eine wichtige Rolle spielt.

Definition 6.4

Eine Selbstabbildung $Y \xrightarrow{\tau} Y$ besitzt einen **Fixpunkt** $1 \xrightarrow{y} Y$, **falls gilt:**

$$y * \tau = y$$

Die Abbildung τ heißt Fixpunktfrei, falls es keine Fixpunkte gibt,

d.h. es gilt:

$$\forall 1 \xrightarrow{y} Y : [y * \tau \neq y].$$

Ein Objekt Y hat die Fixpunkteigenschaft, falls jede Selbstabbildung $Y \xrightarrow{\tau} Y$ mindestens einen Fixpunkt hat.

Satz 6.5 Sei ein Morphismus

$$X \times X \xrightarrow{\varphi} Y$$

gegeben, so dass für alle $X \xrightarrow{f} Y$ ein $1 \xrightarrow{a} X$ existiert mit

$$f = \varphi(a, .).$$

Dann hat Y die Fixpunkteigenschaft.

Beweis: Sei $Y \xrightarrow{\tau} Y$ beliebig. Definiere f als

$$f = \sigma_X * \varphi * \tau,$$

dass heißt

$$f(x) = \tau(\varphi((x, x))).$$

Nach Voraussetzung ist f mit Hilfe eines geeigneten a darstellbar als

$$f(x) = \tau(\varphi((x, x))) = \varphi(a, x).$$

speziell für $x = a$ gilt also:

$$\tau(\varphi((x, x))) = \varphi(x, x)$$

und mit $\varphi(\sigma_X(a))$ haben wir einen Fixpunkt gefunden. ■

Korollar 6.6 (Cantor) Wenn Y mindestens eine Fixpunktfreie Selbstabbildung τ hat, dann ist für beliebige

$$X \xrightarrow{\Phi} Y^X$$

der Morphismus Φ nicht surjektiv.

Beweis: Falls Φ surjektiv ist, würde für alle $1 \xrightarrow{\ulcorner f \urcorner} Y^X$ ein $1 \xrightarrow{a} X$ existieren mit:

$$a * \Phi = \ulcorner f \urcorner.$$

Wenn wir das zugehörige φ mit $\ulcorner \varphi \urcorner = \Phi$ betrachten heißt dies, dass für alle $X \xrightarrow{f} Y$ ein $1 \xrightarrow{a} X$ existiert mit $\varphi(a, .) = f$. Dies heißt aber genau, dass die Voraussetzung von Satz 6.5 erfüllt sind und es folgt der Widerspruch zur Annahme, dass τ fixpunktfrei ist. ■

Korollar 6.7 Es gibt keine surjektive Abbildung

$$X \longrightarrow 2^X$$

und auch keine surjektive Abbildung

$$X \longrightarrow \mathbb{R}^X$$

Beweis: Die logische Negation $2 \xrightarrow{\tau} 2 : \begin{cases} 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 0 \end{cases}$ ist eine Selbstabbildung und offensichtlich fixpunktfrei. Weiterhin ist die Selbstabbildung $\mathbb{R} \xrightarrow{\mu} \mathbb{R} : x \mapsto 1 + x$ ebenfalls fixpunktfrei. ■

7 Die Axiome

7.1 Zusammenfassung

An dieser Stelle seien noch einmal alle Axiome zusammengefasst, die für **Set** bisher gefordert werden (in Kapitel (9) kommt noch ein letztes hinzu, das die Existenz unendlicher Mengen sicherstellt), und teilweise konkretisiert.

Axiom 7.1 (Kategorie)

Set ist eine Kategorie

Axiom 7.2 ((Co-)Vollständigkeit)

Set ist vollständig und covollständig (vgl. (3.5))

Axiom 7.3 (Exponentiation)

Für zwei Objekte B, Y in **Set** existiert ein Objekt Y^B und ein so genannter Auswertungsmorphismus $Y^B \times B \xrightarrow{eval} Y$ mit folgender universellen Eigenschaft: Für jedes Objekt X und jeden Morphismus $X \times B \xrightarrow{f} Y$ existiert genau ein Morphismus $X \xrightarrow{\ulcorner f \urcorner} Y^B$ mit $(\ulcorner f \urcorner \times 1_B)\text{eval} = f$. Außerdem gilt: $\ulcorner \text{eval} \urcorner = 1_{Y^B}$ (vgl. (5.2))

Axiom 7.4 (Charakteristische Funktion)

Es gibt eine Objekt Ω zusammen mit einem ausgezeichneten Element $1 \xrightarrow{t} \Omega$, so dass zwischen den Teilen einer Menge und den Morphismen $X \longrightarrow \Omega$ vermöge eines Pullbacks entlang t eine eineindeutige Beziehung besteht. (vgl. (3.15))

Axiom 7.5 (Set ist boolesch)

Ω ist eine Summe $\begin{cases} \text{true} \\ \text{false} \end{cases} : 1 + 1 \rightsquigarrow \Omega$ (vgl. (3.13)).

Axiom 7.6 (Set ist zweiwertig)

Ω hat genau zwei verschiedene Elemente $1 \longrightarrow \Omega$. (vgl. (3.13))

Axiom 7.7 (Auswahlaxiom)

Jede surjektive Abbildung in **Set** hat ein Linksinverses.

Definition 7.8 (Topos)

Eine Kategorie, die die ersten vier der obigen Axiome erfüllt, heißt *Topos*.

Bemerkung 7.9 Es gibt Topoi, die zwar boolesch sind, aber nicht zweiwertig. Wenn eine Menge X in **Set** mehr als ein Element hat, ist z.B. die Kategorie **Set**$/X$, die wir folgt definiert ist, ein solches Beispiel.

Definition 7.10 (Schnittkategorie)

Set$/X$ ist die Kategorie, deren Objekte die Morphismen in **Set** mit Codomäne X sind. Ein Morphismus in **Set**$/X$ von $A \xrightarrow{f} X$ nach $B \xrightarrow{g} X$ ist ein Morphismus $A \xrightarrow{h} B$ in **Set** mit der Eigenschaft, dass $f = hg$. (Komposition und Identität werden aus **Set** übernommen).

Abschnitt (7.3) stellt einen nichtbooleschen Topos vor.

7.2 Einige Folgerungen

Durch unsere Definition der leeren Menge als Initialobjekt ist es keineswegs offensichtlich, dass jede “nichtleere” Menge auch ein Element besitzt. Wir werden insbesondere im nächsten Abschnitt sehen, dass dies nicht in jedem Topos der Fall ist.

Satz 7.11 In **Set** gilt $X \neq 0$ genau dann, wenn es ein Element $1 \rightarrow X$ gibt.

Beweis: Angenommen es gäbe $1 \xrightarrow{f} 0$, dann wären 1 und 0 isomorph, da die Abbildungen $1 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{1_0} 1$ und $0 \xrightarrow{1_0} 1 \xrightarrow{f} 0$ eindeutig bestimmt und somit die jeweilige Idendität sind. Damit wären aber die beiden Teile 1 und 0 von 1 identisch und somit wäre Ω nicht zweielementig. Damit ist die Rückrichtung gezeigt.

Da 1 Terminalobjekt ist, gibt es eine Abbildung $1 \to X$, die wir in injektiven und surjektiven Teil faktorisieren können, also

$$X \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} I \hookrightarrow 1$$

Da **Set** ein boolescher Topos und zweiwertig ist gibt es genau zwei Abbildungen $1 \to 1 + 1 \cong \Omega$ und damit auch genau zwei Untermengen I von 1 nämlich 0 oder 1.
Wir zeigen jetzt folgendes Lemma

Lemma 7.12 $Y \xrightarrow{f} 0 \Rightarrow Y \cong 0$

Beweis: Y kann kein Element $1 \xrightarrow{i} Y$ enthalten, sonst wäre if ein Element von 0. Da 1 separiert und $Y \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{0_Y} Y$ sowie id_Y auf allen Elementen von Y übereinstimmen (Es gibt ja keine solchen Elemente!), ist $f0_Y = \mathrm{id}_Y$. Da 0 Initialobjekt ist, ist $0_Y f$ eindeutig definiert und somit gleich id_0, 0 und Y sind also isomorph. ■

Wäre nun $I \cong 0$, also $X \longrightarrow 0$, dann hätten wir $X \cong 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $I \cong 1$, $X \twoheadrightarrow 1$ und das Auswahlaxiom liefert das gesuchte Element. ■

Lemma: Im folgenden Diagramm seien die beiden Quadrate Pullbacks

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "i_0"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"'] & X_1 \arrow[l, "i_1"'] \arrow[d] \\
Y_0 \arrow[r, "j_0"] & Y_0 + Y_1 & Y_1 \arrow[l, "j_1"']
\end{tikzcd}$$

Dann ist $X \cong X_0 + X_1$ wobei j_0 und j_1 die entsprechenden Einbettungen sind.

