TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Tropische Geometrie & Algebraische Statistik

Prof. Dr. Stefan E. Schmidt

Francesco Kriegel

TU Dresden

Fakultät Mathematik

Institut Algebra

SS 2008

28. September 2008

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1 Strukturen **1**

1.1 Monoide 1
1.2 Semiringe 7
1.3 kovariante Kategorien. 16

Kapitel 2 Varietäten, Ideale & Kongruenzen **21**

Kapitel 3 Heyting-Algebren **25**

1 Strukturen

1.1 Monoide

Definition 1.1 (Monoid)

Eine universelle Algebra

$$\mathbb{M} = \langle M, *, \mathrm{e} \rangle$$

vom Typ $(2,0)$ mit einer assoziativen Operation $*$ und einem neutralen Element e heißt *Monoid*.

Beispiel: Ist A eine Menge, dann bildet die Menge A^* aller endlichen Folgen über A mit der Konkatenation $*$ als Verknüpfung und der leeren Folge ϵ als neutralem Element ein Monoid $\mathbb{A}^* = \langle A^*, *, \epsilon \rangle$. Dieses Monoid nennt man das von *Wortmonoid* zu A. Ein Element von A^* heißt auch *Wort* oder *Zeichenkette*, und A heißt auch Alphabet.

□

Definition 1.2 (Monoidhomomorphismus)

Seien $\mathbb{M}_1 = \langle M_1, *, \mathrm{e} \rangle$ und $\mathbb{M}_2 = \langle M_2, +, \mathrm{o} \rangle$ Monoide. Nun heißt

$$\phi \colon \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$$

Monoidhomomorphismus von $\mathbb{M}_1$ nach $\mathbb{M}_2$, falls $\phi \colon M_1 \to M_2$ eine Abbildung mit

(i) $\phi(x * y) = (\phi x) + (\phi y)$
(ii) $\phi \mathrm{e} = \mathrm{o}$

für alle $x, y \in M_1$ ist. Die Menge aller Homomorphismen von $\mathbb{M}_1$ nach $\mathbb{M}_2$ bezeichnen wir mit

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{M}_0, \mathbb{M}_1).$$

Bemerkung: Ein Homomorphismus ϕ heißt

(i) *Epimorphismus*, wenn ϕ surjektiv ist.
(ii) *Monomorphismus*, wenn ϕ injektiv ist.
(iii) *Isomorphismus*, wenn ϕ bijektiv ist.

(iv) *Endomorphismus* auf $\mathbb{X}$, wenn $\phi\colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ ist. Die Menge aller Endomorphismen auf $\mathbb{X}$ ist
$$\operatorname{End}\mathbb{X}.$$

(v) *Automorphismus* auf $\mathbb{X}$, wenn $\phi\colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ bijektiv ist.

Sei $\mathbb{M} = \langle M, +, 0\rangle$ ein Monoid. Wir definieren nun zwei Operationen auf $\operatorname{End}\mathbb{M}$:

$$\oplus\colon \begin{array}{l} \operatorname{End}\mathbb{M} \times \operatorname{End}\mathbb{M} \to \operatorname{End}\mathbb{M} \\ (f,g) \mapsto f \oplus g\colon \begin{array}{l} M \to M \\ m \mapsto (fm) + (gm) \end{array} \end{array}$$

ist die *punktweise Addition* und

$$*\colon \begin{array}{l} \operatorname{End}\mathbb{M} \times \operatorname{End}\mathbb{M} \to \operatorname{End}\mathbb{M} \\ (f,g) \mapsto f * g\colon \begin{array}{l} M \to M \\ m \mapsto g(fm) \end{array} \end{array}$$

heißt *kovariante Komposition*. Weiter setzen wir noch

$$0_M\colon \begin{array}{l} M \to M \\ m \mapsto 0 \end{array}$$

als *Nullabbildung* sowie

$$\mathrm{id}_M\colon \begin{array}{l} M \to M \\ m \mapsto m \end{array}$$

als *identische Abbildung*. Damit erhalten wir zwei Monoide

$$\langle \operatorname{End}\mathbb{M}, \oplus, 0_M\rangle \quad \text{und} \quad \langle \operatorname{End}\mathbb{M}, *, \mathrm{id}_M\rangle,$$

die jedoch im Allgemeinen nicht kommutativ sind.

Definition 1.3 (geordnetes Monoid)

Sei $\underline{M} = \langle M, \leq\rangle$ eine geordnete Menge und $\mathbb{M} = \langle M, *, \mathrm{e}\rangle$ ein Monoid. Dann heißt
$$\underline{\mathbb{M}} = \langle M, \leq, *, \mathrm{e}\rangle$$
geordnetes Monoid, wenn für $a, x, y \in M$ stets
$$x \leq y \quad\Rightarrow\quad x * a \leq y * a \quad\wedge\quad a * x \leq a * y$$
gilt.

Definition 1.4 (Adjunktion)

Ein Quadrupel

$$\mathscr{A} = \langle \underline{P}, \underline{Q}, \phi, \psi \rangle$$

heißt *Adjunktion*, falls

$$\underline{P} = \langle P, \leq \rangle \quad \text{und} \quad \underline{Q} = \langle Q, \sqsubseteq \rangle$$

halbgeordnete Mengen sind und

$$\phi\colon P \to Q \quad \text{und} \quad \psi\colon Q \to P$$

Abbildungen zwischen ihnen sind mit der Eigenschaft

$$\phi p \sqsubseteq q \quad \Leftrightarrow \quad p \leq \psi q$$

für alle $p \in P$ und $q \in Q$.

Beispiel: Sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung, dann ist $\langle 2^A, 2^B, f, f^{-1} \rangle$ eine Adjunktion. Es gilt $fX \subseteq Y \;\Leftrightarrow\; X \subseteq f^{-1}Y$.

□

Bemerkung:

(1) ϕ bestimmt ψ eindeutig und umgekehrt.

(2) Seien $\underline{P}$ und $\underline{Q}$ geordnete Mengen und $\phi\colon P \to Q$ eine Abbildung. ϕ heißt *residuiert*, falls eine Abbildung $\psi\colon Q \to P$ existiert, sodass $\langle \underline{P}, \underline{Q}, \phi, \psi \rangle$ eine Adjunktion ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn unter ϕ jedes Urbild eines Hauptideals wieder ein Hauptideal ist, d.h. $\forall q \in Q \exists p \in P\colon \phi^{-1} \downarrow q = \downarrow p$. Eine Menge $X = \{p \in P \mid \exists x \in X\colon p \leq x\}$ heißt *Ideal* in $\underline{P}$. Eine Menge $\downarrow x = \{p \in P \mid p \leq x\}$ heißt *Hauptideal* zu x in $\underline{P}$.

(3) Es gelten

$$\phi\psi q \sqsubseteq q \;\; \text{und} \;\; p \leq \psi\phi p$$

und

$$\phi^{-1} \downarrow \phi p = \downarrow \psi\phi p \;\; \text{und} \;\; \psi^{-1} \uparrow \psi q = \uparrow \phi\psi q$$

(4) Sind $\underline{P}$ und $\underline{Q}$ vollständige Verbände, so ist f residuiert, d.h. $\bigvee$-treu, also gilt für alle $X \subseteq P$

$$\bigsqcup \phi X = \phi \bigvee X$$

und g ist residual, d.h. $\bigwedge$-treu, also gilt für alle $Y \subseteq Q$

$$\bigwedge \psi Y = \psi \bigsqcap Y.$$

(5) Sind $\underline{P}$ und $\underline{Q}$ vollständige Verbände und ist ϕ eine residuierte Abbildung von $\underline{P}$ nach $\underline{Q}$, so existiert eine residuale Abbildung ψ von $\underline{Q}$ nach $\underline{P}$, sodass $(\underline{P}, \underline{Q}, \phi, \psi)$ eine Adjunktion ist.

(6) Für vollständige Verbände $\underline{P}$ und $\underline{Q}$ ist

$$\phi P$$

ein Kernsystem in $\underline{Q}$ (d.h. ϕP ist $\bigvee$-abgeschlossene Teilmenge von $\underline{Q}$), und ferner ist

$$\psi Q$$

ein Hüllensystem in $\underline{P}$ (d.h. ψQ ist $\bigwedge$-abgeschlossene Teilmenge von $\underline{P}$). Weiter gelten

$$\phi * \psi * \phi = \phi \quad \text{und} \quad \psi * \phi * \psi = \psi$$

und

$$\psi * \phi$$

ist ein Kernoperator auf $\underline{Q}$ sowie

$$\phi * \psi$$

ist ein Hüllenoperator auf $\underline{P}$.

Definition 1.5 (residuiertes geordnetes Monoid)

Sei $\underline{M} = \langle M, \leq \rangle$ eine geordnete Menge und $\mathbb{M} = \langle M, *, \mathrm{e} \rangle$ ein Monoid. Dann heißt

$$\underline{\mathbb{M}} = \langle M, \leq, *, \mathrm{e} \rangle$$

residuiertes geordnetes Monoid, falls die Abbildungen

$$\rho_a \colon \begin{array}{l} M \to M \\ x \mapsto x * a \end{array}$$

$$\lambda_a \colon \begin{array}{l} M \to M \\ x \mapsto a * x \end{array}$$

für alle $a \in M$ residuiert sind, d.h. falls Abbildungen $\rho_a^+, \lambda_a^+ \in M^M$ existieren, sodass $\langle \underline{M}, \underline{M}, \rho_a, \rho_a^+ \rangle$ und $\langle \underline{M}, \underline{M}, \lambda_a, \lambda_a^+ \rangle$ Adjunktionen sind.

