TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN

Francesco Kriegel
2. September 2013

Ordnungen Verbände Kontexte

Prof. Bernhard Ganter

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Die Inhalte dieses Dokuments stammen hauptsächlich aus Vorlesungen bei Prof. Bernhard Ganter, aber auch aus Vorlesungen bei Prof. Stefan E. Schmidt, aus Büchern und Papers von beiden (und möglicherweise anderen), sowie von meiner Diplomarbeit, die von Prof. Bernhard Ganter und Dr. Frithjof Dau begutachtet wurde. Nicht-Vorlesungsinhalte sind größtenteils zitiert; falls ich das an einer Stelle (unabsichtlich) versäumt habe, dann bitte ich vielmals um Entschuldigung und eine Nachricht hierüber an `mailto:francesco.kriegel@gmx.de`. Ich werde das dann umgehend korrigieren.

Institut für Algebra, Willersbau, TU Dresden,
`http://tu-dresden.de/mathematik/algebra`

1 Ordnungen

Kapitelübersicht

Definitio: Quasiordnung, Halbordnung, Totalordnung 1

Eine reflexive transitive binäre Relation auf einer Menge A heißt QUASIORDNUNG auf A. Eine antisymmetrische Quasiordnung nennen wir auch HALBORDNUNG, und eine konnexe Halbordnung heißt TOTALORDNUNG. Eine Totalordnung, in der jede Teilmenge ein kleinstes Element besitzt, heißt WOHLORDNUNG. Eine irreflexive transitive binäre Relation heißt STRIKTORDNUNG. Für Ordnungen verwenden wir gerne Symbole wie $\leq, \subseteq, \sqsubseteq, \dots$. Für die inverse Relation $\leq^{-1}$ schreiben wir dann auch $\geq$. Weiterhin schreiben wir für die Striktordnung $\leq \setminus \Delta$ auch $<$. Wir bezeichnen das Paar

$$\mathbb{A} = (A, \leq_{\mathbb{A}}),$$

bestehend aus einer Grundmenge A und einer Ordnung $\leq_{\mathbb{A}}$ auf A, als GEORDNETE MENGE. $\mathbb{A}^{\partial} = (A, \leq_{\mathbb{A}})^{\partial} := (A, \geq_{\mathbb{A}})$ heißt DUAL GEORDNETE MENGE zu $\mathbb{A}$.

Zu einer ordnungstheoretischen Aussage $\mathcal{A}$ über $\mathbb{A}$, die außer Variablen, Konstanten und logischen Operatoren nur das Zeichen $\leq_{\mathbb{A}}$ enthält, erhält man die duale Aussage $\mathcal{A}^{\partial}$, indem man in $\mathcal{A}$ alle Vorkommen von $\leq_{\mathbb{A}}$ durch $\geq_{\mathbb{A}}$ ersetzt. Eine ordnungstheoretische Aussage $\mathcal{A}$ über eine geordnete Menge $\mathbb{A}$ gilt genau dann, wenn $\mathcal{A}^{\partial}$ in $\mathbb{A}^{\partial}$ gilt.

Lemma 2

Wenn $<$ eine Striktordnung ist, dann ist $< \cup \Delta$ eine Halbordnung. Wenn $\leq$ eine Halbordnung ist, dann ist $\leq \setminus \Delta$ eine Striktordnung.

3 **Definitio: Vergleichbarkeit, Kette**

Zwei Elemente $x, y \in A$ heißen VERGLEICHBAR bezüglich einer Ordnung $\leq_{\mathbb{A}}$, falls $x \leq_{\mathbb{A}} y$ oder $y \leq_{\mathbb{A}} x$, sonst UNVERGLEICHBAR. Ist $\leq_{\mathbb{A}}$ eine Totalordnung, so sind je zwei Elemente der Grundmenge A stets vergleichbar. Aus diesem Grund nennen wir eine totalgeordnete Menge auch KETTE.

4 **Definitio: Äquivalenz**

Zwei Elemente $x, y \in A$ heißen ÄQUIVALENT bezüglich einer echten Quasiordnung $\leq_{\mathbb{A}}$ oder kurz $\leq_{\mathbb{A}}$-ÄQUIVALENT, falls sowohl $x \leq_{\mathbb{A}} y$ als auch $y \leq_{\mathbb{A}} x$ gelten. Jedes Element $x \in A$ ist wegen der Reflexivität auch stets $\leq_{\mathbb{A}}$-äquivalent mit sich selbst.

5 **Lemma**

Für eine Quasiordnung $\sqsubseteq$ auf einer Menge M ist $\equiv \, := \, \sqsubseteq \cap \sqsupseteq$ eine Äquivalenz auf M und die Faktormenge ${}^{M}\!/_{\equiv}$ ist dann halbgeordnet vermöge

$$ {}^{\sqsubseteq}\!/_{\equiv} := \{([x]_{\equiv}, [y]_{\equiv}) \mid x \sqsubseteq y\} $$

und es gilt $\sqsubseteq \; = \{(x,y) \mid [x]_{\equiv} \; {}^{\sqsubseteq}\!/_{\equiv} \; [y]_{\equiv}\}$.

6 **Definitio: Besondere Elemente in geordneten Mengen**

Für eine halbgeordnete Menge $(P, \leq)$ heißt ein Element $p \in P$

(I) OBERE SCHRANKE von $X \subseteq P$, wenn $x \leq p$ für alle $x \in X$ gilt.

(II) UNTERE SCHRANKE von $X \subseteq P$, wenn $p \leq x$ für alle $x \in X$ gilt.

(III) GRÖSSTES ELEMENT von $X \subseteq P$, wenn $p \in X$ und p eine obere Schranke von X ist.

(IV) KLEINSTES ELEMENT von $X \subseteq P$, wenn $p \in X$ und p eine untere Schranke von X ist.

(V) KLEINSTE OBERE SCHRANKE oder SUPREMUM von $X \subseteq P$, wenn p das kleinste Element der Menge aller oberen Schranken von X ist.

(VI) GRÖSSTE UNTERE SCHRANKE oder INFIMUM von $X \subseteq P$, wenn p das größte Element der Menge aller unteren Schranken von X ist.

(VII) MAXIMALES ELEMENT oder MAXIMUM von $X \subseteq P$, wenn $p \in X$ und $p \nless x$ für alle $x \in X$ gilt.

(VIII) MINIMALES ELEMENT oder MINIMUM von $X \subseteq P$, wenn $p \in X$ und $x \nless p$ für alle $x \in X$ gilt.

(IX) UNTERER NACHBAR von $q \in P$, wenn $p < q$ gilt und es kein Element $x \in P$ mit $p < x < q$ gibt.

(X) OBERER NACHBAR von $q \in P$, wenn $q < p$ gilt und es kein Element $x \in P$ mit $q < x < p$ gibt.

Für zwei Elemente $p, q \in P$ definieren wir das

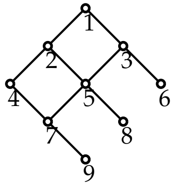
(I) ABGESCHLOSSENE INTERVALL $[p, q] := \{x \in P \mid p \leq x \leq q\}$,

(II) LINKS HALBOFFENE INTERVALL $(p, q] := \{x \in P \mid p < x \leq q\}$,

(III) RECHTS HALBOFFENE INTERVALL $[p,q) := \{x \in P \mid p \leq x < q\}$,
(IV) OFFENE INTERVALL $(p,q) := \{x \in P \mid p < x < q\}$.

Exemplum 7

Wir betrachten die halbgeordnete Menge $(P, \leq)$, die durch das folgende Ordnungsdiagramm dargestellt wird:



Es ergeben sich folgende Werte:

	A	$\{2,3,5,6,8\}$	$\{2,3,5,8\}$	$\{4,5\}$
$\overline{S}_{\mathbb{A}}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$
$\underline{S}_{\mathbb{A}}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{8\}$	$\{7,9\}$
$\bigvee_{\mathbb{A}}$	1	1	1	2
$\bigwedge_{\mathbb{A}}$	$\nexists$	$\nexists$	8	7
$\mathrm{Max}_{\mathbb{A}}$	$\{1\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$	$\{4,5\}$
$\mathrm{Min}_{\mathbb{A}}$	$\{6,8,9\}$	$\{6,8\}$	$\{8\}$	$\{4,5\}$
$\max_{\mathbb{A}}$	1	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$
$\min_{\mathbb{A}}$	$\nexists$	$\nexists$	8	$\nexists$

Intervalle sind hier beispielsweise

$$[1,5]_{\mathbb{A}} = \{1,2,3,5\},$$
$$(1,5]_{\mathbb{A}} = \{2,3,5\},$$
$$(3,9)_{\mathbb{A}} = \{5,7\}.$$

Definitio: Summe, Produkt 8

Für zwei halbgeordnete Mengen $(P, \leq_P)$ und $(Q, \leq_Q)$ definieren wir

KARDINALE SUMME oder HORIZONTALE SUMME

$$(P, \leq) \uplus (Q, \leq) := \left(P \cup Q, \leq_P \cup \leq_Q\right)$$

ORDINALE SUMME oder VERTIKALE SUMME

$$(P, \leq) \oplus (Q, \leq) := \left(P \cup Q, \leq_P \cup \leq_Q \cup P \times Q\right)$$

DIREKTES PRODUKT

$$(P, \leq) \times (Q, \leq) := \left(P \times Q, \{((p,q),(r,s)) \mid p \leq_P r \wedge q \leq_Q s\}\right)$$

Definitio: Ordnungshomomorphismus 9

Eine Abbildung $\phi \colon P \to Q$ zwischen geordneten Mengen $(P, \leq_P)$ und $(Q, \leq_Q)$ heißt

MONOTON bzw. ORDNUNGSERHALTEND, falls $p_1 \leq_P p_2 \Rightarrow \phi p_1 \leq_Q \phi p_2$ für alle $p_1, p_2 \in P$ gilt.

ORDNUNGSREFLEKTIEREND, falls $p_1 \leq_P p_2 \Leftarrow \phi p_1 \leq_Q \phi p_2$ für alle $p_1, p_2 \in P$ gilt.

ORDNUNGSMONOMORPHISMUS, falls ϕ sowohl ordnungserhaltend als auch -reflektierend ist.

ORDNUNGSISOMORPHISMUS, falls ϕ ein surjektiver Ordnungsmonomorphismus ist.

10 **Definitio: Ordnungsideal, Ordnungsfilter**

Sei $(P, \leq)$ eine geordnete Menge. Eine FALLENDE MENGE bzw. ein ORDNUNGSIDEAL ist eine Teilmenge $I \subseteq P$ mit der Eigenschaft

$$p \leq i \in I \Rightarrow p \in I$$

für alle $p \in P$. Dual ist eine STEIGENDE MENGE bzw. ein ORDNUNGSFILTER eine Teilmenge $F \subseteq P$, sodass

$$p \geq f \in F \Rightarrow p \in F$$

für alle $p \in P$ gilt.

11 **Lemma**

Für eine Teilmenge X einer geordneten Menge $(P, \leq)$ gibt es ein kleinstes Ordnungsideal, welches X enthält. Das ist gerade

$$\downarrow X := \left\{ p \in P \;\middle|\; \underset{x \in X}{\exists} p \leq x \right\}$$

und heißt auch das von X erzeugte Ordnungsideal. Ein von einer einelementigen Menge erzeugtes Ordnungsideal wird als PRIMIDEAL bezeichnet und wir schreiben $\downarrow x := \downarrow\{x\}$. Dual gibt es einen kleinsten Ordnungsfilter, in dem X enthalten ist, nämlich

$$\uparrow X := \left\{ p \in P \;\middle|\; \underset{x \in X}{\exists} x \leq p \right\}.$$

$\uparrow X$ wird der von X erzeugte Ordnungsfilter genannt. Einelementig erzeugte Ordnungsfilter heißen PRIMFILTER und werden mit $\uparrow x := \uparrow\{x\}$ symbolisiert.

1.1 Transitive Hülle

Let R be a binary relation on a set M. A TRANSITIVE CLOSURE of R is a minimal transitive superrelation, symbolized by R^+. As the intersection of transitive relations is again transitive, a transitive closure must be uniquely determined by

$$R^+ = \bigcap_{\substack{S \supseteq R \\ S \text{ transitive}}} S.$$

Overthis the transitive closure can be computed directly: Let $R^1 := R$ and $R^n := R^{n-1}; R$ for all natural numbers $n > 1$, then

$$R^+ = \bigcup_{n>1} R^n$$

holds. By construction $\bigcup_{n>1} R^n$ is a transitive superrelation of R. To inductivelly proof its minimality let S be another transitive superrelation of R. The base case: S contains $R = R^1$. The inductive step: Whenever S contains R^n it must also contain $R^n; R = R^{n+1}$ since S is transitive. The relation S thus contains all powers R^n and is a superrelation of $\bigcup_{n>1} R^n$.
There is a natural isomorphism between binary relations and binary square matrices. R can be displayed by a square matrix whose rows and columns are labeled with the elements of the base set M and whose entries are either 1 iff the appropriate row and column label are in relation or 0 otherwise. This permits the computation of relation compositions like for the transitive closure by means of matrix multiplication. Furthermore there is also a canonical isomorphism between binary relations and directed graphs. R can be seen as a graph with the elements from M as nodes and there is an edge from x to y iff $x\ R\ y$. Thereby the transitive closure can also be determined using graph algorithms like the FLOYD-WARSHALL algorithm. However both naïve matrix multiplication and FLOYD-WARSHALL algorithm have time complexity $\mathcal{O}(n^3)$ where n is the cardinality of M. There are various algorithms with lower time complexity but higher constant factor. So they are only faster for huge input sets.

Lemma 12

Eine binäre Relation ist genau dann azyklisch, wenn ihre transitive Hülle irreflexiv ist.

1.2 Transitive Reduktion

A TRANSITIVE REDUCTION of R is a minimal subrelation $R^- \subseteq R$ such that the transitive closure of R^- equals the transitive closure of R. For an acyclic relation R the transitive reduction is unique. Especially all (strict) order relations are acyclic. It then can be computed by means of the transitive closure and is given by

$$R^- = R \setminus (R; R^+).$$

For further information please have a look on (**?**). In summary the transitive reduction of a relation is obtained by removing all transitively redundant pairs.
Let $(P, \leq)$ be an ordered set and $p, q \in P$. Then p is COVERED BY q iff $p < q$ and there is no element $x \in P$ with $p < x < q$, i.e. iff $(p, q) \in < \setminus <^2$. One then also say that q COVERS p, or p and q are NEIGHBORING, and write $p \prec q$ or $q \succ p$. Thereby a binary relation $\prec$ on P is obtained that is called NEIGHBORHOOD or COVER relation. In the finite case the order relation $\leq$ and the cover relation $\prec$ determine each other in a unique way. One can show that the neighborhood $\prec$ is the (unique) transitive reduction of the corresponding strict order $<$ and dually the strict order $<$ is the transitive closure of the neighborhood $\prec$. This is due to the fact that $p < q$ hold iff there is a finite sequence $p \prec x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_k \prec q$ in P, i.e. iff $p \prec^+ q$ is true. Indeed, $\prec$ is the smallest subrelation whose transitive closure equals $<$, since $p \prec q$ always implies $(p, q) \notin (\prec \setminus \{(p, q)\})^+$.

13 **Lemma**

Jede Striktordnung $<$ auf einer endlichen Menge ist die transitive Hülle der zugehörigen Nachbarschaftsrelation $\prec$, also gilt

$$< \, = \, \prec^{\text{trans}},$$

und $\prec$ ist die kleinste solche Teilrelation, d.h. falls R eine Teilrelation mit $< \, = R^{\text{trans}}$ ist, dann enthält R bereits die Nachbarschaftsrelation $\prec$.

1.3 Wohlfundierte Induktion

14 **Theorema: wohlfundierte Induktion**

Sei $(M, \leq)$ eine wohlfundierte Menge und P ein Prädikat über M. Dann gilt

$$\langle \forall x \in M \colon \{[\forall y < x \colon P(y)] \Rightarrow P(x)\}\rangle \;\Rightarrow\; [\forall x \in M \colon P(x)].$$

Approbatio Für alle $x \in M$ gelte $[\forall y < x \colon P(y)] \Rightarrow P(x)$. Sei

$$X := \{x \in M \mid \neg P(x)\},$$

angenommen es gäbe ein $x \in M$ mit $\neg P(x)$, d.h. $X \neq \varnothing$. Dann existiert wegen der Wohlfundiertheit ein minimales Element x_0 von X mit $\neg P(x_0)$. Weil x_0 ein minimales Element ist, folgt für alle $y < x_0$ stets $y \notin X$, also $P(y)$. Nach Voraussetzung ergibt sich damit aber $P(x_0)$. Widerspruch! ■

Möchte man also die Gültigkeit eines Prädikats P für alle Elemente einer wohlfundierten Menge $(M, \leq)$ zeigen, so geht man schrittweise vor:

Induktionsanfang Man zeigt, dass P für alle minimalen Elemente von M gilt.

Induktionsschritt Unter der Voraussetzung, dass P für alle Elemente $y < x$ gilt, zeigt man dass P auch für x gilt.

Die vollständige Induktion ist eine wohlfundierte Induktion über der wohlfundierten Menge $(\mathbb{N}, \leq)$ der natürlichen Zahlen mit der üblichen Ordnung.

1.4 Zorn's Lemma und das Auswahlaxiom

15 **Theorema: Das Auswahlaxiom und äquivalente Formulierungen**

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

Auswahlaxiom Zu jeder nichtleeren Menge M gibt es eine Auswahlfunktion

$$f \colon \wp(M) \setminus \{\varnothing\} \to M$$

mit $f(X) \in X$ für alle nichtleeren Teilmengen $X \subseteq M$.

Auswahlaxiom 2 Das kartesische Produkt einer nichtleeren Familie nichtleerer Mengen ist nichtleer.

Zorn's Lemma Eine halbgeordnete Menge, in der jede Kette eine obere Schranke besitzt, hat ein maximales Element.

Zorn's Lemma 2 Eine halbgeordnete Menge, in der jede Kette ein Supremum besitzt, hat ein maximales Element.

ZERMELO'S WOHLORDNUNGSPRINZIP Jede nichtleere Menge besitzt eine Wohlordnung.

HAUSDORFF'S MAXIMALITÄTSPRINZIP Jede Kette einer geordneten Menge ist in einer maximalen Kette enthalten.

Typische Anwendungen sind reine (nicht-konstruktive) Existenzaussagen, zum Beispiel:

- Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.
- Jeder Hilbertraum besitzt eine Orthonormalbasis.
- Jedes Ideal eines unitären Rings ist in einem maximalen Ideal enthalten.

Corollarium 16

Ist $\mathcal{Y} \subseteq \wp M$ eine Menge von Teilmengen von M und ist für jede Kette $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{Y}$ auch ihre Vereinigung $\bigcup \mathcal{K}$ in $\mathcal{Y}$, dann hat $\mathcal{Y}$ ein maximales Element.

1.5 RADO's Kompaktheitssatz

Theorema: Kompaktheitssatz von RADO 17

Sei $\{A_i\}_{i\in I}$ eine Familie von endlichen nichtleeren Mengen und $\{f_J\}_{J\subseteq_{\text{fin}} I}$ eine Familie von Auswahlfunktionen $f_J\colon J \to \bigcup_{j\in J} A_j$ mit $f_J(j) \in A_j$ für alle $j \in J$. Dann gibt es eine globale Auswahlfunktion

$$f\colon I \to \bigcup_{i\in I} A_i$$

mit $f(i) \in A_i$ für alle $i \in I$ und

$$\underset{J\subseteq_{\text{fin}} I}{\forall}\ \underset{\substack{K\subseteq_{\text{fin}} I\\ K\supseteq J}}{\exists}\ f|_J = f_K|_J.$$

APPROBATIO Setze

$$\mathcal{B} := \left\{ \{B_i\}_{i\in I} \;\middle|\; \underset{i\in I}{\forall}\ \emptyset \neq B_i \subseteq A_i \wedge \underset{J\subseteq_{\text{fin}} I}{\forall}\ \underset{\substack{K\subseteq_{\text{fin}} I\\ K\supseteq J}}{\exists}\ \underset{j\in J}{\forall}\ f_K(j) \in B_j \right\},$$

dann ist $(\mathcal{B}, \leq)$ mit $\{B_i\}_{i\in I} \leq \{C_i\}_{i\in I} :\Leftrightarrow \forall_{i\in I}\, B_i \subseteq C_i$ eine geordnete Menge. Es ist klar, dass $\{A_i\}_{i\in I} \in \mathcal{B}$ ist. Sei $\mathcal{K}$ eine Kette in $(\mathcal{B}, \leq)$, dann ist $\{U_i\}_{i\in I}$ mit $U_i := \bigcap_{\{B_j\}_{j\in I}\in\mathcal{K}} B_i$ eine untere Schranke von $\mathcal{K}$, denn:

(I) Ersichtlich ist $\{U_i\}_{i\in I} \leq \{B_i\}_{i\in I}$ für alle $\{B_i\}_{i\in I} \in \mathcal{K}$.

(II) Weil $\mathcal{K}$ eine Kette ist, muss auch $\{B_i\}_{\{B_j\}_{j\in I}\in\mathcal{K}}$ eine Kette sein, und damit ist $\emptyset \neq \bigcap_{\{B_j\}_{j\in I}\in\mathcal{K}} B_i \subseteq A_i$.

(III) Sei $J \subseteq_{\text{fin}} I$, dann gilt

$$\underset{\{B_i\}_{i\in I}\in\mathcal{K}}{\forall}\ \underset{\substack{K_{\{B_i\}_{i\in I}}\subseteq_{\text{fin}} I\\ K_{\{B_i\}_{i\in I}}\supseteq J}}{\exists}\ \underset{j\in J}{\forall}\ f_{K_{\{B_i\}_{i\in I}}}(j) \in B_j.$$

Mit $K := \bigcap_{\{B_i\}_{i\in I}\in\mathcal{K}} K_{\{B_i\}_{i\in I}}$ und $K \supseteq J$ folgt

$$\forall_{j\in J} f_K(j) \in \bigcap_{\{B_i\}_{i\in I}\in\mathcal{K}} B_j = U_j.$$

Nach dem Theorema: Das Auswahlaxiom und äquivalente Formulierungen 1.15 hat also $(\mathcal{B},\leq)$ ein minimales Element $\{M_i\}_{i\in I}$. Wir machen eine Fallunterscheidung.

$(\forall_{i\in I} |M_i| = 1)$ Dann wähle $f\colon I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ mit $\{f(i)\} := M_i \subseteq A_i$ und es gilt

$$\forall_{J\subseteq_{\text{fin}} I} \exists_{\substack{K\subseteq_{\text{fin}} I\\ K\supseteq J}} \underbrace{\forall_{j\in J} \underbrace{f_K(j) \in M_j = \{f(j)\}}_{\Leftrightarrow f_K(j)=f(j)}}_{\Leftrightarrow f_K|_J = f|_J}.$$

$(\exists_{j\in I} |M_j| > 1)$ Dann ist zunächst $M_j = \{x,y\}$ mit $x \neq y$. Setze $X_i := \begin{cases} M_i & (i\neq j)\\ \{x\} & (i=j)\end{cases}$ sowie $Y_i := \begin{cases} M_i & (i\neq j)\\ \{y\} & (i=j)\end{cases}$, dann sind $\{X_i\}_{i\in I}, \{Y_i\}_{i\in I} \notin \mathcal{B}$, weil ja $\{M_i\}_{i\in I}$ minimal ist. Insgesamt haben wir nun

$$\{X_i\}_{i\in I} \notin \mathcal{B} \Rightarrow \exists_{\substack{J_x\subseteq_{\text{fin}} I\\ J_x\ni j}} \forall_{\substack{K\subseteq_{\text{fin}} I\\ K\supseteq J_x}} f_K(j) \notin X_j = \{x\}$$

$$\{Y_i\}_{i\in I} \notin \mathcal{B} \Rightarrow \exists_{\substack{J_y\subseteq_{\text{fin}} I\\ J_y\ni j}} \forall_{\substack{K\subseteq_{\text{fin}} I\\ K\supseteq J_y}} f_K(j) \notin Y_j = \{y\}$$

und wegen

$$\{M_i\}_{i\in I} \in \mathcal{B} \Rightarrow \forall_{J\subseteq_{\text{fin}} I} \exists_{\substack{K\subseteq_{\text{fin}} I\\ K\supseteq J}} f_K(j) \in M_j = \{x,y\}$$

folgt mit $J := J_x \cup J_y$

$$\exists_{\substack{K\subseteq_{\text{fin}} I\\ K\supseteq J}} x = f_K(j) = y.$$

■ Das ist aber ein Widerspruch zu $x \neq y$, also können alle M_i nur einelementig sein.

18 **Corollarium: Verschärfter Kompaktheitssatz von Rado**

Sei $\{A_i\}_{i\in I}$ eine Familie von endlichen nichtleeren Mengen und $\{f_J^t\}_{\substack{J\subseteq_{\text{fin}} I\\ t\in T}}$ eine Familie von Auswahlfunktionen $f_J^t\colon J \to \bigcup_{j\in J} A_j$ mit $\forall_{j\in J} f_J^t(j) \in A_j$ und endlicher Indexmenge T. Dann gibt es eine Familie $\{f^t\}_{t\in T}$ von globalen Auswahlfunktionen

$$f^t\colon I \to \bigcup_{i\in I} A_i$$

mit $\forall_{i\in I} f^t(i) \in A_i$ und $\forall_{J\subseteq_{\text{fin}} I} \exists_{\substack{K\subseteq_{\text{fin}} I\\ K\supseteq J}} f^t|_J = f_K^t|_J$.

Approbatio Die Familie $\{A_i^T\}_{i\in I}$ besteht aus endlichen nichtleeren Mengen und $\left\{\left(f_J^t\right)_{t\in T}\right\}_{\substack{J\subseteq_{\text{fin}} I\\ t\in T}}$ ist eine Familie von Auswahlfunktionen, sie erfüllen also die Voraussetzungen vom Theorema: Kompaktheitssatz von Rado 1.17. Daher gibt es eine globale Auswahlfunktion $f\colon I \to \bigcup_{i\in I} A_i^T$ und dann ist $\{\pi_t \circ f\}_{t\in T}$ die gesuchte Familie von Auswahlfunktionen. ■

1.6 Ordnungsdiagramme

Definitio: Ordnungsdiagramm 19

Eine geordnete Menge $(A, \leq_{\mathbb{A}})$ wird durch ein ORDNUNGSDIAGRAMM dadurch dargestellt, dass

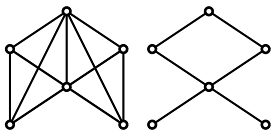
(I) alle Elemente von A so als Knoten gezeichnet werden, dass im Fall $x <_{\mathbb{A}} y$ der Knoten für x unterhalb des Knotens für y liegt,

(II) Knoten mit $x \prec_{\mathbb{A}} y$ durch eine (von x nach y aufsteigende) Kante verbunden werden.

Selbstverständlich ist die Darstellung durch ein Ordnungsdiagramm nicht eindeutig. Solange die vertikale Anordnung der durch Linien verbundenen Punkte (sie gibt die Ordnung wieder) erhalten bleibt, können die Punkte beliebig verschoben werden. Es ist auch nicht ohne weiteres klar, was ein gutes Ordnungsdiagramm ausmacht. Eine Minimierung der Überschneidungen von Linien erhöht normalerweise die Übersichtlichkeit. In einigen Fallen kann es aber auch günstig sein, Überschneidungen in Kauf zu nehmen, um schon bekannte Teilstrukturen herauszustellen.

Exemplum 20

Gegeben sei eine Menge A, die aus 6 Elementen besteht. Das untenstehende linke Diagramm veranschaulicht die Halbordnung $\leq_{\mathbb{A}}$ auf A: Die Knoten stellen die Elemente dar. Sind zwei Knoten durch eine Linie verbunden, so sind die zugehörigen Elemente vergleichbar und das durch den unteren Endknoten repräsentierte Element ist bezüglich $\leq_{\mathbb{A}}$ kleiner als das Element des oberen Endknoten. Nun stellt das untenstehende rechte Diagramm die zugehörige Nachbarschaftsrelation auf A dar und es entsteht wieder das linke Diagramm, wenn wir es reflexiv und transitiv abschließen.



$(A, \leq)$ $(A, \prec)$

Aus einem Ordnungsdiagramm für $\mathbb{A} = (A, \leq_{\mathbb{A}})$ erhält man ein Ordnungsdiagramm für die dual geordnete Menge $\mathbb{A}^\partial$, indem man es einfach auf den Kopf stellt.