Satz 7.13 Jeder Teil $X \overset{i}{\hookrightarrow} Y$ hat ein Komplement $X' \overset{i'}{\hookrightarrow} Y$ so dass $Y \cong X + X'$ mit Einbettung i und i'.

Beweis: Wir nutzen das vorangegangene Lemma mit

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "\chi_i"'] & X' \arrow[l, "i'"'] \arrow[d] \\
1 \arrow[r, "\mathrm{true}"'] & \Omega & Y_1 \arrow[l, "\mathrm{false}"]
\end{tikzcd} \tag{7.1}$$

wobei χ_i die charakteristische Funktion von i ist.

Es genügt nun zu zeigen, dass das linke Quadrat tatsächlich ein Pullback ist. Sei $T \xrightarrow{t} Y$ eine Abbildung mit $t\chi_i = 1_T\text{true}$, dann ist nach Definition der charakteristischen Abbildung $t \in i$, und somit gibt es eine Abbildung $T \xrightarrow{j} Y$, so dass

$$\begin{tikzcd} T \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, "j"] & \\ X \arrow[r, "i"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "\chi_i"] \\ 1 \arrow[r, "\text{true}"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

kommutiert. Es genügt zu zeigen, dass diese Abbildung eindeutig bestimmt ist. Angenommen es gäbe eine weitere solche Abbildung j'. Dann wäre $jt = j't$ und da t als Mono rechtkürzbar ist $j = j'$. ■

7.3 Zweistufige Mengen

Eine einfache Kategorie von variablen Mengen ist $\mathbf{S^2}$, die Kategorie der Mengen mit zwei Stufen.

Definition 7.14 (Zweistufige Mengen)

Die Objekte $\mathbf{X}$ dieser Kategorie sind Paare von Mengen $\mathbf{X}_{\mathfrak{E}}, \mathbf{X}_{\mathfrak{A}}$ aus $\mathbf{Set}$ zusammen mit einem Morphismus $\mathbf{X}_{\mathfrak{E}} \xrightarrow{\xi_{\mathbf{X}}} \mathbf{X}_{\mathfrak{A}}$. Dabei sind anschaulich $\mathbf{X}_{\mathfrak{E}}$ die Endzustände in $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}_{\mathfrak{A}}$ die Anfangszustände in $\mathbf{X}$ und $\xi_{\mathbf{X}}$ gibt an, welchem Zustand ein Element im Endzustand vorher hatte.
Morphismen f zwischen $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ in $\mathbf{S^2}$ sind Paare von Morphismen $(f_{\mathfrak{E}}, f_{\mathfrak{A}})$ $\mathbf{X}_{\mathfrak{E}} \xrightarrow{f_{\mathfrak{E}}} \mathbf{X}_{\mathfrak{A}}, \mathbf{Y}_{\mathfrak{E}} \xrightarrow{f_{\mathfrak{A}}} \mathbf{Y}_{\mathfrak{A}}$, die diese innere Dynamik respektieren, dass heißt, das folgende Diagramm kommutiert

$$\mathbf{X} \xrightarrow{f} \mathbf{Y}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X}_{\mathfrak{E}} \arrow[r, "f_{\mathfrak{E}}"] \arrow[d, "\xi_{\mathbf{X}}"'] & \mathbf{Y}_{\mathfrak{E}} \arrow[d, "\xi_{\mathbf{Y}}"] \\ \mathbf{X}_{\mathfrak{A}} \arrow[r, "f_{\mathfrak{A}}"'] & \mathbf{Y}_{\mathfrak{A}} \end{tikzcd}$$

Die Kommutativität des folgenden Diagramms zeigt, dass $(fg)_{\mathfrak{E}} = f_{\mathfrak{E}} g_{\mathfrak{E}}$ und $(fg)_{\mathfrak{A}} = f_{\mathfrak{A}} g_{\mathfrak{A}}$ eine wohldefinierte Kompositionsoperation in $\mathbf{S}^2$ ist.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X}_{\mathfrak{E}} \arrow[r, "f_{\mathfrak{E}}"] \arrow[d, "\xi_{\mathbf{X}}"'] & \mathbf{Y}_{\mathfrak{E}} \arrow[r, "g_{\mathfrak{E}}"] \arrow[d, "\xi_{\mathbf{Y}}"'] & \mathbf{Z}_{\mathfrak{E}} \arrow[d, "\xi_{\mathbf{Z}}"] \\
\mathbf{X}_{\mathfrak{A}} \arrow[r, "f_{\mathfrak{A}}"'] & \mathbf{Y}_{\mathfrak{A}} \arrow[r, "g_{\mathfrak{A}}"'] & \mathbf{Z}_{\mathfrak{A}}
\end{tikzcd}$$

Lemma: Das Terminalobjekt in $\mathbf{S}^2$ ist

$$\mathbf{1} = \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\mathrm{id}_1"] \\ 1 \end{tikzcd}$$

Beweis: Da 1 Terminalobjekt in **Set**, ist gibt es für jedes **X** ein eindeutiges kommutatitves Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X}_{\mathfrak{E}} \arrow[r] \arrow[d, "\xi_{\mathbf{X}}"'] & 1 \arrow[d] \\
\mathbf{X}_{\mathfrak{A}} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

■

Wir betrachten nun die Elemente $\mathbf{1} \xrightarrow{x} \mathbf{X}$. Für diese muss gelten

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "x_{\mathfrak{E}}"] \arrow[d] & \mathbf{X}_{\mathfrak{E}} \arrow[d, "\xi_{\mathbf{X}}"'] \\
1 \arrow[r, "x_{\mathfrak{A}}"'] & \mathbf{X}_{\mathfrak{A}}
\end{tikzcd}$$

Damit ist aber x vollständig durch $x_{\mathfrak{E}}$ bestimmt und jedes Element $x_{\mathfrak{E}}$ von $\mathbf{X}_{\mathfrak{E}}$ in **Set** bestimmt eindeutig ein Element $\mathbf{1} \xrightarrow{x} X$ in $\mathbf{S}^2$. Damit können Morphismen mit Domäne **1** in **Set** charakterisiert werden als Elemente, die in beiden Stufen vorhanden sind. Was sind dann aber die Elemente, die nur in der ersten Stufe vorhanden sind?
Dazu betrachten wir

$$\mathbf{A} = \begin{tikzcd} 0 \arrow[d, "\mathrm{id}_1"] \\ 1 \end{tikzcd}$$

Da es keinen Morphismus $1 \longrightarrow 0$ in **Set** gibt, ist $\mathbf{U}$ nicht isomorph zu $\mathbf{0}$. Somit hat $\mathbf{S^2}$ nicht leere Objekte, die keine Elemente im engeren Sinne enthalten. Für "Elemente" $\mathbf{A} \longrightarrow X$ gilt nun

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "x_{\mathfrak{E}}"] \arrow[d] & \mathbf{X}_{\mathfrak{E}} \arrow[d, "\xi_{\mathbf{X}}"'] \\
1 \arrow[r, "x_{\mathfrak{E}}"'] & \mathbf{X}_{\mathfrak{A}}
\end{tikzcd}$$

Da dieses Diagramm unabhängig von $x_{\mathfrak{A}}$ kommutiert, repräsentieren Abbildungen $\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{X}$ gerade Elemente von $\mathbf{X}$, die in der Ausgangsstufe existieren.