Bemerkung: Für eine residuiertes geordnetes Monoid $\langle M, \leq, *, \mathrm{e} \rangle$ setzen wir

$$x \diagup a := \rho_a^+ x \quad \text{und} \quad a \diagdown x := \lambda_a^+ x,$$

dann gilt

$$x * y \leq z \quad \Leftrightarrow \quad x \leq z \diagup y \quad \Leftrightarrow \quad y \leq x \diagdown z$$

für alle $x, y, z \in M$. Es ist $y \diagup a$ bezüglich $\leq$ das größte Element $x \in M$ mit $x * a \leq y$ und $a \diagdown y$ ist bezüglich $\leq$ das größte Element $x \in M$ mit $x * a \leq y$.

Definition 1.6 (vollständiges Monoid)

Sei $\mathbb{M} = \langle M, *, \mathrm{e}\rangle$ ein kommutatives Monoid und $\Xi \colon \bigcup\{M^I \mid I \text{ Menge}\} \to M$ eine Klassenabbildung. Dann heißt $\mathbb{M}$ vollständig bezüglich Ξ, falls für jede Menge I und jede Abbildung $\alpha \in M^I$ gelten

(i) $\Xi\alpha = \begin{cases} \mathrm{e} & (I = \emptyset) \\ \alpha(i) & (I = \{i\}) \\ \alpha(i) * \alpha(j) & (I = \{i, j\}, i \neq j) \end{cases}$

(ii) Für jede Partition $\mathscr{P} \in \operatorname{Part} I$ und $\beta \colon \mathscr{P} \to M, X \mapsto \Xi\alpha|_X$ gilt $\Xi\alpha = \Xi\beta$.

Ξ heißt dann auch *vollständiges inneres Monoid-Maß.*

Beispiel: Betrachten wir den Monoid $\langle \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, +, 0\rangle$ der nicht-negativen reellen Zahlen mit der üblichen Addition. Dieser Monoid ist vollständig bezüglich der bekannten Summe $\sum$. Das macht die sogenannte *doppelte Abzählung* möglich. Ist nämlich $\alpha \colon X \times Y \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ eine Abbildung, so gilt

$$\sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} \alpha(x, y) = \sum_{(x,y) \in X \times Y} \alpha(x, y) = \sum_{y \in Y} \sum_{x \in X} \alpha(x, y).$$

□

Definition 1.7 (stetiges Monoid)

Sei $\underline{M} = \langle M, \leq\rangle$ eine geordnete Menge und $\mathbb{M} = \langle M, *, \mathrm{e}\rangle$ ein Monoid. Dann heißt

$$\underline{\mathbb{M}} = \langle M, \leq, *, \mathrm{e}\rangle$$

stetiges Monoid, wenn gelten

(i) $\langle M, \leq\rangle$ positiv geordnet $:\Leftrightarrow \forall m \in M \colon \mathrm{e} \leq m$.

(ii) Jede gerichtete Teilmenge hat ein Supremum. $X \subseteq M$ heißt *gerichtet* in $\langle M, \leq\rangle$, wenn für alle $x, y \in X$ ein $z \in X$ existiert mit $x \leq z$ und $y \leq z$.

(iii) Für alle $m \in M$ und jede gerichtete Teilmenge $X \subseteq M$ gilt $m * (\bigvee X) = \bigvee(m * X)$ und $(\bigvee X) * m = \bigvee(X * m)$.

Satz 1.8
Ist $\underline{\mathbb{M}} = \langle M, \leq, *, \mathrm{e}\rangle$ ein kommutatives geordnetes stetiges Monoid, so ist $\underline{\mathbb{M}}$ vollständig bezüglich Ξ vermöge

$$\Xi \colon \begin{array}{l} \bigcup\{M^I \mid I \text{ Menge}\} \to M \\ \qquad\qquad \alpha \mapsto \bigvee_{X \in 2^I_{\mathrm{fin}}} \mathop{\ast}_{i \in X} \alpha(i). \end{array}$$

Definition 1.9 (Monoidwirkung)

Sei X eine Menge, $\mathbb{M} = \langle M, *, \mathrm{e}\rangle$ ein Monoid und $\triangleright \colon X \times M \to X$ eine Abbildung. Das Tripel

$$X_{\mathbb{M}} := \langle X, \mathbb{M}, \triangleright\rangle$$

heißt *rechtsseitige Monoidwirkung* von $\mathbb{M}$ auf X vermöge $\triangleright$ (kurz: $\mathbb{M}$-Wirkung), falls

(i) $(x \triangleright m) \triangleright n = x \triangleright (m * n)$
(ii) $x \triangleright \mathrm{e} = x$

für alle $x \in X$ und $m, n \in M$ gelten.

1.2 Semiringe

Definition 1.10 (Semiring)

Eine universelle Algebra

$$\mathbb{S} = \langle S, +, \cdot, 0, 1\rangle$$

vom Typ $(2,2,0,0)$ bestehend aus zwei Monoiden $\langle S, +, 0\rangle$, $\langle S, \cdot, 1\rangle$ mit einer kommutativen Operation $+$ und mit Distributivität von $\cdot$ über $+$ sowie Absorption von 0 bezüglich $\cdot$ heißt *Semiring*.

Beispiel:

(1) Sei $S \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ eine der bekannten Zahlenmengen. Dann ist S zusammen mit der üblichen Addition und Multiplikation, also

$$\langle S, +, \cdot, 0, 1\rangle$$

ein Semiring.

(2) Wir setzen $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ als die erweiterten reellen Zahlen. Diese bilden zusammen mit Minimumsbildung und üblicher Addition

$$\bar{\mathbb{R}}_{\text{trop}} := \langle \bar{\mathbb{R}}, \min, +, \infty, 0\rangle$$

den *reellen tropischen Semiring*. Analog sind $\bar{\mathbb{N}}_{\text{trop}}, \bar{\mathbb{Z}}_{\text{trop}}, \bar{\mathbb{Q}}_{\text{trop}}$ definiert. Dual: Die erweiterten reellen Zahlen zusammen mit Maximumsbildung und üblicher Addition

$$\bar{\mathbb{R}}_{\text{ark}} := \langle \bar{\mathbb{R}}, \max, +, -\infty, 0\rangle$$

bilden den *reellen arktischen Semiring*. Analog auch $\bar{\mathbb{N}}_{\text{ark}}, \bar{\mathbb{Z}}_{\text{ark}}, \bar{\mathbb{Q}}_{\text{ark}}$.

(3) Der *Boole'sche Semiring*

$$\mathbb{B}_2 = \langle \mathbf{2}, \max, \min, 0, 1\rangle$$

mit Grundmenge $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ und den Operationen $\max = \vee = \text{or}$ und $\min = \wedge = \text{and}$. Sehr ähnlich ist der *Restklassensemiring*

$$\mathbb{F}_2 = \langle \mathbf{2}, +, \cdot, 0, 1\rangle$$

mit den Operationen $+ = \dot{\vee} = \text{xor}$ und $\cdot = \wedge = \text{and}$.

□

Bemerkung: Für einen Semiring $\mathbb{S} = \langle S, +, \cdot, 0, 1\rangle$ heißt

$$\mathbb{S}_{\text{add}} := \langle S, +, 0\rangle$$

additives Monoid und analog nennen wir

$$\mathbb{S}_{\text{mult}} := \langle S, \cdot, 1\rangle$$

multiplikatives Monoid. $\underline{\mathbb{S}} = \langle \mathbb{S}, \leq\rangle$ heißt *geordneter Semiring*, wenn $\langle \mathbb{S}_{\text{add}}, \leq\rangle$ ein geordnetes Monoid ist. $\underline{\mathbb{S}}$ heißt *positiv geordnet*, falls $\langle \mathbb{S}_{\text{add}}, \leq\rangle$ positiv geordnet ist.

Definition 1.11 (Semiringhomomorphismus)

Für zwei Semiringe $\mathbb{S}_1 = \langle S_1, +, \cdot, 0, 1\rangle$ und $\mathbb{S}_2 = \langle S_2, \oplus, \odot, \mathrm{O}, \mathrm{I}\rangle$ heißt $\phi\colon \mathbb{S}_1 \to \mathbb{S}_2$ nun *Semiringhomomorphismus* von $\mathbb{S}_1$ nach $\mathbb{S}_2$, falls $\phi_{\text{add}}\colon (\mathbb{S}_1)_{\text{add}} \to (\mathbb{S}_2)_{\text{add}}$ und $\phi_{\text{mult}}\colon (\mathbb{S}_1)_{\text{mult}} \to (\mathbb{S}_2)_{\text{mult}}$ Monoidhomomorphismen sind.

Bemerkung: Ein idempotenter Semiring $\mathbb{S} = \langle S, +, \cdot, 0, 1\rangle$, d.h. $+$ ist idempotent, ist geordnet vermöge

$$r \leq s \quad :\Leftrightarrow \quad r + s = s$$

für alle $r, s \in S$. [1] Nun ist $\langle S, \leq, \cdot, 1\rangle$ genau dann eine residuiertes geordnetes Monoid, wenn die Mengen $M_a^y := \{x \in S \mid x \cdot a \leq y\}$ für alle $a, y \in S$ additiv abgeschlossen sind. [2] $\mathbb{S}$ heißt *idempotent-vollständig*, falls $\mathbb{S}$ ein idempotenter vollständiger Verband und bezüglich $\bigvee$ vollständig ist.