Definitio: Ordnungsdiagramm 21

Ein ORDNUNGSDIAGRAMM einer geordneten Menge $(P, \leq)$ ist eine Einbettung $\text{pos}\colon P \to \mathbb{R}^2$ in die reelle Ebene, sodass $p < q$ stets $\pi_2 \text{pos} p < \pi_2 \text{pos} q$ impliziert. Die Abbildung pos heißt POSITIONIERUNG oder ORDNUNGSDIAGRAMM.

22 **Definitio: Mengenrepräsentation, Additives Ordnungsdiagramm**

Eine MENGENREPRÄSENTATION einer geordneten Menge $(P, \leq)$ ist eine Ordnungseinbettung von $(P, \leq)$ in die Potenzmenge einer Menge X, also eine Abbildung $\operatorname{rep}\colon (P, \leq) \hookrightarrow (\wp X, \subseteq)$ mit $p \leq q \Leftrightarrow \operatorname{rep} p \subseteq \operatorname{rep} q$. Eine RASTERPROJEKTION einer Menge X ist eine Abbildung $\operatorname{vec}\colon X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

23 **Theorema: Additives Ordnungsdiagramm**

Für eine Mengenrepräsentation $\operatorname{rep}\colon P \to \wp X$ einer geordneten Menge $(P, \leq)$ und eine Rasterprojektion $\operatorname{vec}\colon X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ ist

$$\begin{aligned} & P \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ \operatorname{pos}\colon\ & p \mapsto \sum_{x \in \operatorname{rep} p} \operatorname{vec} x \end{aligned}$$

eine Positionierung von $(P, \leq)$ und heißt ADDITIVES ORDNUNGSDIAGRAMM.

Every finite ordered set $(P, \leq)$ can be visualized in the real plane (or more generally in the real space) by a LINE DIAGRAM. A line diagram is an arrangement of circles (nodes) and interconnecting lines (edges). First of all a PLACEMENT FUNCTION

$$\operatorname{pos}\colon P \to \mathbb{R}^2,$$

is required, that assigns a position $\operatorname{pos}(p) = (\operatorname{pos}_x(p), \operatorname{pos}_y(p))$ in the real plane to each element p of P. The placement must be injective to ensure distinguishability for different nodes in the drawn diagram. The elements of p are then depicted by circles at their position $\operatorname{pos}(p)$ in the plane, and each circle is labeled with its appropriate element p. Next, two circles at $\operatorname{pos}(p)$ and $\operatorname{pos}(q)$ are joined by a straight line segment, denoted by $\operatorname{pos}(p, q)$, iff p and q are neighboring in $(P, \leq)$. To omit arrowheads, the diagram is drawed upwards, *i.e.* the vertical coordinate $\operatorname{pos}_y(p)$ is smaller than $\operatorname{pos}_y(q)$ whenever p is smaller than q. No node at $\operatorname{pos}(p)$ intersect any edge $\operatorname{pos}(q, r)$ if $p \neq q$ and $p \neq r$. This ensures no node being on any edge except the start and end node, otherwise it would not be clear where the edge starts and ends.
A generalisation are line diagrams with continuous curves as edges: For an ordered set $(P, \leq)$ a LINE DIAGRAM WITH CURVES is defined as a mapping

$$\operatorname{pos}\colon P \cup \prec \to \mathbb{R}^2 \cup \wp(\mathbb{R}^2)$$

such that $\operatorname{pos}|_P$ is a line diagram, and $\operatorname{pos}|_\prec\colon \prec \to \wp\left(\mathbb{R}^2\right)$ assigns to each neighborhood $p \prec q$ a one-dimensional set $\operatorname{pos}(p, q)$ of points in the real plane $\mathbb{R}^2$, such that $\operatorname{pos}(p, q) = \gamma_{pq}[0, 1]$ is the image of a plane curve $\gamma_{pq}\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ starting at $\gamma_{pq}(0) = \operatorname{pos}(p)$ and ending at $\gamma_{pq}(1) = \operatorname{pos}(q)$.
The question arises whether a line diagram must be completely defined by assigning a position to each element of the underlying ordered set, or if it suffices to give position for certain elements and compute the remaining position by means of them. This leads to the additive line diagrams. For example, when $(P, \leq)$ is a finite complete lattice, then the $\bigwedge$-irreducibles form a $\bigwedge$-dense set and each element p can thus be displayed as an infimum of all $\bigwedge$-irreducibles smaller than p.
An order-preserving mapping $\operatorname{rep}\colon (P, \leq) \to (\wp(S), \subseteq)$ is called SET REPRESENTATION of $(P, \leq)$ in S. A SEED VECTOR MAP is a map $\operatorname{seed}\colon S \to \mathbb{R}^2$ with $\operatorname{seed}(s) =$

$(\mathsf{seed}_x(s), \mathsf{seed}_y(s))$ for each element s of the representing set S. Then the mapping

$$\mathsf{pos}\colon \begin{array}{l} P \to \mathbb{R}^2 \\ p \mapsto \sum_{x \in \mathsf{rep}(p)} \mathsf{seed}(x) \end{array}$$

is a line diagram and is called ADDITIVE LINE DIAGRAM of $(P, \leq)$ w.r.t. rep and seed. To ensure the upward drawing convention the seed vectors must be chosen with positive vertical coordinates. It is also possible to choose a order-reversing set representation and seed vectors with negative vertical coordinates. Both possibilities yield the same diagrams for bounded ordered sets (especially lattices), as an order-preserving set representation rep with upward seed vectors seed can be transformed in an order-reversing set representation $\mathsf{rep}'\colon p \mapsto \mathsf{rep}(\top) \setminus \mathsf{rep}(p)$ with downward seed vectors $\mathsf{seed}' = -\mathsf{seed}$ such that $\mathsf{pos}'(p) = \mathsf{pos}(p) - \mathsf{pos}(\top)$ hold. Indeed:

$$\begin{aligned} \mathsf{pos}(p) - \mathsf{pos}(\top) &= \sum_{x \in \mathsf{rep}(p)} \mathsf{seed}(x) - \sum_{x \in \mathsf{rep}(\top)} \mathsf{seed}(x) \\ &= -\left(\sum_{x \in \mathsf{rep}(\top)} \mathsf{seed}(x) - \sum_{x \in \mathsf{rep}(p)} \mathsf{seed}(x) \right) \\ &= - \sum_{x \in \mathsf{rep}(\top) \setminus \mathsf{rep}(p)} \mathsf{seed}(x) \\ &= \sum_{x \in \mathsf{rep}'(p)} \mathsf{seed}'(x) \\ &= \mathsf{pos}'(p). \end{aligned}$$

1.7 LAWLER's Algorithmus

Theorema: Algorithmus von LAWLER 24

Sei $(A, <)$ eine strikt geordnete Menge von Aufgaben, $\tau\colon A \to \mathbb{R}_+$ eine Abbildung, die jeder Aufgabe $a \in A$ ihre Bearbeitungszeit τa zuordnet, und $\kappa\colon A \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ eine Abbildung, die jeder Aufgabe $a \in A$ die (monoton steigenden) Verzugskosten $\kappa(a, t)$ zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}_+$ zuordnet. Dann gibt es eine lineare Erweiterung $\trianglelefteq$ von $\leq$ mit minimalen maximalen Verzugskosten, d.h.

$$\bigvee_{a \in A} \kappa\left(a, \sum_{b \trianglelefteq a} \tau b\right) = \bigwedge_{\substack{\sqsubset \supseteq < \\ \sqsubseteq \text{ linear}}} \bigvee_{a \in A} \kappa\left(a, \sum_{b \sqsubseteq a} \tau b\right).$$

$\triangleleft$ kann mit folgendem Algorithmus konstruiert werden:

(BEGIN) Setze $X := A$ und $t := \sum \tau A$.

(LOOP) Wähle eine maximale Aufgabe $a \in X$ mit minimalen Verzugskosten $\kappa(a, t)$ und setze $a_{|X|} := a$. Setze $X := X \setminus \{a\}$ und $t := t - \tau a$ und gehe zu (LOOP), falls $X \neq \emptyset$.

(END) Setze $\triangleleft := \{(a_i, a_j) \mid i < j\}$.

APPROBATIO Für eine Teilmenge $X \subseteq A$ von Aufgaben seien $\kappa^* X$ die maximalen Verzugskosten für eine optimale Linearisierung von X. Sei also a die gewählte Aufgabe in (LOOP). Die Verzugskosten für eine Linearisierung mit a als größtem Element ergeben sich zu

$$\kappa(a,t) \vee \kappa^*(X \setminus \{a\})$$

und weil keiner der beiden Werte größer als $\kappa^* X$ sein kann, muss die Wahl von a optimal sein. ∎

1.8 Weite und Länge

25 **Definitio: Weite, Länge, Kettenüberdeckungszahl**

Für eine geordneten Menge $(P, \leq)$ definieren wir

WEITE als das Supremum aller Mächtigkeiten von Antiketten in $(P, \leq)$. Symbol: $\operatorname{wid}(P, \leq)$ [a]

LÄNGE als das Supremum aller Mächtigkeiten von Ketten in $(P, \leq)$. Symbol: $\operatorname{len}(P, \leq)$

KETTENÜBERDECKUNGSZAHL als die kleinste Anzahl von Ketten, die eine Überdeckung von $(P, \leq)$ bilden. Symbol $\operatorname{ccn}(P, \leq)$

[a] Die Weite unterscheidet nicht zwischen geordneten Mengen mit beliebig großen endlichen Antiketten und geordneten Mengen mit einer abzählbar unendlichen Antikette. Daher ist es für unendlich weite geordnete Mengen manchmal nützlich, die Weite als kleinste Kardinalzahl κ mit $\kappa + 1 > |A|$ für jede Antikette A zu definieren. Das wollen wir hier aber nicht tun.

Metadaten: Satz von DILWORTH ↔ Satz von KÖNIG ↔ Heiratssatz ↔ FORD-FULKERSON (MaxFlow/MinCut)

26 **Theorema: Satz von DILWORTH**

Die Weite und die Kettenüberdeckungszahl einer geordneten Menge sind stets gleich.

APPROBATIO Falls $(P, \leq)$ eine Kette ist, dann folgt sofort $\operatorname{wid}(P, \leq) = \operatorname{ccn}(P, \leq) = 1$. Sei also nun $(P, \leq)$ keine Kette und von der Weite n, d.h. es gibt eine n-elementige Antikette.

$(\leq)$ Weil die Elemente von Antiketten paarweise unvergleichbar sind, gibt es keine Kette in $(P, \leq)$, die zwei oder mehr Elemente der Antikette enthält. Demnach werden für eine Überdeckung mindestens n Ketten benötigt.

$(\geq)$ Wir zeigen nun mit vollständiger Induktion über die Anzahl der Elemente von $(P, \leq)$, dass genau n Ketten für eine Überdeckung ausreichen. Der Induktionsanfang für leere geordnete Mengen ist offenbar erfüllt, weil es ja nichts zu überdecken gibt. Wir machen nun den Induktionsschritt. Sei K eine maximale Kette in $(P, \leq)$, also folgt $K \neq P$, weil ja $(P, \leq)$ keine Kette ist. K kann höchstens ein Element einer maximalen Antikette enthalten, daher gilt

$$\operatorname{wid}(P \setminus K, \leq) \in \{n, n-1\}.$$

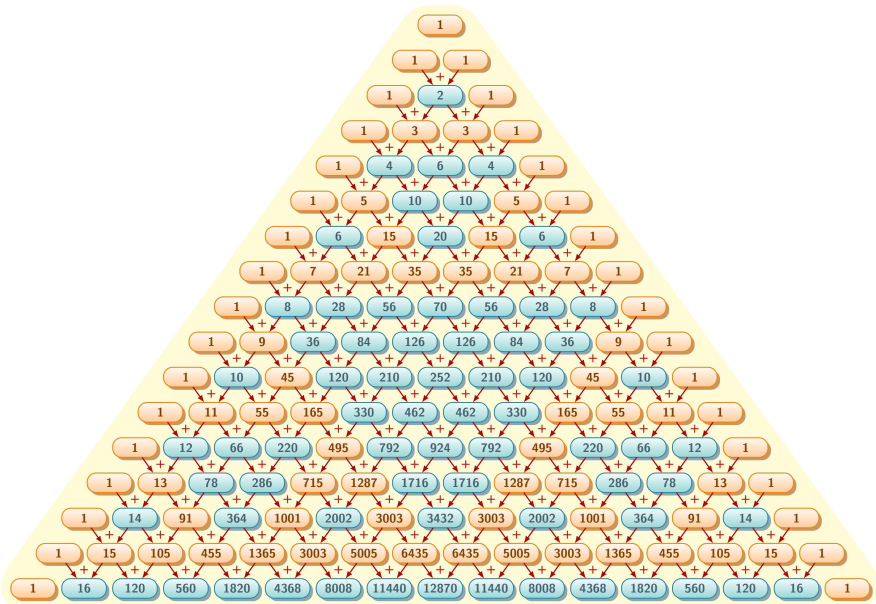
Es folgt eine Fallunterscheidung:

($\mathrm{wid}(P \setminus K, \leq) = n - 1$) Nach Induktionsvoraussetzung hat $(P \setminus K, \leq)$ eine Überdeckung mit $n - 1$ Ketten, also hat P eine Überdeckung mit n Ketten.

($\mathrm{wid}(P \setminus K, \leq) = n$) Sei A eine maximale Antikette in $(P \setminus K, \leq)$. Wegen $|A| = n$ ist A auch eine maximale Antikette in $(P, \leq)$. Dann gilt $\downarrow\! A \cap \uparrow\! A = A$ und $\downarrow\! A \cup \uparrow\! A = P$, weil jedes Element $p \in P$ mit irgendeinem $a \in A$ vergleichbar sein muss. Weil K maximal ist, kann das größte Element von K nicht in $\downarrow\! A$ liegen.[1] Folglich sind $|\downarrow\! A| < |P|$ und dual $|\uparrow\! A| < |P|$, und damit haben $\downarrow\! A$ und $\uparrow\! A$ nach Induktionsvoraussetzung jeweils eine Überdeckung mit n Ketten. Diese Ketten lassen sich dann zu Ketten in $(P, \leq)$ zusammensetzen und demnach kann auch $(P, \leq)$ von n Ketten überdeckt werden. ■

- Die Schleifscheiben, komponentenweise nach Radius und Höhe geordnet, bilden eine geordnete Menge. Jede Schleifscheibe wird nach Gebrauch nicht mehr benötigt, kann also auf eine kleinere Schleifscheibe abgeschliffen werden. Daher stellt sich die Frage nach einer materialoptimalen Abarbeitung der Aufträge, wobei möglichst wenig Material verschwendet werden soll. Das Problem ist also, diese geordnete Menge durch möglichst wenige Ketten zu überdecken, und deren Anzahl ist gerade dessen Weite.

- Aus dem Transportproblem lässt sich eine geordnete Menge wie folgt konstruieren: Die Grundmenge sei die Menge aller Transportaufträge und ein Transportauftrag A sei kleiner oder gleich einem Transportauftrag B, wenn nachdem das Ziel von A erreicht worden ist, der Start von B noch rechtzeitig erreicht werden kann.



[1]Wäre nämlich $\bigvee K \in \downarrow\! A$, dann gäbe es ein $a \in A$ mit $k \leq a$ für alle $k \in K$. Wegen $A \subseteq P \setminus K$, wäre dann $a \notin K$ im Widerspruch zur Maximalität von K.

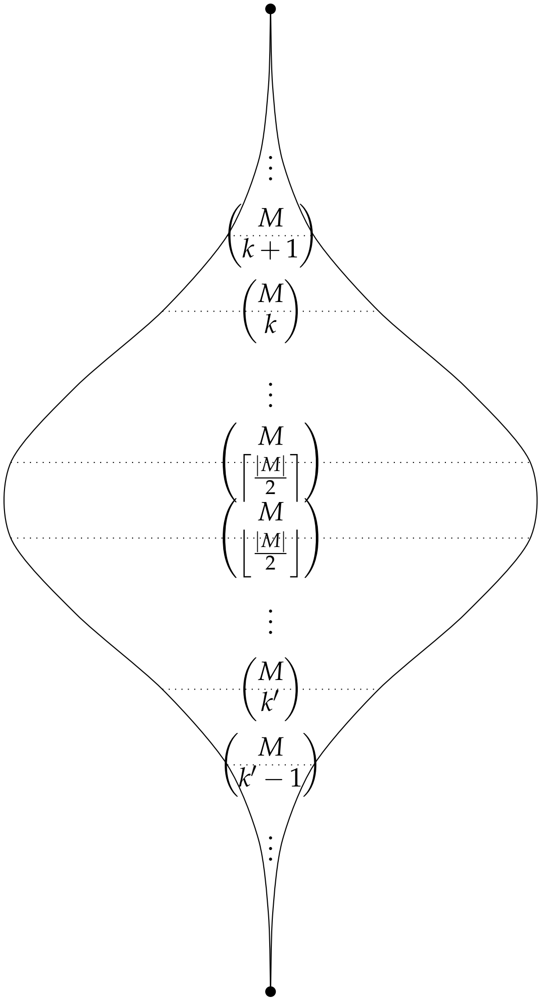
27 **Definitio: SPERNER-Familie**

Eine SPERNER-FAMILIE einer Menge M ist eine Antikette im Potenzmengenverband $(\wp M, \subseteq)$, d.h. eine Menge von bzgl. $\subseteq$ paarweise unvergleichbaren Teilmengen von M.

Der Potenzmengenverband $(\wp M, \subseteq)$ einer n-elementigen Menge M ist in Schichten $\binom{M}{k}$ für $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ aufgebaut. Maximale Ketten haben stets das kleinste Element $\varnothing$ und das größte Element M. Aus den Permutationen $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ von M erhalten wir alle maximalen Ketten, denn maximale Ketten haben stets die Form

$$\varnothing \subset \{m_1\} \subset \{m_1, m_2\} \subset \cdots \subset \{m_1, m_2, \dots, m_{n-1}\} \subset \{m_1, m_2, \dots, m_{n-1}, m_n\} = M.$$

Demnach gibt es also genau $n!$ maximale Ketten in $(\wp M, \subseteq)$. Für eine vorgegebene k-elementige Teilmenge $A \subseteq M$ gibt es folglich genau $k!$ maximale Ketten in $(\wp A, \subseteq)$ sowie $(n-k)!$ maximale Ketten in $(\wp(M \setminus A), \subseteq)$. Eine maximale Kette in $(\wp A, \subseteq)$ und eine maximale Kette in $(\wp(M \setminus A), \subseteq)$ lässt sich zu einer maximalen Kette in $(\wp M, \subseteq)$ zusammensetzen und damit gibt es genau $k! \cdot (n-k)! = \frac{n!}{\binom{n}{k}}$ maximale Ketten in $(\wp M, \subseteq)$, die A enthalten.



Lemma: LUBELL-YAMAMOTO-MESHALKIN-Ungleichung 28

Für eine SPERNER-Familie $\mathcal{S}$ einer n-elementigen Menge M sei α_k die Anzahl der k-elementigen Mengen in $\mathcal{S}$, dann gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{\binom{n}{k}} \leq 1.$$

APPROBATIO Jede Kette im Potenzmengenverband $(\wp M, \subseteq)$ enthält höchstens ein Element von $\mathcal{S}$. Es gibt genau $k! \cdot (n-k)!$ maximale Ketten, die eine k-elementige Teilmenge $A \subseteq M$ enthalten. Folglich gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cdot k! \cdot (n-k)! \leq n!$$

und durch Division mit $n!$ folgt die Behauptung. ■

29 **Lemma: Lemma von SPERNER**

Sei $\mathcal{F} \subseteq \binom{M}{k}$ eine m-elementige SPERNER-Familie von k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge M.

(I) Falls $k > \frac{n+1}{2}$ ist, dann existiert eine SPERNER-Familie $\mathcal{G} \subseteq \binom{M}{k-1}$, die echt mehr Elemente als $\mathcal{F}$ hat.

(II) Falls n ungerade und $\mathcal{F} \subset \binom{M}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ sind, dann existiert eine SPERNER-Familie $\mathcal{G} \subseteq \binom{M}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, die echt mehr Elemente als $\mathcal{F}$ hat.

(III) Falls $k < \frac{n-1}{2}$ ist, dann existiert eine SPERNER-Familie $\mathcal{G} \subseteq \binom{M}{k+1}$, die echt mehr Elemente als $\mathcal{F}$ hat.

(IV) Falls n ungerade und $\mathcal{F} \subset \binom{M}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ sind, dann existiert eine SPERNER-Familie $\mathcal{G} \subseteq \binom{M}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$, die echt mehr Elemente als $\mathcal{F}$ hat.

APPROBATIO (I) Eine Menge $A \in \mathcal{F}$ hat genau k Teilmengen aus $\binom{M}{k-1}$. Eine Menge aus $\binom{M}{k-1}$ ist Teilmenge von genau $n-(k-1)$ Mengen aus $\binom{M}{k}$, also von höchstens $n-(k-1)$ Mengen aus $\mathcal{F}$. Wir setzen

$$\mathcal{G} := \left\{ B \in \binom{M}{k-1} \,\middle|\, \exists_{A \in \mathcal{F}} B \subseteq A \right\},$$

dann folgt durch doppelte Abzählung der induzierten Teilmengeninklusionsrelation $\mathcal{R}$ zwischen $\mathcal{G}$ und $\mathcal{F}$

$$m \cdot k = \sum_{A \in \mathcal{F}} k = \sum_{A \in \mathcal{F}} |\mathcal{R}A| = \sum_{B \in \mathcal{G}} |B\mathcal{R}| \leq \sum_{B \in \mathcal{G}} (n-(k-1)) = |\mathcal{G}| \cdot (n-(k-1)).$$

Also ist $\frac{m \cdot k}{n-(k-1)} \leq |\mathcal{G}|$ und wegen $k > \frac{n+1}{2}$ ist $k > n-(k-1)$, und insgesamt

$$|\mathcal{G}| > m = |\mathcal{F}|.$$

(II) Mit $k = \frac{n+1}{2}$ gilt $k = n-(k-1)$, und analog zu (I) folgt $|\mathcal{G}| \geq m = |\mathcal{F}|$. Es gibt also $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$-elementige Mengen $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{G}$, die jeweils Teilmenge eines $A \in \mathcal{F}$ sind. Wegen $m < \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ gibt es eine Menge $B' \in \binom{M}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, die verschieden von allen B_i ist und sich von einem B_j nur in jeweils einem Element unterscheidet. Dann ist klar, dass $A' := B' \cup B_j \in \binom{M}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ ist. Wir machen eine Fallunterscheidung.

($A' \in \mathcal{F}$) Dann ist sofort $B' \in \mathcal{G}$, denn $B' \subseteq A'$. Also gilt auch $|\mathcal{G}| > |\mathcal{F}|$.

($A' \notin \mathcal{F}$) Dann kann eine Menge aus $\binom{M}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ nur eine Teilmenge von höchstens

$n-(k-1)-1=k-1$ Mengen aus $\mathcal{F}$ sein und es folgt $|\mathcal{G}| \geq \frac{m\cdot k}{k-1} > m = |\mathcal{F}|$.

(III) folgt aus (I) durch Anwendung des involutorischen dualen Automorphismus $\complement$, der Komplementbildung.

(IV) folgt aus (II) durch Komplementbildung. ■

30

Theorema: Satz von Sperner

Sei M eine n-elementige Menge.

(I) Eine Sperner-Familie von M hat höchstens $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ Elemente.

(II) Eine Sperner-Familie $\mathcal{S}$ von M hat genau dann exakt $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ Elemente, wenn

$$\mathcal{S} \in \left\{ \binom{M}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, \binom{M}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \right\}.$$

(III) Der Potenzmengenverband $(\wp M, \subseteq)$ hat die Weite $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Approbatio (I) Sei $\mathcal{S}$ eine Sperner-Familie von M. Es gilt $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ für alle $k \in \{0, \ldots, n\}$ und daraus folgt mit der Lemma: Lubell-Yamamoto-Meshalkin-Ungleichung 1.28

$$1 \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{\binom{n}{k}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} = \frac{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} = \frac{|\mathcal{S}|}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}.$$

Durch Multiplikation mit $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ folgt die Behauptung.

(II) ($\Leftarrow$) Wenn $\mathcal{S}$ entweder die Familie aller $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$-elementigen Teilmengen oder die Familie aller $\lceil \frac{n}{2} \rceil$-elementigen Teilmengen von M ist, dann folgt sofort, dass $\mathcal{S}$ $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$-elementig ist.

($\Rightarrow$) Sei $\mathcal{S} \notin \left\{ \binom{M}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, \binom{M}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \right\}$ eine Sperner-Familie. Wir konstruieren aus $\mathcal{S}$ eine Sperner-Familie $\mathcal{T}$ mit echt mehr Elementen und dann folgt $|\mathcal{S}| < |\mathcal{T}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Wir machen eine Fallunterscheidung.

($k := \max_{S \in \mathcal{S}} |S| > \frac{n}{2}$) Dann lässt sich aus $\mathcal{F} := \mathcal{S} \cap \binom{M}{k}$ mit Lemma: Lemma von Sperner 1.29 eine Sperner-Familie $\mathcal{G} \subseteq \binom{M}{k-1}$ konstruieren, die echt mehr Elemente hat. Weil keine Menge aus $\mathcal{S} \setminus \binom{M}{k}$ mit irgendeiner Menge aus $\mathcal{F}$ vergleichbar ist, also insbesondere keine Teilmenge einer der Mengen aus $\mathcal{F}$ ist, kann auch keine eine Teilmenge einer der Mengen aus $\mathcal{G}$ sein. Demnach bildet dann auch

$$\mathcal{T} := (\mathcal{S} \setminus \mathcal{F}) \cup \mathcal{G}$$

eine SPERNER-Familie, die nach Konstruktion echt mehr Elemente hat.

$\left(k' := \min_{S \in \mathcal{S}} |S| < \begin{cases} \frac{n}{2} & (n \in 2 \cdot \mathbb{N}) \\ \frac{n-1}{2} & (n \in 2 \cdot \mathbb{N} + 1) \end{cases}\right)$ Dann lässt sich analog aus der SPERNER-Familie $\mathcal{F} := \mathcal{S} \cap \binom{M}{k'}$ eine SPERNER-Familie $\mathcal{G} \subseteq \binom{M}{k'+1}$ konstruieren, die größer ist. Analog ist dann $\mathcal{T} := (\mathcal{S} \setminus \mathcal{F}) \cup \mathcal{G}$ eine SPERNER-Familie mit echt mehr Elementen.

$\left(n \in 2 \cdot \mathbb{N} \wedge k' = \frac{n}{2}\right)$ Dann folgt $\mathcal{S} \subseteq \binom{M}{\frac{n}{2}}$, also $\mathcal{S} \subset \binom{M}{\frac{n}{2}}$ nach Voraussetzung. Damit ist auch klar, dass $|\mathcal{S}| < \binom{n}{\frac{n}{2}} = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ sein muss.

$\left(n \in 2 \cdot \mathbb{N} + 1 \wedge k' = \frac{n-1}{2}\right)$ Dann folgt analog $\mathcal{S} \subset \binom{M}{\frac{n-1}{2}}$ und somit $|\mathcal{S}| < \binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

■ (III) folgt aus (I) und (II).