Lemma: Eine Abbildung $\mathbf{C} \xrightarrow{i} \mathbf{X}$ in $\mathbf{S^2}$ ist genau dann ein Teil von $\mathbf{X}$, also ein Monomorphismus , wenn

- $\mathbf{C}_{\mathfrak{E}}$ ist Teil von $X_{\mathfrak{E}}$ in **Set**

- $\mathbf{C}_{\mathfrak{A}}$ ist Teil von $X_{\mathfrak{A}}$ in **Set**

Beweis: Sei $\mathbf{C} \xrightarrow{i} \mathbf{X}$ mono. Sei $T \overset{s_1}{\underset{s_2}{\rightrightarrows}} \mathbf{C}_{\mathfrak{E}}$. Dann sind $f^1 = (s_1, s_1\xi_{\mathbf{C}})$ und $f^2 = (s_2, s_2\xi_{\mathbf{C}})$ Abbildungen von $(T) = (T, T, \mathrm{id}_T)$ nach C und $f^1 i = (s_1 i_{\mathfrak{E}}, s_1\xi_{\mathbf{C}} i_{\mathfrak{A}}) = (s_2 i_{\mathfrak{E}}, s_2\xi_{\mathbf{C}} i_{\mathfrak{A}}) = f^1 i$, und da i mono ist, folgt $f^2 = f^1$. Insbesondere gilt also $s_1 = s_2$, womit $i_{\mathfrak{E}}$ mono ist und
$BFC_{\mathfrak{E}}$ Teil von $\mathbf{X}_{\mathfrak{E}}$. Analog zeigt folgendes Diagramm, dass $\mathbf{C}_{\mathfrak{A}}$ Teil von $\mathbf{X}_{\mathfrak{A}}$ ist.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & C_{\mathfrak{E}} \arrow[r] \arrow[d] & X_{\mathfrak{E}} \arrow[d] \\
T \arrow[r, shift left, "s_1"] \arrow[r, shift right, "s_2"'] & C_{\mathfrak{A}} \arrow[r] & X_{\mathfrak{A}}
\end{tikzcd}$$

Erfüllt auf der anderen Seite $\mathbf{C} \xrightarrow{i} \mathbf{X}$ die zwei angegebenen Bedingungen, so ist i tatsächlich ein mono, denn für $T \overset{s^1}{\underset{s^2}{\rightrightarrows}} \mathbf{C}$ mit $s^1 i = s^2 i$ gilt $s^1_{\mathfrak{E}} i_{\mathfrak{E}} = s^2_{\mathfrak{E}} i_{\mathfrak{E}}$ und $s^1_{\mathfrak{A}} i_{\mathfrak{A}} = s^2_{\mathfrak{A}} i_{\mathfrak{A}}$, also $s^1 = (s^1_{\mathfrak{E}}, s^1_{\mathfrak{A}}) = (s^2_{\mathfrak{E}}, s^2_{\mathfrak{A}}) = s^2$. $\blacksquare$

Satz 7.15 $\mathbf{S^2}$ hat alle endlichen Limites und Colimites.

Beweis: Gegeben sei $I \underset{c}{\overset{d}{\rightrightarrows}} J$ mit I und J endlich, sowie Objekte $\mathbf{X}^i$ in $\mathbf{S}^2$ für jedes $1 \xrightarrow{i} I$ und Abbildungen $\mathbf{X}^{d(j)} \xrightarrow{f^j=(f^j_{\mathfrak{E}}, f^j_{\mathfrak{A}})} \mathbf{X}^{c(j)}$ für jedes $1 \xrightarrow{j} J$ (vgl. (2.13)).

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{T}_{\mathfrak{E}} \arrow[dr, bend left, "t_{\mathfrak{E}}^{d(j)}"'] \arrow[drr, bend left, "t_{\mathfrak{E}}^{c(j)}"] \arrow[ddd, "\xi_{\mathbf{T}}"] & & & \\
& \mathbf{L}_{\mathfrak{E}} \arrow[r] \arrow[d, "\xi_{\mathbf{L}}"'] \arrow[rr, bend left] & \mathbf{X}_{\mathfrak{E}}^{d(j)} \arrow[r, "f_{\mathfrak{E}}^{j}"'] \arrow[d, "\xi_{\mathbf{X}^{d(j)}}"] & \mathbf{X}_{\mathfrak{E}}^{c(j)} \arrow[d, "\xi_{\mathbf{A}^{c(j)}}"] \\
& \mathbf{L}_{\mathfrak{A}} \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \mathbf{X}_{\mathfrak{E}}^{d(j)} \arrow[r, "f_{\mathfrak{E}}^{j}"] & \mathbf{X}_{\mathfrak{E}}^{c(j)} \\
\mathbf{T}_{\mathfrak{A}} \arrow[ur, bend left, "t_{\mathfrak{A}}^{d(j)}"] \arrow[urr, bend right, "t_{\mathfrak{A}}^{c(j)}"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

Da in **Set** alle endlichen Limites existeren, erhalten wir $\mathbf{L}_{\mathfrak{E}}$ und $\mathbf{L}_{\mathfrak{A}}$ als Limit der $f^j_{\mathfrak{E}}$ und $f^j_{\mathfrak{A}}$ und die universelle Eigenschaft von $\mathbf{L}_{\mathfrak{A}}$ als Limit liefert uns die Existenz von $\xi_{\mathbf{L}}$. Die Limiteigenschaften von $\mathbf{L}$ lassen sich leicht an obigem Diagramm überprüfen. Die Existenz von Colimites folgt dual. ■

Satz 7.16 $\mathbf{S}^2$ ist nicht boolesch

Beweis: Damit ist klar, dass $(\mathbf{1}+\mathbf{1})_{\mathfrak{E}} = (1+1)$ ist. Damit gibt es aber nur nur zwei "Elemente" $\mathbf{1} \longrightarrow (\mathbf{1}+\mathbf{1})$. $\mathbf{1}$ hat aber mindestens drei Teile, nämlich $\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{1}$, $\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{1}$ und $\mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{1}$. Damit kann aber $(\mathbf{1}+\mathbf{1})$ nicht die Codomäne der charakteristischen Funktionen in $\mathbf{S}^2$ sein. ■

8 Potenzmengen

8.1 Bilder

Wir haben uns 2^X näher angesehen, es sollte deutlich geworden sein, dass es sowohl als

- Sonderfall der kompositionsinduzierten kontravarianten funktionsweise von V- wertigen Funtionenräumen

als auch

- Die Bildung des Urbildes auf Teilen, im Sinne einer Operation ist.

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}B \arrow[r, two heads] \arrow[d] & B \arrow[d, tail two heads] \\
X \arrow[r, two heads, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Der kovariante Funktor 2^{2^X} kann als bestehend aus allen Klassen von Teilen von X interpretiert werden, da die Abbildung $2^X \xrightarrow{\alpha} 2$ die charakteristische Funktion eines definiten Teils (oder einer Klasse) der Menge 2^X von Teilen von X ist.

Nun wollen wir einen wichtigen Weg aufzeigen, wie das kleinere 2^X zum covarianter Funktor von X wird.

Zuerst zeigen wir eine günstigere Art der Notation für Teile auf. Ein Teil von X besteht aus 2 Komponenten:

- die zugrundeliegende Menge $|A|$, welcher die Domain des anderen Teils ist, und

- i_A, was die fest gegebene Inklusion von A in X ist.

Um nun sagen zu können, dass A und B äquivalente Teile von X sind, muss folgende Situation vorliegen

$$\begin{tikzcd} {|A|} \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "i_A"'] & & {|B|} \arrow[dl, "i_B"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

wobei h invertierbar sein muss und der Gleichung

$$i_B h = i_A$$

genügen muss.

A und B sind nur isomorphe Teile von X, wenn beide dieselben Elemente von X beinhalten. Da wir das wissen, können wir mit „abuse of notation"die $||$ weglassen und stattdessen einfach das gleiche Symbol A benutzen. Somit steht das Symbol A nun für Beides, für die Teilmenge oder eben für die Domain der Teilmenge. Es wird immer aus dem Zusammenhang erkennbar sein, ob es sich um Morphismen der Teile oder um Abbildungen der zugrundeliegenden Menge handelt.

Für jedes $X \xrightarrow{f} Y$ werden wir eine induzierte Abbildung konstruieren:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}X \arrow[r, "\mathcal{P}f"] \arrow[d, equal, "def"'] & \mathcal{P}Y \arrow[d, equal, "def"] \\ 2^X & 2^Y \end{tikzcd}$$

Diese Operation ist so häufig vertreten, dass es dafür mindestens noch 4 andere Notationen gibt, wobei jede von ihnen bestimmte Eigenschaften hervorheben möchte durch die jeweilige Darstellung.

$$\mathcal{P}f = f_! = f[] = \exists_f = im_f$$

Zum Beispiel verdeutlicht das im_f , dass es mit der geometrischen Operation des Direkten Bildes eines Teils von X einhergeht.

8.2 Der kovariante Potenzmengenfunktor

Definition 8.1 (Potenzmengenfunktor)

Der kovariante Potenzmengenfunktor $\mathcal{P}$ ist nach Definition

$$\mathcal{P}X = 2^X$$

$$\mathcal{P}f = im_f$$

Satz 8.2 Sei f ein Monomorphismus. Dann ist 2^f ein Split-Epimorphismus und tatsächlich ist $\mathcal{P}f$ ein Schnitt von 2^f.