Beispiel: Betrachten wir den idempotenten reellen tropischen Semiring $\bar{\mathbb{R}}_{\text{trop}} = \langle \bar{\mathbb{R}}, \min, +, \infty, 0\rangle$, so erhalten wir nach vorangegangener Bemerkung eine Halbordnung, es gilt $\min\{x, y\} = y \Leftrightarrow y \leq x$. Damit ist nun

$$\langle \bar{\mathbb{R}}, \geq, +, 0\rangle$$

ein residuierter vollständig-verbandsgeordneter Monoid. Analog sehen wir bei Betrachtung des arktischen Semirings $\bar{\mathbb{R}}_{\text{ark}} = \langle \bar{\mathbb{R}}, \max, +, -\infty, 0\rangle$, dass auch

$$\langle \bar{\mathbb{R}}, \leq, +, 0\rangle$$

ein residuierter vollständig-verbandsgeordneter Monoid ist.

□

[1] Die Reflexivität von $\leq$ folgt sofort aus der Idempotenz von $+$. Für $r \leq s \leq t$ gilt $r + s = s$ und $s + t = t$, damit ist $r + t = r + (s + t) = (r + s) + t = s + t = t$. Für $r \leq s \leq r$ gilt $r + s = s$ und $s + r = r$, also sofort $r = s$.

[2] Dies gilt wegen $(x_1 + x_2) \cdot a = x_1 \cdot a + x_2 \cdot a \leq y + y = y$ für alle $x_1, x_2 \in M_a^y$.

Satz 1.12 (arktischer Semiring, tropischer Semiring)
Sei $\underline{\mathbb{L}} = \langle L, \leq, *, \mathrm{e}\rangle$ ein kommutativer residuierter vollständig-verbandsgeordneter Monoid mit kleinstem Element $\perp$ und größtem Element $\top$. Dann ist

$$\underline{\mathbb{L}}_{\text{ark}} = \langle L, \vee, *, \perp, \mathrm{e}\rangle$$

ein Semiring und heißt *arktischer Semiring* zu $\underline{\mathbb{L}}$. Dual ist

$$\underline{\mathbb{L}}_{\text{trop}} = \langle L, \wedge, \div, \top, \mathrm{e}\rangle$$

mit $x \div y = z :\Leftrightarrow\ x = z * y$ ein Semiring und heißt *tropischer Semiring* zu $\underline{\mathbb{L}}$.

Definition 1.13 (vollständiger Semiring)

Sei $\mathbb{S} = \langle S, +, \cdot, 0, 1\rangle$ ein Semiring und $\sum\colon \bigcup\{S^I \mid I \text{ Menge}\} \to S$ eine Klassenabbildung. Dann heißt $\mathbb{S}$ vollständig bezüglich $\sum$, falls $\mathbb{S}_+$ vollständig bezüglich $\sum$ ist und für eine Menge I, eine Abbildung $\alpha \in S^I$ und einen Skalar $s \in S$ gilt stets

(iii) $s \cdot (\sum \alpha) = \sum(s \lhd \alpha)$ und $(\sum \alpha) \cdot s = \sum(\alpha \rhd s)$.

$\sum$ heißt dann auch *vollständiges inneres Semiring-Maß*.

Satz 1.14
Für ein residuiertes vollständig-verbandsgeordnetes Monoid $\underline{\mathbb{L}}$ ist der zugehörige arktische Semiring $\underline{\mathbb{L}}_{\text{ark}}$ vollständig bezüglich $\bigvee$.

Definition 1.15 (stetiger Semiring)

Sei $\underline{S} = \langle S, \leq\rangle$ eine geordnete Menge und $\mathbb{S} = \langle S, +, \cdot, 0, 1\rangle$ ein Semiring. $\underline{\mathbb{S}} = \langle \mathbb{S}, \leq\rangle$ heißt *stetiger Semiring*, wenn $\langle \mathbb{S}_{\text{add}}, \leq\rangle$ ein stetiges Monoid ist und

(iv) Für jede gerichtete Teilmenge X in $\langle S, \leq\rangle$ und alle $s \in S$ gelten $s \cdot (\bigvee X) = \bigvee(s \cdot X)$ und $(\bigvee X) \cdot s = \bigvee(X \cdot s)$.

Satz 1.16
Ist $\underline{\mathbb{S}} = \langle S, \leq, +, \cdot, 0, 1\rangle$ ein geordneter stetiger Semiring, so ist $\underline{\mathbb{S}}$ vollständig bezüglich $\sum$ vermöge

$$\sum\colon \begin{array}{l} \bigcup\{S^I \mid I \text{ Menge}\} \to S \\ \qquad\qquad \alpha \mapsto \bigvee_{X \in 2^I_{\text{fin}}} \bigplus_{i \in X} \alpha(i). \end{array}$$

Satz 1.17 (Endomorphismensemiring)
Falls $\mathbb{M}$ kommutativ ist, so ist

$$\mathbb{E}\mathrm{nd}\mathbb{M} := \langle \mathrm{End}\mathbb{M}, \oplus, *, 0, 1 \rangle$$

ein Semiring, der sogenannte *Endomorphismensemiring* zu $\mathbb{M}$.

Satz 1.18
Sei $\mathbb{S} = \langle S, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ ein Semiring. Die Abbildung

$$\rho: \begin{array}{l} \mathbb{S} \to \mathbb{E}\mathrm{nd}\mathbb{S}_+ \\ s \mapsto \rho_s : \begin{array}{l} S \to S \\ r \mapsto r \cdot s \end{array} \end{array}$$

ist ein Monomorphismus.

Beweis: $\rho_{s \cdot t} = \rho_s * \rho_t$, $\rho_{s+t} = \rho_s \oplus \rho_t$ und $\rho_s 1 = s$. ■

Definition 1.19 (Semiringmodul)

Sei $\mathbb{M} = \langle M, *, \mathrm{e} \rangle$ ein kommutatives Monoid und $\mathbb{S} = \langle S, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ ein Semiring. Das Tripel

$$\mathbb{M}_{\mathbb{S}} := \langle \mathbb{M}, \mathbb{S}, \triangleright \rangle$$

heißt *rechtsseitiges Semiringmodul* von $\mathbb{S}$ auf $\mathbb{M}$ vermöge $\triangleright$ (kurz: $\mathbb{S}$-Modul), wenn

(i) $\langle M, \mathbb{S}_{\mathrm{mult}}, \triangleright \rangle$ Monoidwirkung
(ii) $\triangleright$ biadditiv, d.h. $\_ \triangleright s \in \mathrm{End}\mathbb{M}$ und $m \triangleright \_ \in \mathrm{Hom}(\mathbb{S}_{\mathrm{add}}, \mathbb{M})$.

Definition 1.20 (Algebra)

Seien $\mathbb{A}, \mathbb{S}$ Semiringe und $\triangleleft : S \times A \to A$ eine Abbildung. Dann heißt

$${}_{\mathbb{S}}\mathbb{A} = \langle \mathbb{S}, \mathbb{A}, \triangleleft \rangle$$

$\mathbb{S}$-*Algebra*, falls $\langle \mathbb{A}_{\mathrm{add}}, \mathbb{S}, \triangleleft \rangle$ ein linksseitiger $\mathbb{S}$-Modul ist. ${}_{\mathbb{S}}\mathbb{A}$ heißt *regulär*, wenn $s \triangleleft (a_1 \cdot a_2) = (s \triangleleft a_1) \cdot a_2 = a_1 \cdot (s \triangleleft a_2)$ für alle $a_1, a_2 \in A$ und $s \in S$ gilt.

Definition 1.21 (vollständige Algebra)

Sei ${}_{\mathbb{S}}\mathbb{A}$ eine Algebra und $\sum_{\mathbb{A}} : \bigcup\{A^I \mid I \text{ Menge}\} \to A$, $\sum_{\mathbb{S}} : \bigcup\{S^I \mid I \text{ Menge}\} \to S$ Klassenabbildungen. Dann heißt ${}_{\mathbb{S}}\mathbb{A}$ vollständig bezüglich $\langle \sum_{\mathbb{A}}, \sum_{\mathbb{S}} \rangle$, falls $\mathbb{A}$

vollständig bezüglich $\sum_{\mathbb{A}}$ sowie $\mathbb{S}$ vollständig bezüglich $\sum_{\mathbb{S}}$ ist und für jede Menge I, Abbildungen $\alpha \in A^I$, $\beta \in S^I$ und $a \in A$, $s \in S$ stets

(iv) $s \triangleleft (\sum_{\mathbb{A}} \alpha) = \sum_{\mathbb{A}} (s \triangleleft \alpha)$ und $(\sum_{\mathbb{S}} \beta) \triangleleft a = \sum_{\mathbb{A}} (\beta \triangleleft a)$

gilt.

Definition 1.22 ($\mathbb{S}$-lineare Abbildung)

Seien $(\mathbb{M}_1)_{\mathbb{S}} = \big\langle \langle M_1, *, \mathrm{e} \rangle, \langle S, +, \cdot, 0, 1 \rangle, \triangleright \big\rangle$ und $(\mathbb{M}_2)_{\mathbb{S}} = \big\langle \langle M_2, +, \mathrm{o} \rangle, \langle S, +, \cdot, 0, 1 \rangle, \triangleright \big\rangle$ $\mathbb{S}$-Moduln. Eine Abbildung

$$\phi\colon\ (\mathbb{M}_1)_{\mathbb{S}} \to (\mathbb{M}_2)_{\mathbb{S}}$$

heißt $\mathbb{S}$-linear, falls $\phi\colon\ M_1 \to M_2$ eine Abbildung mit

(i) $\phi((m \triangleright s) * (n \triangleright t)) = \big(\big(\phi m\big) \triangleright s\big) + \big(\big(\phi n\big) \triangleright t\big)$

ist. Eine Abbildung zwischen $\mathbb{S}$-Algebren heißt *Algebrahomomorphismus*, wenn sie $\mathbb{S}$-linear und ein Semiring-Homomorphismus ist.