1.8.1 Group Testing

Sei E eine Mengen von Entitäten. Höchstens eine Entität $e_P \in E$ habe eine gewisse Eigenschaft P. Diese Entität soll mit möglichst wenig Aufwand gefunden werden. Wir setzen dabei voraus, dass sich diese Eigenschaft P auch auf alle Gruppierungen von Entitäten vererbt, die e_P enthalten. Sei $G \subseteq \wp E$ eine Menge von Gruppierungen. Wir setzen $G_e := \{g \in G \mid e \in g\}$ als die Menge aller Gruppierungen aus G, die die Entität $e \in E$ umfassen. Die Gruppierungen sollen zur Bestimmung von e_P genügen, das bedeutet falls G_e die Eigenschaft P hat, dann muss $e = e_P$ sein. Daher muss $G_e \nsubseteq G_f$ für verschiedene Entitäten $e \neq f$ gelten. Denn wäre $G_e \subseteq G_f$ und G_f hat P, dann wäre nicht sicher zu bestimmen, ob nur $f = e_P$ gilt, oder auch $e = e_P$ gilt. Wäre $G_e \subseteq G_f$ und G_e hat P, dann hätte auch G_f die Eigenschaft P und es wäre $e = f = e_P$. Das ist aber ein Widerspruch, denn höchstens eine Entität hat P. Also bilden die Gruppierungen $\{G_e\}_{e \in E}$ eine SPERNER-Familie in $(\wp G, \subseteq)$. Diese ist nach Theorema: Satz von SPERNER 1.30 maximal, wenn die G_e genau die $\lfloor \frac{|G|}{2} \rfloor$-elementigen Teilmengen von G sind. Weil G_e zur Bestimmung von e ausreicht, können also mit n Gruppierungen höchstens $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ Entitäten korrekt getestet werden, vorausgesetzt der eigentliche Test auf die Eigenschaft liefert stets fehlerfreie Ergebnisse. Die Auswertung kann binär kodiert in einer Matrixform gespeichert und berechnet werden.

$$(e \in g)_{\substack{e \in E \\ g \in G}} \boxdot (\gamma g)_{g \in G} = (\varepsilon_e)_{e \in E}$$

Dabei ist $\varepsilon_e = \top \Leftrightarrow e$ hat P und $\gamma_g = \top \Leftrightarrow g$ hat P sowie $\varepsilon_e = \bigwedge_{\substack{g \in G \\ e \in g}} \gamma_g$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	…	20
$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$	1	2	3	6	10	20	35	70	126	252	462	924	1716	3432	6435	12870	…	184756

• E kann eine Menge von Substanzen sein, die Allergien auslösen können. Die Eigenschaft P ist genau dann für eine Substanz $e \in E$ erfüllt, wenn der Proband X gegen die Substanz e allergisch ist. Dann können beispielsweise 10 Substanzgruppierungen ausreichen, um erfolgreich zu überprüfen, ob der Proband gegen höchstens eine von 252 Substanzen allergisch reagiert, und wenn ja, welche das ist.

• E kann eine Menge von Personen sein, die krank sein können. Die Eigenschaft P ist genau dann für eine Person $e \in E$ erfüllt, wenn die Person an Krankheit X leidet. Dann genügen bereits 20 Personengruppen, um korrekt zu bestimmen, ob höchstens eine Person von 184756 erkrankt ist, und wenn ja, wer das ist.

Ausblick

Wenn wir voraussetzen, dass höchstens zwei Entitäten P haben, dann lautet die Bedingung $G_d \not\subseteq G_e \cup G_f$ für alle paarweise verschiedenen Entitäten $d, e, f \in E$. Dies lässt sich weiter verallgemeinern und führt dann zu den k-Familien. Eine k-Familie ist eine Menge von Teilmengen, in der es höchstens Ketten der Länge k gibt. Eine SPERNER-Familie ist also eine 1-Familie. Für eine k-Familie $\mathcal{F}$ einer n-elementigen Menge gilt

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + i}.$$

1.9 Ordnungsdimension

Definitio: Erweiterung 31

Sei $R \subseteq P \times P$ eine Relation. Eine ERWEITERUNG von R ist eine Relation $S \subseteq P \times P$ mit $R \subseteq S$. Eine ORDNUNGSERWEITERUNG ist eine Erweiterung, die eine Ordnung ist. Eine LINEARE ERWEITERUNG ist eine konnexe Ordnungserweiterung, d.h. je zwei Elemente sind vergleichbar.

Definitio: Ordnungsdimension 32

Die ORDNUNGSDIMENSION einer geordneten Menge $(P, \leq)$ ist die kleinste Anzahl von linearen Erweiterungen, deren Durchschnitt die gegebene Ordnung $\leq$ ergibt. Symbol: $\operatorname{odim}(P, \leq)$

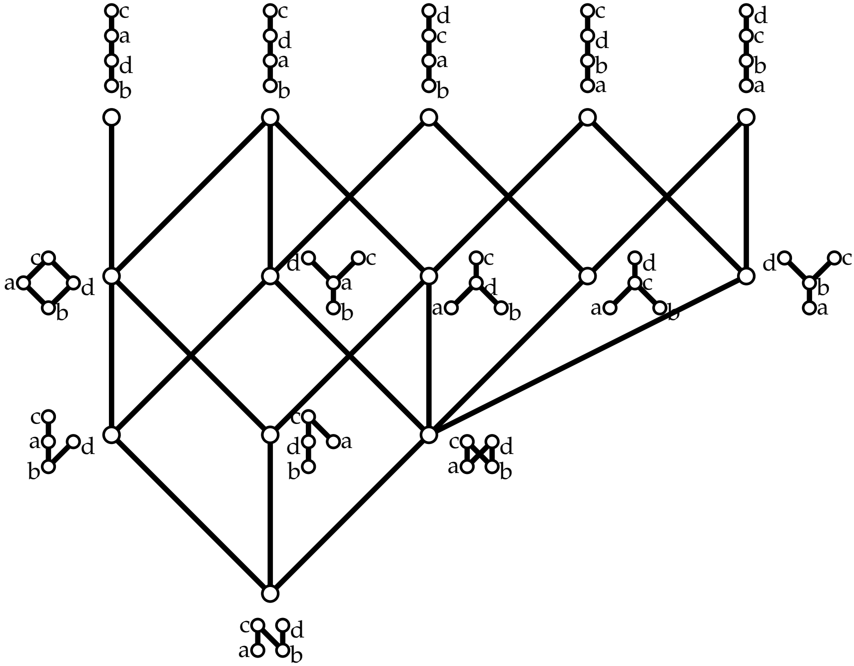
Die Anzahl $T_o n$ von Isomorphieklassen geordneter Mengen mit n Elementen ist bis $n = 14$ bekannt, siehe Tabelle. Die asymptotische Entwicklung dieser Anzahl ist

$$T_o n = \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \cdot 2^{\frac{n^2}{4} + \frac{3n}{2} + \mathcal{O}(\log n)}.$$

Von den 23 nichttrivialen geordneten Mengen mit bis zu 4 Elementen ist nur eine einzige sowohl kardinal als auch ordinal unzerlegbar, nämlich

$\mathbf{N} :=$ 

Das ist aber eine Ausnahmesituation: Man kann zeigen, dass der Anteil der zerlegbaren Ordnungen gegen 0 geht.



Die Abbildung zeigt alle Ordnungserweiterungen von $\mathbf{N}$ = , geordnet durch Teilmengeninklusion. Es gibt fünf maximale, also lineare, Erweiterungen. Darunter sind zwei, deren Durchschnitt gerade wieder $\mathbf{N}$ ergibt – die Ordnungsdimension ist demnach höchstens gleich 2. Weil $\mathbf{N}$ selbst nicht linear ist, muss die Ordnungsdimension echt größer als 1 sein, und insgesamt gilt

$$\operatorname{odim} \mathbf{N} = 2.$$

33 **Lemma**

Sei $(P, \leq)$ eine geordnete Menge und $i \parallel j$ unvergleichbare Elemente. Dann ist

$$\leq_{i,j} := \leq \cup \{(x,y) \mid x \leq i,\ j \leq y\}$$

eine Ordnungserweiterung von $\leq$ mit $i \leq_{i,j} j$.

APPROBATIO (REFLEXIV) Weil $\leq_{i,j}$ eine Erweiterung der Ordnung $\leq$ ist, ist auch $\leq_{i,j}$ reflexiv.

(ANTISYMMETRISCH) Seien $x \leq_{i,j} y$ und $y \leq_{i,j} x$. Wir machen eine Fallunterscheidung. Für $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt sofort $x = y$. Für $x \leq_{i,j} y$ und $y \leq x$ wäre $j \leq y \leq x \leq i$ im Widerspruch zur Unvergleichbarkeit von i und j. Für die beiden verbleibenden Fälle wäre analog $j \leq i$. Also kann nur der erste Fall eintreten und es gilt dann stets $x = y$.

(TRANSITIV) Seien $x \leq_{i,j} y \leq_{i,j} z$. Auch hier eine Fallunterscheidung. Der Fall $x \leq y \leq z$ ist trivial. Für $x \leq_{i,j} y \leq z$ ergibt sich $x \leq i$ und $j \leq y \leq z$, also $x \leq_{i,j} z$. Für $x \leq y \leq_{i,j} z$ analog. Der letzte Fall $x \leq_{i,j} y \leq_{i,j} z$ ist trivial.

($i \leq_{i,j} j$) Wegen $i \leq i$ und $j \leq j$ folgt sofort $i \leq_{i,j} j$. ■

Lemma: Lemma von SZPILRAJN 34

Für jede geordnete Menge $(P, \leq)$ mit Elementen $i \not\leq j$ gibt es eine lineare Erweiterung $\sqsubseteq$ mit $i \not\sqsubseteq j$.

APPROBATIO Sei $\mathfrak{X}$ die Menge aller Ordnungserweiterungen von $\leq$, die (i, j) nicht enthalten. Wegen $\leq \in \mathfrak{X}$ ist $\mathfrak{X}$ nichtleer. Sei $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{X}$ eine nichtleere Kette in $(\mathfrak{X}, \subseteq)$. Dann ist $\bigcup \mathfrak{K}$ eine Ordnungserweiterung von $\leq$ und enthält nicht (i, j), denn:

(REFLEXIV) $\forall_{\sqsubseteq \in \mathfrak{K}} \Delta_P \subseteq \sqsubseteq \subseteq \bigcup \mathfrak{K}$

(ANTISYMMETRISCH) Seien $(x, y), (y, x) \in \bigcup \mathfrak{K}$, dann gibt es zwei Ordnungserweiterungen $\sqsubseteq_1, \sqsubseteq_2 \in \mathfrak{K}$ mit $x \sqsubseteq_1 y$ und $y \sqsubseteq_2 x$. Weil $\mathfrak{K}$ eine Kette ist, muss $\sqsubseteq_1$ eine Erweiterung von $\sqsubseteq_2$ sein oder umgekehrt. In beiden Fällen ergibt sich $x = y$.

(TRANSITIV) analog.

($(i, j) \notin \bigcup \mathfrak{K}$) Wäre $(i, j) \in \bigcup \mathfrak{K}$, dann gäbe es eine Ordnungserweiterung $\sqsubseteq \in \mathfrak{K}$ mit $i \sqsubseteq j$. Widerspruch.

Insgesamt ist also $\bigcup \mathfrak{K} \in \mathfrak{X}$ und damit hat $(\mathfrak{X}, \subseteq)$ nach **??** ??.**??** ein maximales Element $\sqsubseteq$. Es verbleibt zu zeigen, dass $\sqsubseteq$ eine konnexe Ordnung ist. Angenommen, das wäre nicht der Fall, d.h. es gäbe unvergleichbare Elemente $x \parallel y$, dann wären nach Lemma 1.33 $\sqsubseteq_{x,y}$ und $\sqsubseteq_{y,x}$ echte Ordnungserweiterungen von $\sqsubseteq$, also auch von $\leq$. Weil $\sqsubseteq$ ein maximales Element von $\mathfrak{X}$ ist, können $\sqsubseteq_{x,y}$ und $\sqsubseteq_{y,x}$ nicht in $\mathfrak{X}$ liegen, d.h. es gilt $i \sqsubseteq_{x,y} j$ und $i \sqsubseteq_{y,x} j$. Daraus erhielten wir $i \sqsubseteq x \sqsubseteq j$ im Widerspruch zu $\sqsubseteq \in \mathfrak{X}$ bzw. $i \not\sqsubseteq j$. Also muss $\sqsubseteq$ eine lineare Erweiterung sein. ■

Theorema: Satz von DUSHNIK und MILLER 35

Jede Ordnung ist Durchschnitt all ihrer linearen Erweiterungen.

APPROBATIO Sei $(P, \leq)$ eine geordnete Menge und $\mathfrak{L}$ die Menge aller linearen Erweiterungen von $\leq$. Es ist erstmal klar, dass $\leq$ im Durchschnitt $\bigcap \mathfrak{L}$ aller linearen Erweiterungen enthalten ist. Zum Beweis der anderen Inklusionsrichtung sei $x \not\leq y$, dann gibt es nach Lemma: Lemma von SZPILRAJN 1.34 eine lineare Erweiterung $\sqsubseteq$ mit $x \not\sqsubseteq y$ und daraus folgt $(x, y) \notin \bigcap \mathfrak{L}$. ■

Theorema: Satz von ORE 36

Die Ordnungsdimension einer geordneten Menge ist die kleinste Anzahl von Ketten, in deren direktes Produkt die geordnete Menge eingebettet werden kann.

APPROBATIO Sei $(P, \leq)$ eine geordnete Menge. Nach Definitio: Ordnungsdimension 1.32 ist die Ordnungsdimension $\operatorname{odim}(P, \leq)$ die kleinste Anzahl linearer Erweiterungen von $\leq$, deren Schnitt wieder die Ordnung $\leq$ ergibt. Also genügt es zu beweisen, dass es genau dann n lineare Erweiterungen $\leq_1, \ldots, \leq_n$ mit $\bigcap_{i=1}^n \leq_i = \leq$ gibt, wenn es n Ketten $(P_1, \sqsubseteq_1), \ldots, (P_n, \sqsubseteq_n)$ mit einer Ordnungseinbettung von $(P, \leq)$ in deren direktes Produkt $\times_{i=1}^n (P_i, \sqsubseteq_i)$ gibt.

($\Rightarrow$) Seien $\sqsubseteq_1, \dots, \sqsubseteq_n$ lineare Erweiterungen mit $\bigcap_{i=1}^n \sqsubseteq_i = \leq$, dann kann $(P, \leq)$ in das direkte Produkt $\times_{i=1}^n (P, \sqsubseteq_i)$ eingebettet werden vermöge der Abbildung

$$\iota\colon \begin{array}{c} (P,\leq) \to \times_{i=1}^n (P, \sqsubseteq_i) \\ p \mapsto (p)_{i=1}^n. \end{array}$$

ι ist ordnungserhaltend: Sei $p \leq q$, dann gilt $p \sqsubseteq_i q$ für alle i und damit $\iota p = (p)_{i=1}^n \leq (q)_{i=1}^n = \iota q$. Schließlich ist ι auch ordnungsreflektierend: Für $p \not\leq q$ gibt es eine lineare Erweiterung $\sqsubseteq_i$ mit $p \not\sqsubseteq_i q$, also gilt $\iota p \not\leq \iota q$.

($\Leftarrow$) Umgekehrt seien $(P_1, \sqsubseteq_1), \dots, (P_n, \sqsubseteq_n)$ Ketten mit einer Ordnungseinbettung $\iota\colon (P, \leq) \to \times_{i=1}^n (P_i, \sqsubseteq_i)$. Dann definieren wir Relationen $\leq_i$ auf P vermöge

$$p \leq_i q :\Leftrightarrow p \leq q \vee \pi_i \iota p \sqsubset_i \pi_i \iota q$$

für alle i. Wir zeigen zunächst, dass alle $\leq_i$ Ordnungserweiterungen von $\leq$ sind.

(ERWEITERUNG) Es ist trivial, dass $\leq_i$ nach Definition eine Erweiterung von $\leq$ ist.

(REFLEXIV) Das folgt sofort aus der Reflexivität von $\leq$.

(ANTISYMMETRISCH) Seien $p \leq_i q$ sowie $q \leq_i p$. Wir machen eine Fallunterscheidung:

($p \leq q \wedge q \leq p$) Es folgt sofort $p = q$.

($p \leq q \wedge \pi_i \iota q \sqsubset_i \pi_i \iota p$) Wegen $\pi_i \iota q \sqsubset_i \pi_i \iota p$ folgt zunächst $\pi_i \iota p \neq \pi_i \iota q$. Aus $p \leq q$ ergibt sich $\iota p \sqsubseteq \iota q$ und damit $\pi_i \iota p \sqsubseteq_i \pi_i \iota q$, also wäre wegen Antisymmetrie von $\sqsubseteq_i$ aber $\pi_i \iota p = \pi_i \iota q$. Widerspruch!

($\pi_i \iota p \sqsubset_i \pi_i \iota q \wedge q \leq p$) analog.

($\pi_i \iota p \sqsubset_i \pi_i \iota q \wedge \pi_i \iota q \sqsubset_i \pi_i \iota p$) analog.

(TRANSITIV) Seien $p \leq_i q$ sowie $q \leq_i r$. Wir machen auch hier eine Fallunterscheidung:

($p \leq q \wedge q \leq r$) Es folgt sofort $p \leq r$ und damit $p \leq_i r$.

($p \leq q \wedge \pi_i \iota q \sqsubset_i \pi_i \iota r$) Aus $p \leq q$ ergibt sich $\iota p \sqsubseteq \iota q$ und damit $\pi_i \iota p \sqsubseteq_i \pi_i \iota q$, also folgt mit der Transitivität von $\sqsubseteq_i$ sofort $\pi_i \iota p \sqsubset_i \pi_i \iota r$, d.h. $p \leq_i r$.

($\pi_i \iota p \sqsubset_i \pi_i \iota q \wedge q \leq r$) analog.

($\pi_i \iota p \sqsubset_i \pi_i \iota q \wedge \pi_i \iota q \sqsubset_i \pi_i \iota r$) analog.

Weiter hat nach Lemma: Lemma von SZPILRAJN 1.34 jede Ordnung $\leq_i$ eine lineare Erweiterung $\trianglelefteq_i$. Weil $\leq_i$ eine Erweiterung von $\leq$ ist, muss auch $\trianglelefteq_i$ eine Erweiterung von $\leq$ sein. Es verbleibt nun noch zu zeigen, dass der Durchschnitt aller $\trianglelefteq_i$ genau $\leq$ ergibt. Die Inklusionsrichtung $\leq \subseteq \bigcap_{i=1}^n \trianglelefteq_i$ ist klar. Weil ι eine Ordnungseinbettung und damit insbesondere ordnungsreflektierend ist, muss für $p \not\leq q$ stets $\iota p \not\sqsubseteq \iota q$ sein, d.h. $\pi_i \iota p \not\sqsubseteq_i \pi_i \iota q$ für ein i. Demnach gilt $\pi_i \iota p \sqsupset_i \pi_i \iota q$, denn $\sqsubseteq_i$ ist linear, also auch $p \geq_i q$ und $p \trianglerighteq_i q$. Also $p \ntrianglelefteq_i q$ wegen $p \neq q$. Damit gilt die Implikation

$$p \not\leq q \Rightarrow \overset{n}{\underset{i=1}{\exists}}\, p \ntrianglelefteq_i q \Rightarrow (p,q) \notin \bigcap_{i=1}^n \trianglelefteq_i.$$

■ Demnach ist $\leq$ genau der Durchschnitt der $\trianglelefteq_i$.

Corollarium 37

Die Ordnungsdimension eines direkten Produkts von Ketten K_t der Länge 2 oder länger für $t \in T$ ist $|T|$. Insbesondere gilt $\operatorname{odim}\mathbf{2}^n = n$.

Lemma 38

Die Ordnungsdimension von $\left(\binom{\mathbf{n}}{1} \cup \binom{\mathbf{n}}{n-1}, \subseteq\right)$ ist n.

APPROBATIO Weil $\left(\binom{\mathbf{n}}{1} \cup \binom{\mathbf{n}}{n-1}, \subseteq\right)$ in den Potenzmengenverband $(\wp\mathbf{n}, \subseteq)$ einbettbar ist und dieser isomorph zur Potenz $\mathbf{2}^n$ ist, folgt zunächst

$$\operatorname{odim}\left(\binom{\mathbf{n}}{1} \cup \binom{\mathbf{n}}{n-1}, \subseteq\right) \leq \operatorname{odim}(\wp\mathbf{n}, \subseteq) = \operatorname{odim}\mathbf{2}^n = n.$$

Es verbleibt zu zeigen, dass die Ordnungsdimension $\geq n$ ist. Seien dazu $\{\sqsubseteq_t\}_{t\in T}$ lineare Erweiterungen, deren Durchschnitt die induzierte Teilordnung von $\subseteq$ auf $\binom{\mathbf{n}}{1} \cup \binom{\mathbf{n}}{n-1}$ ergibt. Wir müssen zeigen, dass $|T| \geq n$ gilt. Für alle $k \in \mathbf{n}$ gilt $\{k\} \nsubseteq \complement\{k\}$ und damit gibt es stets ein $t_k \in T$, sodass $\{k\} \not\sqsubseteq_{t_k} \complement\{k\}$ und demnach $\{k\} \sqsupseteq_{t_k} \complement\{k\}$ gelten. Für jedes $h \in \mathbf{n} \setminus \{k\}$ gelten $\{h\} \subseteq \complement\{k\}$ sowie $\{k\} \subseteq \complement\{h\}$, also auch $\{h\} \sqsubseteq_{t_k} \complement\{k\}$ sowie $\{k\} \sqsubseteq_{t_k} \complement\{h\}$. Es folgt $\complement\{h\} \not\sqsubseteq_{t_k} \{h\}$, denn sonst würden wir durch Transitivität

$$\{k\} \sqsubseteq_{t_k} \complement\{h\} \sqsubseteq_{t_k} \{h\} \sqsubseteq_{t_k} \complement\{k\}$$

erhalten, was ja ein Widerspruch ist. Also sind die linearen Erweiterungen $\{\sqsubseteq_{t_k}\}_{k\in\mathbf{n}}$ paarweise verschieden und es folgt $|T| \geq n$. ■

Theorema: Satz von HARZHEIM 39

Eine geordnete Menge hat genau dann höchstens die Dimension n, wenn jede endlich induzierte Teilordnung höchstens die Dimension n besitzt.

APPROBATIO ($\Leftarrow$) Sei $(P, \leq)$ eine geordnete Menge in der jede endlich induzierte Teilordnung höchstens die Dimension n besitzt. Setze $I := \binom{P}{2}$ und $A_{\{p,q\}} := \{(p,q),(q,p)\}$ für alle $\{p,q\} \in I$. Für jedes $J \subseteq_{\text{fin}} I$ ist $\bigcup J \subseteq_{\text{fin}} P$ und damit gibt es nach Voraussetzung stets höchstens n lineare Ordnungen $\sqsubseteq_1^J, \ldots, \sqsubseteq_n^J$ auf $\bigcup J$ mit

$$\leq \cap \left(\bigcup J \times \bigcup J\right) = \bigcap_{k=1}^{n} \sqsubseteq_k^J.$$

Falls die lokale Dimension kleiner als n ist, dann verwende manche Erweiterungen einfach mehrfach. Für $k \in \{1, \ldots, n\}$ setzen wir nun $\{f_J^k(\{p,q\})\} := A_{\{p,q\}} \cap \sqsubseteq_k^J$ für alle $\{p,q\} \in J$. Dann ist $\{A_i\}_{i\in I}$ eine Familie von endlichen nichtleeren Mengen und $\{f_J^k\}_{\substack{J\subseteq_{\text{fin}} I\\ k\in\{1,\ldots,n\}}}$ ist eine Familie von Auswahlfunktionen. Nach dem Corollarium: Verschärfter Kompaktheitssatz von RADO 1.18 gibt es also nun eine Familie $\{f^k\}_{k=1}^n$ von globalen Auswahlfunktionen $f^k \colon I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ mit $\forall_{i\in I}\, f^k(i) \in A_i$ und

$$\underset{J\subseteq_{\text{fin}} I}{\forall}\ \underset{\substack{K\subseteq_{\text{fin}} I\\ K\supseteq J}}{\exists}\ f|_J = f_K|_J.$$

Wähle $\sqsubseteq_k := f^k(I)$, dann sind die $\sqsubseteq_k$ lineare Ordnungen, deren Durchschnitt die Ordnung $\leq$ ergibt, denn:

(LINEAR) Sei $p, q \in P$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$, dann ist $f^k(\{p,q\}) \in A_{\{p,q\}} = \{(p,q), (q,p)\}$ und demnach muss $p \sqsubseteq_k q$ oder $p \sqsupseteq_k q$ gelten.

($\leq \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} \sqsubseteq_k$) Sei $p \leq q$, dann gibt es $K \subseteq_{\text{fin}} I$ mit $K \supseteq \{\{p,q\}\}$ und $f^k(\{p,q\}) = f_K^k(\{p,q\}) = (p,q)$. Somit gilt $\leq \subseteq \sqsubseteq_k$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ und $\leq$ liegt dann auch im Durchschnitt der $\sqsubseteq_k$.

($\leq \supseteq \bigcap_{k=1}^{n} \sqsubseteq_k$) Sei $(p,q) \in \bigcap_{k=1}^{n} \sqsubseteq_k$, d.h. $\forall_{k=1}^{n} (p,q) \in f^k(I)$ und damit $f^k(\{p,q\}) = (p,q)$. Weiter gibt es $K \subseteq_{\text{fin}} I$ mit $K \supseteq \{\{p,q\}\}$ und $f^k(\{p,q\}) = f_K^k(\{p,q\}) = (p,q)$ und wegen

$$\{(p,q)\} = \bigcap_{k=1}^{n} \sqsubseteq_k^K \cap \{(p,q),(q,p)\} = \leq \cap \{(p,q),(q,p)\},$$

folgt $p \leq q$.

($\Rightarrow$) Wenn es für eine geordnete Menge höchstens n lineare Erweiterungen gibt, deren Durchschnitt die Ordnung ergibt, dann lässt sich jede endlich induzierte Teilordnung auch als Durchschnitt der induzierten linearen Erweiterungen darstellen. ■

40 **Theorema: HIRAGUCHI-Ungleichung**

Eine geordnete Menge mit $n > 3$ Elementen hat eine Ordnungsdimension $\leq \frac{n}{2}$.

APPROBATIO Es liegt nahe, die Ungleichung mit vollständiger Induktion zu beweisen. Der Induktionsschritt lässt sich dann so formulieren: Jede geordnete Menge mit mindestens 4 Elementen enthält zwei Elemente, deren Wegnahme die Ordnungsdimension um höchstens 1 senkt. Diese Behauptung ist bisher unbewiesen und heißt REMOVABLE PAIR CONJECTURE. ■

1.10 Ordnungswahrscheinlichkeit

41 **Definitio: Ordnungswahrscheinlichkeit**

Für zwei Elemente p und q einer geordneten Menge $(P, \leq)$ definieren wir die ORDNUNGSWAHRSCHEINLICHKEIT

$$\mathcal{P}(p \leq q)$$

als den Quotienten der Anzahl der linearen Erweiterungen, in denen p vor q kommt, durch die Anzahl aller linearen Erweiterungen, und weiter die BEDINGTE ORDNUNGSWAHRSCHEINLICHKEIT

$$\mathcal{P}(p \leq q \mid x \leq y)$$

als den Quotienten der Anzahl der linearen Erweiterungen, in denen p vor q und x vor y kommt, durch die Anzahl der linearen Erweiterungen, in denen x vor y kommt.

Theorema: $\frac{1}{3}$-$\frac{2}{3}$-Vermutung 42

In jeder endlichen geordneten Menge, die keine Kette ist, existieren Elemente p und q mit

$$\frac{1}{3} \leq \mathcal{P}(p \leq q) \leq \frac{2}{3}.$$

APPROBATIO Die $\frac{1}{3}$-$\frac{2}{3}$-Vermutung lässt sich für geordnete Mengen mit einem nichttrivialen Automorphismus beweisen. Sonst ist sie bisher unbewiesen. Wir führen hier den Beweis für eine geordnete Menge $(P, \leq)$ mit einem nichttrivialen Automorphismus und nehmen dafür an, dass die $\frac{1}{3}$-$\frac{2}{3}$-Vermutung für $(P, \leq)$ nicht gelte (modus ponens). Wir definieren auf P eine weitere Relation $\boxed{\leq}$ auf P vermöge

$$p \boxed{\leq} q :\Leftrightarrow \mathcal{P}(p \leq q) > \frac{1}{3}.$$

Weil die $\frac{1}{3}$-$\frac{2}{3}$-Vermutung nach Voraussetzung nicht gilt, ist dies genau dann der Fall, wenn $\mathcal{P}(p \leq q) > \frac{2}{3}$ ist. Dann ist $\boxed{\leq}$ eine lineare Ordnung, denn:

(REFLEXIV) Wegen $\mathcal{P}(p \leq p) = 1 > \frac{1}{3}$ gilt stets $p \boxed{\leq} p$.

(ANTISYMMETRISCH) Es gilt stets $\mathcal{P}(p \leq q) + \mathcal{P}(q \leq p) = 1$ für $p \neq q$. Sei $p \boxed{\leq} q$ und $q \boxed{\leq} p$, dann folgt $\mathcal{P}(p \leq q) + \mathcal{P}(q \leq p) > \frac{4}{3}$ und damit muss $p = q$ sein.

(TRANSITIV) Seien $p \boxed{\leq} q$ und $q \boxed{\leq} r$. Dann enthalten mehr als $\frac{2}{3}$ aller linearen Erweiterungen von $\leq$ das Paar (p, q) und ebenso enthalten mehr als $\frac{2}{3}$ aller linearen Erweiterungen das Paar (q, r). Demzufolge müssen in mindestens $\frac{1}{3}$ aller linearen Erweiterungen beide Paare (p, q) und (q, r) vorkommen, und in diesen Erweiterungen müssen wegen Transitivität auch (p, r) enthalten. Es folgt $p \boxed{\leq} r$.