Sowohl der kontravariante Potenzmengenfunktor $2^{()}$ als auch der kovariante Potenzmengenfunktor $\mathcal{P}$ treten in der Geometrie und der Analysis vielfach auf, zum Beispiel in Verbindung mit der Bedingung, dass eine Abbildung stetig ist oder dass sie lokal beschränt ist. Es wird oft betrachtet, dass ein stetiger Raum (topologischer Raum) X aus einer abstrakten zugrundeliegenden Menge $|X|$ von Punkten besteht, die zusammen mit einer Menge $\mathcal{F}_X$ von „abgeschlossenen Teilmengen“und einer strukturellen Abbildung $|X| \times \mathcal{F}_X \xrightarrow{\in_X} 2$, die anzeigt, ob ein gegebener Punkt zu einer abgeschlossenen Teilmenge gehört, einhergeht. Die Umstellung von $\in_X$, $\mathcal{F}_X \longrightarrow 2^{|X|} = \mathcal{P}|X|$, interpretiert jede abgeschlossene Teilmenge von X als einen Teil der Menge $|X|$.
Auf der anderen Seite haben wir einen lokal beschränkten Raum X, der eine zugrundeliegende Menge $|X|$ von Punkten, eine Menge $\mathcal{B}_X$ von „beschränkten Teilmengen“und eine entsprechende Zugehörigkeitsabbildung $|X| \times \mathcal{B}_X \xrightarrow{\in_X} 2$ beinhaltet. Dies ist offenbar, bis auf die Worte, genau dasselbe wie $\mathcal{B}_X \longrightarrow 2^X$. Der entscheidende Unterschied zwischen abgeschlossen und beschränkt kann dabei in den Konzepten der stetigen gegenüber der bornologischen Abbildungen gesehen werden.

Seien X, Y stetige Räume, dann ist $X \xrightarrow{f} Y$ eine stetige Abbildung, wenn es eine Abbildung $|X| \xrightarrow{|f|} |Y|$ von Punkten gibt und das Urbild von abgeschlossenen Teilmengen wieder abgeschlossen ist:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_Y \arrow[r, dashed, "\mathcal{F}_f"] \arrow[d] & \mathcal{F}_X \arrow[d] \\ 2^{|Y|} \arrow[r, "2^{|f|}"'] & 2^{|X|} \end{tikzcd}$$

Im Gegensatz dazu: Wenn X, Y lokal beschränkte Räume sind, dann ist $X \xrightarrow{f} Y$ eine bornologische Abbildung, wenn es eine Abbildung $|X| \xrightarrow{|f|} |Y|$ von Punkten gibt und das direkte Bild von beschränkten Teilmengen wieder beschränkt ist:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}_X \arrow[r, dashed, "\mathcal{B}_f"] \arrow[d] & \mathcal{B}_Y \arrow[d] \\ \mathcal{P}|X| \arrow[r, "\mathcal{P}|f|"'] & \mathcal{P}|Y| \end{tikzcd}$$

8.3 Die natürliche Abbildung $\mathcal{P}X \longrightarrow 2^{2^X}$

Der Funktor $\mathcal{P}$ und der (größere) doppelt-kontravariante 2^{2^X} sind kovariant, wir werden einen natürlichen direkten Vergleich

$$\mathcal{P}X \xrightarrow{\int_x} 2^{2^X}$$

zwischen den Beiden beschrieben, der ,wie sich heraustellen wird, injektiv ist. Ein gegebener Teil A von X,

$$\int_X () A$$

sei eine Abbildung

$$2^X \longrightarrow 2$$

genauer gesagt die, die an jeder Stelle $X \xrightarrow{\varphi} 2$ den Wahrheitswert (in $2 = \{(0,1\})$)

$$\int_{x \in X} \varphi(x) A(dx)$$

wie folgt bestimmt.
Wenn es ein x in A gibt, an dem das φ den Wert 1 annimmt, dann ist die Antwort 1, doch wo φ auf A begrenzt immer konstant 0 ist, dann ist das Ergebnis 0. Natürlich sind die φ's ein wirklicher Teil, also kann man die Beschreibung von $\int_x$auch äquivalent vornehmen durch:
Für jeden gegebenen Teil von A in $\mathcal{P}X$, betrachten wir jeden Teil φ in 2^X und fragen uns, ob φ A schneidet. Wenn dies der Fall ist, so ist das Ergebnis 1, ansonsten 0.

Hinweis: Alle diese allgemeinen Konstruktionen in diesem Abschnitt (z. B. auch die Abbildung von der kovarianten Potenzmenge zu den doppelt kontravarianten) sind in jeder Topologie anwendbar, wenn man 2 durch Ω ersetzt.

8.4 Maße, Durchschnitte und Berechnung von V-wertigen Größen

Einige natürliche Restriktionen können auf Elemente von V^{V^X} übertragen werden, um einen kovarianten Unterfunktor zu erhalten:

$$Hom_?(V^X, V) \hookrightarrow V^{V^X}$$

Lasst uns kurz 2 Bedingungen betrachten, deren Definition erfolgen könnte, nur durch das Wissen darum, dass V eine gegebene Menge ist. Wir wollen dabei wenigstens voraussetzen, dass die Auswertungsfunktion $V^X \xrightarrow{\hat{x}} V$ (gegeben durch $\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$ für alle φ (z.B. $\hat{x} = \delta(x)$) enthalten ist und für unsere beiden Bedingungen wahr ist.

Wir nehmen an, dass jeden Monat die selbe Menge X von Personen gefragt werden, welches Produkt einer Menge V , die nur aus 3 Marken besteht, sie bevorzugen. Daraus erhalten wir das Ergebnis $X \xrightarrow{\varphi} V$ für jeden Monat.
Wir wollen nun ein α konstruieren, das uns über $\alpha(\varphi)$ ein Element von V ausgibt, so dass wir sagen können, dass die Leute diesen Monat $v = \alpha(\varphi)$ bevorzugen. Eine offensichtliche Bedingung, die α erfüllen muss, ist dass es eine ausgleichendes Funktional zum Maß sein soll. Falls es also passiert, dass alle Leute in α dieselbe Marke ν wählen, dass dann v logischerweise auch das Ergebnis von $\alpha(\varphi)$ ist.

Definition 8.3 (schwacher Durchschnitt)

$V^X \xrightarrow{\alpha} V$ bildet den schwachen Durchschnitt, falls für jedes v und wenn $\varphi_v(x) \overset{def}{=} v$ ist für alle x, dann sei

$$\alpha(\varphi_v) = v$$

Dies ist offensichtlich eine sehr schwache Bedingung und könnte teilweise von Funktionalen erfüllt werden, die anach allgemeiner Meinung nicht als „den Durchschnitt berechnend“angesehen werden. (Wenn V eine zusätzliche Struktur hat, dann macht es Sinn α ebenfalls als linear vorauszusetzen, in diesem Fall gibt es Sätze, die aussagen, dass ein lineares durchschnittbildendes Funktional ein Erwartungswert ist, im Hinblick auf eine

Wahrscheinlichkeitsverteilung auf X.)

Satz 8.4 Für jedes x in X bildet $V^X \xrightarrow{\hat{x}} V$ den schwachen Durchschnitt. Dies istder Fall, wenn Hom_V das konstant-bewahrende Funktional bezeichnet:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dashed] \arrow[dr, hook] & \\ Hom_V(V^X, V) \arrow[rr, hook] & & V^{V^X} \end{tikzcd}$$

Folglich gibt es eine einfache Art ein schwach den Durchschnitt bildendes $V^X \longrightarrow V$ zu definieren. Man wählt sich ein einzelnes x aus X und wertet jede Abfrage α aus, indem man sich lediglich anschaut, wie x reagiert und wie es seine Antwort als Übersicht auf die Abfrage darstellt. Dies widerspricht unserer Auffassung eines Maßes, daher müssen wir eine andere Art von Bedingung formulieren, die wir auf durchschnittsbildende Funktionale anwenden können.

Definition 8.5 (Symmetrisch)

Der Pfeil $V^X \xrightarrow{\alpha} V$ heißt symmetrisch, wenn für jede invertierbare in sich selbst abbildende Abbildung (auch Automorphismus oder Permutation genannt) von X,

$$X \underset{\sigma}{\overset{\backsim}{\longrightarrow}} X$$

$$\alpha(\varphi\sigma) = \alpha(\varphi)$$

für alle $X \xrightarrow{\varphi} V$ ist.