Definition 1.23 (vollständiger Homomorphismus)

Ein Homomorphismus Φ heißt *vollständig* bezüglich $\sum$, wenn $\Phi \sum \alpha = \sum \Phi\alpha$ gilt.

Satz 1.24 (Fortsetzungssatz)
Sei X eine Menge und $\mathbb{M}_{\mathbb{S}}$ ein $\mathbb{S}$-Modul. Ist $\gamma \in M^X$ eine Vektorenfamilie, dann existiert genau eine $\mathbb{S}$-lineare Abbildung

$$f_\gamma\colon \mathbb{S}^\wedge(X) \to \mathbb{M}_{\mathbb{S}}$$

mit $\delta^X * f_\gamma = \gamma$.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\delta^X"'] \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
\mathbb{S}^\wedge(X) \arrow[rr, "\exists! f_\gamma"'] & {} & \mathbb{M}_{\mathbb{S}}
\end{tikzcd}$$

Satz 1.25 (direktes (Ko)Produkt)
Sei $\mathbb{S} = \langle S, +, \cdot, 0, 1\rangle$ ein Semiring und X eine Menge. Ein Element $\vec{s} \in S^X$ heißt X-*Vektor* über $\mathbb{S}$. Wir definieren die punktweise Addition vermöge

$$\oplus\colon \begin{array}{l} \mathbb{S}^X \times \mathbb{S}^X \to \mathbb{S}^X \\ (\vec{s}_1, \vec{s}_2) \mapsto \vec{s}_1 \oplus \vec{s}_2\colon \begin{array}{l} X \to S \\ x \mapsto (\vec{s}_1 x) + (\vec{s}_2 x) \end{array} \end{array}$$

und analog die punktweise Multiplikation $\odot$. Als neutrale Elemente haben wir den *Nullvektor* $\vec{0}\colon X \to S, x \mapsto 0$ und analog den *Einsvektor* $\vec{1}\colon X \to S, x \mapsto 1$. Nun ist

$$\mathbb{S}^X := \langle S^X, \oplus, \odot, \vec{0}, \vec{1}\rangle$$

ein Semiring und heißt X-faches *direktes Produkt* von $\mathbb{S}$ und

$$\mathbb{S}^{(X)} := \langle S^{(X)}, \oplus, \odot, \vec{0}, \vec{1}\rangle$$

mit $S^{(X)} := \{\vec{s} \in S^X \mid |\mathrm{supp}\,\vec{s}| < \infty\}$ und

$$\mathrm{supp}\colon \begin{array}{l} S^X \to 2^X \\ \vec{s} \mapsto \{x \in X \mid \vec{s}x \neq 0\} \end{array}$$

ist ein Untersemiring von $\mathbb{S}^X$ und heißt X-faches *direktes Koprodukt* von $\mathbb{S}$. $\mathrm{supp}\,\vec{s}$ heißt *Träger* von $\vec{s}$. Für $|X| < \infty$ gilt $\mathbb{S}^X = \mathbb{S}^{(X)}$.

Satz 1.26 (Modul(ko)produkt)
Sei $\mathbb{S} = \langle S, +, \cdot, 0, 1\rangle$ ein Semiring und X eine Menge.

$$\mathbb{S}^\wedge X := (\mathbb{S}^X_{\mathrm{add}})_{\mathbb{S}} = \langle \mathbb{S}^X_{\mathrm{add}}, \mathbb{S}, \triangleright\rangle$$

mit $\mathbb{S}^X_{\mathrm{add}} := (\mathbb{S}^X)_{\mathrm{add}}$ und

$$\triangleright\colon \begin{array}{l} S^X \times S \to S^X \\ (\vec{s}, s) \mapsto \vec{s} \triangleright s\colon \begin{array}{l} X \to S \\ x \mapsto (x\vec{s}) \cdot s \end{array} \end{array}$$

ist ein $\mathbb{S}$-Modul und heißt X-faches *Modulprodukt* von $\mathbb{S}$.

$$\mathbb{S}^\wedge(X) := (\mathbb{S}^{(X)}_{\mathrm{add}})_{\mathbb{S}} = \langle \mathbb{S}^{(X)}_{\mathrm{add}}, \mathbb{S}, \triangleright\rangle$$

ist ein $\mathbb{S}$-Untermodul von $\mathbb{S}^\wedge X$ und heißt X-faches *Modulkoprodukt* von $\mathbb{S}$.

Definition 1.27 (Standardbasis)

Sei X eine Menge und $\mathbb{S}$ ein Semiring. Dann heißt

$$\delta^X : \begin{array}{l} X \to S^X \\ x \mapsto \delta^X_x : \begin{array}{l} X \to S \\ y \mapsto \delta^X_{xy} = \begin{cases} 1 & (x = y) \\ 0 & (x \neq y) \end{cases} \end{array} \end{array}$$

Standardbasis von $\mathbb{S}^{(X)}$. δ^X_x heißt *Dirac-Abbildung* an x.

Beispiel: Für $X = \mathbf{n}$ haben wir die Standardbasis

$$\delta^{\mathbf{n}} = \left(\delta^{\mathbf{n}}_0, \delta^{\mathbf{n}}_1, \ldots, \delta^{\mathbf{n}}_{n-1}\right) = \left((1,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,0,1)\right).$$

Allgemeiner gilt für $X = \mathbb{N}$

$$\delta^{\mathbb{N}} = \left(\delta^{\mathbb{N}}_0, \delta^{\mathbb{N}}_1, \ldots\right) = \left((1,0,\ldots), (0,1,0,\ldots), \ldots\right).$$

□

Definition 1.28 (Basis)

Sei X eine Menge und $\mathbb{M}_{\mathbb{S}}$ ein $\mathbb{S}$-Modul. Eine Vektorenfamilie $\gamma \in M^X$ heißt

(i) *unabhängig* in $\mathbb{M}_{\mathbb{S}}$ $:\Leftrightarrow$ $f\gamma$ Monomorphismus
(ii) *erzeugend* in $\mathbb{M}_{\mathbb{S}}$ $:\Leftrightarrow$ $f\gamma$ Epimorphismus
(iii) *Basis* von $\mathbb{M}_{\mathbb{S}}$ $:\Leftrightarrow$ $f\gamma$ Isomorphismus

Definition 1.29 (Matrix)

Sei $\mathbb{S}$ ein Semiring und X, Y endliche Mengen. Eine Abbildung $A \in S^{X \times Y}$ heißt auch $X \times Y$-*Matrix* über $\mathbb{S}$. Wir definieren

$$\mathrm{row}\colon \begin{array}{l} S^{X\times Y} \to (S^Y)^X \\ A \mapsto \mathrm{row}A\colon \begin{array}{l} X \to S^Y \\ x \mapsto (\mathrm{row}A)x = A(x,\_)\colon \begin{array}{l} Y \to S \\ y \mapsto ((\mathrm{row}A)x)y = A(x,y), \end{array} \end{array} \end{array}$$

$A(x,\_)$ heißt x-te *Zeile* von A und analog

$$\mathrm{col}\colon \begin{array}{l} S^{X\times Y} \to (S^X)^Y \\ A \mapsto \mathrm{col}A\colon \begin{array}{l} Y \to S^X \\ y \mapsto (\mathrm{col}A)y = A(\_,y)\colon \begin{array}{l} X \to S \\ x \mapsto ((\mathrm{col}A)y)x = A(x,y), \end{array} \end{array} \end{array}$$

$A(\_,y)$ heißt y-te *Spalte* von A.

Weiterhin ist $\oplus$ die komponentenweise Addition und

$$*\colon \begin{array}{l} S^{X\times Y} \times S^{Y\times Z} \to S^{X\times Z} \\ (A,B) \mapsto A * B = \bigoplus_{y\in Y} \mathrm{row}A\_y \cdot \mathrm{col}B\_y = \bigoplus_{y\in Y} A(\_,y)\cdot B(y,\_). \end{array}$$

Die Matrix

$$\mathrm{O}\colon \begin{array}{l} X \times Y \to S \\ (x,y) \mapsto 0 \end{array}$$

heißt $X \times Y$-*Nullmatrix* und

$$\mathrm{I}\colon \begin{array}{l} X \times X \to S \\ (x,y) \mapsto \delta^X_{xy} \end{array}$$

heißt $X \times X$-*Einsmatrix*.

Satz 1.30 (Matrizensemiring)

$$\mathbb{M}\mathrm{at}_X\mathbb{S} := \langle S^{X\times X}, \oplus, *, \mathrm{O}, \mathrm{I}\rangle$$

ist ein Semiring und heißt $X \times X$-*Matrizensemiring* über $\mathbb{S}$.