(LINEAR) Weil stets $\mathcal{P}(p \leq q) + \mathcal{P}(q \leq p) = 1$ für $p \neq q$ gilt, muss wenigstens einer der beiden Ordnungswahrscheinlichkeiten größer als $\frac{1}{3}$ sein, d.h. es gilt $p \boxed{\leq} q$ oder $p \boxed{\geq} q$ für alle $p, q \in P$.

Weil $\boxed{\leq}$ vollständig durch $\leq$ bestimmt ist, muss jeder Automorphismus von $(P, \leq)$ auch ein Automorphismus von $(P, \boxed{\leq})$ sein. Weil $(P, \boxed{\leq})$ eine Kette ist, kann sie nur den trivialen Automorphismus, die Identität, haben. (Daher heißen Ketten auch STARR.) Demnach kann dann $(P, \leq)$ auch nur die Identität als Automorphismus haben. Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung. Also gilt die $\frac{1}{3}$-$\frac{2}{3}$-Vermutung für geordnete Mengen mit einem nichttrivialen Automorphismus. Ein allgemeines Gegenbeispiel zur $\frac{1}{3}$-$\frac{2}{3}$-Vermutung kann also keinen nichttrivialen Automorphismus haben. $\blacksquare$

Theorema: xyz-Vermutung 43

Es gilt für alle Elemente x, y, z einer geordneten Menge $(P, \leq)$

$$\mathcal{P}(x \leq y) \leq \mathcal{P}(x \leq y \mid x \leq z).$$

APPROBATIO Dies wurde 1984 von SHEPP mit der FKG-Ungleichung bewiesen. $\blacksquare$

1.11 Triadische Ordnungen

44 **Definitio: Triordnung, Triset**

Eine TRIGEORDNETE MENGE oder kurz TRISET ist eine relationale Struktur $(T, \lesssim_1, \lesssim_2, \lesssim_3)$ bestehend aus einer Menge T sowie drei Quasiordnungen $\lesssim_1$, $\lesssim_2$ und $\lesssim_3$ auf T, sodass für $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ stets

$$\lesssim_i \cap \lesssim_j \subseteq \gtrsim_k \qquad \text{(Antiordinalität)}$$

gilt und für die zugehörigen drei Äquivalenzen $\sim_i := \lesssim_i \cap \gtrsim_i$ mit $i \in \{1,2,3\}$ stets

$$\sim_i \cap \sim_j \cap \sim_k = \mathrm{id}_T \qquad \text{(Triäquivalenz)}$$

für $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ gilt.

Um eine gewisse Analogie zu den geordneten Mengen herzustellen, kann jede geordnete Menge $(P, \leq)$ auch als relationale Struktur bzw. bigeordnete Menge $(P, \lesssim_1, \lesssim_2)$ mit $\lesssim_1 := \leq$ und $\lesssim_2 := \geq$ betrachtet werden. Es gilt dann natürlich $\lesssim_i \subseteq \gtrsim_j$ für $\{i,j\} = \{1,2\}$, und außerdem gilt auch $\sim_1 = \sim_2 = \sim_1 \cap \sim_2 = \mathrm{id}_P$ wegen der Antisymmetrie. Es stellt sich nun die Frage, ob es für trigeordnete Mengen auch genügt, den Durchschnitt von lediglich zwei Äquivalenzen zu bilden um die Identität auf P zu erhalten. Dies beantwortet das folgende Lemma.

45 **Lemma**

Für jede trigeordnete Menge $(T, \lesssim_1, \lesssim_2, \lesssim_3)$ gilt für $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ sogar

$$\sim_i \cap \sim_j = \mathrm{id}_T.$$

Demnach sind die Relationen $\leq_{ij} := \lesssim_i \cap \lesssim_j$ Ordnungen auf T.

APPROBATIO Aus der Definition erhalten wir $\sim_i \cap \sim_j \subseteq \sim_k$ und damit folgt sofort

$$\sim_i \cap \sim_j = \sim_i \cap \sim_j \cap \sim_k = \mathrm{id}_T.$$

■

46 **Definitio: i-Filter, i-dicht**

Sei $\mathbb{T} = (T, \lesssim_1, \lesssim_2, \lesssim_3)$ eine trigeordnete Menge. Jeder Ordnungsfilter F von $(T, \lesssim_i)$ heißt auch i-FILTER, d.h. aus $f \in F$ und $f \lesssim_i t$ folgt dann stets $t \in F$. Die Menge aller i-Filter symbolisieren wir mit $\mathcal{F}_i(\mathbb{T})$. Für jedes Element $x \in T$ ist dessen i-PRIMFILTER definiert als

$$x^{\uparrow i} := \{t \in T \mid x \lesssim_i t\}.$$

Eine Teilmenge $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}_i(\mathbb{T})$ heißt i-DICHT in $\mathbb{T}$, wenn jeder i-Primfilter von $\mathbb{T}$ als Durchschnitt von i-Filtern aus $\mathcal{D}$ darstellbar ist.

47 **Lemma**

(I) Jeder i-Filter ist eine Vereinigung von i-Primfiltern. Insbesondere ist zu jeder Teilmenge $X \subseteq T$ ist der kleinste X umfassende i-Filter gegeben durch

$$\Uparrow_i X := \bigcup_{x \in X} x^{\uparrow i} = \left\{ t \in T \;\middle|\; \exists_{x \in X}\, x \lesssim_i t \right\}.$$

(II) $\mathcal{F}_i(\mathbb{T})$ ist abgeschlossen gegen beliebige Durchschnitte.

(III) $\mathcal{F}_i(\mathbb{T})$ ist i-dicht in $\mathbb{T}$.

APPROBATIO (I) Offensichtlich ist $\uparrow_i X$ ein i-Filter. (Transitivität beachten!) Daher lässt sich jeder i-Filter auch als Vereinigung von i-Primfiltern darstellen.

(II) Für eine beliebige Menge von i-Filtern $\{F_t\}_{t\in T}$ ist stets $F := \bigcap_{t\in T} F_t$ ein i-Filter, denn aus $f \in F$ und $f \lesssim_i t$ folgt natürlich $f \in F_t$ für alle $t \in T$, also liegt t in allen F_t.

(III) Weil jeder i-Primfilter ein i-Filter ist, muss $\mathcal{F}_i(\mathbb{T})$ bereits alle i-Primfilter enthalten. ■

Eine obere Schranke u einer Teilmenge X einer geordneten Menge $(P, \leq)$ ist ein Element von P, sodass $u \geq x$ für alle $x \in X$ gilt. Entsprechend sind untere Schranken definiert. Es gibt für (bi)geordnete Mengen also zwei Arten von Schranken; dies wird nun wie folgt zu drei Schrankentypen in trigeordneten Mengen verallgemeinert.

Definitio: *ik*-Schranke, *ik*-Limes 48

Sei $(T, \lesssim_1, \lesssim_2, \lesssim_3)$ eine trigeordnete Menge und $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Für zwei Teilmengen $X, Y \subseteq T$ heißt ein Element $s \in T$ *ik*-SCHRANKE von (X, Y), falls gelten:

(I) $\forall_{x\in X}\, x \lesssim_i s$

(II) $\forall_{y\in Y}\, y \lesssim_k s$

Eine ik-Schranke l von (X, Y) heißt *ik*-LIMES von (X, Y), falls

$$s \lesssim_j l$$

für alle ik-Schranken s von (X, Y) gilt. Die Menge aller ik-Schranken von (X, Y) symbolisieren wir mit $X \;{}_i{\Uparrow}_k\; Y$ und die Menge aller ik-Limites mit $X \;{}_i{\Uparrow\!\!\Uparrow}_k\; Y$, es gelten also

$$X \;{}_i{\Uparrow}_k\; Y = \left\{ s \in T \;\middle|\; \forall_{x\in X} x \lesssim_i s \text{ und } \forall_{y\in Y} y \lesssim_k s \right\} =: X^{\uparrow i} \cap Y^{\uparrow k}$$

$$\text{und } X \;{}_i{\Uparrow\!\!\Uparrow}_k\; Y = \left\{ l \in X \;{}_i{\Uparrow}_k\; Y \;\middle|\; \forall_{s\in X {}_i{\Uparrow}_k Y} s \lesssim_j l \right\} =: (X \;{}_i{\Uparrow}_k\; Y)^{\overline{\uparrow j}} = \left(X^{\uparrow i} \cap Y^{\uparrow k}\right)^{\overline{\uparrow j}}.$$

Lemma 49

Für $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ und $X, Y \subseteq T$ gelten:

(I) Die ik-Schranken von (X, Y) sind genau die ki-Schranken von (Y, X), d.h.
$$X \;{}_i{\Uparrow}_k\; Y = Y \;{}_k{\Uparrow}_i\; X.$$

(II) Die ik-Limites von (X, Y) sind genau die ki-Limites von (Y, X), d.h.
$$X \;{}_i{\Uparrow\!\!\Uparrow}_k\; Y = Y \;{}_k{\Uparrow\!\!\Uparrow}_i\; X.$$

(III) Zwei ik-Limites von (X, Y) sind stets j-äquivalent, d.h.
$$(X \;{}_i{\Uparrow\!\!\Uparrow}_k\; Y) \times (X \;{}_i{\Uparrow\!\!\Uparrow}_k\; Y) \subseteq \sim_j.$$

In der Sprache der bigeordneten Mengen entsprechen die oberen Schranken also genau den 1-Schranken und die unteren Schranken genau den 2-Schranken. Weiterhin gibt es in geordneten Mengen kleinste obere Schranken und dual größte untere Schranken. Ein Element u ist genau dann die kleinste obere Schranke einer Teilmenge X, falls u eine obere Schranke von X ist, die kleiner allen oberen Schranken von X ist; für bigeordnete Mengen ist eine kleinste obere Schranke u von X

also eine 1-Schranke, d.h. $\forall_{x\in X}\, x \lesssim_1 u$, und es gilt $x \lesssim_2 u$ für alle 1-Schranken von X, folglich ein 1-Limes. Dual sind größte untere Schranken genau die 2-Limites. Nun wissen wir bereits dass kleinste obere (Suprema) bzw. größte untere Schranken (Infima) in geordneten Mengen stets eindeutig sind, falls sie existieren; analog gilt dies nach dem folgenden Lemma auch für trigeordnete Mengen.

50 **Lemma:** ***ik*-Supremum**

Sei $(T, \lesssim_1, \lesssim_2, \lesssim_3)$ eine trigeordnete Menge, $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ und $X, Y \subseteq T$. Dann gibt es höchstens einen *ik*-Limes $v \in X \,{}_i{\Uparrow}_k\, Y$, sodass eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(I) $v \lesssim_k l$ für alle *ik*-Limites $l \in X \,{}_i{\Uparrow}_k\, Y$, oder äquivalent

(II) $l \lesssim_i v$ für alle *ik*-Limites $l \in X \,{}_i{\Uparrow}_k\, Y$

Ein solches Element heißt *ik*-SUPREMUM von (X, Y) und wird mit $X \,{}_i{\bigvee}_k\, Y$ symbolisiert. Es gilt

$$X \,{}_i{\bigvee}_k\, Y \in \left\{ v \in X \,{}_i{\Uparrow}_k\, Y \;\middle|\; \forall_{l \in X {}_i{\Uparrow}_k Y} v \lesssim_k l \right\} = (X \,{}_i{\Uparrow}_k\, Y)^{\underline{\downarrow k}} = \left(\left(X^{\uparrow i} \cap Y^{\uparrow k} \right)^{\overline{\uparrow j}} \right)^{\underline{\downarrow k}}$$

$$= \left\{ v \in X \,{}_i{\Uparrow}_k\, Y \;\middle|\; \forall_{l \in X {}_i{\Uparrow}_k Y} l \lesssim_i v \right\} = (X \,{}_i{\Uparrow}_k\, Y)^{\overline{\uparrow i}} = \left(\left(X^{\uparrow i} \cap Y^{\uparrow k} \right)^{\overline{\uparrow j}} \right)^{\overline{\uparrow i}}.$$

Wir schreiben $x \mathrel{\unicode{x22F9}} X$, falls $X = \{x\}$ gilt.

APPROBATIO (I) Seien v und w zwei *ik*-Suprema von (X, Y) nach der ersten Bedingung. Weil beide Elemente *ik*-Limites (und damit auch *ik*-Schranken) von (X, Y) sind, folgt zunächst

$$v \lesssim_j w \text{ und } v \gtrsim_j w, \text{ also } v \sim_j w.$$

Weil beide Elemente *ik*-Suprema sind, folgt auch

$$v \lesssim_k w \text{ und } v \gtrsim_k w, \text{ also } v \sim_k w.$$

Schließlich erhalten wir die Gleichheit von v und w wegen $\sim_j \cap \sim_k = \mathrm{id}_P$.

(I)⇔(II) Seien nun v ein *ik*-Supremum von (X, Y) nach (I) und w ein *ik*-Supremum nach (II). Dann gilt insbesondere $v \lesssim_k w$ nach (I) (und trial $v \lesssim_i w$ nach (II)). Weiterhin sind v und w als *ik*-Limites von (X, Y) natürlich *j*-äquivalent, also gilt insbesondere $v \lesssim_j w$. Mit der antiordinalen Bedingung folgt $w \lesssim_i v$ (und trial $w \lesssim_k v$). Also sind v und w auch *i*-äquivalent (bzw. trial *k*-äquivalent), und daher gleich. ■

Die Suprema in geordneten Mengen entsprechen genau den 1-Suprema, bzw. analog entsprechen die Infima genau den 2-Suprema.

2 Verbände

Kapitelübersicht

Definitio: Verband, vollständiger Verband 1

Eine halbgeordnete Menge $\mathbb{L} = (L, \leq_{\mathbb{L}})$ heißt VERBAND, falls für alle $x, y \in L$ das Supremum $\bigvee_{\mathbb{L}}\{x, y\}$ und das Infimum $\bigwedge_{\mathbb{L}}\{x, y\}$ existiert.
Eine halbgeordnete Menge $\mathbb{L} = (L, \leq_{\mathbb{L}})$ heißt VOLLSTÄNDIGER VERBAND, falls für alle Teilmengen $X \subseteq L$ das Supremum $\bigvee_{\mathbb{L}} X$ und das Infimum $\bigwedge_{\mathbb{L}} X$ existiert.

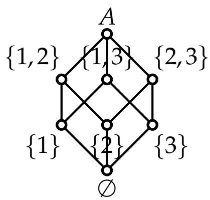
Für einen vollständigen Verband genügt es, die Existenz beliebiger Suprema zu fordern. Die Infima erhält man dann via

$$\bigwedge\nolimits_{\mathbb{L}} X = \bigvee\nolimits_{\mathbb{L}} \{y \in L \mid \forall x \in X \colon y \leq_{\mathbb{L}} x\}.$$

Analog ist es auch möglich, nur die Existenz beliebiger Infima vorrauszusetzen. Man nennt einen Verband nach obiger Definition auch VERBANDSGEORDNETE MENGE.

Exemplum: Potenzmengenverband 2

Als Beispiel soll uns der sogenannte POTENZMENGENVERBAND dienen. Wir haben eine Menge A gegeben und dazu die Potenzmenge $2^A := \{X \mid X \subseteq A\}$, die Ordnung sei die Teilmengenrelation $\subseteq$. Dann bildet $(2^A, \subseteq)$ einen Verband.
Das liegt daran, dass zu zwei Elementen $X, Y \in 2^A$ stets ein Supremum, $X \cup Y$ und ein Infimum $X \cap Y$ existieren. Diese beiden Mengen liegen selbstverständlich auch in 2^A. Das Supremum ist dabei die kleinste Menge, die beide enthält, das Infimum die größte Menge, die von beiden enthalten wird. Stellen wir das in einem Ordnungsdiagramm für $A = \{1, 2, 3\}$ dar:



Wir erkennen überdies, dass $(2^A, \subseteq)$ sogar ein vollständiger Verband ist. Supremum ist hier die Vereinigung $\bigcup$, Infimum der Schnitt $\bigcap$.

Definitio: Verband 3

Ein VERBAND ist eine Algebra $(L, \vee_{\mathbb{L}}, \wedge_{\mathbb{L}})$ vom Typ (2,2), die den folgenden Gleichungen genügt:

(L1) $x \vee_{\mathbb{L}} y = y \vee_{\mathbb{L}} x$ (Kommutativität)
$x \wedge_{\mathbb{L}} y = y \wedge_{\mathbb{L}} x$
(L2) $x \vee_{\mathbb{L}} (y \vee_{\mathbb{L}} z) = (x \vee_{\mathbb{L}} y) \vee_{\mathbb{L}} z$ (Assoziativität)
$x \wedge_{\mathbb{L}} (y \wedge_{\mathbb{L}} z) = (x \wedge_{\mathbb{L}} y) \wedge_{\mathbb{L}} z$
(L3) $x \vee_{\mathbb{L}} x = x$ (Idempotenz)
$x \wedge_{\mathbb{L}} x = x$
(L4) $x \vee_{\mathbb{L}} (x \wedge_{\mathbb{L}} y) = x$ (Absorption)
$x \wedge_{\mathbb{L}} (x \vee_{\mathbb{L}} y) = x$

Man liest Ausdrücke der Form $x \vee_{\mathbb{L}} y = z$ bzw. $x \wedge_{\mathbb{L}} y = z$ meist als „x verbunden y gleich z" bzw. „x geschnitten y gleich z".
Ein BESCHRÄNKTER VERBAND (oder ein VERBAND MIT 0 UND 1) ist eine Algebra $(L, \vee_{\mathbb{L}}, \wedge_{\mathbb{L}}, 0_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{L}})$ vom Typ (2,2,0,0), sodass $(L, \vee_{\mathbb{L}}, \wedge_{\mathbb{L}})$ ein Verband ist, und zusätzlich folgende Gleichungen gelten:

(L5) $x \vee_{\mathbb{L}} 1_{\mathbb{L}} = 1_{\mathbb{L}}$
$x \wedge_{\mathbb{L}} 0_{\mathbb{L}} = 0_{\mathbb{L}}$

$1_{\mathbb{L}}$ ist das größte Element und $0_{\mathbb{L}}$ das kleinste Element des Verbandes. Ein Verband heißt DISTRIBUTIV, falls die folgenden Distributivgesetze erfüllt sind:

(L6) $x \wedge_{\mathbb{L}} (y \vee_{\mathbb{L}} z) = (x \wedge_{\mathbb{L}} y) \vee_{\mathbb{L}} (x \wedge_{\mathbb{L}} z)$ (Distributivität)
$x \vee_{\mathbb{L}} (y \wedge_{\mathbb{L}} z) = (x \vee_{\mathbb{L}} y) \wedge_{\mathbb{L}} (x \vee_{\mathbb{L}} z)$

Man kann übrigens mit Hilfe der Gleichungen (L1) bis (L4) zeigen, dass die beiden Distributivgesetze äquivalent sind, sodass man nur eine der beiden Gleichungen zu fordern braucht.

4 **Corollarium**

Mit dem Absorptionsgesetz erkennt man die Gültigkeit der Äquivalenz
$$x \vee_{\mathbb{L}} y = y \ \Leftrightarrow\ x \wedge_{\mathbb{L}} y = x.$$
Insbesondere ergibt sich nun für einen beschränkten Verband
$$x \wedge_{\mathbb{L}} 1_{\mathbb{L}} = x \quad \text{und} \quad x \vee_{\mathbb{L}} 0_{\mathbb{L}} = x,$$
das neutrale Element der einen Verknüpfung ist also absorbierendes Element der anderen und umgekehrt.

Beide Verbandsdefinitionen sind äquivalent. Sei $(L, \vee_{\mathbb{L}}, \wedge_{\mathbb{L}})$ ein Verband nach der zweiten Definition, dann lässt sich auf L eine Halbordnung definieren vermöge
$$x \leq_{\mathbb{L}} y \ :\Leftrightarrow\ x \wedge_{\mathbb{L}} y = x$$
und $(L, \leq_{\mathbb{L}})$ ist dann ein Verband nach der ersten Definition. Sei umgekehrt $(L, \leq_{\mathbb{L}})$ ein Verband nach der ersten Definition, dann ist mit
$$x \vee_{\mathbb{L}} y := \bigvee\nolimits_{\mathbb{L}} \{x, y\} \quad \text{und} \quad x \wedge_{\mathbb{L}} y := \bigwedge\nolimits_{\mathbb{L}} \{x, y\}$$
auch $(L, \vee_{\mathbb{L}}, \wedge_{\mathbb{L}})$ ein Verband nach der zweiten Definition. Diese Übergänge sind invers zueinander, d.h. führt man zwei solche Übergänge hintereinander aus, erst in der einen Richtung, dann in der anderen, so erhält man wieder die Ausgangsstruktur.
Jeder nichtleere endliche Verband ist vollständig, denn es gibt nur endlich viele Teilmengen der Grundmenge und durch entsprechende endliche geschachtelte Anwendung des $\vee_{\mathbb{L}}$- bzw. des $\wedge_{\mathbb{L}}$-Operators lässt sich dann jeder Menge ein Supremum und Infimum zuordnen, d.h.
$$\bigvee\nolimits_{\mathbb{L}} X = \bigvee\nolimits_{\mathbb{L}} \{x_1, \ldots, x_n\} = \bigvee\nolimits_{\mathbb{L}} \{x_1, \bigvee\nolimits_{\mathbb{L}} \{x_2, \bigvee\nolimits_{\mathbb{L}} \{\ldots, \bigvee\nolimits_{\mathbb{L}} \{x_{n-1}, x_n\} \ldots\}\}\}.$$

Jeder vollständige Verband $\mathbb{L}$ ist beschränkt mit

$$0_{\mathbb{L}} = \bigvee_{\mathbb{L}} \emptyset = \bigwedge_{\mathbb{L}} L \quad \text{und} \quad 1_{\mathbb{L}} = \bigwedge_{\mathbb{L}} \emptyset = \bigvee_{\mathbb{L}} L.$$

Definitio: Dualitätsprinzip 5

Ist $\mathbb{L} = (L, \leq_{\mathbb{L}})$ ein (vollständiger) Verband, so auch $\mathbb{L}^{\partial}$. Zu einer verbandstheoretischen Aussage $\mathcal{A}$ über einen Verband $\mathbb{L}$, die außer Variablen, Konstanten und logischen Operatoren nur die Zeichen $\leq_{\mathbb{L}}$, $\wedge_{\mathbb{L}}$, $\vee_{\mathbb{L}}$, $\bigwedge_{\mathbb{L}}$, $\bigvee_{\mathbb{L}}$, $0_{\mathbb{L}}$, $1_{\mathbb{L}}$ enthält, erhält man die duale Aussage $\mathcal{A}^{\partial}$, indem man in $\mathcal{A}$ alle Vorkommen dieser Zeichen durch die dualen Zeichen $\geq_{\mathbb{L}}$, $\vee_{\mathbb{L}}$, $\wedge_{\mathbb{L}}$, $\bigvee_{\mathbb{L}}$, $\bigwedge_{\mathbb{L}}$, $1_{\mathbb{L}}$, $0_{\mathbb{L}}$ ersetzt. Eine verbandstheoretische Aussage $\mathcal{A}$ über einen Verband $\mathbb{L}$ gilt genau dann, wenn $\mathcal{A}^{\partial}$ in $\mathbb{L}^{\partial}$ gilt.

Definitio: Atom, Coatom 6

Ist $\mathbb{L}$ ein vollständiger Verband, so heißen die oberen Nachbarn von $0_{\mathbb{L}}$ ATOME und dual die unteren Nachbarn von $1_{\mathbb{L}}$ COATOME.

Definitio: supremum-/infimum-(ir-)reduzibel 7

Sei $\mathbb{L} = (L, \leq_{\mathbb{L}})$ ein vollständiger Verband, und betrachte für $x \in L$

$$x^* := \bigwedge_{\mathbb{L}} \{y \in L \mid x <_{\mathbb{L}} y\}$$

$$x_* := \bigvee_{\mathbb{L}} \{y \in L \mid y <_{\mathbb{L}} x\}.$$

x heißt INFIMUM-REDUZIBEL ($\bigwedge_{\mathbb{L}}$-REDUZIBEL), falls $x^* = x$, sonst INFIMUM-IRREDUZIBEL ($\bigwedge_{\mathbb{L}}$-IRREDUZIBEL). x heißt SUPREMUM-REDUZIBEL ($\bigvee_{\mathbb{L}}$-REDUZIBEL), falls $x_* = x$, sonst SUPREMUM-IRREDUZIBEL ($\bigvee_{\mathbb{L}}$-IRREDUZIBEL).

Betrachtet man zu einem Element x eines vollständigen Verbands $\mathbb{L}$ alle echt größeren Elemente und bildet das Infimum von diesen, so kommt man auf x selber, wenn x $\bigwedge_{\mathbb{L}}$-reduzibel ist. x läßt sich dann als Infimum anderer Elemente darstellen oder ist das globale Supremum $1_{\mathbb{L}}$. Ist dagegen x $\bigwedge_{\mathbb{L}}$-irreduzibel, so ergibt die beschriebene Infimumbildung ein Element $x^* \neq x$ und dieses x^* ist der einzige obere Nachbar von x. Dual ist x_* der einzige untere Nachbar für ein $\bigvee_{\mathbb{L}}$-irreduzibles Element x. Im Ordnungsdiagramm endlicher Verbände treten also die Verzweigungen nach oben genau an den $\bigwedge_{\mathbb{L}}$-reduziblen und nach unten genau an den $\bigvee_{\mathbb{L}}$-reduziblen Elementen auf. Zwei Ausnahmen stellen hier die beiden Elemente $1_{\mathbb{L}}$ und $0_{\mathbb{L}}$ dar: $1_{\mathbb{L}}$ ist immer $\bigwedge_{\mathbb{L}}$-reduzibel, hat aber natürlich keine Verzweigung nach oben und dual ist $0_{\mathbb{L}}$ immer $\bigvee_{\mathbb{L}}$-reduzibel, hat aber keine Verzweigungen nach unten.

Definitio: supremum-/infimum-dicht 8

Sei $\mathbb{L} = (L, \leq_{\mathbb{L}})$ ein vollständiger Verband. Eine Teilmenge $X \subseteq L$ heißt SUPREMUM-DICHT ($\bigvee_{\mathbb{L}}$-DICHT) in $\mathbb{L}$, falls jedes Element von L als Supremum einer Teilmenge von X dargestellt werden kann, d.h. falls für alle $y \in L$

$$y = \bigvee_{\mathbb{L}} \{x \in X \mid x \leq_{\mathbb{L}} y\}$$

gilt. Analog heißt X INFIMUM-DICHT ($\bigwedge_{\mathbb{L}}$-DICHT) in $\mathbb{L}$, falls für alle $y \in L$ gilt

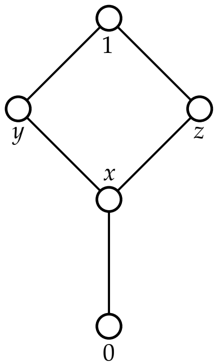
$$y = \bigwedge_{\mathbb{L}} \{x \in X \mid y \leq_{\mathbb{L}} x\}.$$

9 **Exemplum**

Aufgabe H1: Die 0-Unterverbände bilden ein Hüllensystem, also auch einen Verband. Geben Sie zu dem mittleren und dem rechten Diagramm aus Aufgabe 2 einen Verband an, so dass die dargestellten Verbände zum Verband der 0-Unterverbände isomorph sind – oder geben Sie an, warum ein solcher Verband nicht existieren kann. Mit anderen Worten: Finden Sie einen Verband $\mathbb{V} = (V, \leq)$, so dass der Verband der 0-Unterverbände von $\mathbb{V}$ (wird auch mit $\mathfrak{S}\mathrm{ub}_0\mathbb{V} = (\mathrm{Sub}_0\mathbb{V}, \subseteq)$ bezeichnet) durch das mittlere (bzw. rechte) Diagramm aus Aufgabe 2 dargestellt werden kann – oder begründen Sie, warum das Diagramm nicht einen 0-Unterverbands-Verband darstellen kann.

Als erstes machen wir uns klar, dass beide Diagramme aus Aufgabe 2 endlich sind, also $\mathfrak{S}\mathrm{ub}_0\mathbb{V}$ endlich ist. Demnach muss auch V endlich sein und damit ist $\mathbb{V}$ vollständig. Ein vollständiger Verband $\mathbb{V} = (V, \leq)$ ist stets beschränkt, d.h. hat ein kleinstes Element 0 – es gilt $0 = \bigvee \emptyset = \bigwedge V$ – und ein größtes Element 1 – nämlich $1 = \bigwedge \emptyset = \bigvee V$.