Wir werden dagegen unser Augenmerk auf ein asymmetrisch den Durchschnitt bildendes Funktional legen. Die zugrundeliegende Idee ist, dass wir X wieder aus $\Phi = V^X$ zurückholen wollen, indem wir ausreichend starke Bedingungen an die Abbildungen $\Phi \longrightarrow V$ stellen um die Werte $\hat{x}$ von δ im Falle von $\Phi = V^X$ zu charakterisieren. Solche Betrachtungen sind grundlegend für fast alle Situationen in Algebraischer Geometrie,Funktionalanalysis und anderen Disziplinen, wo man gewisse Punkte im Raum oder auch Bewegungen von X versucht zu lokalisieren oder zurückzuholen. Dies wird versucht mit Hilfe von verschiedene in V^X beobachteten Mengen die mit relativ konstanten Mengen in V verglichen werden.

Definition 8.6 (V-verallgemeinerte Punkte)

Ein V-verallgemeinerter Punkt von X ist ein Funktional $V^X \xrightarrow{\alpha} V$, so dass für jedes $V \xrightarrow{\lambda} V$,

$$\alpha(\lambda\varphi) = \lambda(\alpha(\varphi))$$

und für alle $X \xrightarrow{\varphi} V$, wo $\lambda\varphi$ die Komposition bezeichnet und $\lambda(v)$ die normale Auswertung ist. Dieses

$$\begin{tikzcd}
V^V \times V^X \arrow[r, "1_{V^V} \times \alpha"] \arrow[d, "\circ"'] & V^V \times V \arrow[d, "eval"] \\
V^X \arrow[r, "\alpha"'] & V
\end{tikzcd}$$

sollte kommutieren.

Diese Bedingung ist recht stark. Zum Beispiel, wenn V die reelen Zahlen kennzeichnet und α ein Erwartungswert ist, und wir als ein Beispiel für λ die Operation mit einer Konstanten zu multiplizieren nehmen, dann folgt aus der Linearität

$$\alpha(\lambda\varphi) = \lambda(\alpha(\varphi)).$$

Wenn man aber dagegen λ als Potenzieren ansieht: in dem Fall ist es

$$\alpha(\varphi^2) = \alpha(\varphi)^2$$

wegen unseren geforderten Bedingungen (der zugrundeliegenden Verteilung) ist α so verdichtet, dass die Standartabweichung (in Relation zu α) von allen Zufallsvariablen φ Null ist!

Satz 8.7 Jeder Punkt ist ein verallgemeinerter Punkt.

Beweis: Wenn $\alpha = \hat{x}$, dann ist für alle $X \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\lambda} V$

$$\alpha(\lambda\varphi) = (\lambda\varphi)x = \lambda(\varphi x) = \lambda(\alpha(\varphi))$$

Satz 8.8 Ein Funktional $2^X \xrightarrow{\alpha} 2$ kommutiert mit allen λ in 2^2 genau dann wenn

$$\alpha(\ulcorner X \urcorner) = 1, \alpha(0) = 0$$

$$\alpha(\varphi) = 1 \iff \alpha(\neg\varphi) = 0$$

(wobei $\neg : 2 \longrightarrow 2$ ist definiert durch $\neg 0 = 1, \neg 1 = 0$).

Bemerkung 8.9 Die Zurückholung von X aus dem Maß, zum Beispiel

$$X \xrightarrow{\sim} Hom_{V^V}(V^X, V)$$

ist auch gültig, wenn X jeder andere stetige metrische Raum ist, z.B. $V = \mathbb{R}$ (also der Raum der reelen Zahlen), und alle Abbildungen stetig sind.

9 Das Axiom der Unendlichkeit

9.1 Subdynamische Systeme

Definition 9.1 (Die Kategorie $\mathbf{S}^{\circlearrowleft}$ Subdynamische Systeme)

Ein Objekt der Kategorie $\mathbf{S}^{\circlearrowleft}$ ist eine Menge M aus **Set** zusammen mit einem Endomorphismus $\varphi_M : M \longrightarrow M$, der die Dynamik des Systems beschreibt. Ihre Morphismen sind Morphismen in **Set**, die diese Dynamik respektieren, dass heißt für $f : A \longrightarrow B$ gilt:

$$f\varphi_B = \varphi_A f \tag{9.1}$$

Das Terminalobjekt in $\mathbf{S}^{\circlearrowleft}$ ist die Menge 1 aus **Set** zusammen mit ihrem einzigen Endomorphismus id_1. Jedes Element $x : 1 \longrightarrow A$ von A in $\mathbf{S}^{\circlearrowleft}$ liefert nun eine Folge von Elementen $x, \varphi_A x, \varphi_A^2 x, \varphi_A^3 x, \ldots$. Wir betrachten jetzt eine Menge, die auf dieses Weise ausgehend von einem Element erzeugt wird. Sie ist wird folgendermaßen charakterisiert:

Axiom 9.2 (Dedekind-Peano)

Es gibt $1 \xrightarrow{0} \mathbb{N} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{N}$ so dass es für jedes Diagramm $1 \xrightarrow{x_0} S \xrightarrow{\varphi} S$ eine eindeutige bestimmte Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow S$ gibt mit

$$0f = x_0 f \text{ und } \sigma f = f\varphi$$

Ein Objekt $\mathbb{N}$, bzw das Diagramm $1 \xrightarrow{0} \mathbb{N} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{N}$ in einer beliebigen Kategorie, die dieses Peano-Dedekindaxiom erfüllt, nennen wir Objekt der natürlichen Zahlen. Abbildungen mit Domäne $\mathbb{N}$ nennen wir Folgen.

9.2 Rekursion

Wir schreiben statt $n\sigma^k f$ auch $f[n+k]$. Dann besagt Axiom (9.2), dass es zu jedem Endomorphismus $A \xrightarrow{\varphi} A$ und jedem Element $1 \xrightarrow{x} A$ eine eindeutige Folge $\mathbb{N} \xrightarrow{f} A$ gibt mit

$$\begin{aligned} f[0] &= x \\ f[n+1] &= f[n]x \end{aligned}$$

Der Wert von $f[n+1]$ hängt also nur von $f[n]$ ab. Wir betrachten nun die Situation, dass zusätzlich eine Abhängigkeit von n besteht.

Lemma: Für eine Abbildung $\mathbb{N} \times A \xrightarrow{\varrho} A$ und ein Element $1 \xrightarrow{a_0} A$ gibt es eine eindeutig bestimmte Sequenz $\mathbb{N} \xrightarrow{g} A$ mit

$$\begin{aligned} g[0] &= a_0 \\ g[n+1] &= n(\mathrm{id}_{\mathbb{N}}, g)h \end{aligned}$$

Beweis: Sei $X = \mathbb{N} \times A, \zeta = (p_0\sigma, h)$ und $x_0 = (0, a_0)$. Dann gibt es nach dem Dedekind-Peanoaxiom eine Folge f, für die gilt

$$\begin{aligned} f[0] &= x_0 = (0, a_0) \\ f[n+1] &= (f\zeta)[n] \end{aligned}$$

Dann ist $(fp_0)[0] = 0$ und $(fp_0)[n+1] = n(f\zeta p_0) = n(fp_0)\sigma$ und damit nach Eindeutigkeit $fp_0 = id_{\mathbb{N}}$. Wir definieren jetzt $g := fp_1$ und erhalten

$$\begin{aligned} g[0] &= a_0 \\ g[n+1] &= n\sigma f p_1 = nf\zeta p_1 \\ &= n(fp_0, fp_1)h \\ &= n(\mathrm{id}_{\mathbb{N}}, g)h \end{aligned}$$

■

Satz 9.3 Die Nachfolgerabbildung σ ist injektiv aber nicht surjektiv, damit ist $\mathbb{N}$ Dedekind-unendlich.

Beweis: Das vorangegangene Lemma liefert mit $A = \mathbb{N}$ und $h = p_0$ die Existenz einer eindeutigen Abbildung $\mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ (die Vorgängerabbildung) für die gilt

$$\begin{aligned} 0p &= 0 \\ p\sigma &= 1_{\mathbb{N}} \end{aligned}$$

Damit ist die Injektivität von σ gezeigt.