Satz 1.31 (Darstellungssatz)
Der Endomorphismensemiring zu $\mathbb{S}^\wedge X$ ist kanonisch isomorph zum $X \times X$-Matrizensemiring über $\mathbb{S}$ vermöge

$$\mathrm{mat}\colon \begin{array}{l} \mathbb{E}\mathrm{nd}\mathbb{S}^\wedge X \to \mathbb{M}\mathrm{at}_X \mathbb{S} \\ \alpha \mapsto \mathrm{mat}\alpha\colon \begin{array}{l} X \times X \to S \\ (x, y) \mapsto (\alpha \delta_x^X) y \end{array} \end{array}$$

und

$$\mathrm{end}\colon \begin{array}{l} \mathbb{M}\mathrm{at}_X \mathbb{S} \to \mathbb{E}\mathrm{nd}\mathbb{S}^\wedge X \\ A \mapsto \mathrm{end}A\colon \begin{array}{l} S^X \to S^X \\ \vec{s} \mapsto \vec{s} * A = \bigplus_{x \in X} \vec{s}x \cdot \mathrm{col}A\_x = \bigplus_{x \in X} \vec{s}x \cdot A(x, \_). \end{array} \end{array}$$

Die Zeilen der Standard-Darstellungsmatrix sind die Bilder der Standardbasisvektoren.

Satz 1.32 (Darstellungssatz)
Sei $\mathbb{S}$ ein Semiring und X, Y endliche Mengen. Dann sind

$$\mathrm{mat}\colon \begin{array}{l} \mathbb{H}\mathrm{om}(\mathbb{S}^\wedge X, \mathbb{S}^\wedge Y) \to \mathbb{M}\mathrm{at}_{X,Y} \mathbb{S} \\ \alpha \mapsto \mathrm{mat}\alpha\colon \begin{array}{l} X \times Y \to S \\ (x, y) \mapsto (\alpha \delta_x^X) y. \end{array} \end{array}$$

und

$$\mathrm{hom}\colon \begin{array}{l} \mathbb{M}\mathrm{at}_{X,Y} \mathbb{S} \to \mathbb{H}\mathrm{om}(\mathbb{S}^\wedge X, \mathbb{S}^\wedge Y) \\ A \mapsto \mathrm{hom}A\colon \begin{array}{l} S^X \to S^Y \\ \vec{s} \mapsto \vec{s} * A = \bigplus_{x \in X} \vec{s}x \cdot \mathrm{col}A\_x = \bigplus_{x \in X} \vec{s}x \cdot A(x, \_). \end{array} \end{array}$$

Isomorphismen. Dabei sind

$$\mathbb{H}\mathrm{om}(\mathbb{S}^\wedge X, \mathbb{S}^\wedge Y) := \langle \mathrm{Hom}(\mathbb{S}^\wedge X, \mathbb{S}^\wedge Y), \oplus, \mathrm{o} \rangle$$

$$\mathbb{M}\mathrm{at}_{X,Y} \mathbb{S} := \langle \mathrm{Mat}_{X,Y} \mathbb{S}, \oplus, \mathrm{O} \rangle$$

kommutative Monoide. Weiterhin gelten

$$\mathrm{mat}(\alpha * \beta) = (\mathrm{mat}\alpha) * (\mathrm{mat}\beta)$$

$$\mathrm{hom}(A * B) = (\mathrm{hom}A) * (\mathrm{hom}B).$$

1.3 kovariante Kategorien

Definition 1.33 (Klassengraph)

Ein Tupel

$$G = \langle V, E, \sigma, \tau \rangle$$

$$\sigma e \bullet \xrightarrow{\;e\;} \bullet\, \tau e$$

heißt *Klassengraph*, falls V und E Klassen sind sowie $\sigma \colon E \to V$ und $\tau \colon E \to V$ Klassenabbildungen sind. Wenn jedoch V und E Mengen sowie σ und τ Abbildungen sind, so heißt G *Graph*. $\mathrm{Ser}G := \{(e,f) \in E \times E \mid \tau e = \sigma f\}$ heißt *Serienrelation* von G und analog heißt $\mathrm{Par}G := \{(e,f) \in E \times E \mid \sigma e = \sigma f \wedge \tau e = \tau f\}$ *Parallelenrelation* von G.

Beispiel: Sei M eine Menge. Für eine Relation R auf M ist der zugehörige Graph $G(M,R) = \langle M, R, \pi_1, \pi_2 \rangle$. Der Schleifengraph zu M ist definiert als $GM := \langle \{X\}, M, m \mapsto X, m \mapsto X \rangle$.

$$m \bullet \xrightarrow{\;(m,n)\;} \bullet\, n$$

□

Definition 1.34 (kovariante Kategorie)

Für einen Klassengraph G heißt

$$\mathbf{G} = \langle G, *, \imath \rangle$$

kovariante Kategorie, falls gelten:

$$* \colon E \times E \to_{\mathrm{p}} E$$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "e_1"] \arrow[rr, bend right, "e_1 * e_2"'] & \bullet \arrow[r, "e_2"] & \bullet \end{tikzcd}$$

ist eine partielle Operation, die jedes serielle Paar $(e_1, e_2) \in E \times E$ mit $\tau e_1 = \sigma e_2$ auf ein Element $e_1 * e_2 \in E$ mit $\sigma(e_1 * e_2) = \sigma e_1$ und $\tau(e_1 * e_2) = \tau e_2$ abbildet. $*$ ist assoziativ. ($* \colon \mathrm{Ser}G \to E$ ist eine Abbildung.)

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "e_1"'] \arrow[rr, bend left, "e_1 * e_2"] & \bullet \arrow[r, "e_2"] \arrow[rr, bend right, "e_2 * e_3"'] & \bullet \arrow[r, "e_3"] & \bullet \end{tikzcd}$$

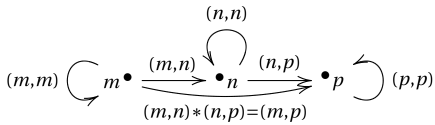
$$\imath \colon V \to E$$

$$\begin{tikzcd} v \bullet \arrow[loop right, "\imath v"] \end{tikzcd}$$

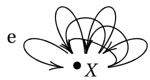
ist eine Klassenabbildung mit $\sigma \imath v = v = \tau \imath v$ für alle $v \in V$. $\imath$ ist neutral bezüglich $*$, also gilt sowie $(\imath \sigma e) * e = e = e * (\imath \tau e)$ für alle $e \in E$. $\mathbf{G}$ heißt *klein*, falls G ein Graph ist.

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left, "\imath \sigma e"] \arrow[r, "e"] & \bullet \arrow[loop right, "\imath \tau e"] \end{tikzcd}$$

Beispiel: Sei M eine Menge und R eine Quasiordnung auf M. Der zugehörige Graph ist $G(M,R)$ und wir setzen noch $(m,n)*(n,p)=(m,p)$ und $\imath m=(m,m)$ und erhalten die kleine kovariante Kategorie $\mathbf{G}(M,R)=\langle G(M,R),*,\imath\rangle$.



Für einen Monoid $\mathbb{M}=\langle M,*,\mathrm{e}\rangle$ ist die zugehörige Schleifenkategorie definiert als $\mathbf{G}\mathbb{M}=\langle GM,*,X\mapsto\mathrm{e}\rangle$.



□

Satz 1.35 (Minkowskisemiring)
Sei $\mathbf{G}$ eine kovariante Kategorie. Dann ist

$$\mathrm{Mink}\mathbf{G}=\langle 2^E,\cup,*,\emptyset,\imath V\rangle$$

mit $X*Y:=\{x*y\,|\,(x,y)\in X\times Y\cap\mathrm{Ser}G\}$ ein Semiring und heißt *Minkowskisemiring* von $\mathbf{G}$. Mink$\mathbf{G}$ ist vollständig bezüglich $\bigcup$.

Beispiel: Sei M eine Menge und $M\times M$ die Allrelation auf M. Der Minkowskisemiring zu $\mathbf{G}(M,M\times M)$ ist

$$\mathrm{Rel}_2M:=\mathrm{Mink}\mathbf{G}(M,M\times M)=\langle 2^{M\times M},\cup,*,\emptyset,\Delta_M\rangle$$

und heißt *Relationensemiring* zu M.
Für einen Monoid $\mathbb{M}$ ergibt sich der Minkowskisemiring zu

$$\mathrm{Mink}\mathbb{M}:=\mathrm{Mink}\mathbf{G}\mathbb{M}=\langle 2^M,\cup,*,\emptyset,\{\mathrm{e}\}\rangle$$

und heißt *Monoidsemiring* zu $\mathbb{M}$.
Sei A ein Alphabet. Dann ist

$$\mathrm{Slang}A:=\mathrm{Mink}\mathbf{G}\mathbb{A}^*=\langle 2^{A^*},\cup,*,\emptyset,\{\epsilon\}\rangle$$

ein Semiring und heißt *Sprachensemiring* zu A.

□

Satz 1.36 ((volle) Konvolutionsalgebra)
Sei $\mathbb{S}$ ein Semiring und $\mathbf{G}$ eine kovariante Kategorie. Wir definieren eine Multiplikation vermöge

$$*: \begin{array}{l} S^E \times S^E \to S^E \\ (u,v) \mapsto u * v \colon \begin{array}{l} E \to S \\ e \mapsto \displaystyle\bigplus_{(c,d)\in \mathrm{Split}_{\mathbf{G}} e} u(c)\cdot v(d) \end{array} \end{array}$$

mit $\mathrm{Split}_{\mathbf{G}} e := \{(c,d) \in \mathrm{Ser} G \mid c * d = e\}$ und dem neutralen Element

$$\mathrm{I}_{\mathbf{G}} \colon \begin{array}{l} E \to S \\ e \mapsto \begin{cases} 1 & (e \in \imath V) \\ 0 & (\text{sonst}). \end{cases} \end{array}$$

Wenn G knotenendlich ist, d.h. $|V| < \infty$, dann ist

$$\mathbb{S}[\mathbf{G}] = \langle S^{(E)}, +, *, 0_E, \mathrm{I}_{\mathbf{G}} \rangle$$

eine $\mathbb{S}$-Algebra und heißt *Konvolutionsalgebra* von $\mathbf{G}$ bezüglich $\mathbb{S}$.
Wenn $\mathbf{G}$ splitendlich ist, d.h. für alle $e \in E$ ist $|\mathrm{Split}_{\mathbf{G}} e| < \infty$, oder wenn $\mathbb{S}$ vollständig ist bezüglich $\sum$ mit

$$*: \begin{array}{l} S^E \times S^E \to S^E \\ (u,v) \mapsto u * v \colon \begin{array}{l} E \to S \\ e \mapsto \displaystyle\sum_{(c,d)\in \mathrm{Split}_{\mathbf{G}} e} u(c)\cdot v(d), \end{array} \end{array}$$

dann ist

$$\mathbb{S}[[\mathbf{G}]] = \langle S^E, +, *, 0_E, \mathrm{I}_{\mathbf{G}} \rangle$$

eine $\mathbb{S}$-Algebra und heißt *volle Konvolutionsalgebra* von $\mathbf{G}$ bezüglich $\mathbb{S}$.