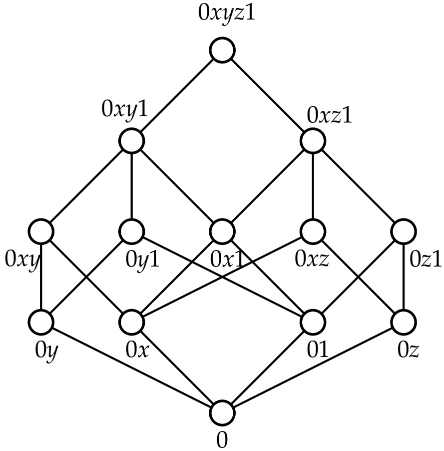
(I) Wir betrachten den Verband $\mathbb{V} = (V, \leq)$, der durch folgendes Ordnungsdiagramm definiert ist:



Nun bilden wir den 0-Unterverbands-Verband von $\mathbb{V}$:

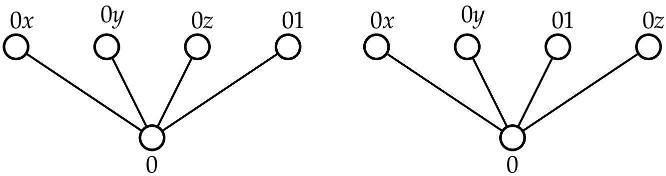
$$\mathrm{Sub}_0\mathbb{V} = \{0, 0x, 0y, 0z, 01, 0xy, 0xz, 0x1, 0y1, 0z1, 0xy1, 0xz1, 0xyz1\}$$

Schließlich lässt sich der Verband $\mathfrak{S}\mathrm{ub}_0\mathbb{V} = (\mathrm{Sub}_0\mathbb{V}, \subseteq)$ durch das mittlere Diagramm aus Aufgabe 2 darstellen:

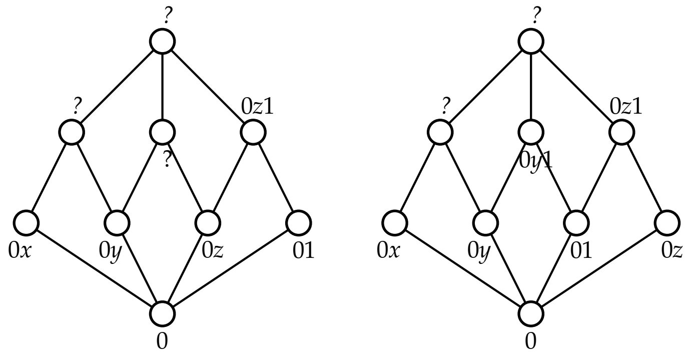


Für die 0-Unterverbände wurden zur besseren Lesbarkeit die Kommas und Mengenklammern weggelassen.

(II) Zum rechten Diagramm aus Aufgabe 2 existiert kein Verband, dessen 0-Unterverbands-Verband diese Struktur hat. Das sieht man folgendermaßen: An der Struktur der Wurzel (:= kleinstes Element mit den Atomen) erkennt man, dass es mindestens 5 Elemente in dem gesuchten Verband $\mathbb{V} = (V, \leq)$ geben muss. Zwei dieser Elemente sind bereits eindeutig festgelegt, nämlich 0 und 1. Weiter ist noch zu beachten, dass der 0-Unterverband 01 stets ein Atom darstellt. Für die Wurzel gibt es nun (bis auf Spiegelung oder Permutation der Variablen x, y, z) zwei Möglichkeiten:



Beide Varianten führen auf einen Widerspruch, denn in jedem Falle sind auch die Mengen $0x1, 0y1, 0z1$ 0-Unterverbände von $\mathbb{V}$, daher müssen diese auch im Diagramm an einer geeigneten Stelle erscheinen. In der linken Variante sind jedoch $0x1$ und $0y1$ nicht eintragbar, in der rechten passt $0x1$ nicht.



10 **Definitio: Verbandsideal, Verbandsfilter**

Sei $(V, \leq)$ ein Verband. Ein VERBANDSIDEAL ist ein $\vee$-abgeschlossenes Ordnungsideal. Dual ist ein VERBANDSFILTER ein $\wedge$-abgeschlossener Ordnungsfilter.

11 **Definitio: volldistributiv, modular**

(I) Ein vollständiger Verband $(V, \leq)$ heißt VOLLDISTRIBUTIV, falls für beliebige Indexmengen $S, T \neq \emptyset$

$$\bigwedge_{s \in S} \bigvee_{t \in T} v_{s,t} = \bigvee_{\phi\colon S \to T} \bigwedge_{s \in S} v_{s,\phi s}$$

gilt.

(II) Ein Verband $(V, \leq)$ heißt MODULAR, falls

$$x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$$

für alle $x, y, z \in V$ gilt.

12 **Lemma**

Sei $(P, \leq)$ eine geordnete Menge und $X, Y \subseteq P$ Teilmengen, deren Infima und Suprema existieren. Dann gelten:

(I) $\forall_{x \in X} \bigwedge X \leq x \leq \bigvee X$

(II) $\forall_{p \in P}\, p \leq \bigwedge X \Leftrightarrow p \in \underline{X}$

(III) $\forall_{p \in P} \bigvee X \leq p \Leftrightarrow p \in \overline{X}$

(IV) $\bigvee X \leq \bigwedge Y \Leftrightarrow \forall_{\substack{x \in X \\ y \in Y}}\, x \leq y$

(V) $X \subseteq Y \Rightarrow \bigwedge Y \leq \bigwedge X \& \bigvee X \leq \bigvee Y$

(VI) Falls P ein Verband ist, dann gelten $\bigwedge (X \cup Y) = \bigwedge X \wedge \bigwedge Y$ und $\bigvee (X \cup Y) = \bigvee X \vee \bigvee Y$

13 **Corollarium**

Sei X eine Teilmenge einer geordneten Menge $(P, \leq)$, die ein Infimum $\bigwedge X$ besitzt. Ein Element $x \in P$, welches eine untere Schranke von X ist und sogar in X enthalten ist, stimmt mit dem Infimum $\bigwedge X$ überein, d.h. $x \in X \cap \underline{X}$ impliziert $x = \bigwedge X$.

Definitio: Verbandshomomorphismus 14

Eine Abbildung $\phi\colon P \to Q$ zwischen vollständigen Verbänden $(P, \leq_P)$ und $(Q, \leq_Q)$ heißt

$\bigvee$-ERHALTEND, falls $\phi \bigvee X = \bigvee \phi X$ für alle $X \subseteq P$ gilt.

$\bigwedge$-ERHALTEND, falls $\phi \bigwedge X = \bigwedge \phi X$ für alle $X \subseteq P$ gilt.

VOLLSTÄNDIGER VERBANDSHOMOMORPHISMUS, falls ϕ sowohl $\bigvee$- als auch $\bigwedge$-erhaltend ist.

VOLLSTÄNDIGER VERBANDS(MONO/EPI/ISO)MORPHISMUS, falls ϕ ein (in-/sur-/bijektiver) Verbandshomomorphismus ist.

Lemma 15

Sei $\phi\colon V \to W$ eine Abbildung zwischen vollständigen Verbänden. Dann gelten:

(I) Wenn ϕ $\bigvee$-erhaltend ist, dann ist ϕ ordnungserhaltend. Falls ϕ zusätzlich injektiv ist, dann ist ϕ ein Ordnungsmonomorphismus. Dual, wenn ϕ $\bigwedge$-erhaltend ist.

(II) Wenn ϕ ein Ordnungsisomorphismus ist, so ist ϕ auch ein Verbandsisomorphismus.

APPROBATIO (I) Es gilt

$$x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y \Rightarrow \phi x \vee \phi y = \phi(x \vee y) = \phi y \Leftrightarrow \phi x \leq \phi y.$$

Wenn ϕ injektiv ist, dann ist die Implikation in der Mitte eine Äquivalenz.

(II) Sei $X \subseteq V$. Für alle $x \in X$ gilt $x \leq \bigvee X$. Folglich ist $\phi x \leq \phi \bigvee X$ und damit gilt schonmal $\bigvee \phi X \leq \phi \bigvee X$. Weil ϕ surjektiv ist, gibt es ein $v \in V$ mit $\bigvee \phi X = \phi v$. Weiter ist dann $\phi x \leq \phi v$ für alle $x \in X$, d.h. $x \leq v$, also $\bigvee X \leq v$. Schließlich erhalten wir $\phi \bigvee X \leq \phi v = \bigvee \phi X$, also ist ϕ $\bigvee$-erhaltend. Dual ist ϕ $\bigwedge$-erhaltend. ■

2.1 Hüllensysteme

Definitio: Hüllensystem 16

Sei $(P, \leq)$ eine geordnete Menge. Ein HÜLLENSYSTEM in $(P, \leq)$ ist eine Teilmenge $H \subseteq P$, sodass für jedes Element $p \in P$ die Menge $\{h \in H \mid p \leq h\}$ ein kleinstes Element besitzt. Die Elemente von H heißen HÜLLEN.

Definitio: Hüllenoperator 17

Sei $(P, \leq)$ eine geordnete Menge. Ein HÜLLENOPERATOR in $(P, \leq)$ ist eine ordnungserhaltende, extensive und idempotente Selbstabbildung von $(P, \leq)$. Ein Element $p \in P$ heißt ABGESCHLOSSEN oder HÜLLE bezüglich eines Hüllenoperators $\phi\colon P \to P$, wenn es ein Fixpunkt von ϕ ist, also falls $\phi p = p$ gilt. Die Menge aller abgeschlossenen Elemente in P bezüglich ϕ symbolisieren wir mit $P_\phi := \{p \in P \mid \phi p = p\}$.

18 **Lemma**

Eine Selbstabbildung einer geordneten Menge $(P, \leq)$ ist genau dann ein Hüllenoperator, wenn

$$p \leq \phi p' \Leftrightarrow \phi p \leq \phi p'$$

für alle $p, p' \in P$ gilt.

APPROBATIO (⇒) Sei ϕ ein Hüllenoperator in $(P, \leq)$. Aus $p \leq \phi p'$ folgt wegen der Monotonie und Idempotenz $\phi p \leq \phi\phi p' = \phi p'$. Umgekehrt gilt für $\phi p \leq \phi p'$ wegen der Extensitivität sofort $p \leq \phi p \leq \phi p'$.

(⇐) Sei nun ϕ eine Abbildung mit $p \leq \phi p' \Leftrightarrow \phi p \leq \phi p'$ für alle $p, p' \in P$. Dann ist ϕ extensiv, denn aus $\phi p \leq \phi p$ folgt $p \leq \phi p$. Weiter ist ϕ idempotent, denn aus $\phi p \leq \phi p$ folgt $\phi\phi p \leq \phi p$ und wegen der Extensitivität muss auch $\phi p \leq \phi\phi p$ gelten, also insgesamt $\phi\phi p = \phi p$. Schließlich ist ϕ auch ordnungserhaltend, denn für $p \leq p'$ folgt $p \leq p' \leq \phi p'$ und damit $\phi p \leq \phi p'$. ■

19 **Lemma**

Sei ϕ ein Hüllenoperator in einer geordneten Menge $(P, \leq)$.

(I) Es gilt $P_\phi = \phi P$.

(II) Falls $(P, \leq)$ ein größtes Element $\top$ besitzt, dann ist es stets eine Hülle und damit insbesondere in ϕP enthalten.

(III) Alle maximalen Elemente von $(P, \leq)$ sind abgeschlossen.

APPROBATIO (I) Sei $p \in P_\phi$, dann ist $\phi p = p$ und es folgt sofort $p \in \phi P$. Sei umgekehrt $p \in \phi P$, d.h. es gibt ein $p' \in P$ mit $p = \phi p'$ und damit folgt $\phi p = \phi\phi p' = \phi p' = p$, also ist $p \in P_\phi$.

(II) Wegen der Extensitivität gilt $\top \leq \phi\top$. Weil jedoch $\top$ das größte Element ist, muss auch $\phi\top \leq \top$ gelten. Folglich ist $\phi\top = \top$ abgeschlossen.

(III) Sei $p \in P$ ein maximales Element, d.h. aus $p \leq p'$ folgt stets $p = p'$. Mit Extensitivität erhalten wir $p \leq \phi p$ und damit $p = \phi p$. ■

20 **Lemma**

Sei ϕ ein Hüllenoperator in einem vollständigen Verband $(P, \leq)$.

(I) Für alle $p \in P$ gilt

$$\phi p = \bigwedge(\uparrow p \cap \phi P) = \bigwedge_{\substack{q \geq p \\ q = \phi q}} q$$

(II) $(\phi P, \leq)$ ist ein vollständiger Verband und es gelten

$$\bigwedge\nolimits_{\phi P} X = \bigwedge\nolimits_P X \ \text{ und } \ \bigvee\nolimits_{\phi P} X = \phi \bigvee\nolimits_P X$$

für alle $X \subseteq \phi P$.

APPROBATIO (I) Für alle $p' \in \uparrow p \cap \phi P$ folgt mit der Monotonie $\phi p \leq \phi p' = p'$, also ist ϕp eine untere Schranke von $\uparrow p \cap \phi P$, d.h. $\phi p \leq \bigwedge \uparrow p \cap \phi P$. Wegen der Extensitivität gilt $p \leq \phi p$ und damit ist $\phi p \in \uparrow p \cap \phi P$, d.h. es ist $\phi p \geq \bigwedge \uparrow p \cap \phi P$ und damit ist ϕp sogar die größte untere Schranke.

(II) ■

Theorema: Hauptsatz über Hüllensysteme und Hüllenoperatoren 21

Sei $(P, \leq)$ eine geordnete Menge.

(I) Die Menge aller Hüllenoperatoren $\mathrm{HO}(P, \leq)$ versehen mit der punktweisen Ordnung $\phi \leq \psi :\Leftrightarrow \forall_{p \in P}\, \phi p \leq \psi p$ bildet einen Verband. Dual bildet auch die Menge aller Hüllensysteme $\mathrm{HS}(P, \leq)$ versehen mit der inversen Teilmengeninklusionsordnung $\supseteq$ einen Verband.

(II) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{HO}(P, \leq) &\to \mathrm{HS}(P, \leq) \\ \phi &\mapsto \phi P \end{aligned}$$

ist ein Ordnungsisomorphismus zwischen den Verbänden und

$$\begin{aligned} \mathrm{HS}(P, \leq) &\to \mathrm{HO}(P, \leq) \\ & \qquad P \to P \\ H &\mapsto \phi_H \colon\ p \mapsto \bigwedge_{\substack{h \in H \\ h \geq p}} h \end{aligned}$$

ist der zugehörige inverse Ordnungsisomorphismus.

Definitio: Hüllensystem 22

Es sei A eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{H}$ der Potenzmenge 2^A heißt HÜLLENSYSTEM auf A, falls folgendes gilt:

(HS1) $A \in \mathcal{H}$

(HS2) $\bigcap \mathcal{Y} \in \mathcal{H}$ für jede nichtleere Teilmenge $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{H}$

Die Elemente $H \in \mathcal{H}$ werden HÜLLEN genannt. Oft schreibt man ein Hüllensystem auch als ein Paar $(A, \mathcal{H})$, um die Grundmenge hervorzuheben. Die Eigenschaft (HS2) wird oft als SCHNITTSTABILITÄT bzw. $\bigcap$-STABILITÄT bezeichnet.

Definitio: Hüllenoperator 23

Es sei A eine Menge. Eine Abbildung

$$h \colon 2^A \to 2^A$$

heißt HÜLLENOPERATOR auf A, falls für alle Teilmengen $X, Y \subseteq A$ folgendes gilt:

(HO1)	$X \subseteq h(X)$	(Extensität)
(HO2)	$X \subseteq Y \Rightarrow h(X) \subseteq h(Y)$	(Monotonie)
(HO3)	$h(h(X)) = h(X)$	(Idempotenz)

Man nennt die Mengen der Form $h(X)$ ABGESCHLOSSEN bezüglich h oder kurz h-ABGESCHLOSSEN und sagt, dass $h(X)$ von X ERZEUGT ist.

Corollarium 24

Mit der Extensität folgt $A \subseteq h(A) \subseteq A$, d.h.

$$h(A) = A$$

und die Grundmenge ist bereits Hülle ihrerselbst.

25 **Theorema**

Es sei A eine Menge. Eine Abbildung $h\colon 2^A \to 2^A$ ist genau dann ein Hüllenoperator auf A, falls für alle Teilmengen $X, Y \subseteq A$ gilt:

$$X \subseteq h(Y) \;\Leftrightarrow\; h(X) \subseteq h(Y)$$

Approbatio Seien $X, Y \subseteq A$.

$$\begin{aligned}
&(\Rightarrow) && (\Rightarrow) && X \subseteq h(Y) \overset{\text{(HO2)}}{\Rightarrow} h(X) \subseteq h(h(Y)) \overset{\text{(HO3)}}{\Rightarrow} h(X) \subseteq h(Y)\\
& && (\Leftarrow) && h(X) \subseteq h(Y) \overset{\text{(HO1)}}{\Rightarrow} X \subseteq h(Y)\\
&(\Leftarrow) && \text{(HO1)} && h(X) \subseteq h(X) \;\Rightarrow\; X \subseteq h(X)\\
& && \text{(HO2)} && X \subseteq Y \subseteq h(Y) \;\Rightarrow\; h(X) \subseteq h(Y)\\
& && \text{(HO3)} && h(X) \subseteq h(h(X)) \wedge \big[h(X) \subseteq h(X) \;\Rightarrow\; h(h(X)) \subseteq h(X)\big]\\
& && && \Rightarrow\; h(h(X)) = h(X)
\end{aligned}$$

■

26 **Lemma**

Für einen Hüllenoperator h auf A und alle Teilmengen $X, Y \subseteq A$ gelten

$$h(X \cap Y) \subseteq h(X) \cap h(Y)$$

und

$$h(h(X) \cap h(Y)) = h(X) \cap h(Y).$$

Approbatio Es gilt $X \cap Y \subseteq X$ und mit der Monotonie folgt $h(X \cap Y) \subseteq h(X)$, analog haben wir $h(X \cap Y) \subseteq h(Y)$ und damit insgesamt

$$h(X \cap Y) \subseteq h(X) \cap h(Y).$$

Daraus folgt

$$h(X) \cap h(Y) \subseteq h(h(X) \cap h(Y)) \subseteq h(h(X)) \cap h(h(Y)) = h(X) \cap h(Y).$$

■

Insbesondere gilt also für einen Hüllenoperator h auf A und alle h-abgeschlossenen Teilmengen $X, Y \subseteq A$

$$h(X \cap Y) = X \cap Y.$$

27 **Theorema: Hauptsatz über Hüllensysteme und Hüllenoperatoren**

(I) Es sei $\mathcal{H}$ ein Hüllensystem auf A. Für alle $X \subseteq A$ sei

$$h_{\mathcal{H}}(X) := \bigcap \{H \in \mathcal{H} \mid H \supseteq X\},$$

d.h. jeder Menge $X \subseteq A$ wird damit die kleinste Hülle aus $\mathcal{H}$ zugeordnet, die X enthält.

Dann ist $h_{\mathcal{H}}$ ein Hüllenoperator auf A, und die abgeschlossenen Mengen von $h_{\mathcal{H}}$ sind genau die Hüllen von $\mathcal{H}$. Wir nennen $h_{\mathcal{H}}$ den Hüllenoperator zu $\mathcal{H}$.

(II) Sei umgekehrt h ein Hüllenoperator auf A. Dann ist

$$\mathcal{H}_h := \{h(X) \mid X \subseteq A\}$$

ein Hüllensystem auf A, und die Hüllen von $\mathcal{H}_h$ sind genau die abgeschlossenen Mengen von h. Wir nennen $\mathcal{H}_h$ das Hüllensystem zu h.

(III) Für jedes Hüllensystem $\mathcal{H}$ auf A gilt

$$\mathcal{H}_{(h_{\mathcal{H}})} = \mathcal{H},$$

und für jeden Hüllenoperator h auf A gilt

$$h_{(\mathcal{H}_h)} = h.$$

Die Abbildungen

$$\mathcal{H} \mapsto h_{\mathcal{H}}$$
$$\mathcal{H}_h \longleftarrow h$$

sind also Bijektionen zwischen der Menge der Hüllensysteme auf A und der Menge der Hüllenoperatoren auf A.

APPROBATIO (I) Nach Satz 25 ist die Äquivalenz

$$X \subseteq h_{\mathcal{H}}(Y) \;\Leftrightarrow\; h_{\mathcal{H}}(X) \subseteq h_{\mathcal{H}}(Y)$$

zu zeigen. Die Richtung ($\Leftarrow$) folgt sogleich aus $X \subseteq h_{\mathcal{H}}(X) = \bigcap\{H \in \mathcal{H} \mid H \supseteq X\}$. Zum Beweis der anderen Richtung ($\Rightarrow$) sei $X \subseteq h_{\mathcal{H}}(Y)$, dann gilt

$$\{H \in \mathcal{H} \mid H \supseteq X\} \supseteq \{H \in \mathcal{H} \mid \underbrace{H \supseteq h_{\mathcal{H}}(Y)}_{\Rightarrow H \supseteq Y}\}$$

und damit

$$\bigcap\{H \in \mathcal{H} \mid H \supseteq X\} \subseteq \bigcap\{H \in \mathcal{H} \mid H \supseteq Y\},$$

d.h.

$$h_{\mathcal{H}}(X) \subseteq h_{\mathcal{H}}(Y).$$

(II) Nach Korollar 24 gilt $h(A) = A$ und damit $A \in \mathcal{H}_h$. Die Schnittstabilität des zugeordneten Hüllensystems folgt durch wiederholte Anwendung des Lemma 26.

(III) Einerseits folgt mit der $\bigcap$-Stabilität von Hüllensystemen

$$\mathcal{H}_{(h_{\mathcal{H}})} = \mathcal{H}.$$

Andererseits gilt für alle $X \subseteq A$

$$\begin{aligned} h_{(\mathcal{H}_h)}(X) &= \bigcap\{h(Y) \mid Y \subseteq A, h(Y) \supseteq X\} \\ &= h(X) \end{aligned}$$

d.h. $h(X)$ ist die kleinste Hülle, die X enthält, denn angenommen es existierte ein $Z \subseteq A$ mit $X \subseteq h(Z) \subseteq h(X)$, dann gälte $h(Z) = h(X)$. Damit ist also

$$h_{(\mathcal{H}_h)} = h. \qquad \blacksquare$$

Theorema 28

Es sei h ein Hüllenoperator auf A und $\mathcal{H}_h$ das zugeordnete Hüllensystem. Dann ist $(\mathcal{H}_h, \vee, \wedge)$ ein vollständiger Verband mit

$$\bigwedge_{j \in J} h(A_j) = \bigcap_{j \in J} h(A_j)$$

und

$$\bigvee_{j \in J} h(A_j) = h(\bigcup_{j \in J} A_j).$$

APPROBATIO Sei $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{H}_h$ und $H \in \mathcal{H}_h$. Es gelten

$$\begin{aligned} \bigvee \mathcal{Y} = H \;&\Leftrightarrow\; \forall H' \in \mathcal{H}_h \forall X \in \mathcal{Y} \colon X \subseteq H \subseteq H' \\ &\Leftrightarrow\; H = h(\bigcup \mathcal{Y}) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \bigwedge \mathcal{Y} = H \;&\Leftrightarrow\; \forall H' \in \mathcal{H}_h \forall X \in \mathcal{Y} \colon X \supseteq H \supseteq H' \\ &\Leftrightarrow\; H = \bigcap \mathcal{Y}. \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

29 **Theorema**

Sei M eine beliebige Menge. Mit $\mathfrak{H}_M$ bezeichnen wir die Menge aller Hüllensysteme auf M. Dann ist $\mathfrak{H}_M$ ein Hüllensystem auf 2^M. Weiter gibt es zu jedem Mengensystem $\mathcal{Y}$ auf M ein kleinstes Hüllensystem $\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}$, das $\mathcal{Y}$ enthält.

APPROBATIO Zu zeigen ist zum einen, dass die Grundmenge 2^M in $\mathfrak{H}_M$ enthalten ist und zum anderen, dass für jede Teilmenge von $\mathfrak{H}_M$ auch deren Schnitt in $\mathfrak{H}_M$ enthalten ist, d.h.

(I) $2^M \in \mathfrak{H}_M$

(II) $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}_M \Rightarrow \bigcap \mathfrak{X} \in \mathfrak{H}_M$

Nun ist $\mathfrak{H}_M$ die Menge aller Hüllensysteme auf M – um also zu zeigen dass ein Mengensystem $\mathcal{Y}$ auf M in $\mathfrak{H}_M$ enthalten, müssen wir zeigen, dass die Grundmenge M in $\mathcal{Y}$ enthalten ist und dass für jede Teilmenge von $\mathcal{Y}$ auch deren Schnitt in $\mathcal{Y}$ enthalten ist, d.h.

(I) $M \in \mathcal{Y}$

(II) $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Y} \Rightarrow \bigcap \mathcal{Z} \in \mathcal{Y}$

Damit ist also (I) sofort klar, denn die Potenzmenge 2^M ist ein Mengensystem auf M (sogar das größte) und enthält alle Teilmengen von M, also insbesondere M selbst (d.h. (i) gilt) und auch beliebige Schnitte von Teilmengen von M (d.h. (ii) gilt).
Zum Beweis von (II) sei $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}_M$, d.h. alle $\mathcal{Y} \in \mathfrak{X}$ sind Hüllensysteme auf M. Insbesondere sind also alle $\mathcal{Y} \in \mathfrak{X}$ Mengensysteme auf M, also ist auch deren Schnitt $\bigcap \mathfrak{X}$ ein Mengensystem auf M. Nun folgt mit (i), dass alle $\mathcal{Y} \in \mathfrak{X}$ die Grundmenge M enthalten, also liegt M auch im Schnitt $\bigcap \mathfrak{X}$, d.h. (i) gilt für $\bigcap \mathfrak{X}$. Weiter folgt mit (ii), dass alle $\mathcal{Y} \in \mathfrak{X}$ beliebige Schnitte von Teilmengen ihrerselbst enthalten, d.h.

$$\forall \mathcal{Y} \in \mathfrak{X} : (\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Y} \Rightarrow \bigcap \mathcal{Z} \in \mathcal{Y}).$$

Es folgt zunächst

$$\mathcal{Z} \subseteq \bigcap \mathfrak{X} \Rightarrow \forall \mathcal{Y} \in \mathfrak{X} : \bigcap \mathcal{Z} \in \mathcal{Y},$$

und damit also

$$\mathcal{Z} \subseteq \bigcap \mathfrak{X} \Rightarrow \bigcap \mathcal{Z} \in \bigcap \mathfrak{X},$$

d.h. es gilt (ii) für $\bigcap \mathfrak{X}$ und schließlich ist $\bigcap \mathfrak{X}$ ein Hüllensystem auf M, also in $\mathfrak{H}_M$ enthalten.
Es lässt sich nun mit dem Hauptsatz über Hüllensysteme und Hüllenoperatoren folgern, dass zum obigen Hüllensystem $\mathfrak{H}_M$ genau ein Hüllenoperator existiert, der jedem Element aus $2^{(2^M)}$, d.h. jeder Teilmenge von 2^M, d.h. jedem Mengensystem auf M, genau das kleinste Hüllensystem auf M zuordnet, welches dieses Mengensystem enthält. Der zugeordnete Hüllenoperator ist

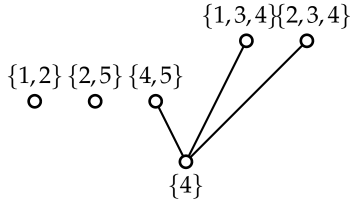
$$\begin{aligned} h_{\mathfrak{H}_M} : 2^{(2^M)} &\to \mathfrak{H}_M \subseteq 2^{(2^M)} \\ \mathcal{Y} &\mapsto \mathcal{H}_{\mathcal{Y}} := \bigcap \{\mathcal{H} \in \mathfrak{H}_M \mid \mathcal{H} \supseteq \mathcal{Y}\}. \end{aligned}$$ ■

30 **Exemplum**

Sei $M = \{1,2,3,4,5\}$. Wir suchen zu folgendem Mengensystem $\mathcal{Y}$ auf M das kleinste Hüllensystem $\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}$ auf M, das $\mathcal{Y}$ enthält:

$$\mathcal{Y} = \{\{4\},\{1,2\},\{2,5\},\{4,5\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$$

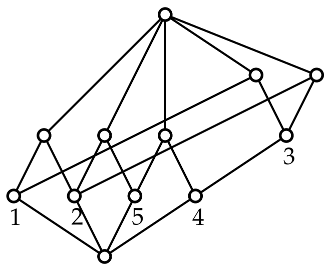
$\mathcal{Y}$ lässt sich bezüglich der Teilmengeninklusion $\subseteq$ als Ordnungsdiagramm so darstellen:



Wir können das Hüllensystem $\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}$ auf M finden, indem wir alle $\mathcal{Y}$ enthaltenden Hüllensysteme auf M suchen und diese dann schneiden. Dies ist jedoch ziemlich aufwendig. Einfacher ist es in diesem Falle, direkt aus dem Mengensystem das zugehörige kleinste Hüllensystem zu konstruieren. Dies geschieht, indem wir im ersten Schritt die Grundmenge M hinzufügen und im zweiten Schritt alle möglichen Schnitte von (beliebig vielen) Mengen aus dem Mengensystem bilden und die dabei entstehenden noch nicht im Mengensystem vorkommenden Mengen hinzufügen. Der zweite Schritt ist solange zu wiederholen, bis keine zusätzlichen Mengen mehr entstehen. Da die betrachtete Grundmenge M endlich ist, muss dieses Verfahren terminieren. Nach Konstruktion ist das entstehende Mengensystem dann das kleinste Hüllensystem, welches $\mathcal{Y}$ enthält.
Die hinzuzufügenden Mengen sind hier $M, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{5\}, \{3,4\}$, das gesuchte Hüllensystem $\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}$ ist also

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathcal{Y}} &= \mathcal{Y} \cup \big\{M, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{5\}, \{3,4\}\big\}\\ &= \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}, \{1,2\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, M\big\}.\end{aligned}$$

Dieses Hüllensystem lässt sich durch folgendes Ordnungsdiagramm darstellen, dabei wurden die Beschriftungen reduziert, indem die Elemente von M jeweils an den ersten Punkt geschrieben werden, an dem sie das erste Mal auftauchen, wenn wir von der Wurzel aus nach oben traversieren. Jeder Punkt ● im Diagramm steht für ein Element des Hüllensystems, d.h. für eine Teilmenge von M und diese enthält jeweils diejenigen Elemente von M, die an darunterliegenden Punkten stehen und über fallende Kanten bzw. Kantenwege mit ● verbunden sind.