Nach der charakteristischen Eigenschaft des Coproduktes gibt es f so, dass

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "i_0"] \arrow[dr, "0"] & \\
1+\mathbb{N} \arrow[r, "f"] & \mathbb{N} \\
\mathbb{N} \arrow[u, "i_{\mathbb{N}}"] \arrow[ur, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

Wir möchten nun eine Inverse g zu f definieren.

$$\begin{aligned}
0g &= i_0 fg = i_0 \\
\sigma g &= i_{\mathbb{N}} fg = i_{\mathbb{N}}
\end{aligned}$$

Das vorangegangene Lemma liefert dann mit $A = \mathbb{N} + 1$ und $h = p_{\mathbb{N}} i_{\mathbb{N}}$ die eindeutige Existenz von g. Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
0gf &= i_0 f = 1_0 \\
\sigma gf &= i_{\mathbb{N}} f = 1_{\mathbb{N}}
\end{aligned}$$

Damit ist $gf = 1_{\mathbb{N}+1}$ nach Eindeutigkeit der durch Rekursion definierten Funktion. Schließlich ist

$$\begin{aligned}
i_0 fg &= 0g = i_0 \\
i_{\mathbb{N}} fg &= \sigma g = i_{\mathbb{N}}
\end{aligned}$$

und damit nach Eindeutigkeit der Abbildung aus dem Coprodukt $fg = 1_{\mathbb{N}+1}$.
Da die Teile 1 und $\mathbb{N}$ disjunkt in $1 + \mathbb{N}$ sind, gibt es kein Element $1 \xrightarrow{x} \mathbb{N}$ mit $x\sigma = 0$, denn für dieses müsste gelten $x\sigma g = xi_{\mathbb{N}} = 0g \in i_0 \cap i_{\mathbb{N}}$. Damit ist aber σ nicht surjektiv. ∎

9.3 Arithmetik in $\mathbb{N}$

Lemma: Für eine Abbildung $A \xrightarrow{a} A$ gibt es eine eindeutige Folge $\mathbb{N} \xrightarrow{\psi} A^A$ mit

$$\begin{aligned}
0\psi &= \lceil 1_A \rceil \\
n\sigma\psi &= \lceil (n\psi \times \mathrm{id}_A)\mathrm{eval}\, a \rceil \\
&= n\psi a \text{ [Unter “abuse of notation”]}
\end{aligned}$$

Beweis: Wir benutzen das Peano-Dedekindaxiom mit

$$\begin{aligned} S &= A^A \\ x_0 &= \lceil 1_A \rceil \\ \beta\varphi &= \lceil ((\beta \times \mathrm{id}_A)\mathrm{eval}\ )a \rceil \qquad\qquad \forall 1 \xrightarrow{\beta} A^A \end{aligned}$$

■

Folgerung: Für jede Menge A gibt es eine Abbildung

$$A^A \quad \xrightarrow{\mathrm{iter}_A} \quad (A^A)^{\mathbb{N}}$$

die jedem a die Folge der Iterierten von a (bzw. deren Namen) zuordnet.

Setzen wir nun $A = \mathbb{N}$, dann erhalten wir eine Abbildung

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathrm{iter}_{\mathbb{N}}} (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$$

Damit wird jedem Endomorphismus a auf $\mathbb{N}$ eine binäre Operation $\overline{a}$ auf $\mathbb{N}$ zugeordnet, für die gilt:

$$\begin{aligned} \forall\, 1 \longrightarrow \mathbb{N}\ :\ (0,n)\overline{a} \quad &= \quad n \\ \forall\, 1 \underset{n}{\overset{m}{\rightrightarrows}} \mathbb{N}\ :\ (m+1,n)\overline{a} \quad &= \quad ((m,n)\overline{a})a \end{aligned}$$

Wir setzen jetzt $+ = \overline{\sigma}$ und überzeugen uns leicht, dass wir damit tatsächlich die bekannte Addition auf den natürlichen Zahlen erhalten.

10 Graphen

10.1 Monoid, Gruppoid, Gruppe, Funktor, Aktion

Definition 10.1 (Monoid, Gruppoid, Gruppe)

Ein Monoid ist eine Kategorie mit nur einem Objekt. Ein Gruppoid ist eine Kategorie, in der jeder Morphismus ein Inverses besitzt. Eine Gruppe ist eine Kategorie, die zugleich Monoid und Gruppoid ist.

Definition 10.2 (Funktor, linke Aktion)

(i) Ein *Funktor* $\Phi\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *von* einer Kategorie $\mathbf{C}$ *in* eine Kategorie $\mathbf{D}$ ist ein Paar von Abbildungen $\langle \mathrm{Ob}(\Phi), \mathrm{Mor}(\Phi) \rangle$ mit

$$\mathrm{Ob}(\Phi)\colon \mathrm{Ob}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathbf{D})$$

$$\mathrm{Mor}(\Phi)\colon \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathbf{D})$$

sodass

- $\mathrm{Mor}(\Phi)(\mathbf{C}(C_1, C_2)) \subseteq \mathbf{D}(\mathrm{Ob}(\Phi)(C_1), \mathrm{Ob}(\Phi)(C_2))$
- $\mathrm{Mor}(\Phi)(\mathrm{id}_C) = \mathrm{id}_{\mathrm{Ob}(\Phi)(C)}$
- $\mathrm{Mor}(\Phi)(fg) = \mathrm{Mor}(\Phi)(f)\mathrm{Mor}(\Phi)(g)$

gelten. Meist schreiben wir auch salopp $\Phi = \mathrm{Ob}(\Phi) = \mathrm{Mor}(\Phi)$.

(ii) Für eine Kategorie $\mathbf{C}$ heißt ein Funktor

$$\Phi\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$$

linke $\mathbf{C}$*-Aktion* oder auch *linke* $\mathbf{C}$*-Menge*. Für Tupel $x\colon T \to \Phi(C_1)$ und Morphismen $f\colon C_1 \to C_2$ setzen wir

$$x \cdot f := x * \Phi(f).$$

Meistens schreiben wir salopp $xf = x \cdot f$.

(iii) Sei M eine Menge und $\mathbf{C}$ ein Monoid. Für eine linke $\mathbf{C}$-Aktion $\Phi\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ mit $M = \Phi(C)$ sagen wir auch, $\mathbf{C}$ bzw. $\mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ *operiert links auf* M oder M *hat eine linke* $\mathbf{C}$*-Aktion* oder M *ist eine linke* $\mathbf{C}$*-Menge*.

Beispiel 10.3 Der *linke Hom-Funktor* $\mathbf{C}(C, \cdot)$ für eine Kategorie $\mathbf{C}$ und ein Objekt C ist stets eine linke $\mathbf{C}$-Aktion.
Man kann sich leicht überzeugen, dass diese Definition der Wirkung für eine Gruppe oder einen Monoid zur klassischen Definition äquivalent. □

Definition 10.4 (Funktor-Kategorie)

Die *Funktorkategorie* $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ hat als Objekte die Funktoren $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$. Ein Morphismus ϕ in $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ von Φ nach Φ' ist eine natürliche Transformation, d.h. eine Familie von Morphismen $\varphi_A : \Phi(A) \longrightarrow \Phi'(A)$ für die gilt:

$$\Phi'(f)\varphi(A) = \varphi(A')\Phi(f) \text{für} A \xrightarrow{f} A'$$

Lemma 10.5 (i) $x1_C = x$ für alle $x \in \Phi(C)$

(ii) $x(fg) = (xf)g$ für alle $x \in \Phi(C)$ und $f\colon C \to C_1, g\colon C_1 \to C_2$

Beweis: (i) $x1_C = x \cdot 1_C = x * \Phi(1_C) = x * 1_{\Phi(C)} = x.$

(ii) $x(fg) = x \cdot (f * g) = x * \Phi(f * g) = x * \Phi(f) * \Phi(g) = (x \cdot f) * \Phi(g) = (x \cdot f) \cdot g = (xf)g.$ ■

Definition 10.6 (Cofunktor, rechte Aktion)

(i) Ein *Cofunktor* $\Phi\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *von* einer Kategorie $\mathbf{C}$ *in* eine Kategorie $\mathbf{D}$ ist ein Paar von Abbildungen $\langle \mathrm{Ob}(\Phi), \mathrm{Mor}(\Phi) \rangle$ mit

$$\mathrm{Ob}(\Phi)\colon \mathrm{Ob}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathbf{D})$$

$$\mathrm{Mor}(\Phi)\colon \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathbf{D})$$

sodass

- $\mathrm{Mor}(\Phi)(\mathbf{C}(C_1, C_2)) \subseteq \mathbf{D}(\mathrm{Ob}(\Phi)(C_2), \mathrm{Ob}(\Phi)(C_1))$
- $\mathrm{Mor}(\Phi)(\mathrm{id}_C) = \mathrm{id}_{\mathrm{Ob}(\Phi)(C)}$
- $\mathrm{Mor}(\Phi)(fg) = \mathrm{Mor}(\Phi)(g)\mathrm{Mor}(\Phi)(f)$

gelten. Meist schreiben wir auch salopp $\Phi = \mathrm{Ob}(\Phi) = \mathrm{Mor}(\Phi)$.