Beispiel: Sei M eine Menge, dann heißt

$$\mathbb{M}\mathrm{at}_M \mathbb{S} := \mathbb{S}[[\mathbf{G}(M, M \times M)]] = \langle \mathbb{S}^{M\times M}, +, *, 0_M, \mathrm{I}_M \rangle$$

auch $M \times M$*-Matrizenalgebra* über $\mathbb{S}$.
Für einen Monoid $\mathbb{M}$ heißt

$$\mathbb{S}[[\mathbb{M}]] := \mathbb{S}[[\mathbf{G}\mathbb{M}]] = \langle \mathbb{S}^M, +, *, 0_M, \mathrm{I}_{\mathbb{M}} \rangle$$

Monoidalgebra von $\mathbb{M}$ bezüglich $\mathbb{S}$. Betrachten wir speziell den Semiring der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit üblicher Addition und Multiplikation und das Monoid der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit üblicher Addition, so erhalten wir die *komplexe Polynomalgebra*

$$\mathbb{C}[X] := \mathbb{C}[\mathbf{G}\mathbb{N}] = \langle \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}, +, *, 0, 1 \rangle$$

mit $0 := (0, \dots)$ und $1 := (1, 0, \dots)$. Um zur üblichen Terminologie zu gelangen, setzen wir $X := (0,1,0,\dots)$, $X^0 := 1$ und $X^{n+1} := X * X^n$. Dann sind $p(X) = 1 + 2X + 3X^2$ und $p = (1,2,3,0,\dots)$ äquivalente Schreibweisen für das Polynom p. $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ hat die Standardbasis $\delta_n^{\mathbb{N}} =: X^n$, damit schreibt sich die Faltung als

$$p * q = \mathop{\Large +}_{n \in \mathbb{N}} \left(\mathop{\Large +}_{\substack{i, j \in \mathbb{N} \\ i + j = n}} p(i) \cdot q(j) \right) \triangleleft X^n.$$

$\mathbf{G}\mathbb{N}$ ist splitendlich, daher lässt sich auch die *volle Polynomalgebra* $\mathbb{C}[[X]] := \mathbb{C}[[\mathbf{G}\mathbb{N}]]$ bilden. Für eine endliche Menge M und das M-fache Produkt von $\langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle$ erhalten wir

$$\mathbb{C}[\vec{X}] := \mathbb{C}[(X_m)_{m \in M}] := \mathbb{C}[\mathbf{G}\mathbb{N}^M]$$

mit $\delta_\alpha^{\mathbb{N}^M} =: X^\alpha =: \bullet_{m \in M} X_m^{\alpha m}$ und $X_m := \delta_{\delta_m^M}^{\mathbb{N}^M}$.

□

Bemerkung (verallgemeinerte Faltung): Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $\mathrm{Ser}^n G := \{a \in E^{\mathbf{n}} \mid \forall i \in \mathbf{n} - \mathbf{1} \colon (a_i, a_{i+1}) \in \mathrm{Ser} G\}$.

$$\mathop{\Large *}_{i \in \mathbf{n}} p_i = \mathop{\Large +}_{e \in E} \left(\mathop{\Large +}_{a \in \mathrm{Split}_{\mathbf{G}}^n e} \bullet_{i \in \mathbf{n}} p_i(a_i) \right) \triangleleft \delta_e^E$$

mit $\mathrm{Split}_{\mathbf{G}}^n e := \{a \in \mathrm{Ser}^n G \mid \mathop{\Large *}_{i \in \mathbf{n}} a_i = e\}$.

Satz 1.37
Für jede kleine kovariante Kategorie $\mathbf{G}$ ist die Abbildung

$$\chi^E \colon \quad \begin{aligned} &\mathrm{Mink}\mathbf{G} \to \mathbb{B}[[\mathbf{G}]] \\ &X \mapsto \chi_X^E \colon \quad \begin{aligned} &E \to \mathbb{B} \\ &e \mapsto \begin{cases} 1 & (e \in X) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases} \end{aligned} \end{aligned}$$

ein Isomorphismus.

Definition 1.38 (kovariante Additionskategorie)

Sei $\langle G, *, \imath \rangle$ eine kovariante Kategorie. Dann heißt

$$\langle G, +, *, \mathrm{o}, \imath \rangle$$

kovariante Additionskategorie, wenn gelten:

$$+\colon E \times E \to_{\mathrm{p}} E$$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left, "e_1"] \arrow[r, "e_2"] \arrow[r, bend right, "e_1+e_2"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

ist eine partielle Operation, die jedes parallele Paar $(e_1, e_2) \in E \times E$ mit $\sigma e_1 = \sigma e_2$ und $\tau e_1 = \tau e_2$ auf ein Element $e_1 + e_2 \in E$ mit $\sigma(e_1 + e_2) = \sigma e_1$ und $\tau(e_1 + e_2) = \tau e_1$ abbildet. $+$ ist assoziativ. ($+\colon \mathrm{Par}G \to E$ ist eine Abbildung.)

$$\mathrm{o}\colon V \times V \to E$$

$$v_1 \bullet \xrightarrow{\mathrm{o}(v_1, v_2)} \bullet\, v_2$$

ist eine Klassenabbildung und o ist neutral bezüglich $+$, d.h. es gilt $\sigma\mathrm{o}(v_1, v_2) = v_1$ und $\tau\mathrm{o}(v_1, v_2) = v_2$ für $v_1, v_2 \in V$ sowie $\mathrm{o}(\sigma e, \tau e) + e = e = e + \mathrm{o}(\sigma e, \tau e)$ für alle $e \in E$.

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "e"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{o}(e\sigma, e\tau)"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

o ist absorbierend bezüglich $*$, also gilt $\mathrm{o}(v_1, \sigma e) * e = \mathrm{o}(v_1, \tau e)$ und $e * \mathrm{o}(\tau e, v_2) = \mathrm{o}(\sigma e, v_2)$ für $e \in E$, $v_1, v_2 \in V$.

$$v_1 \bullet \xrightarrow{\mathrm{o}(v_1, e\sigma)} \; \xrightarrow{e} \; \xrightarrow{\mathrm{o}(e\tau, v_2)} \bullet\, v_2$$

$*$ ist distributiv über $+$, d.h. es gilt $e_1 * (e_2 + e_3) * e_4 = e_1 * e_2 * e_4 + e_1 * e_3 * e_4$ für $(e_1, e_2) \in \mathrm{Ser}G$, $(e_2, e_3) \in \mathrm{Par}G$ und $(e_3, e_4) \in \mathrm{Ser}G$.

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "e_1"] & \bullet \arrow[r, bend left, "e_2"] \arrow[r, bend right, "e_3"'] & \bullet \arrow[r, "e_4"] & \bullet \end{tikzcd}$$

Satz 1.39 (Matrizenkategorie)
Sei $V := \{X \mid X \text{ endliche Menge}\}$ und $E := \bigcup_{X,Y \in V} S^{X \times Y}$. Für eine Matrix $A \in S^{X \times Y} \subseteq E$ setzen wir $\sigma\colon A \mapsto X$ und $\tau\colon A \mapsto Y$. Weiter sind $\mathrm{o}\colon (X, Y) \mapsto \mathrm{O}$ und $\imath\colon X \mapsto \mathrm{I}$ Abbildungen. Dann ist

$$\mathbb{M}\mathrm{at}\$:= \big\langle \langle V, E, \sigma, \tau \rangle, \oplus, *, \mathrm{o}, \imath \big\rangle$$

eine kovariante Additionskategorie.

2 Varietäten, Ideale & Kongruenzen

Definition 2.1 (mehrwertiger Kontext)

Seien G, M, W Mengen, dann heißt

$$\mathbb{K} = \langle G, M, W, I\rangle$$

mehrwertiger Kontext, falls $I \subseteq G \times M \times W$ eine ternäre Relation ist, sodass aus $(g, m, w) \in I$ und $(g, m, v) \in I$ stets $w = v$ folgt. Die Elemente von G heißen *Gegenstände*, die von M *(mehrwertige) Merkmale* und die von W *Werte*. Für $(g, m, w) \in I$ sagen wir auch, *der Gegenstand g hat beim Merkmal m den Wert w*. $\mathbb{K}$ heißt *vollständig*, falls für jeden Gegenstand g und jedes Merkmal m ein Wert w mit $(g, m, w) \in I$ existiert.