2.2 GALOIS-Verbindungen

31 **Definitio: Adjunktion**

Seien $(P, \leq)$ und $(Q, \leq)$ geordnete Mengen. Eine ADJUNKTION zwischen $(P, \leq)$ und $(Q, \leq)$ ist ein Paar (ϕ, ψ) von ordnungserhaltenden Abbildungen $\phi \colon P \to Q$ und $\psi \colon Q \to P$, sodass $\psi \circ \phi$ extensiv und $\phi \circ \psi$ intensiv ist. Die Abbildungen ϕ und ψ heißen auch ADJUNGIERT zueinander, ϕ heißt RESIDUIERT und ψ RESIDUAL. Eine ADJUNKTION zwischen Mengen M und N ist eine Adjunktion zwischen den Potenzmengenverbänden $(\wp M, \subseteq)$ und $(\wp N, \subseteq)$.

32 **Lemma**

Seien $(P, \leq)$ und $(Q, \leq)$ geordnete Mengen. Ein Paar (ϕ, ψ) von Abbildungen $\phi \colon P \to Q$ und $\psi \colon Q \to P$ ist genau dann eine Adjunktion zwischen $(P, \leq)$ und $(Q, \leq)$, wenn

$$p \leq \psi q \Leftrightarrow \phi p \leq q$$

für alle $p \in P$ und $q \in Q$ gilt.

APPROBATIO ($\Rightarrow$) Sei (ϕ, ψ) eine Adjunktion zwischen $(P, \leq)$ und $(Q, \leq)$. Für $p \leq \psi q$ folgt $\phi p \leq \phi \psi q \leq q$. Umgekehrt folgt für $\phi p \leq q$ sofort $p \leq \psi \phi p \leq \psi q$.

($\Leftarrow$) Umgekehrt sei (ϕ, ψ) ein Paar von Abbildungen $\phi \colon P \to Q$ und $\psi \colon Q \to P$ mit $p \leq \psi q \Leftrightarrow \phi p \leq q$ für alle $p \in P$ und $q \in Q$. Für $p \in P$ gilt wegen $\phi p \leq \phi p =: q$ stets $p \leq \psi \phi p$, d.h. $\psi \circ \phi$ ist extensiv. Damit ist ϕ ordnungserhaltend, denn aus $p \leq p'$ folgt $p \leq \psi \phi p'$ und damit $\phi p \leq \phi p'$. Dual folgt, dass $\phi \circ \psi$ intensiv und damit ψ auch ordnungserhaltend ist. ∎

33 **Lemma**

Für jede Adjunktion (ϕ, ψ) gilt $\phi \circ \psi \circ \phi = \phi$ und $\psi \circ \phi \circ \psi = \psi$.

APPROBATIO Sei $p \in P$. Dann gilt zunächst $p \leq \psi \phi p$ wegen der Extensitivität und mit der Ordnungserhaltung folgt $\phi p \leq \phi \psi \phi p$. Außerdem gilt wegen $\psi \phi p \leq \psi \phi p$ stets $\phi \psi \phi p \leq \phi p$. Insgesamt ist also $\phi \circ \psi \circ \phi = \phi$. Für $\psi \circ \phi \circ \psi = \psi$ dual. ∎

34 **Corollarium**

Sei (ϕ, ψ) eine Adjunktion.

(I) $\psi \circ \phi$ ist ein Hüllenoperator in P und dual ist $\phi \circ \psi$ ein Kernoperator in Q.

(II) Für die zugehörigen Hüllensysteme gilt $\psi \phi P = \psi Q$ und dual $\phi \psi Q = \phi P$.

(III) Die Abbildung

$$\phi' \colon \begin{array}{l} \psi Q \to \phi P \\ \psi q \mapsto \phi \psi q \end{array}$$

ist ein Ordnungsisomorphismus zwischen den Hüllensystemen und

$$\psi' \colon \begin{array}{l} \phi P \to \psi Q \\ \phi p \mapsto \psi \phi p \end{array}$$

ist der entsprechende inverse Ordnungsisomorphismus.

Lemma 35

Eine Abbildung zwischen geordneten Mengen ist genau dann residuiert, wenn das Urbild eines Primideals stets wieder ein Primideal ist. Die zugehörige residuale Abbildung ist eindeutig. Dual ist eine Abbildung genau dann residual, wenn Urbilder von Primfiltern stets wieder Primfilter ergeben; die entsprechende residuierte Abbildung ist eindeutig.

APPROBATIO (⇒) Sei $\phi\colon P \to Q$ residuiert, dann gibt es eine residuale Abbildung $\psi\colon Q \to P$ und beide sind adjungiert zueinander. Für alle $q \in Q$ gilt dann

$$\begin{aligned}\phi^{-1}\downarrow q &= \left\{p \in P \,\middle|\, \underset{q' \leq q}{\exists}\, q' = \phi p\right\}\\ &= \{p \in P \mid \phi p \leq q\}\\ &= \{p \in P \mid p \leq \psi q\}\\ &= \downarrow \psi q.\end{aligned}$$

Dual für residuale Abbildungen.

(⇐) Sei $\phi\colon P \to Q$ eine Abbildung, deren Urbilder von Primidealen wieder Primideale sind. Für alle $q \in Q$ gibt es also ein $\psi q \in P$ mit $\phi^{-1}\downarrow q = \downarrow \psi q$. Damit erhalten wir eine Abbildung

$$\psi\colon \begin{aligned} &Q \to P\\ &q \mapsto \bigvee \phi^{-1}\downarrow q = \bigvee_{\phi p \leq q} p\end{aligned}$$

und es gilt

$$p \leq \psi q \Leftrightarrow p \in \phi^{-1}\downarrow q \Leftrightarrow \phi p \leq q.$$

Dual für Abbildungen, deren Urbilder von Primfiltern stets Primfilter sind.

(∃!) Sei ϕ residuiert und ψ_1, ψ_2 zwei entsprechende residuale Abbildungen. Dann gilt

$$p \leq \psi_1 q \Leftrightarrow \phi p \leq q \Leftrightarrow p \leq \psi_2 q$$

für alle $p \in P$ und $q \in Q$. Insbesondere für $p := \psi_1 q$ folgt $\psi_1 q \leq \psi_2 q$, und mit $p := \psi_2 q$ ergibt sich analog $\psi_2 q \leq \psi_1 q$. Also stimmen die beiden Residualen ψ_1 und ψ_2 überein. Dual sind auch Residuierte eindeutig durch ihre Residuale bestimmt. ■

Lemma 36

Eine Abbildung zwischen vollständigen Verbänden ist genau dann residuiert, wenn sie $\bigvee$-treu ist. Dual ist eine solche Abbildung genau dann residual, wenn sie $\bigwedge$-treu ist.

APPROBATIO Sei $\phi\colon P \to Q$ eine Abbildung zwischen vollständigen Verbänden.

(⇒) Sei ϕ residuiert. Dann gilt

$$\begin{aligned}\phi \bigvee X \leq q &\Leftrightarrow \bigvee X \leq \psi q\\ &\Leftrightarrow \underset{x \in X}{\forall}\, x \leq \psi q\\ &\Leftrightarrow \underset{x \in X}{\forall}\, \phi x \leq q\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \bigvee \phi X \leq q$$

und für $q \in \{\phi \bigvee X, \bigvee \phi X\}$ folgt $\phi \bigvee X = \bigvee \phi X$.

($\Leftarrow$) Sei ϕ $\bigvee$-treu. Zunächst ist ϕ ordnungserhaltend, denn sei $p \leq p'$, dann folgt $p \vee p' = p'$ und weiter $\phi p \vee \phi p' = \phi(p \vee p') = \phi p'$, also $\phi p \leq \phi p'$. Nun setzen wir

$$\psi\colon \begin{array}{l} Q \to P \\ q \mapsto \bigvee\limits_{\phi p \leq q} p. \end{array}$$

ψ ist auch ordnungserhaltend, denn sei $q \leq q'$, dann folgt $\{p \in P \mid \phi p \leq q\} \subseteq \{p \in P \mid \phi p \leq q'\}$, also $\bigvee_{\phi p \leq q} p \leq \bigvee_{\phi p \leq q'} p$. Die Komposition $\psi \circ \phi$ ist extensiv, denn

$$\psi\phi p = \bigvee_{\phi p' \leq \phi p} p' \geq p,$$

und $\phi \circ \psi$ ist intensiv, denn

$$\phi\psi q = \phi \bigvee_{\phi p \leq q} p = \bigvee_{\phi p \leq q} \phi p \leq q.$$

■

37 **Definitio: GALOIS-Verbindung**

Seien $(P, \leq)$ und $(Q, \leq)$ geordnete Mengen. Eine GALOIS-VERBINDUNG zwischen $(P, \leq)$ und $(Q, \leq)$ ist eine Adjunktion zwischen $(P, \leq)$ und $(Q, \geq)$.

38 **Theorema: Hauptsatz über GALOIS-Verbindungen und binäre Relationen**

Für jede binäre Relation I zwischen G und M ist eine GALOIS-Verbindung (ϕ_I, ψ_I) zwischen G und M gegeben durch

$$\phi_I\colon \begin{array}{l} \wp G \to \wp M \\ A \mapsto A^I := \left\{ m \in M \,\middle|\, \forall_{g \in A}\, gIm \right\} \end{array} \quad \text{und} \quad \psi_I\colon \begin{array}{l} \wp M \to \wp G \\ B \mapsto B^I := \left\{ g \in G \,\middle|\, \forall_{m \in B}\, gIm \right\} \end{array}.$$

Umgekehrt ist für eine GALOIS-Verbindung (ϕ, ψ) zwischen G und M

$$I_{(\phi,\psi)} := \{(g, m) \in G \times M \mid g \in \psi\{m\}\} = \{(g, m) \in G \times M \mid m \in \phi\{g\}\}$$

eine binäre Relation zwischen G und M. Diese Zuordnungen sind invers zueinander, d.h. es gelten

$$\phi_{I_{(\phi,\psi)}} = \phi \;\text{ und }\; \psi_{I_{(\phi,\psi)}} = \psi \;\text{ und }\; I_{(\phi_I, \psi_I)} = I.$$

39 **Definitio: GALOIS-(Quasi-)Ordnung**

Seien A, B Mengen und $(P, \leq)$ eine (quasi-)geordnete Menge mit $A \cup B = P$. Ein Quadrupel

$$(P, \leq, A, B)$$

heißt GALOIS-(QUASI-)ORDNUNG, falls für alle $a_1, a_2 \in A$

$$a_1 \leq a_2 \;\Leftrightarrow\; \forall b \in B\colon (a_2 \leq b \;\Rightarrow\; a_1 \leq b)$$

sowie für alle $b \in B, p \in P$

$$b \leq p \;\Leftrightarrow\; \forall a \in A\colon (a \leq b \;\Rightarrow\; a \leq p)$$

gelten.

The first section defines a general structure called *galois connection* and shows a way to obtain a lattice from an arbitrary galois connection. Furthermore a general possibility to modify a galois connection by arbitrary kernel operators is introduced. A GALOIS *connection* is a special correspondence between two ordered sets. GALOIS connections generalize the GALOIS theory by ÉVARISTE GALOIS (France, 1811 – 1832), that investigate correspondences between subgroups and subfields. GALOIS connections are rather weak compared to dual order isomorphisms, but every GALOIS connection induces a dual order isomorphism of certain kernel systems within the involved ordered sets.

Definitio: GALOIS Connection 40

A GALOIS CONNECTION between two ordered sets $(P, \leq)$ and $(Q, \leq)$ is a pair (ϕ, ψ) of mappings $\phi\colon P \to Q$ and $\psi\colon Q \to P$ such that the following conditions hold:

(I) ϕ and ψ are antimonotonic[a]

(II) $\psi \circ \phi$ and $\phi \circ \psi$ are extensive[b]

The two mappings are called DUALLY ADJOINT to each other and we write

$$(P, \leq) \overset{(\phi,\psi)}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} (Q, \leq).$$

A GALOIS CONNECTION between two arbitrary sets X and Y is a galois connection (ϕ, ψ) between the two powersets $\wp X$ and $\wp Y$ canonically ordered by subset inclusion $\subseteq$, *i.e.*

$$(\wp X, \subseteq) \overset{(\phi,\psi)}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} (\wp Y, \subseteq).$$

[a] *i.e.* $p_1 \leq p_2$ implies $\phi p_1 \geq \phi p_2$ for all $p_1, p_2 \in P$, and analogously for ψ

[b] *i.e.* $p \leq \psi\phi p$ holds for all $p \in P$, and analogously for $\phi \circ \psi$

A pair (ϕ, ψ) of mappings as above is a galois connection iff

$$p \leq \psi q \Leftrightarrow q \leq \phi p$$

holds for all $p \in P$ and $q \in Q$.

For any galois connection (ϕ, ψ) it holds that $\phi \circ \psi \circ \phi = \phi$ and $\psi \circ \phi \circ \psi = \psi$.

GALOIS connections are in a strong correspondence to closure operators. Each closure operator ϕ in an ordered set $(P, \leq)$ induces a galois connection $(P, \leq) \overset{(\phi,\mathrm{id})}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} (P, \geq)$. Dually each galois connection (ϕ, ψ) between two ordered sets $(P, \leq)$ and $(Q, \leq)$ induces two closure operators $\psi \circ \psi$ and $\phi \circ \psi$.

Exemplum 41

(I) For a binary relation $I \subseteq G \times M$ or for a formal context (G, M, I) respectively we get a galois connection (ϕ_I, ψ_I) between $(\wp G, \subseteq)$ and $(\wp M, \subseteq)$ with

$$\phi_I\colon \begin{array}{l} \wp G \to \wp M \\ A \mapsto A^I := \left\{ m \in M \,\middle|\, \underset{g \in A}{\forall} gIm \right\} \end{array}$$

$$\psi_I\colon \begin{aligned} \wp M &\to \wp G \\ B &\mapsto B^I := \left\{ g \in G \,\middle|\, \underset{m\in B}{\forall} gIm \right\} \end{aligned}$$

Please have a look on the **??** ??.?? for further details.

(II) For a pattern structure $(G, (D, \sqcap), \delta)$ a galois connection $(\phi_\delta, \psi_\delta)$ between $(\wp G, \subseteq)$ and $(D, \sqsubseteq)$ is obtained by

$$\phi_\delta\colon \begin{aligned} \wp G &\to D \\ A &\mapsto A^\square := \bigsqcap \delta A = \bigsqcap_{g\in A} \delta g \end{aligned}$$

$$\psi_\delta\colon \begin{aligned} D &\to \wp G \\ d &\mapsto d^\square := \{g \in G \mid d \sqsubseteq \delta g\} \end{aligned}$$

Both mappings are obviously antimonotonic[a] and their compositions are extensive[b].

[a] For object sets $A_1 \subseteq A_2 \subseteq G$ we can easily see that $A_1^\square = \bigsqcap \delta A_1 \sqsupseteq \bigsqcap \delta A_2 = A_2^\square$, as $\delta A_1 \subseteq \delta A_2$ holds. For patterns $d_1 \sqsubseteq d_2$ we have $d_1^\square = \{g \in G \mid d_1 \sqsubseteq \delta g\} \supseteq \{g \in G \mid d_2 \sqsubseteq \delta g\} = d_2^\square$, as $d_2 \sqsubseteq \delta g$ always implies $d_1 \sqsubseteq \delta g$.

[b] For each object set $A \subseteq G$ it follows that $A \subseteq \{g \in G \mid \bigsqcap \delta A \sqsubseteq \delta g\}$, as $\bigsqcap \delta A \sqsubseteq \delta g$ holds for all objects $g \in A$. For each pattern $d \in D$ it trivially holds that $d \sqsubseteq \bigsqcap \delta \{g \in G \mid d \sqsubseteq \delta g\} = \bigsqcap_{d \sqsubseteq \delta g} \delta g$.

There are various other examples for galois connections, that occur in many mathematical fields. From each galois connection an ordered set or even a complete lattice can be found within the cartesian product of the basic sets.

42 **Theorema: Galois Lattice**

Let (ϕ, ψ) be a galois connection between two posets $(P, \leq)$ and $(Q, \leq)$. Define $(\mathcal{G}(\phi, \psi), \leq)$ with

$$\mathcal{G}(\phi, \psi) = \{(p, q) \in P \times Q \mid \phi p = q, \psi q = p\}$$

and $(p_1, q_1) \leq (p_2, q_2)$ iff $p_1 \leq p_2$. Then $(\mathcal{G}(\phi, \psi), \leq)$ is a poset. If further $(P, \leq)$ and $(Q, \leq)$ are complete lattices, then $(\mathcal{G}(\phi, \psi), \leq)$ is a complete lattice and the infima and suprema are given by

$$\bigwedge_{t\in T} (p_t, q_t) = \left(\bigwedge_{t\in T} p_t, \phi\psi \bigvee_{t\in T} q_t \right)$$

$$\bigvee_{t\in T} (p_t, q_t) = \left(\psi\phi \bigvee_{t\in T} p_t, \bigwedge_{t\in T} q_t \right)$$

43 **Theorema**

For a galois connection $(P, \leq) \overset{(\phi,\psi)}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} (Q, \leq)$, a kernel operator (projection) α on $(P, \leq)$ and another kernel operator (projection) β on $(Q, \leq)$ it holds:

(I) A new galois connection $(\alpha P, \leq) \overset{(\beta\circ\phi, \alpha\circ\psi)}{\bullet\!\!-\!\!\bullet} (\beta Q, \leq)$ is obtained.

(II) Furthermore, there is an order-preserving epimorphism of $\mathcal{G}(\phi, \psi)$ on

$\mathcal{G}(\beta\circ\phi,\alpha\circ\psi)$ given by

$$\iota\colon \begin{array}{c} \mathcal{G}(\phi,\psi) \twoheadrightarrow \mathcal{G}(\beta\circ\phi,\alpha\circ\psi) \\ (p,q) \mapsto (\alpha p,\beta\phi\alpha p) \end{array}$$

(III) Dually, there is another order-preserving epimorphism of $\mathcal{G}(\phi,\psi)$ on $\mathcal{G}(\beta\circ\phi,\alpha\circ\psi)$ given by

$$\kappa\colon \begin{array}{c} \mathcal{G}(\phi,\psi) \twoheadrightarrow \mathcal{G}(\beta\circ\phi,\alpha\circ\psi) \\ (p,q) \mapsto (\alpha\psi\beta q,\beta q) \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} (P,\leq) \arrow[r, dash, "(\phi,\psi)"] \arrow[d, "\alpha"] & (Q,\leq) \arrow[d, "\beta"] \\ (\alpha P,\leq) \arrow[r, dash, "(\beta\circ\phi,\alpha\circ\psi)"] & (\beta Q,\leq) \end{tikzcd}$$

Approbatio (I) Let $p\in\alpha P$, i.e. $\alpha p = p$, and $q\in\beta Q$, i.e. $\beta q = q$. From $p\leq\alpha\psi q$ follows $p\leq\psi q$ as α is intensive. Since (ϕ,ψ) is a galois connection, this implies $q\leq\phi p$. Further it follows $q=\beta q\leq\beta\phi p$ because β is monotone. The other way round follows dually.

(II) At first we show that the images of ι are really elements of $\mathcal{G}(\beta\circ\phi,\alpha\circ\psi)$. So let $(p,q)\in\mathcal{G}(\phi,\psi)$, then $\iota(p,q)=(\alpha p,\beta\phi\alpha p)\in\mathcal{G}(\beta\circ\phi,\alpha\circ\psi)$ holds as

$$\alpha\psi\beta\phi\alpha p = \alpha\psi\beta\phi\alpha\psi q = \alpha\psi q = \alpha p.$$

Now we show that ι preserves order. For $(p_1,q_1),(p_2,q_2)\in\mathcal{G}(\phi,\psi)$ we have

$$\begin{aligned} &(p_1,q_1)\leq(p_2,q_2)\\ \Rightarrow\, &p_1\leq p_2\\ \Rightarrow\, &\alpha p_1\leq\alpha p_2\\ \Rightarrow\, &(\alpha p_1,\beta\phi\alpha p_1)\leq(\alpha p_2,\beta\phi\alpha p_2)\\ \Rightarrow\, &\iota(p_1,q_1)\leq\iota(p_2,q_2). \end{aligned}$$

For an element $(p,q)\in\mathcal{G}(\beta\circ\phi,\alpha\circ\psi)$ we have obviously $(\psi q,\phi\psi q)\in\mathcal{G}(\phi,\psi)$ and

$$\iota(\psi q,\phi\psi q) = (\alpha\psi q,\beta\phi\alpha\psi q) = (p,\beta\phi p) = (p,q),$$

and thus ι is an epimorphism.

(III) analogously. ∎

2.3 Vollständige Triverbände

44 **Definitio: Vollständiger Triverband**

Eine trigeordnete Menge $(L, \lesssim_1, \lesssim_2, \lesssim_3)$ heißt VOLLSTÄNDIGER TRIVERBAND, falls für jede beliebige Richtungsauswahl $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ und alle Teilmengen $X, Y \subseteq L$ stets das ik-Supremum $X \;{}_i{\bigvee}_k\; Y$ existiert. Wenn X oder Y einelementig ist, dann werden die Mengenklammern gern weggelassen.

45 **Theorema: Idempotenz der *ik*-Suprema**

Sei $(T, \lesssim_1, \lesssim_2, \lesssim_3)$ ein Triset. Dann gilt die Idempotenz

$$\underset{\{i,j,k\}=\{1,2,3\}}{\forall} \;\underset{t \in T}{\forall}\; t = t \;{}_i{\bigvee}_k\; t.$$

Wenn umgekehrt $(T, \lesssim_1, \lesssim_2, \lesssim_3)$ eine relationale Struktur mit drei Quasiordnungen ist, die die obige ${}_i{\bigvee}_k$-Idempotenz erfüllt, dann ist $(T, \lesssim_1, \lesssim_2, \lesssim_3)$ bereits ein Triset.

APPROBATIO (⇒) Sei $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ eine beliebige Richtungswahl und $t \in T$ ein beliebiges Element. Dann ist t bereits der einzige ik-Limes von $(\{t\}, \{t\})$: Sei nämlich $l \in t \;{}_i{\Uparrow\!\Uparrow\!\Uparrow}_k\; t$ ein ik-Limes, dann ist l auch eine ik-Schranke, d.h. es gelten $t \lesssim_i l$ sowie $t \lesssim_k l$, und zudem ist l j-größer als alle ik-Schranken, d.h. insbesondere gilt $t \lesssim_j l$. Mit der Antiordinalität ist l auch 1,2,3-kleiner als t, d.h. l und t sind 1,2,3-äquivalent, also nach der Triäquivalenz gleich. Es folgt $(t \;{}_i{\Uuparrow}_k\; t)^{\overline{\uparrow j}} = \{t\}$ und damit $t \mathrel{⋹} \left((t \;{}_i{\Uuparrow}_k\; t)^{\overline{\uparrow j}}\right)^{\overline{\uparrow i}}$ wie behauptet.

(⇐) Für die Rückrichtung sind die Antiordinalität und die Triäquivalenz zu zeigen.

(ANTIORDINALITÄT) Sei $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ eine beliebige Richtungswahl und sei t i,k-kleiner als u. Dann ist u zunächst eine ik-Schranke von $(\{t\}, \{t\})$. Außerdem gilt $t = t \;{}_i{\bigvee}_k\; t$ nach Voraussetzung, d.h. insbesondere ist t ein ik-Limes von $(\{t\}, \{t\})$ und somit folgt $t \gtrsim_j u$.

(TRIÄQUIVALENZ) Sei $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ eine beliebige Richtungswahl und seien t und u 1,2,3-äquivalent. Dann folgt sofort $t = t \;{}_i{\bigvee}_k\; t = u \;{}_i{\bigvee}_k\; u = u$. ■

In vollständigen geordneten Mengen (bzw. in vollständigen Verbänden) $(L, \leq)$ gibt es zwei ausgezeichnete Elemente, nämlich das größte Element $\top = \bigvee L = \bigwedge \emptyset = \bigvee_1 L = \bigvee_2 \emptyset$ und das kleinste Element $\bot = \bigwedge L = \bigvee \emptyset = \bigvee_2 L = \bigvee_1 \emptyset$.

Jeder vollständige Triverband $(L, \lesssim_1, \lesssim_2, \lesssim_3)$ ist beschränkt durch die drei ausgezeichneten Elemente

$$\bot_i := L \;{}_j{\bigvee}_k\; L,$$

$$\bot_j := L \;{}_i{\bigvee}_k\; L,$$

$$\text{und } \bot_k := L \;{}_i{\bigvee}_j\; L.$$

46 **Lemma**

Die drei Elemente $\bot_j = L \;{}_i{\bigvee}_k\; L$ für $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$

(I) sind eindeutig bestimmt durch die Eigenschaft

$$\underset{x \in L}{\forall} \bot_j \lesssim_j x,$$

es gilt also $\bot_j \in L^{\downarrow j}$, und

(II) sind eindeutig bestimmt durch die Eigenschaft

$$\underset{x\in L}{\forall}\; x \lesssim_i \bot_j \text{ und } x \lesssim_k \bot_j,$$

d.h. es gilt $\bot_j \in L \;{}_i{\Uparrow}_k\; L$, und

(III) sind eindeutig charakterisiert durch $\bot_j \in \left(L^{\uparrow i}\right)^{\overline{\uparrow k}}$, außerdem gilt $\left(L^{\uparrow i}\right)^{\overline{\uparrow k}} = \left(L^{\uparrow k}\right)^{\overline{\uparrow i}}$, und

(IV) sind zusätzlich wie folgt darstellbar:

$$\bot_j = L \;{}_i{\bigvee}_k\; L = L \;{}_k{\bigvee}_i\; L = \varnothing \;{}_j{\bigvee}_i\; L = \varnothing \;{}_j{\bigvee}_k\; L = \varnothing \;{}_i{\bigvee}_j\; \varnothing = \varnothing \;{}_k{\bigvee}_j\; \varnothing.$$

APPROBATIO (I) Sei 0_j ein weiteres Element von L, welches j-kleiner als alle Elemente von L ist. Dann folgt zunächst $0_j \sim_j \bot_j$. Weiterhin ist $\bot_j$ nach der Definition des ik-Supremum sowohl i-größer als auch k-größer als alle Elemente von L, d.h. insbesondere gilt $0_j \lesssim_i \bot_j$ (und trial $0_j \lesssim_k \bot_j$). Mit $0_j \sim_j \bot_j$ und der Antiordinalität folgt $\bot_j \lesssim_k 0_j$ (und trial $\bot_j \lesssim_i 0_j$). Insgesamt sind also 0_j und $\bot_j$ auch k-äquivalent (und trial i-äquivalent), und mit der Triäquivalenz folgt die Gleichheit der beiden Elemente.