(ii) Für eine Kategorie **C** heißt ein Cofunktor

$$\Phi\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$$

rechte **C**-*Aktion* oder auch *rechte* **C**-*Menge*. Für Tupel $x\colon T \to \Phi(C_1)$ und Morphismen $f\colon C_2 \to C_1$ setzen wir

$$f \cdot x := x * \Phi(f).$$

Meistens schreiben wir salopp $fx = f \cdot x$.

(iii) Sei M eine Menge und **C** ein Monoid. Für eine rechte **C**-Aktion $\Phi\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ mit $M = \Phi(C)$ sagen wir auch, **C** bzw. $\mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ *operiert rechts auf* M oder M *hat eine rechte* **C**-*Aktion* oder M *ist eine rechte* **C**-*Menge*.

Beispiel 10.7 Der *rechte Hom-Funktor* $\mathbf{C}(\cdot, C)$ für eine Kategorie **C** und ein Objekt C ist stets eine rechte **C**-Aktion. □

Lemma 10.8 (i) $1_C x = x$ für alle $x \in \Phi(C)$

(ii) $(gf)x = g(fx)$ für alle $x \in \Phi(C)$ und $f\colon C_1 \to C$, $g\colon C_2 \to C_1$

Beweis: (i) $1_C x = 1_C \cdot x = \Phi(1_C) * x = 1_{\Phi(C)} * x = x$.

(ii) $(gf)x = (g * f) \cdot x = x * \Phi(g * f) = x * \Phi(f) * \Phi(g) = (f \cdot x) * \Phi(g) = g \cdot (f \cdot x) = g(fx)$. ■

Satz 10.9 Sei $\Phi\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ eine linke **C**-Aktion, dann ist

$$\Phi^{\mathrm{op}}\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$$

vermöge $\Phi^{\mathrm{op}}(f) := \Phi(f^{\mathrm{op}})$ eine rechte **C**-Aktion.

Beweis: Es gilt

$$\Phi^{\mathrm{op}}(f * g) = \Phi((f * g)^{\mathrm{op}}) = \Phi(g^{\mathrm{op}} * f^{\mathrm{op}}) = \Phi(g^{\mathrm{op}}) * \Phi(f^{\mathrm{op}}) = \Phi^{\mathrm{op}}(g) * \Phi^{\mathrm{op}}(f).$$

■

Satz 10.10 Sei $\Phi\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ eine linke $\mathbf{C}$-Aktion, dann ist für eine beliebige Menge V

$$V^\Phi\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$$

mit $V^\Phi(C) := V^{\Phi(C)}$ und

$$f \cdot g := \lceil g \rceil * V^\Phi(f) := \lceil \Phi(f) * g \rceil$$

für $f\colon C_2 \to C_1$ und $g\colon \Phi(C_1) \to V$ eine rechte $\mathbf{C}$-Aktion.

Beweis: Es gilt $V^\Phi(\mathrm{id}_C) = \mathrm{id}_{V^T} = \mathrm{id}_{V^{\Phi(C)}}$ wegen

$$\lceil g \rceil * V^\Phi(\mathrm{id}_C) = \lceil \Phi(\mathrm{id}_C) * g \rceil = \lceil \mathrm{id}_T * g \rceil = \lceil g \rceil.$$

Weiter gilt $V^\Phi(f * g) = V^\Phi(g) * V^\Phi(f)$ wegen

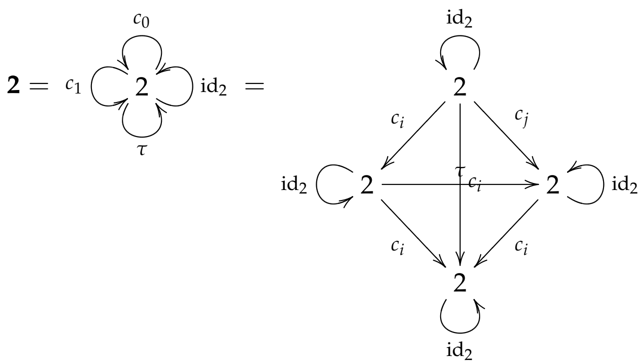
$$\begin{aligned}
\lceil h \rceil * V^\Phi(f * g) &= \lceil \Phi(f * g) * h \rceil \\
&= \lceil \Phi(f) * \Phi(g) * h \rceil \\
&= \lceil \Phi(g) * h \rceil * V^\Phi(f) \\
&= \lceil h \rceil * V^\Phi(g) * V^\Phi(f).
\end{aligned}$$

■

10.2 Reversible Graphen

Definition 10.11 (reversibler Graph)

(i) Sei $\mathbf{2}$ die Kategorie mit $\mathrm{Ob}(\mathbf{2}) := \{2\}$ und $\mathrm{Mor}(\mathbf{2}) := \mathrm{Endo}(2)$.



Eine rechte $\mathbf{2}$-Aktion heißt *reversibler Graph*.

(ii) Sei $\Gamma\colon \mathbf{2} \to \mathbf{Set}$ ein reversibler Graph. Ein Element $x\colon 1 \to \Gamma(2)$ heißt

- *Knoten* von Γ, wenn $\tau x = x$ gilt.

$$x$$

- *Kante* von Γ, wenn $\tau x \neq x$ gilt.

$$c_0 x \xrightarrow{x} c_1 x$$

- *Schleife* von Γ, wenn $\tau x \neq x$ und $c_0 x = c_1 x$ gilt.

$$\begin{tikzcd} c_0 x \arrow[loop right, "x"] \end{tikzcd}$$

Beispiel 10.12 Der rechte Hom-Funktor $\Gamma := \mathbf{2}(\cdot, 2)$ ist schleifenfrei und hat die Knoten c_0 und c_1 und die Kanten id_2 und τ.

$$\begin{tikzcd} c_0 \arrow[r, shift left, "\mathrm{id}_2"] & c_1 \arrow[l, shift left, "\tau"] \end{tikzcd}$$

□

10.3 Chaotische Graphen

Definition 10.13 (chaotischer Graph)

(i) Sei $\mathsf{2}$ die Kategorie mit $\mathrm{Ob}(\mathsf{2}) := \{2\}$ und $\mathrm{Mor}(\mathsf{2}) := \mathrm{OrdEndo}(2)$.

$$\mathsf{2} = \begin{tikzcd} 2 \arrow[loop above, "c_0"] \arrow[loop left, "c_1"] \arrow[loop right, "\mathrm{id}_2"] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} & 2 \arrow[loop above, "\mathrm{id}_2"] \arrow[dr, "c_i"] & \\ 2 \arrow[loop left, "\mathrm{id}_2"] \arrow[ur, "c_j"] \arrow[rr, "c_i"'] & & 2 \arrow[loop right, "\mathrm{id}_2"] \end{tikzcd}$$

Eine rechte $\mathsf{2}$-Aktion heißt *chaotischer Graph*.

(ii) Sei $\Gamma\colon \mathsf{2} \to \mathbf{Set}$ ein chaotischer Graph. Ein Element $x\colon 1 \to \Gamma(2)$ heißt

- *Knoten* von Γ, wenn $c_0x = x = c_1x$ gilt.

$$x$$

- *Kante* von Γ, wenn $c_0x \neq x$ oder $c_1x \neq x$ gilt.

$$c_0x \xrightarrow{x} c_1x$$

- *Schleife* von Γ, wenn ($c_0x \neq x$ oder $c_1x \neq x$) und $c_0x = c_1x$ gilt.

$$\begin{tikzcd} c_0x \arrow[loop right, "x"] \end{tikzcd}$$

Beispiel 10.14 Der rechte Hom-Funktor $\Gamma := 2(\cdot, 2)$ ist schleifenfrei und hat die Knoten c_0 und c_1 und die Kante id_2.

$$c_0 \xrightarrow{\mathrm{id}_2} c_1$$

□

Definition 10.15 (Orbit)

Sei $\Phi\colon 2 \to \mathbf{Set}$ eine chaotischer Cograph mit $T := \Phi(2)$. Dann heißt ein Teil *orb* von T auch *Orbit* von Φ, falls es $t_0, t_1 \in orb$ gibt mit $tc_i = t_i$ für alle $t \in orb$ und falls $tc_i = t_i$ stets $t \in orb$ für alle t impliziert.