Bemerkung: $\mathbb{K} = \langle G, M, W, I\rangle$ ist genau dann ein mehrwertiger Kontext, wenn es eine Abbildung $\Bbbk\colon G \times M \to W$ gibt, sodass $I = \operatorname{graph}\Bbbk = \{(g, m, \Bbbk(g, m))\}$. Wir schreiben dann auch $\mathbb{K} = \mathbb{K}_{\Bbbk}$.
Die Gegenstände g können auch als partielle Abbildungen $g\colon M \to_{\mathrm{p}} W$ interpretiert werden vermöge $g(m) = w \;:\Leftrightarrow\; (g, m, w) \in I$. Analog für die Merkmale.

Bemerkung (Skalierung): Für einen mehrwertigen Kontext $\mathbb{K} = \langle G, M, W, I\rangle$ heißt

$$\mathbb{K}_{\mathrm{nom}} = \langle G, M \times W, I_{\mathrm{nom}}\rangle$$

mit $I_{\mathrm{nom}} = \{(g, (m, w)) \mid (g, m, w) \in I\}$ *nominal skalierter Kontext* zu $\mathbb{K}$.
Weiter heißt

$$\mathbb{K}_{\mathrm{inv}} = \langle G \times G, M, I_{\mathrm{inv}}\rangle$$

mit $(g_1, g_2) I_{\mathrm{inv}} m \;:\Leftrightarrow\; (g_1, m, w) \in I \wedge (g_2, m, w) \in I \;\Leftrightarrow\; g_1(m) = g_2(m)$ *invariant skalierter Kontext* zu $\mathbb{K}$. Für eine Gegenstandsmenge $A \subseteq G$ heißt

$$A_{\mathrm{inv}} = \{m \in M \mid \forall (g_1, g_2) \in A\colon\; g_1(m) = g_2(m)\}$$

auch *Varietät* zu A bezüglich $\mathbb{K}$ und für eine Merkmalsmenge $B \subseteq M$ nennen wir

$$\theta_B = \{(g_1, g_2) \in G \times G \mid \forall m \in B\colon\; g_1(m) = g_2(m)\}$$

abgeschlossene Kongruenz zu B bezüglich $\mathbb{K}$.

Beispiel: Betrachten wir für einen Monoid $\mathbb{M}$ und eine reguläre Algebra $_{\mathbb{S}}\mathbb{A}$ den mehrwertigen Kontext

$$\mathbb{K} = \langle \mathbb{S}[\mathbb{M}], \mathrm{Hom}(\mathbb{M}, \mathbb{A}_{\mathrm{mult}}), {}_{\mathbb{S}}\mathbb{A}, \{(u, \varphi, u * \varphi)\}\rangle.$$

Die zugehörige Abbildung

$$\Bbbk\colon \begin{array}{l} \mathbb{S}[\mathbb{M}] \times \mathrm{Hom}(\mathbb{M}, \mathbb{A}_{\mathrm{mult}}) \to {}_{\mathbb{S}}\mathbb{A} \\ \qquad\qquad (u, \varphi) \mapsto u * \varphi = \underset{m \in M}{+} u(m) \cdot \varphi(m) \end{array}$$

nennen wir auch *Einsetzungs-/Auswertungshomomorphismus* .

$$\begin{tikzcd} \mathbb{M} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\delta^M"'] & \mathbb{A}_{\mathrm{mult}} \arrow[d, "\mathrm{id}_A"] \\ \mathbb{S}[\mathbb{M}] \arrow[r, "\exists! \rho_\varphi"'] & {}_{\mathbb{S}}\mathbb{A} \\ u \arrow[r, mapsto] & u * \varphi \end{tikzcd}$$

ρ_φ ist ein $\mathbb{S}$-Algebren-Homomorphismus. φ ist festgelegt durch die Bilder auf der Basis $\varphi\delta^M_m$ für $m \in M$. Falls $_{\mathbb{S}}\mathbb{A}$ vollständig bezüglich $\sum$ ist, dann kann auch $u \in \mathbb{S}[[\mathbb{M}]]$ gewählt werden mit $u * \varphi = \sum_{m \in M} u(m) \cdot \varphi(m)$. ρ_φ ist dann vollständig. Speziell für das $\mathbb{M} = \mathbb{N}^{\mathbf{n}}$ und $\mathbb{A} = \mathbb{S}$ ergibt sich der mehrwertige Kontext $\mathbb{K} = \langle \mathbb{S}[\vec{X}], \mathbb{S}^{\mathbf{n}}, \mathbb{S}, \mathrm{graph}\Phi\rangle$ mit $\Phi\colon \mathbb{S}[\vec{X}] \times \mathbb{S}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{S}$, $(p, \vec{x}) \mapsto p\vec{x}$. Für eine Menge $B \subseteq \mathbb{S}^{\mathbf{n}}$ heißt $(\theta_B)_{\mathrm{inv}}$ dann auch *Zariski-Abschluss* von B. Setzen wir $p \perp \vec{x} :\Leftrightarrow p(\vec{x}) = 0$, dann ist $\langle \mathbb{S}[\vec{X}], \mathbb{S}^{\mathbf{n}}, \perp\rangle$ ein formaler Kontext, dessen Umfänge Ideale in $\mathbb{S}[\vec{X}]$ und dessen Inhalte Varietäten in $\mathbb{S}^{\mathbf{n}}$ sind. Die Menge der Inhalte ist $\bigcap$-abgeschlossen und $\cup$-abgeschlossen und heißt *Zariski-Topologie* auf $\mathbb{S}^{\mathbf{n}}$.

□

Definition 2.2 (Partition in Umfänge)

Für einen Kontext $\mathbb{K} = \langle G, M, I\rangle$ heißt eine Teilmenge $\mathscr{P} \subseteq 2^G$ *Partition von G in Umfänge von* $\mathbb{K}$ oder $\mathbb{K}$*-extensionale Partition von G*, falls gelten:

(i) $\mathscr{P} \subseteq \mathbb{E}\mathrm{xt}\mathbb{K}$
(ii) $P \neq \emptyset$ für alle $P \in \mathscr{P}$
(iii) $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ für alle $P_1, P_2 \in \mathscr{P}$ mit $P_1 \neq P_2$
(iv) $G = \bigcup \mathscr{P}$

Bemerkung (Klassifikation): Sei X eine beliebige Menge. Durch eine Klassifikationsabbildung $\alpha\colon X \to 2^G$ kann mit $\mathrm{im}\alpha = \alpha X$ auch eine Partition von G

in Umfänge von $\mathbb{K}$ gegeben sein. α muss dann injektiv sein und somit existiert eine surjektive Abbildung $\beta\colon G \to X$.

Beispiel: Sei $\mathbb{K} = \langle G, M, W, I\rangle$ ein mehrwertiger Kontext. Dann erzeugt die Abbildung

$$\alpha_m\colon \begin{array}{l} mG \to 2^G \\ \quad w \mapsto (m,w)^{I_{\text{nom}}} = \{g \in G \mid g(m) = w\} \end{array}$$

mit $\operatorname{im}\alpha_m = \{(m,w)^{I_{\text{nom}}} \mid w \in mG\}$ eine Partition von G in Umfänge von $\mathbb{K}_{\text{nom}}$, für alle $m \in M$.
Für ein Merkmal m setzen wir $\ker m := m^{I_{\text{inv}}} = \{(g_1, g_2) \in G\times G | g_1(m) = g_2(m)\}$, dann erzeugt die Abbildung

$$\alpha_m\colon \begin{array}{l} G \to 2^G \\ g \mapsto [g]\ker m = \{g_1 \in G \mid g(m) = g_1(m)\} \end{array}$$

mit $\operatorname{im}\alpha_m = G/_{\ker m}$ eine $\mathbb{K}_{\text{nom}}$-extensionale Partition von G, für alle $m \in M$. Definieren wir für eine Merkmalsmenge $B \subseteq M$ noch $\ker B := \bigcap_{m\in B} \ker m$, so erzeugt die Abbildung

$$\alpha_B\colon \begin{array}{l} G \to 2^G \\ g \mapsto [g]\ker B = \{g_1 \in G \mid \forall m \in B\colon\ g(m) = g_1(m)\} \end{array}$$

mit $\operatorname{im}\alpha_B = G/_{\ker B}$ eine $\mathbb{K}_{\text{nom}}$-extensionale Partition von G, für alle $B \subseteq M$. $\square$

Lemma 2.3 Ein Umfang θ von $\mathbb{K}_{\text{inv}}$ (abgeschlossene Kongruenz) liefert eine extensionale Partition $G/_\theta$ von $\mathbb{K}_{\text{nom}}$. Es gilt also

$$\operatorname{Ext}\mathbb{K}_{\text{nom}} = \bigcup_{\theta\in\operatorname{Ext}\mathbb{K}_{\text{inv}}} G/_\theta.$$

3 Heyting-Algebren

Definition 3.1 (Heyting-Algebra)

> Sei $\langle H, \leq \rangle$ ein beschränkter Verband. Wenn $\mathbb{H} = \langle H, \leq, \wedge, \top \rangle$ ein residuiertes geordnetes Monoid ist, dann heißt $\mathbb{H}$ *Heyting-Algebra*. $\mathbb{H}$ heißt *vollständig*, falls $\langle H, \leq \rangle$ ein vollständiger Verband ist.