(II) Nach (I) gilt $\bot_j \in L^{\downarrow j}$ und wegen

$$\bot_j = L \;{}_i{\bigvee}_k\; L \in \left(\left(L \;{}_i{\Uparrow}_k\; L\right)^{\overline{\uparrow j}}\right)^{\overline{\uparrow i}} \subseteq L \;{}_i{\Uparrow}_k\; L \subseteq L^{\downarrow j}$$

folgt bereits $\bot_j \in L \;{}_i{\Uparrow}_k\; L = L \;{}_k{\Uparrow}_i\; L$.

(III) Das j-kleinste Element $\bot_j$ ist ein i-größtes Element von L, d.h. es gilt $\bot_j \in L^{\uparrow i}$. Folglich ist $\left(L^{\uparrow i}\right)^{\uparrow k} \subseteq \bot_j^{\uparrow k}$, und weil $\bot_j$ ebenfalls k-größer als alle Elemente von L ist muss $\bot_j^{\uparrow k} = L^{\uparrow k}$ und damit $\left(L^{\uparrow i}\right)^{\uparrow k} \subseteq L^{\uparrow k}$ gelten. Nun folgt

$$\bot_j \in \left(L^{\uparrow i}\right)^{\overline{\uparrow k}} = \left(L^{\uparrow i}\right)^{\uparrow k} \cap L^{\uparrow i} \subseteq L^{\uparrow k} \cap L^{\uparrow i} = L \;{}_k{\Uparrow}_i\; L \ni \bot_j,$$

also $\bot_j \in \left(L^{\uparrow i}\right)^{\overline{\uparrow k}}$ wie behauptet. Trial folgt auch $\bot_j \in \left(L^{\uparrow k}\right)^{\overline{\uparrow i}}$, beispielsweise einfach durch Vertauschen von i und k.

(IV) Mit (II) erhalten wir zunächst $L \;{}_i{\bigvee}_k\; L = L \;{}_k{\bigvee}_i\; L$. Mit (III) gelten weiterhin

$$\varnothing \;{}_j{\bigvee}_i\; L \in \left(\left(\varnothing \;{}_j{\Uparrow}_i\; L\right)^{\overline{\uparrow k}}\right)^{\overline{\uparrow j}} = \left(\left(L^{\uparrow i}\right)^{\overline{\uparrow k}}\right)^{\overline{\uparrow j}} = \{\bot_j\}^{\overline{\uparrow j}} \ni \bot_j,$$

$$\text{und } \varnothing \;{}_j{\bigvee}_k\; L \in \left(\left(\varnothing \;{}_j{\Uparrow}_k\; L\right)^{\overline{\uparrow i}}\right)^{\overline{\uparrow j}} = \left(\left(L^{\uparrow k}\right)^{\overline{\uparrow i}}\right)^{\overline{\uparrow j}} = \{\bot_j\}^{\overline{\uparrow j}} \ni \bot_j,$$

$$\text{und } \varnothing \;{}_i{\bigvee}_j\; \varnothing \in \left(\left(\varnothing \;{}_i{\Uparrow}_j\; \varnothing\right)^{\overline{\uparrow k}}\right)^{\overline{\uparrow i}} = \left(L^{\uparrow k}\right)^{\overline{\uparrow i}} \ni \bot_j,$$

$$\text{und } \varnothing \;{}_k{\bigvee}_j\; \varnothing \in \left(\left(\varnothing \;{}_k{\Uparrow}_j\; \varnothing\right)^{\overline{\uparrow i}}\right)^{\overline{\uparrow k}} = \left(L^{\uparrow i}\right)^{\overline{\uparrow k}} \ni \bot_j.$$

■ Schließlich stimmen alle angegebenen Trisuprema überein.

47 **Theorema: Rechengesetze für *ik*-Suprema**

Sei $(T, \lesssim_1, \lesssim_2, \lesssim_3)$ ein vollständiger Triverband. Dann gelten für jede beliebige Richtungswahl $\{i, j, k\} = \{i', j', k'\} = \{1, 2, 3\}$ mit $i \neq i'$, $j \neq j'$ und $k \neq k'$ sowie für beliebige Elemente $t \in T$ bzw. Teilmengen $A, B, C, D \subseteq T$:

IDEMPOTENZ

$$t = t \;{}_i\!\bigvee_k\; t.$$

LIMITIERTHEIT

$$\begin{aligned} A \;{}_i\!\bigvee_k\; B &= \left\{A \;{}_i\!\bigvee_k\; B, B \;{}_k\!\bigvee_i\; A\right\} \;{}_j\!\bigvee_{j'}\; \left\{A \;{}_i\!\bigvee_k\; B\right\} \\ &= \left\{A \;{}_i\!\bigvee_k\; B\right\} \;{}_{j'}\!\bigvee_j\; \left\{B \;{}_k\!\bigvee_i\; A, A \;{}_i\!\bigvee_k\; B\right\} \end{aligned}$$

ANTIORDINALITÄT

$$\begin{aligned} A \;{}_i\!\bigvee_k\; B &= \left\{A \;{}_i\!\bigvee_k\; B, (A \cup C) \;{}_i\!\bigvee_k\; B\right\} \;{}_j\!\bigvee_{j'}\; \left\{A \;{}_i\!\bigvee_k\; B\right\} \\ &= \left\{A \;{}_i\!\bigvee_k\; B, A \;{}_i\!\bigvee_k\; (B \cup C)\right\} \;{}_j\!\bigvee_{j'}\; \left\{A \;{}_i\!\bigvee_k\; B\right\} \\ &= \left\{A \;{}_i\!\bigvee_k\; B\right\} \;{}_{j'}\!\bigvee_j\; \left\{(A \cup C) \;{}_i\!\bigvee_k\; B, A \;{}_i\!\bigvee_k\; B\right\} \\ &= \left\{A \;{}_i\!\bigvee_k\; B\right\} \;{}_{j'}\!\bigvee_j\; \left\{A \;{}_i\!\bigvee_k\; (B \cup C), A \;{}_i\!\bigvee_k\; B\right\} \end{aligned}$$

SEPARATION

$$(A \cup B) \;{}_i\!\bigvee_k\; C = \left\{A \;{}_i\!\bigvee_k\; C, B \;{}_i\!\bigvee_k\; C\right\} \;{}_i\!\bigvee_k\; C$$

$$A \;{}_i\!\bigvee_k\; (B \cup C) = A \;{}_i\!\bigvee_k\; \left\{A \;{}_i\!\bigvee_k\; B, A \;{}_i\!\bigvee_k\; C\right\}$$

ABSORPTION

$$\begin{aligned} A \;{}_i\!\bigvee_k\; B &= \left\{A \;{}_i\!\bigvee_k\; B\right\} \;{}_i\!\bigvee_k\; B \\ &= A \;{}_i\!\bigvee_k\; \left\{A \;{}_i\!\bigvee_k\; B\right\} \end{aligned}$$

ASSOZIATIVITÄT

$$\begin{aligned} (A \cup B \cup C) \;{}_i\!\bigvee_k\; D &= \left\{(A \cup B) \;{}_i\!\bigvee_k\; D, C \;{}_i\!\bigvee_k\; D\right\} \;{}_i\!\bigvee_k\; D \\ &= \left\{A \;{}_i\!\bigvee_k\; D, (B \cup C) \;{}_i\!\bigvee_k\; D\right\} \;{}_i\!\bigvee_k\; D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D \;{}_i\!\bigvee_k\; (A \cup B \cup C) &= D \;{}_i\!\bigvee_k\; \left\{D \;{}_i\!\bigvee_k\; (A \cup B), D \;{}_i\!\bigvee_k\; C\right\} \\ &= D \;{}_i\!\bigvee_k\; \left\{D \;{}_i\!\bigvee_k\; A, D \;{}_i\!\bigvee_k\; (B \cup C)\right\} \end{aligned}$$

KOMMUTATIVITÄT

$$\begin{aligned} A \, {}_{i}\!\bigvee_{k} B &= B \, {}_{k}\!\bigvee_{j} \left\{ B \, {}_{k}\!\bigvee_{i} A \right\} \\ &= \left\{ B \, {}_{k}\!\bigvee_{i} A \right\} {}_{j}\!\bigvee_{k} B \end{aligned}$$

BESCHRÄNKTHEIT

$$\left\{ A, (A \cup B) \, {}_{i}\!\bigvee_{k} C \right\} {}_{i}\!\bigvee_{i'} D = \left\{ (A \cup B) \, {}_{i}\!\bigvee_{k} C \right\} {}_{i}\!\bigvee_{i'} D$$

$$D \, {}_{i'}\!\bigvee_{i} \left\{ A, (A \cup B) \, {}_{i}\!\bigvee_{k} C \right\} = D \, {}_{i'}\!\bigvee_{i} \left\{ (A \cup B) \, {}_{i}\!\bigvee_{k} C \right\}$$

$$\left\{ A, C \, {}_{k}\!\bigvee_{i} (A \cup B) \right\} {}_{i}\!\bigvee_{i'} D = \left\{ C \, {}_{k}\!\bigvee_{i} (A \cup B) \right\} {}_{i}\!\bigvee_{i'} D$$

$$D \, {}_{i'}\!\bigvee_{i} \left\{ A, C \, {}_{k}\!\bigvee_{i} (A \cup B) \right\} = D \, {}_{i'}\!\bigvee_{i} \left\{ C \, {}_{k}\!\bigvee_{i} (A \cup B) \right\}$$

(Bie99), (Vou03)

APPROBATIO Es werden stets nur die ersten Gleichungen gezeigt, die weiteren folgen dann jeweils analog.

IDEMPOTENZ gilt bereits nach Theorema: Idempotenz der *ik*-Suprema 2.45.

LIMITIERTHEIT Natürlich gilt $X \, {}_{i}\!\bigvee_{k} Y \sim_j Y \, {}_{k}\!\bigvee_{i} X$, denn beide Elemente sind insbesondere *ik*-Limites von (X, Y) und damit *j*-äquivalent. Damit und mit der Idempotenz folgt

$$\left\{ X \, {}_{i}\!\bigvee_{k} Y, Y \, {}_{k}\!\bigvee_{i} X \right\} {}_{j}\!\bigvee_{k} \left\{ X \, {}_{i}\!\bigvee_{k} Y \right\} = \left\{ X \, {}_{i}\!\bigvee_{k} Y \right\} {}_{j}\!\bigvee_{k} \left\{ X \, {}_{i}\!\bigvee_{k} Y \right\} = X \, {}_{i}\!\bigvee_{k} Y.$$

ANTIORDINALITÄT Es genügt zu zeigen, dass $(X \cup Y) \, {}_{i}\!\bigvee_{k} Z \lesssim_j X \, {}_{i}\!\bigvee_{k} Z$ gilt, denn dann folgt $\{X \, {}_{i}\!\bigvee_{k} Y, (X \cup Y) \, {}_{i}\!\bigvee_{k} Z\}^{\uparrow j} = \{X \, {}_{i}\!\bigvee_{k} Z\}^{\uparrow j}$ und zusammen mit der Idempotenz ergibt sich analog wie im Limitiertheits-Beweis

$$\left\{ X \, {}_{i}\!\bigvee_{k} Z, (X \cup Y) \, {}_{i}\!\bigvee_{k} Z \right\} {}_{j}\!\bigvee_{k} \left\{ X \, {}_{i}\!\bigvee_{k} Z \right\} = \left\{ X \, {}_{i}\!\bigvee_{k} Y \right\} {}_{j}\!\bigvee_{k} \left\{ X \, {}_{i}\!\bigvee_{k} Y \right\} = X \, {}_{i}\!\bigvee_{k} Y.$$

Warum gilt $(X \cup Y) \, {}_{i}\!\bigvee_{k} Z \lesssim_j X \, {}_{i}\!\bigvee_{k} Z$? Kanonisch gilt

$$(X \cup Y) \, {}_{i}\!\bigvee_{k} Z \in (X \cup Y)^{\uparrow i} \cap z^{\uparrow k} = X^{\uparrow i} \cap Y^{\uparrow i} \cap Z^{\uparrow k} \subseteq X^{\uparrow i} \cap Z^{\uparrow k},$$

d.h. $(X \cup Y) \, {}_{i}\!\bigvee_{k} Z$ ist insbesondere auch eine *ik*-Schranke von (X, Z). Weiterhin ist $X \, {}_{i}\!\bigvee_{k} Z$ ein *ik*-Limes von (X, Z) und damit *j*-größer als alle *ik*-Schranken, d.h. $X \, {}_{i}\!\bigvee_{k} Z \gtrsim_j (X \cup Y) \, {}_{i}\!\bigvee_{k} Z$.

SEPARATION Wir setzen $t := (X \cup Y) \, {}_{i}\!\bigvee_{k} Z$ und $u := \{X \, {}_{i}\!\bigvee_{k} Z, Y \, {}_{i}\!\bigvee_{k} Z\} \, {}_{i}\!\bigvee_{k} Z$. Es ist nun zu zeigen, dass t und u gleich sind. Der Beweis wird in drei Schritte unterteilt:

(I) u ist eine *ik*-Schranke von $(X \cup Y, Z)$.

(II) u ist ein *ik*-Limes von $(X \cup Y, Z)$.

(III) u ist das *ik*-Supremum von $(X \cup Y, Z)$.

Weil ein *ik*-Supremum stets eindeutig bestimmt ist, muss dann $t = u$ sein. Beginnen wir also mit dem ersten Schritt.

(*ik*-SCHRANKE) Es gilt

$$u = \left\{X\ {}_i\!\bigvee_k Z, Y\ {}_i\!\bigvee_k Z\right\}\ {}_i\!\bigvee_k Z \in \left\{\underbrace{X\ {}_i\!\bigvee_k Z}_{\in X^{\uparrow i}}, \underbrace{Y\ {}_i\!\bigvee_k Z}_{\in Y^{\uparrow i}}\right\}^{\uparrow i} \cap Z^{\uparrow k} \subseteq (X \cup Y)^{\uparrow i} \cap Z^{\uparrow k}$$

und damit ist u eine *ik*-Schranke von $(X \cup Y, Z)$.

(*ik*-LIMES) u ist genau dann ein *ik*-Limes von $(X \cup Y, Z)$, wenn u *j*-größer als alle *ik*-Schranken von $(X \cup Y, Z)$ ist. Sei also s eine solche *ik*-Schranke, dann ist s insbesondere auch eine *ik*-Schranke sowohl von (X, Z) als auch von (Y, Z). Demnach gilt $s \lesssim_j X\ {}_i\!\bigvee_k Z$ sowie $s \lesssim_j Y\ {}_i\!\bigvee_k Z$, also sind $X\ {}_i\!\bigvee_k Z$ und $Y\ {}_i\!\bigvee_k Z$ *jk*-Schranken von (s, Z). Folglich gilt nun für das *jk*-Supremum $s\ {}_j\!\bigvee_k Z$

$$X\ {}_i\!\bigvee_k Z \lesssim_i s\ {}_j\!\bigvee_k Z \text{ und } Y\ {}_i\!\bigvee_k Z \lesssim_i s\ {}_j\!\bigvee_k Z,$$

also ist $s\ {}_j\!\bigvee_k Z$ eine *ik*-Schranke von $(\{X\ {}_i\!\bigvee_k Z, Y\ {}_i\!\bigvee_k Z\}, Z)$. Weil u insbesondere ein *ik*-Limes von $(\{X\ {}_i\!\bigvee_k Z, Y\ {}_i\!\bigvee_k Z\}, Z)$ ist, muss $s\ {}_j\!\bigvee_k Z \lesssim_j u$ gelten. Schließlich folgt also

$$s \lesssim_j s\ {}_j\!\bigvee_k Z \lesssim_j u, \text{ d.h. } s \lesssim_j u.$$

Das zeigt, dass u ein *ik*-Limes von $(X \cup Y, Z)$ ist.

(*ik*-SUPREMUM) u ist genau dann das *ik*-Supremum von $(X \cup Y, Z)$, wenn u *i*-größer (oder trial *k*-kleiner) als alle *ik*-Limites von $(X \cup Y, Z)$ ist. Sei dazu l ein solcher *ik*-Limes. Natürlich ist l dann auch eine *ik*-Schranke sowohl von (X, Z) als auch von (Y, Z), d.h. es gelten $l \lesssim_j X\ {}_i\!\bigvee_k Z$ und $l \lesssim_j Y\ {}_i\!\bigvee_k Z$. Demnach sind $X\ {}_i\!\bigvee_k Z$ und $Y\ {}_i\!\bigvee_k Z$ *jk*-Schranken von (l, Z), und es folgt

$$X\ {}_i\!\bigvee_k Z \lesssim_i l\ {}_j\!\bigvee_k Z \text{ und } Y\ {}_i\!\bigvee_k Z \lesssim_i l\ {}_j\!\bigvee_k Z.$$

Anders gesagt ist dann $l\ {}_j\!\bigvee_k Z$ eine *ik*-Schranke von $(\{X\ {}_i\!\bigvee_k Z, Y\ {}_i\!\bigvee_k Z\}, Z)$. Weiterhin ergibt sich nun, dass $l\ {}_i\!\bigvee_k Z$ ein *ik*-Limes ist: Sei nämlich s eine *ik*-Schranke von $(\{X\ {}_i\!\bigvee_k Z, Y\ {}_i\!\bigvee_k Z\}, Z)$, dann ist s auch eine *ik*-Schranke von $(X \cup Y, Z)$, und nach Wahl von l muss

$$s \lesssim_j l \lesssim_j l\ {}_i\!\bigvee_k Z$$

gelten. Also ist $l\ {}_j\!\bigvee_k Z$ *j*-größer als alle *ik*-Schranken, d.h. ein *ik*-Limes. Weil u das *ik*-Supremum von $(\{X\ {}_i\!\bigvee_k Z, Y\ {}_i\!\bigvee_k Z\}, Z)$ ist, muss u *i*-größer (bzw. trial *k*-kleiner) als alle *ik*-Limites sein, also folgt insbesondere $l\ {}_j\!\bigvee_k Z \lesssim_i u$. Weiterhin ist l eine *jk*-Schranke von (l, Z) und damit folgt

$$l \lesssim_i l\ {}_j\!\bigvee_k Z, \text{ insgesamt also } l \lesssim_i l\ {}_j\!\bigvee_k Z \lesssim_i u.$$

Schließlich ist u *i*-größer als alle *ik*-Limites von $(X \cup Y, Z)$, muss also das *ik*-Supremum t sein.

ABSORPTION Mit der Separation folgt

$$X\ {}_i\!\bigvee_k Y = (X \cup X)\ {}_i\!\bigvee_k Y = \left\{X\ {}_i\!\bigvee_k Y, X\ {}_i\!\bigvee_k Y\right\}\ {}_i\!\bigvee_k Y = \left\{X\ {}_i\!\bigvee_k Y\right\}\ {}_i\!\bigvee_k Y.$$

ASSOZIATIVITÄT Mit der Separation folgt

$$\left\{(A \cup B)\ {}_i\!\bigvee_k D, C\ {}_i\!\bigvee_k D\right\}\ {}_i\!\bigvee_k D = (A \cup B \cup C)\ {}_i\!\bigvee_k D = \left\{A\ {}_i\!\bigvee_k D, (B \cup C)\ {}_i\!\bigvee_k D\right\}\ {}_i\!\bigvee_k D.$$

Kommutativität Setze $t := X \,{}_i{\bigvee}_k\, Y$ und $u := Y \,{}_k{\bigvee}_j\, \{Y \,{}_k{\bigvee}_i\, X\}$. Der Beweis ist analog zum Separations-Beweis in drei Teilschritte gegliedert: Es wird gezeigt, dass u zuerst eine *ik*-Schranke, dann ein *ik*-Limes und schließlich das *ik*-Supremum von (X, Y) ist.

$(u \in X \,{}_i{\Uparrow\!\!\Uparrow}_k\, Y)$ Zunächst ist $Y \,{}_k{\bigvee}_i\, X$ eine *kj*-Schranke von $(Y, Y \,{}_k{\bigvee}_i\, X)$, also folgt

$$Y \,{}_k{\bigvee}_i\, X \lesssim_i Y \,{}_k{\bigvee}_j \left\{Y \,{}_k{\bigvee}_i\, X\right\} = u.$$

Demnach ist $Y \,{}_k{\bigvee}_i\, X$ eine *ik*-Schranke von (X, Y) und es gilt $u \lesssim_j t$ sowie $u \lesssim_j Y \,{}_k{\bigvee}_i\, X$.

$(u \in X \,{}_i{\Uparrow\!\!\Uparrow\!\!\Uparrow}_k\, Y)$ Weil u nach Definition eine *kj*-Schranke von $(Y, Y \,{}_k{\bigvee}_i\, X)$ ist, muss auch $u \gtrsim_j Y \,{}_k{\bigvee}_i\, X$ gelten, d.h. $u \sim_j Y \,{}_k{\bigvee}_i\, X$. Nun ist u bereits eine *ki*-Schranke von (Y, X) und wegen $u \sim_j Y \,{}_k{\bigvee}_i\, X$ auch *j*-größer als alle *ki*-Schranken von (Y, X), d.h. u ist ein *ki*-Limes von (Y, X), also auch ein *ik*-Limes von (X, Y).

$(u = X \,{}_i{\bigvee}_k\, Y)$ Sei l ein *ik*-Limes von (X, Y), dann folgt $l \sim_j X \,{}_i{\bigvee}_k\, Y$, also auch $l \in \{X \,{}_i{\bigvee}_k\, Y\} \,{}_i{\Uparrow\!\!\Uparrow}_k\, Y$ bzw. $l \in Y \,{}_k{\Uparrow\!\!\Uparrow}_j\, \{Y \,{}_k{\bigvee}_i\, X\}$, d.h. $l \lesssim_i Y \,{}_k{\bigvee}_j\, \{Y \,{}_k{\bigvee}_i\, X\} = u$ und damit $u = X \,{}_i{\bigvee}_k\, Y = t$.

Beschränktheit Zunächst gilt natürlich $a \lesssim_i (A \cup B) \,{}_i{\bigvee}_k\, C$ für alle $a \in A$. Also folgt

$$\left\{A, (A \cup B) \,{}_i{\bigvee}_k\, C\right\}^{\uparrow i} = \left\{(A \cup B) \,{}_i{\bigvee}_k\, C\right\}^{\uparrow i}.$$

Demnach muss natürlich auch

$$\left\{A, (A \cup B) \,{}_i{\bigvee}_k\, C\right\} \,{}_i{\Uparrow\!\!\Uparrow}_{i'}\, D = \left\{(A \cup B) \,{}_i{\bigvee}_k\, C\right\} \,{}_i{\Uparrow\!\!\Uparrow}_{i'}\, D$$

gelten, also auch für die Limites ${}_i{\Uparrow\!\!\Uparrow\!\!\Uparrow}_{i'}$ und schließlich auch für das Supremum ${}_i{\bigvee}_{i'}$. ■

Lemma: Zusammenhang zwischen der Triordnung und den Trisuprema 48

(I) Für jeden vollständigen Triverband $(T, \lesssim_1, \lesssim_2, \lesssim_3)$, jede Richtungswahl $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ mit $i \neq i' \in \{1, 2, 3\}$ und beliebige Elemente $t, u \in T$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$t \lesssim_i u \Leftrightarrow u = \{t, u\} \,{}_i{\bigvee}_{i'}\, u$$
$$\Leftrightarrow u = u \,{}_{i'}{\bigvee}_i\, \{t, u\}$$

(II) Eine Struktur $(T, {}_1{\bigvee}_2, {}_1{\bigvee}_3, {}_2{\bigvee}_1, {}_2{\bigvee}_3, {}_3{\bigvee}_1, {}_3{\bigvee}_2)$ mit doppelt-beliebigstelligen Supremumsoperatoren ${}_i{\bigvee}_k : \wp(T) \times \wp(T) \to T$ ist genau dann trigeordnet, wenn die sechs Supremumsoperatoren die acht Eigenschaften Idempotenz, Separation, Absorption, Assoziativität, Kommutativität, Antiordinalität, Limitiertheit und Beschränktheit aus Theorema: Rechengesetze für *ik*-Suprema 2.47 erfüllen. Die obigen Äquivalenzen (außer die erste) gelten dann auch, und die drei Quasiordnungen auf T findet man dann vermöge der ersten Äquivalenz.

(Bie99)

Approbatio (I) Aus $t \lesssim_i u$ folgt schonmal $\{t, u\}^{\uparrow i} = \{u\}^{\uparrow i} \ni u$. Natürlich gilt auch $\{u\}^{\uparrow i'} \ni u$. Insgesamt folgt zunächst $u \in \{t, u\} \,{}_i{\Uparrow\!\!\Uparrow}_{i'}\, \{u\}$. Weiterhin ist u sogar ein *ii'*-Limes von $(\{t, u\}, \{u\})$, denn sei s eine *ii'*-Schranke von $(\{t, u\}, u)$, dann gilt $u \lesssim_i s$ sowie $u \lesssim_{i'} s$ und die Antiordinalität liefert $s \lesssim_{i''} u$. Schließlich ist u nun das

ii'-Supremum von $(\{t,u\},u)$, denn für jeden ii'-Limes l von $(\{t,u\},u)$ gilt analog $u \lesssim_{i'} l$. Wenn umgekehrt u das ii'-Supremum von $(\{t,u\},u)$ ist, dann ist u bereits eine ii'-Schranke und demnach folgt $u \gtrsim_i t$. Analog folgt die zweite Äquivalenz.

(II) Dieser Beweis wird hier mangels Zeit nicht geführt. Der geneigte Leser findet ihn in *An equational theory for trilattices* von Klaus Biedermann, erschienen 1999 in der Reihe Algebra Universalis, Ausgabe 42, Seiten 253-268. (Bie99) ■

49 **Definitio: supremales Tripel**

Sei $(T,\lesssim_1,\lesssim_2,\lesssim_3)$ eine trigeordnete Menge. Ein Tripel (X_1,X_2,X_3) von Teilmengen $X_1,X_2,X_3 \subseteq T$ heißt SUPREMAL, falls

$$\exists_{s\in T} \ \forall_{i\in\{1,2,3\}} \ \forall_{x\in X_i} \ x \lesssim_i s$$

gilt, d.h. falls $\bigcap_{\{i,j,k\}=\{1,2,3\}} X_i \ {}_i{\Uparrow}_k \ X_k = \bigcap_{i\in\{1,2,3\}} X_i^{\uparrow i} \neq \emptyset$ ist. Ein solches Element s heißt SUPREMALE SCHRANKE von (X_1,X_2,X_3). Ein Tripel (x_1,x_2,x_3) von Elementen $x_1,x_2,x_3 \in T$ heißt SUPREMAL, wenn $(\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\})$ supremal ist.

50 **Lemma**

Sei $(L,\lesssim_1,\lesssim_2,\lesssim_3)$ ein vollständiger Triverband. Ein Teilmengentripel (X_1,X_2,X_3) ist supremal genau dann, wenn jedes enthaltene Elementtripel $(x_1,x_2,x_3) \in X_1 \times X_2 \times X_3$ supremal ist. Insbesondere gilt dann $x_j \lesssim_j X_i \ {}_i{\bigvee}_k \ X_k$ für alle $i,j,k \in \{1,2,3\}$ mit $i \neq k$ und $x_j \in X_j$.

APPROBATIO (⇒) Sei (X_1,X_2,X_3) supremal, dann gibt es ein

$$s \in \bigcap_{i\in\{1,2,3\}} X_i^{\uparrow i} = \bigcap_{i\in\{1,2,3\}} \bigcap_{x_i\in X_i} x_i^{\uparrow i} = \bigcap_{(x_1,x_2,x_3)\in X_1\times X_2\times X_3} \bigcap_{i\in\{1,2,3\}} x_i^{\uparrow i},$$

also sind auch alle Elementtripel $(x_1,x_2,x_3) \in X_1 \times X_2 \times X_3$ supremal.

(⇐) Sei nun umgekehrt jedes Elementtripel $(x_1,x_2,x_3) \in X_1 \times X_2 \times X_3$ supremal und $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ eine beliebige Richtungswahl.