Satz 10.16 Sei T eine linke 2-Aktion mit dem zugehörigen Funktor $\Lambda\colon 2 \to \mathbf{Set}$ und sei $V \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$. Außerdem habe Λ genau einen nichtleeren Orbit $orb = id_T$, d.h. es existieren zwei Elemente $t_0, t_1 \in T$ mit $tc_i = t_i$ für alle $t \in T$. Dann ist V^Λ ein chaotischer Graph. Eine Abbildung $f\colon T \to V$ ist

- ein Knoten, falls $t * \Lambda(c_0) * f = f$.
- eine Kante, falls $\Lambda(c_0) * f \neq f$ oder $\Lambda(c_1) * f \neq f$.
- eine Schleife, falls f eine Kante ist und $\Lambda(c_0) * f = \Lambda(c_0) * f$.

Beispiel: Es wird ein chaotischer Graph konstruiert, der aus allen stetigen Kurven im reellen n-dimensionalen Raum besteht. Sei dazu $T := [0, 1] \subseteq \mathcal{R}$ das Intervall der reellen Zahlen von 0 bis 1 und T ist eine linke 2-Aktion vermöge des Funktors $\Lambda\colon 2 \to \mathbf{Set}$ mit $T =: \Lambda(2)$ sowie $tc_0 := 0$

und $tc_1 := 1$.
Sei weiter $V := \mathcal{R}^n$ der reelle n-dimensionale Raum. Dann ist V^Λ ein chaotischer Graph, der aus allen Kurven im n-dimensionalen Raum besteht. Die Punkte des Graphen sind die Kurven, die konstant sind, d.h. $k([0,1]) = \{t\}$, denn:
Sei $x\colon T \to V$ eine Kurve, dann gilt

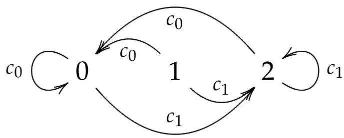
$$c_0x = c_0 \cdot x = \lceil x \rceil * V^\Phi(c_0) = \lceil \Phi(c_0) * x \rceil$$

und damit erhalten wir

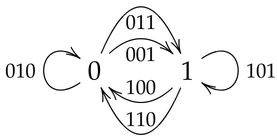
$$\begin{aligned} c_0x = \lceil x \rceil &\iff \Phi(c_0) * x = x \\ &\iff \forall t\colon S \to T\ [t * \Phi(c_0) * x = t * x] \\ &\iff \forall t\colon S \to T\ [0 * x = t * x] \end{aligned}$$

Die Schleifen sind die Kurven mit gleichen Anfangs- und Endpunkt, d.h. $k(0) = k(1)$. Nicht-konstante Kurven sind die Kanten des Graphen. □

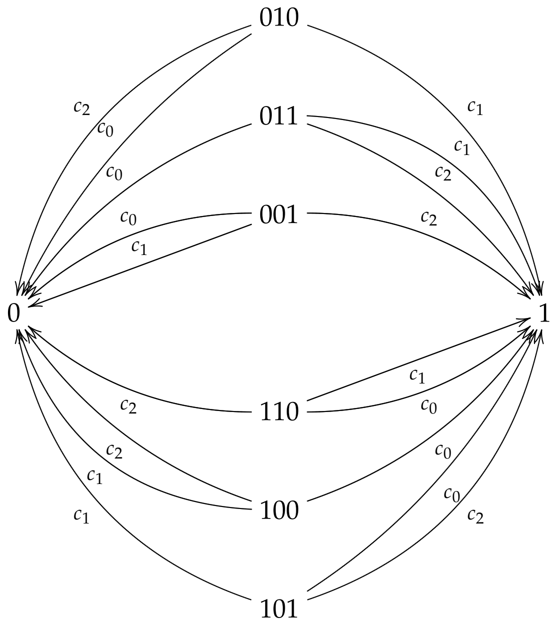
Beispiel: Sei $T := 3$ eine linke 2-Menge mit $tc_0 := 0$ und $tc_1 := 2$



und sei V eine beliebige Menge von Werten. Dann ist V^T ein chaotischer Graph mit höchstens $|V|$ Knoten und der Eigenschaft, dass es von einem Knoten zu einem anderen Knoten höchstens $|V|$ Kanten gibt und entsprechend hat ein Knoten höchstens $|V|$ Schleifen. Sei bespielsweise $V := 2$, dann ergibt sich maximal der folgende chaotische Graph:



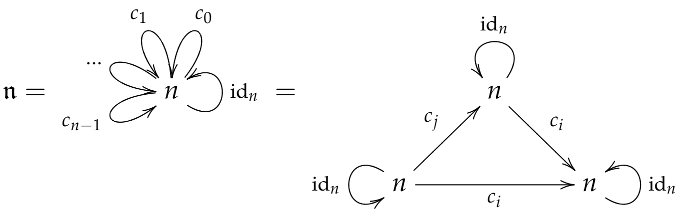
Dabei ist $0 = 000$ und $1 = 111$. Ein Morphismus $x\colon 3 \to 2$ wird hier kurz notiert durch $x := x(0)x(1)x(2)$, d.h. das erste Symbol ist der Anfangsknoten und das dritte Symbol ist der Endknoten.
Demnach können wir den Graphen auch als Hypergraphen auffassen, in dem jede Kante mit genau drei Knoten inzidiert.



Dies führt uns zu den rechten $\mathfrak{3}$-Aktionen, den chaotischen Hypergraphen dritter Ordnung. Dabei ist $\mathfrak{3}$ das Monoid mit dem einzigen Objekt 3 und den Morphismen c_0, c_1 und c_2, die analog zu den Morphismen im Monoid $\mathfrak{2}$ den Projektionen bzw. den konstanten Abbildungen entsprechen. □

Definition 10.17 (chaotischer Hypergraph *n*-ter Ordnung)

(i) Sei $\mathfrak{n}$ die Kategorie mit $\mathrm{Ob}(\mathfrak{n}) := \{n\}$ und $\mathrm{Mor}(\mathfrak{n}) := \mathrm{ConstEndo}(n) \cup \{\mathrm{id}_n\}$.



Eine rechte $\mathfrak{n}$-Aktion heißt *chaotischer Hypergraph n-ter Ordnung*.

(ii) Sei $\Gamma\colon \mathfrak{n} \to \mathbf{Set}$ ein chaotischer Hypergraph n-ter Ordnung. Ein

Element $x\colon 1 \to \Gamma(n)$ heißt

- *Knoten* von Γ, wenn $c_i x = x$ für alle i gilt.

$$x$$

- *Hyperkante* von Γ, wenn $c_i x \neq x$ für ein i gilt.

$$\begin{tikzcd}
 & & x \arrow[dll, "c_0"'] \arrow[dl, "\cdots"] \arrow[d, "c_i"] \arrow[dr, "\cdots"'] \arrow[drr, "c_{n-1}"] & & \\
c_0 x & \ldots & c_i x & \ldots & c_{n-1} x
\end{tikzcd}$$

- *Hyperschleife* von Γ, wenn x eine Hyperkante ist und $c_i x = c_j x$ für alle i, j gilt.

$$\begin{tikzcd}
c_0 x \arrow[loop right, "x"]
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
x \arrow[d, bend right=60, "c_0"'] \arrow[d, bend right=25, "\cdots"] \arrow[d, "c_i"] \arrow[d, bend left=25, "\cdots"'] \arrow[d, bend left=60, "c_{n-1}"] \\
c_0 x
\end{tikzcd}$$

Beispiel 10.18 Der rechte Hom-Funktor $\Gamma := \mathfrak{n}(\cdot, n)$ ist schleifenfrei und hat die Knoten $c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_2$ und die Hyperkante id_n.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{id}_n \arrow[dll, "c_0"'] \arrow[dl, "\cdots"] \arrow[d, "c_i"] \arrow[dr, "\cdots"'] \arrow[drr, "c_{n-1}"] & & \\
c_0 & \ldots & c_i & \ldots & c_{n-1}
\end{tikzcd}$$

□

Literaturverzeichnis

[Law05] LAWVERE, Francis W.: An Elementary Theory of the Category of Sets (long version) with commentary. In: *Reprints in Theory and Applications of Categories* 11 (2005), S. 1–35

[LR03] LAWVERE, Francis W.; ROSEBRUGH, Robert: *Sets for Mathematics*. Cambridge University Press, 2003. – ISBN 0521010608

[Mac98] MACLANE, Saunders: *Categories for the Working Mathematician*. 2. Auflage. Springer, Berlin, 1998. – ISBN 0387984038

Index