Bemerkung (Pseudokomplement): $\mathbb{H}$ ist genau dann eine Heyting-Algebra, wenn es für alle $x, y \in H$ ein größtes Element $z \in H$ mit $x \wedge z \leq y$ gibt. Dieses Element $z =: x \to y$ wird das *relative Pseudokomplement* von x bezüglich y genannt. In einer Heyting Algebra kann man das *Pseudokomplement* $\neg x$ eines Elements x definieren durch $\neg x := x \to \bot$. Es gilt $x \wedge \neg x = \bot$, und zudem ist $\neg x$ das größte Element mit dieser Eigenschaft. Jedoch gilt im Allgemeinen nicht $x \vee \neg x = \top$, sodass $\neg$ nur ein Pseudokomplement und kein echtes Komplement ist.

Beispiele:

(1) Jede Boolesche Algebra ist eine Heyting-Algebra mit $x \to y := \neg x \vee y$. Ein Element $x \in H$ heißt regulär, wenn $x = \neg\neg x$ oder $x = \neg y$ für ein $y \in H$ gilt. Eine Heyting-Algebra ist eine Boolesche Algebra genau dann wenn jedes $x \in H$ regulär ist oder $x \vee \neg x = \top$ für alle $x \in H$ gilt. In diesem Fall ist das Element $x \to y$ gleich $\neg x \vee y$. In jeder Heyting-Algebra sind das kleinste und das größte Element regulär. Die regulären Elemente einer Heyting-Algebra bilden eine Boolesche Algebra. Wenn nicht alle Elemente der Heyting-Algebra regulär sind, ist diese Boolesche Algebra kein Unterverband der Heyting-Algebra, weil die Supremums-Operationen verschieden sind. Im Unterschied zu manchen mehrwertigen Logiken teilen Heyting-Algebren mit Booleschen Algebren die folgende Eigenschaft: Wenn die Negation einen Fixpunkt hat (also $\neg x = x$ für ein $x \in H$), dann ist die Heyting-Algebra trivial: sie besteht nur aus einem Element.

(2) Für eine Menge M ist $\langle 2^M, \subseteq, \cap, M \rangle$ eine Heyting-Algebra mit $X \to Y := X^\complement \cup Y$, denn aus $X \cap Z \subseteq Y$ folgt $Z \subseteq (X^\complement \cup X) \cap Z = (X^\complement \cap Z) \cup (X \cap Z) \subseteq X^\complement \cup Y$ und für $Z \subseteq X^\complement \cup Y$ gilt $X \cap Z \subseteq X \cap (X^\complement \cup Y) = (X \cap X^\complement) \cup (X \cap Y) \subseteq Y$.

(3) Jede totale Ordnung, die ein beschränkter Verband ist, ist auch eine Heyting-Algebra, in der $\neg x = \perp$ für alle $x \neq \perp$ gilt. Die einfachste solche Heyting-Algebra, die nicht schon eine Boolesche Algebra ist, ist die linear geordnete Menge **3** mit folgenden Operationen.

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

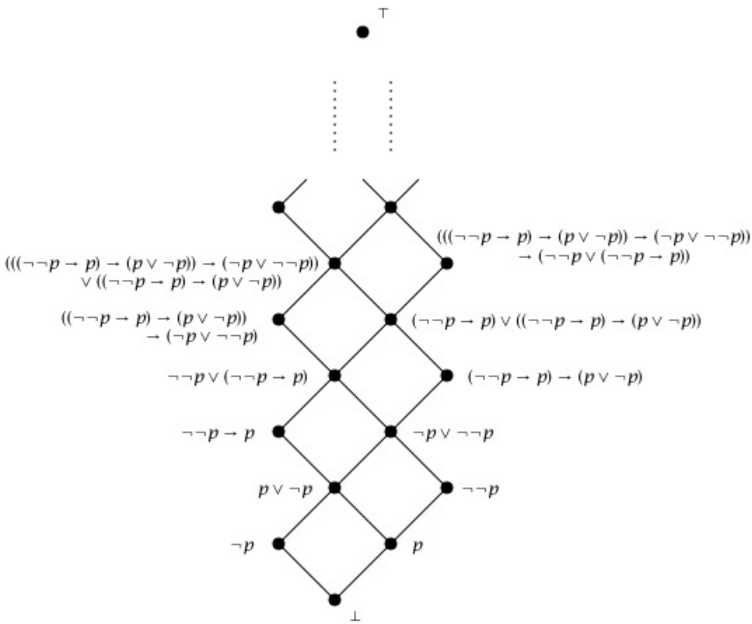
$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	1	2

$\neg$	
0	2
1	0
2	0

Die Gleichung $1 \vee \neg 1 = 1 \vee 0 = 1$ verletzt den Satz vom ausgeschlossenen Dritten.

(4) Die freie Heyting-Algebra über einem Generator (Rieger-Nishimura-Verband).



(5) Der Verband der offenen Mengen eines topologischen Raums ist eine vollständige Heyting-Algebra. In diesem Fall ist $A \to B = \mathrm{int}(A^{\complement} \cup B)$ das Innere der Vereinigung des Komplements von A und B.

□

Bemerkung (Äquivalente Charakterisierung):

(1) Ein vollständiger Verband $\mathbb{H}$ ist genau dann eine Heyting-Algebra, wenn

$$x \wedge \bigvee Y = \bigvee \{x \wedge y \mid y \in Y\}$$

für alle $x \in H$ und $Y \subseteq H$ gilt. Dies folgt daraus, dass residuierte Abbildungen beliebige Suprema erhalten. (Vollständige) Heyting-Algebren sind also stets (vollständig) distributiv.

(2) Ein beschränkter Verband $\mathbb{H}$ mit einer binären Operation $\to$ ist eine Heyting-Algebra genau dann wenn

(i) $x \to x = \top$

(ii) $x \wedge (x \to y) = x \wedge y$

(iii) $x \wedge (y \to x) = x$

(iv) $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$

für alle $x, y, z \in H$ gelten.

Lemma 3.2 Für eine Heyting-Algebra $\mathbb{H}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$ für alle $x, y \in H$,

(ii) $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$ für alle $x, y \in H$,

(iii) $\neg x \vee \neg\neg x = \top$ für alle $x \in H$,

(iv) $\neg\neg(x \vee y) = \neg\neg x \vee \neg\neg y$ für alle $x, y \in H$.

Index

Abbildung
  Dirac-, 13
  identische, 2
  lineare, 11
  Null-, 2
  residuierte, 3
Addition
  punktweise, 2
Additionskategorie
  kovariante, 20
additives Monoid, 8
Adjunktion, 3
Algebra, 10
  Konvolutions-, 18
  Matrizen-, 18
  Polynom-, 19
  vollständige, 10
Algebrahomomorphismus, 11
arktischer Semiring, 7, 9
Auswertungshomomorphismus, 22
Automorphismus, 2

Basis, 13
  Standard-, 13
Boole'scher Semiring, 7

Darstellungssatz, 15
Dirac-Abbildung, 13
direktes Koprodukt, 12
direktes Produkt, 12

Einsetzungshomomorphismus, 22
Einsvektor, 12
Endomorphismensemiring, 10
Endomorphismus, 2
Epimorphismus, 1
extensionale Partition, 22

Faltung, 19
Fortsetzungssatz, 11

geordnetes Monoid, 2
  residuiertes, 4
Graph, 16
  Klassen-, 16

Heyting-Algebra, 25
Homomorphismus, 1
  Algebra-, 11
  Auswertungs-, 22
  Einsetzungs-, 22
  Monoid-, 1
  Semiring-, 8
  vollständiger, 11

idempotent-vollständiger Semiring, 8
identische Abbildung, 2
Isomorphismus, 1

Kategorie
  kovariante, 16
  kovariante Additions-, 20
  Matrizen-, 20
Klassengraph, 16
Komposition
  kovariante, 2

Kongruenz, 21
Kontext
    mehrwertiger, 21
Konvolutionsalgebra, 18
Koprodukt
    direktes, 12
    Modul-, 12
kovariante Additionskategorie, 20
kovariante Kategorie, 16
kovariante Komposition, 2

lineare Abbildung, 11

Matrix, 14
Matrizenalgebra, 18
Matrizenkategorie, 20
Matrizensemiring, 14
mehrwertiger Kontext, 21
Minkowskisemiring, 17
Modulkoprodukt, 12
Modulprodukt, 12
Monoid, 1
    additives, 8
    geordnetes, 2
    multiplikatives, 8
    residuiertes geordnetes, 4
    stetiges, 5
    vollständig, 5
Monoidhomomorphismus, 1
Monoidsemiring, 17
Monoidwirkung, 6
Monomorphismus, 1
multiplikatives Monoid, 8

Nullabbildung, 2
Nullvektor, 12

Partition
    extensionale, 22
Polynomalgebra, 19
Produkt
    direktes, 12
    Modul-, 12
Pseudokomplement, 25
punktweise Addition, 2

Relationensemiring, 17
residuierte Abbildung, 3
residuiertes geordnetes Monoid, 4
Restklassensemiring, 7

Semiring, 7
    arktischer, 7, 9
    Boole'scher, 7
    Endomorphismen-, 10
    idempotent-vollständiger, 8
    Matrizen-, 14
    Minkowski-, 17
    Monoid-, 17
    Relationen-, 17
    Restklassen-, 7
    Sprachen-, 17
    stetiger, 9
    tropischer, 7, 9
    vollständiger, 9
Semiringhomomorphismus, 8
Semiringmodul, 10
Skalierung, 21
Spalte, 14
Sprachensemiring, 17
Standardbasis, 13
stetiger Semiring, 9
stetiges Monoid, 5

Träger, 12
tropischer Semiring, 7, 9

Varietät, 21
Vektor, 12
verallgemeinerte Faltung, 19
vollständige Algebra, 10
vollständiger Homomorphismus, 11

vollständiger Semiring, 9
vollständiges Monoid, 5

Zeile, 14