(i) Für jedes Elementtripel $(x_i,x_j,x_k) \in X_i \times X_j \times X_k$ gibt es nach Voraussetzung ein $s \in x_i^{\uparrow i} \cap x_j^{\uparrow j} \cap x_k^{\uparrow k}$, und für das jk-Supremum von x_j und x_k gilt

$$x_j \ {}_j{\bigvee}_k \ x_k := \{x_j\} \ {}_j{\bigvee}_k \ \{x_k\} \in \{x_j\} \ {}_j{\Uparrow}_k \ \{x_k\} = x_j^{\uparrow j} \cap x_k^{\uparrow k}.$$

Also liegen s und $x_j \ {}_j{\bigvee}_k \ x_k$ beide in $x_j^{\uparrow j} \cap x_k^{\uparrow k}$, und weil $x_j \ {}_j{\bigvee}_k \ x_k$ darin ein i-größtes Element ist, muss $s \lesssim_i x_j \ {}_j{\bigvee}_k \ x_k$ gelten. Außerdem liegt s in $x_i^{\uparrow i}$, und demnach muss x_i auch i-kleiner als $x_j \ {}_j{\bigvee}_k \ x_k$ sein. Weil $(x_i,x_j,x_k) \in X_i \times X_j \times X_k$ beliebig gewählt werden kann, folgt

$$x_j \ {}_j{\bigvee}_k \ x_k \in X_i^{\uparrow i}$$

für alle $x_k \in X_k$ und $x_j \in X_j$.

(k) Sei $(x_j,x_k) \in X_j \times X_k$ ein beliebiges Elementpaar. Mit (i) erhalten wir zunächst $x_j \ {}_j{\bigvee}_k \ x_k \in X_i^{\uparrow i} \cap x_j^{\uparrow j}$, also folgt

$$x_j \ {}_j{\bigvee}_k \ x_k \lesssim_k X_i \ {}_i{\bigvee}_j \ x_j.$$

Weil $x_j \, {}_j\!\bigvee_k \, x_k$ natürlich k-größer als x_k ist, gilt sogar $x_k \lesssim_k X_i \, {}_i\!\bigvee_j \, x_j$. Die Elemente x_j und x_k können beliebig gewählt werden und folglich gilt

$$X_i \, {}_i\!\bigvee_j \, x_j \in X_k^{\uparrow k}$$

für alle $x_j \in X_j$.

(*j*) Sei $x_j \in X_j$. Mit (*k*) und $X_i \, {}_i\!\bigvee_j \, x_j \subseteq X_i^{\uparrow i}$ folgt $X_i \, {}_i\!\bigvee_j \, x_j \in X_i \, {}_i\!\Uparrow_k \, X_k$, und damit

$$X_i \, {}_i\!\bigvee_j \, x_j \lesssim_j X_i \, {}_i\!\bigvee_k \, X_k.$$

Schließlich gilt also $x_j \lesssim_j X_i \, {}_i\!\bigvee_k \, X_k$ für alle $x_j \in X_j$, d.h.

$$X_i \, {}_i\!\bigvee_k \, X_k \in (X_i \, {}_i\!\Uparrow_k \, X_k) \cap X_j^{\uparrow j} = X_i^{\uparrow i} \cap X_j^{\uparrow j} \cap X_k^{\uparrow k}$$

und damit ist (X_1, X_2, X_3) supremal. ■

Lemma 51

(I) Für alle $t \in T$ ist (t, t, t) supremal.

(II) Für alle $t \in T$ ist $(t^{\downarrow 1}, t^{\downarrow 2}, t^{\downarrow 3})$ supremal.

(III) Für alle $t_1, t_2, t_3 \in T$ ist (t_1, t_2, t_3) supremal genau dann, wenn das TRIINTERVALL

$$[t_1, t_2, t_3] := \{t \in T \mid t_1 \lesssim_1 t \text{ und } t_2 \lesssim_2 t \text{ und } t_3 \lesssim_3 t\} = t_1^{\uparrow 1} \cap t_2^{\uparrow 2} \cap t_3^{\uparrow 3}$$

nicht leer ist.

APPROBATIO (I) Natürlich gilt für alle $t \in T$ $t \lesssim_1 t$, $t \lesssim_2 t$ und $t \lesssim_3 t$, d.h. (t, t, t) hat die supremale Schranke t.

(II) Für alle $u \in t^{\downarrow i}$ mit $i \in \{1, 2, 3\}$ gilt $u \lesssim_i t$, also hat das Idealtripel $(t^{\downarrow 1}, t^{\downarrow 2}, t^{\downarrow 3})$ die supremale Schranke t.

(III) Ersichtlich ist ein Element des Triintervalls $[t_1, t_2, t_3]$ stets eine supremale Schranke des Tripels (t_1, t_2, t_3), und umgekehrt. ■

3 Kontexte

Kapitelübersicht

3.1 Formale Kontexte

Oftmals sind uns Tabellen (sogenannte Kreuztabellen) gegeben, die als Zeilen eine Menge von Gegenständen und als Spalten eine Menge von Merkmalen (oder auch umgekehrt) haben. In solch einer Tabelle ist dann ein Kreuz eingetragen, falls ein bestimmter Gegenstand ein bestimmtes Merkmal hat, oder eben kein Kreuz, falls ein bestimmter Gegenstand ein bestimmtes Merkmal nicht hat.

In untenstehender Tabelle hat der Gegenstand g das Merkmal m, dargestellt durch das Kreuz.

I			m
g			$\times$

Die Tabelle als Gesamtheit beschreibt eine Relation zwischen der Gegenstands- und der Merkmalsmenge, die sogenannte Inzidenzrelation. In der Tabelle ist das Paar (g, m) ein Element dieser Inzidenzrelation.

1 **Definitio: Formaler Kontext**

Ein FORMALER KONTEXT $\mathbb{K} = (G, M, I)$ besteht aus einer Menge G von GEGENSTÄNDEN, einer Menge M von MERKMALEN und einer INZIDENZRELATION $I \subseteq G \times M$. Für gIm sagen wir, dass der Gegenstand g das Merkmal m HAT. Ein FORMALER BEGRIFF von $\mathbb{K}$ ist ein Paar (A, B) mit $A \subseteq G$ und $B \subseteq M$, sodass $A^I = B$ sowie $B^I = A$ gilt. A heißt UMFANG und B heißt INHALT. Die Menge aller formalen Begriffe symbolisieren wir mit $\mathfrak{B}\mathbb{K}$.

Corollarium 2

Für einen formalen Kontext (G, M, I), Gegenstandsmengen $A, A_1, A_2 \subseteq G$ und Merkmalsmengen $B, B_1, B_2 \subseteq M$ gelten:

(I) $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow A_2^I \subseteq A_1^I$ und dual $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow B_2^I \subseteq B_1^I$

(II) $A \subseteq A^{II}$ und dual $B \subseteq B^{II}$

(III) $A^I = A^{III}$ und dual $B^I = B^{III}$

(IV) $A \subseteq B^I \Leftrightarrow B \subseteq A^I \Leftrightarrow A \times B \subseteq I$

Lemma 3

Ein formaler Begriff ist eindeutig durch seinen Umfang definiert. Dual ist ein formaler Begriff eindeutig durch seinen Inhalt definiert.

Approbatio Seien (A, B) und (A, B') formale Begriffe. Dann gilt $B = A^I = B'$. Dual für die Inhalte. ■

Corollarium 4

Die Menge der Umfänge aller formalen Begriffe eines formalen Kontexts bildet ein Hüllensystem auf der Menge der Gegenstände, und die Umfänge sind genau die Mengen von der Form B^I für $B \subseteq M$. Dual bildet die Menge der Inhalte ein Hüllensystem auf den Merkmalen, und die Inhalte sind genau die Mengen der Form A^I für $A \subseteq G$. Die beiden Hüllensysteme sind isomorph. Folglich sind die formalen Begriffe eines Kontexts genau die Paare der Form (B^I, B^{II}) für $B \subseteq M$ bzw. genau die Paare der Form (A^{II}, A^I) für $A \subseteq G$.

Definitio: Gegenstandsbegriff, Merkmalsbegriff 5

Ein Umfang der Form $m^I := \{m\}^I$ heißt Merkmalsumfang und ein formaler Begriff der Form $\mu m := (m^I, m^{II})$ heißt Merkmalsbegriff. Dual heißt ein Inhalt der Form $g^I := \{g\}^I$ Gegenstandsinhalt und ein formaler Begriff der Form $\gamma g := (g^{II}, g^I)$ Gegenstandbegriff.

Corollarium 6

Es gilt

$$I = \bigcup_{(A,B) \in \mathfrak{B}(G,M,I)} A \times B.$$

Lemma 7

Sei $\mathbb{K} = (G, M, I)$ ein Kontext. Dann gelten für den komplementären Kontext $\mathbb{K}^\complement = (G, M, \not{I})$ die folgenden Aussagen:

(I) Es gilt $A^{\not{I}\complement} = \bigcup_{g \in A} g^I$ für alle Gegenstandsmengen $A \subseteq G$.

(II) Dual gilt $B^{\not{I}\complement} = \bigcup_{m \in B} m^I$ für alle Merkmalsmengen $B \subseteq M$.

3.1.1 Formale Begriffsverbände

8 **Lemma**

Seien $A_t \subseteq G$ für $t \in T$, dann gilt

$$\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right)^I = \bigcap_{t\in T} A_t^I \text{ und } \left(\bigcap_{t\in T} A_t\right)^I \supseteq \bigcup_{t\in T} A_t^I.$$

Analog gilt das auch für Merkmalsmengen.

APPROBATIO

$$\begin{aligned}
m \in \left(\bigcup_{t\in T} A_t\right)^I &\Leftrightarrow \forall_{g\in\bigcup_{t\in T} A_t} gIm \\
&\Leftrightarrow \forall_{t\in T} \forall_{g\in A_t} gIm \\
&\Leftrightarrow \forall_{t\in T} m \in A_t^I \\
&\Leftrightarrow m \in \bigcap_{t\in T} A_t^I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m \in \left(\bigcap_{t\in T} A_t\right)^I &\Leftrightarrow \forall_{g\in\bigcap_{t\in T} A_t} gIm \\
&\Leftarrow \exists_{t\in T} \forall_{g\in A_t} gIm \\
&\Leftrightarrow \exists_{t\in T} m \in A_t^I \\
&\Leftrightarrow m \in \bigcup_{t\in T} A_t^I
\end{aligned}$$

■

9 **Corollarium**

Jeder Umfang ist ein Durchschnitt von Merkmalsumfängen. Dual ist jeder Inhalt ein Durchschnitt von Gegenstandsinhalten. Es gelten

$$A^I = \bigcap_{g\in A} g^I \text{ und } B^I = \bigcap_{m\in B} m^I.$$

10 **Definitio: Unterbegriff, Oberbegriff**

Ein formaler Begriff (A, B) heißt UNTERBEGRIFF eines formalen Begriffs (C, D), falls $A \subseteq C$ (oder äquivalent $B \supseteq D$) gilt. Entsprechend wird (C, D) dann OBERBEGRIFF von (A, B) genannt. Wir schreiben $(A, B) \leq (C, D)$. Die Relation $\leq$ heißt BEGRIFFLICHE ORDNUNG oder UNTERBEGRIFFSRELATION.

11 **Corollarium**

Die Gegenstandsmenge $G = \emptyset^I$ ist der Umfang des größten Begriffs $(G, G^I) = (\emptyset^I, \emptyset^{II})$ und dual ist die Merkmalsmenge $M = \emptyset^I$ der Inhalt des kleinsten Begriffs $(M^I, M) = (\emptyset^{II}, \emptyset^I)$.

Lemma 12

Für alle Gegenstände g und Merkmale m eines formalen Kontexts gilt

$$gIm \Leftrightarrow \gamma g \leq \mu m.$$

APPROBATIO

$$\begin{aligned} gIm &\Leftrightarrow g \in m^I \\ &\Leftrightarrow g^I \supseteq m^{II} \\ &\Leftrightarrow (g^{II}, g^I) \leq (m^I, m^{II}) \\ &\Leftrightarrow \gamma g \leq \mu m. \end{aligned}$$

■

Theorema: Hauptsatz über formale Begriffsverbände 13

Sei $\mathbb{K} = (G, M, I)$ ein formaler Kontext. Die Menge $\mathfrak{B}\mathbb{K}$ aller formalen Begriffe von $\mathbb{K}$ geordnet durch die Unterbegriffsrelation $\leq$ bildet einen vollständigen Verband, der auch BEGRIFFSVERBAND genannt wird. Für eine Menge von formalen Begriffen $\{(A_t, B_t)\}_{t \in T}$ ist der größte gemeinsame Unterbegriff (Infimum) durch

$$\bigwedge_{t \in T} (A_t, B_t) = \left(\bigcap_{t \in T} A_t, \left(\bigcup_{t \in T} B_t \right)^{II} \right)$$

und dual der kleinste gemeinsame Oberbegriff (Supremum) durch

$$\bigvee_{t \in T} (A_t, B_t) = \left(\left(\bigcup_{t \in T} A_t \right)^{II}, \bigcap_{t \in T} B_t \right)$$

gegeben.

APPROBATIO (ORDNUNG) Weil formale Begriffe stets eindeutig durch ihre Umfänge bestimmt sind und die Teilmengeninklusionsrelation eine Ordnungsrelation ist, muss auch die Unterbegriffsrelation eine Ordnungsrelation sein, denn sie ist gerade durch die Teilmengeninklusionsrelation auf den Umfängen definiert.

(VERBAND) Sei $\{(A_t, B_t)\}_{t \in T}$ eine Menge von formalen Begriffen. Wegen $A_t = B_t^I$ für alle $t \in T$ gilt

$$(A, B) := \left(\bigcap_{t \in T} A_t, \left(\bigcup_{t \in T} B_t \right)^{II} \right) = \left(\left(\bigcup_{t \in T} B_t \right)^{I}, \left(\bigcup_{t \in T} B_t \right)^{II} \right),$$

d.h. (A, B) ist von der Form (D^I, D^{II}) mit $D \subseteq M$ und damit ein formaler Begriff. Weiterhin ist (A, B) ein Unterbegriff von allen (A_t, B_t), denn für die Umfänge gilt stets $A = \bigcap_{t \in T} A_t \subseteq A_t$. Schließlich kann es keinen größeren Umfang geben, der in allen A_t enthalten ist (der größte solche ist ja gerade $\bigcap_{t \in T} A_t$), also ist (A, B) tatsächlich der größte gemeinsame Unterbegriff der (A_t, B_t). Für das Supremum dual. ■

Corollarium 14

Die Menge der Gegenstandsbegriffe ist $\bigvee$-dicht und die Menge der Merkmalsbegriffe ist $\bigwedge$-dicht im Begriffsverband. Genauer ist jeder formale Begriff das Supremum seiner Gegenstandsbegriffe und dual das Infimum seiner Merkmalsbegriffe, d.h.

$$\bigvee_{g\in A}(g^{II},g^{I})=\bigvee\gamma A=(A,B)=\bigwedge\mu B=\bigwedge_{m\in B}(m^{I},m^{II}).$$

Demnach ist jeder $\bigvee$-irreduzible Begriff ein Gegenstandsbegriff und dual ist jeder $\bigwedge$-irreduzible Begriff ein Merkmalsbegriff.

APPROBATIO Wäre (A,B) ein $\bigvee$-irreduzibler Begriff, der kein Gegenstandsbegriff ist, d.h. es gilt $g^I \neq B$ für alle $g \in G$, dann ergäbe sich der Widerspruch

$$(A,B)>\bigvee_{\mathfrak{X}<(A,B)}\mathfrak{X}\geq\bigvee_{\substack{g\in A\\ g^I\neq B}}\gamma g=\bigvee_{g\in A}=(A,B).$$

■

15 **Lemma**

Sei (G,M,I) ein formaler Kontext und $\mathbb{V}$ ein vollständiger Verband. Dann gibt es genau dann eine ordnungserhaltende Abbildung $\phi\colon \mathfrak{B}(G,M,I)\to\mathbb{V}$, wenn es Abbildungen $\alpha\colon G\to V$ und $\beta\colon M\to V$ gibt mit

$$gIm \Rightarrow \alpha g\leq\beta m.$$

Für die Abbildungen α und β gilt

$$A\times B\subseteq I\Rightarrow\bigvee\alpha A\leq\bigwedge\beta B.$$

APPROBATIO (⇒) Sei $\phi\colon \mathfrak{B}(G,M,I)\to\mathbb{V}$ eine ordnungserhaltende Abbildung. Dann gilt für die Abbildungen $\alpha:=\phi\circ\gamma$ und $\beta:=\phi\circ\mu$

$$\begin{aligned} gIm &\Rightarrow \gamma g\leq\mu m\\ &\Rightarrow \phi\gamma g\leq\phi\mu m\\ &\Rightarrow \alpha g\leq\beta m.\end{aligned}$$

(⇐) Seien $\alpha\colon G\to V$ und $\beta\colon M\to V$ Abbildungen mit $gIm\Rightarrow\alpha g\leq\beta m$ für alle Gegenstände $g\in G$ und alle Merkmale $m\in M$. Dann definieren wir eine Abbildung

$$\phi\colon\begin{array}{l}\mathfrak{B}(G,M,I)\to V\\ \quad(A,B)\mapsto\bigvee\alpha A\end{array}$$

und diese ist ordnungserhaltend, denn sei $(A,B)\leq(C,D)$, dann gilt $A\subseteq C$. Weiter ist dann $\alpha A\subseteq\alpha C$ und somit $\bigvee\alpha A\leq\bigvee\alpha C$. Dual könnte man auch $\phi\colon(A,B)\mapsto\bigwedge\beta B$ wählen.

(ZUSATZ) Für $A\times B\subseteq I$ ist $\alpha g\leq\beta m$ für alle Gegenstände $g\in A$ und alle Merkmale $m\in B$. Es folgt $\bigvee\alpha A\leq\bigwedge\beta B$. ■

16 **Lemma**

Ein Begriffsverband $\mathfrak{B}(G,M,I)$ ist genau dann in einen vollständigen Verband $(V,\leq)$ einbettbar, wenn es Abbildungen $\alpha\colon G\to V$ und $\beta\colon M\to V$ mit

$$gIm\Leftrightarrow\alpha g\leq\beta m$$

gibt. Für die Abbildungen α und β gilt

$$A\times B\subseteq I\Leftrightarrow\bigvee\alpha A\leq\bigwedge\beta B.$$

APPROBATIO ($\Rightarrow$) Sei $\phi\colon \mathfrak{B}(G,M,I) \to V$ die Ordnungseinbettung. Analog zum vorangegangenem Lemma setzen wir $\alpha := \phi \circ \gamma$ und $\beta := \phi \circ \mu$ und dann impliziert gIm bereits $\alpha g \leq \beta m$. Weil ϕ auch ordnungsreflektierend ist, gilt auch die umgekehrte Implikation.

($\Leftarrow$) Auch hier setzen wir analog zum vorigen Lemma $\phi\colon (A,B) \mapsto \bigvee \alpha A$. Dann ist ϕ bereits ordnungserhaltend. ϕ ist auch ordnungsreflektierend, denn sei $(A,B) \nleq (C,D)$, dann muss $A \nsubseteq C$ sein und damit gibt es einen Gegenstand $g \in A$ mit $g \notin C = D^I$. Weiter existiert also ein Merkmal $n \in D$, sodass g nicht das Merkmal n hat, und folglich $\alpha g \nleq \beta n$ gilt. Damit muss $\bigvee \alpha A \nleq \bigwedge \beta D$ sein, und weil $\bigvee \alpha C \leq \bigwedge \beta D$ gilt, muss auch $\bigvee \alpha A \nleq \bigvee \alpha C$ sein. Also ist ϕ auch ordnungsreflektierend.[1]

(ZUSATZ) Eine Richtung erhalten wir bereits aus dem vorigen Lemma. Wegen $\alpha g \leq \bigvee \alpha A \leq \bigwedge \beta B \leq \beta m$ für alle $g \in A$ und $m \in B$ gilt auch die Umkehrung. ■

Theorema 17

Ein Begriffsverband $\mathfrak{B}(G,M,I)$ ist genau dann isomorph zu einem vollständigen Verband $\mathbb{V} = (V,\leq)$, wenn es zwei Abbildungen $\alpha\colon G \to V$ und $\beta\colon M \to V$ gibt, sodass αG $\bigvee$-dicht und βM $\bigwedge$-dicht in $\mathbb{V}$ ist sowie

$$gIm \Leftrightarrow \alpha g \leq \beta m$$

für alle Gegenstände g und alle Merkmale m gilt. Für die Abbildungen α und β gilt, dass für alle formalen Begriffe (A,B) das Supremum $\bigvee \alpha A$ und das Infimum $\bigwedge \beta B$ übereinstimmen.

APPROBATIO ($\Rightarrow$) Sei $\mathbb{V} \cong \mathfrak{B}\mathbb{K}$ vermöge des Verbandsisomorphismus $\phi\colon \mathfrak{B}\mathbb{K} \to \mathbb{V}$. Insbesondere ist ϕ eine Ordnungseinbettung und damit gilt nach dem vorigen Lemma für $\alpha := \phi \circ \gamma$ und $\beta := \phi \circ \mu$ bereits die Äquivalenz von gIm und $\alpha g \leq \beta m$. Wir wollen nun zeigen, dass αG $\bigvee$-dicht in $\mathbb{V}$ ist. Also müssen wir zeigen, dass sich jedes Element $v \in V$ als Supremum einer Teilmenge von αG darstellen lässt. Zunächst gibt es einen Begriff $(A,B) \in \mathfrak{B}\mathbb{K}$ mit $v = \phi(A,B)$, weil ϕ ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{B}\mathbb{K}$ und $\mathbb{V}$ ist. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
v &= \phi(A,B)\\
&= \phi(A^{II},A^{I})\\
&= \phi\left(\left(\bigcup_{g\in A}\{g\}\right)^{II},\left(\bigcup_{g\in A}\{g\}\right)^{I}\right)\\
&= \phi\left(\left(\bigcap_{g\in A} g^{I}\right)^{I},\bigcap_{g\in A} g^{I}\right)
\end{aligned}$$

[1] Das lässt sich auch direkt beweisen: Seien (A,B) und (C,D) formale Begriffe mit $\bigvee \alpha A \leq \bigvee \alpha C$. Dann gilt wegen $C \times D \subseteq I$ auch $\bigvee \alpha A \leq \bigwedge \beta D$, und das ist äquivalent zu $\alpha g \leq \beta m$ (gdw. gIm) für alle $g \in A$ und alle $m \in D$. Das heißt $A \times D \subseteq I$, also $A \subseteq D^I = C$ und damit $(A,B) \leq (C,D)$.

$$
\begin{aligned}
&= \phi\left(\left(\bigcap_{g\in A} g^{III}\right)^{I}, \bigcap_{g\in A} g^{I}\right)\\
&= \phi\left(\left(\bigcup_{g\in A} g^{II}\right)^{II}, \bigcap_{g\in A} g^{I}\right)\\
&= \phi \bigvee_{g\in A} (g^{II}, g^{I})\\
&= \bigvee_{g\in A} \phi(g^{II}, g^{I})\\
&= \bigvee \underbrace{\alpha A}_{\subseteq \alpha G}
\end{aligned}
$$

Dual ist auch βM $\bigwedge$-dicht in $\mathbb{V}$.

($\Leftarrow$) Seien $\mathbb{V}$ ein vollständiger Verband und $\alpha\colon G \to V$ sowie $\beta\colon M \to V$ Abbildungen derart, dass gIm genau dann gilt, wenn $\alpha g \leq \beta m$ gilt, und überdies αG $\bigvee$-dicht bzw. βM $\bigwedge$-dicht in $\mathbb{V}$ sind. Es ist nun zu beweisen, dass der Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}\mathbb{K}$ isomorph zu $\mathbb{V}$ ist. Die Abbildung $\phi\colon (A,B) \mapsto \bigvee \alpha A$ ist nach dem vorigen Lemma eine Ordnungseinbettung. Weiter zeigen wir, dass ϕ eine ordnungserhaltende Umkehrfunktion besitzt; diese ist

$$
\psi\colon \begin{array}{l} V \to \underline{\mathfrak{B}}\mathbb{K} \\ v \mapsto (\{g\in G \mid \alpha g \leq v\}, \{m \in M \mid v \leq \beta m\}). \end{array}
$$

Zunächst müssen wir überprüfen, ob ψv überhaupt ein formaler Begriff ist:

$$
\begin{aligned}
h \in \{g \in G \mid \alpha g \leq v\} &\Leftrightarrow \alpha h \leq v = \bigwedge_{\substack{m\in M\\ v\leq \beta m}} \beta m\\
&\Leftrightarrow \forall_{\substack{m\in M\\ v\leq \beta m}} \alpha h \leq \beta m\\
&\Leftrightarrow \forall_{\substack{m\in M\\ v\leq \beta m}} hIm\\
&\Leftrightarrow h \in \{m\in M \mid v \leq \beta m\}^{I}
\end{aligned}
$$

Also ist einerseits $\{g\in G \mid \alpha g \leq v\} = \{m \in M \mid v \leq \beta m\}^{I}$, und andererseits ergibt sich mit dualen Argumenten auch $\{g\in G \mid \alpha g \leq v\}^{I} = \{m \in M \mid v \leq \beta m\}$. Insgesamt ist ψv also tatsächlich ein formaler Begriff. ψ ist ordnungserhaltend wegen

$$
\begin{aligned}
v \leq w &\Leftrightarrow \{g\in G \mid \alpha g \leq v\} \subseteq \{g \in G \mid \alpha g \leq w\}\\
&\Leftrightarrow \psi v \leq \psi w
\end{aligned}
$$

Schließlich ist $\psi = \phi^{-1}$, denn wir haben zum einen

$$
\phi\psi v = \bigvee \alpha\,\{g\in G \mid \alpha g \leq v\} = \bigvee_{\substack{g\in G\\ \alpha g\leq v}} \alpha g = v,
$$

denn αG ist $\bigvee$-dicht; und zum anderen ist

$$\begin{aligned}
\psi\phi(A,B) &= \left(\left\{g \in G \,\middle|\, \alpha g \leq \bigwedge \beta B\right\}, \left\{g \in G \,\middle|\, \alpha g \leq \bigwedge \beta B\right\}^I\right) \\
&= \left(\left\{g \in G \,\middle|\, \underset{m\in B}{\forall} \alpha g \leq \beta m\right\}, \left\{g \in G \,\middle|\, \alpha g \leq \bigwedge \beta B\right\}^I\right) \\
&= \left(\left\{g \in G \,\middle|\, \underset{m\in B}{\forall} gIm\right\}, \left\{g \in G \,\middle|\, \alpha g \leq \bigwedge \beta B\right\}^I\right) \\
&= (B^I, B^{II}) \\
&= (A,B)
\end{aligned}$$

(ZUSATZ) Für alle formalen Begriffe (A,B) gilt $\bigvee \gamma A = (A,B) = \bigwedge \mu B$ und durch Anwendung des Isomorphismus ϕ erhalten wir $\bigvee \alpha A = \bigwedge \beta B$. ■

Corollarium 18

Insbesondere gilt $(V,\leq) \cong \mathfrak{B}(V,V,\leq)$ für jeden vollständigen Verband $(V,\leq)$.

3.1.2 Ordnungsvervollständigungen

Theorema: DEDEKIND-MACNEILLE-Vervollständigung 19

Sei $(P,\leq)$ eine geordnete Menge.

(I) Die Abbildung

$$\iota\colon \begin{array}{l} P \to \mathfrak{B}(P,P,\leq) \\ p \mapsto (\downarrow p, \uparrow p) \end{array}$$

ist eine Ordnungseinbettung der geordneten Menge $(P,\leq)$ in den vollständigen Verband $\mathfrak{B}(P,P,\leq)$. Insbesondere gilt $\iota \bigvee X = \bigvee \iota X$ für alle Teilmengen $X \subseteq P$ mit Supremum, und dual $\iota \bigwedge X = \bigwedge \iota X$ für alle Teilmengen $X \subseteq P$ mit Infimum.

(II) $\mathfrak{B}(P,P,\leq)$ ist der kleinste vollständige Verband, in den $(P,\leq)$ einbettbar ist. Genauer gibt es für jede Ordnungseinbettung κ von P in einen vollständigen Verband V auch eine Ordnungseinbettung λ von $\mathfrak{B}(P,P,\leq)$ in V mit $\kappa = \lambda \circ \iota$.

APPROBATIO (I) Die formalen Begriffe von $(P,P,\leq)$ sind genau die Paare der Form (A,B) mit $A^{\leq} = \overline{A} = B$ und $B^{\leq} = \underline{B} = A$. Damit ist erstmal klar, dass die Bilder von ι tatsächlich formale Begriffe sind. ι ist natürlich eine Ordnungseinbettung, weil $p \leq q$ äquivalent zu $\downarrow p \subseteq \downarrow q$ und damit auch zu $\iota p \leq \iota q$ ist. Sei nun noch $X \subseteq P$ eine Teilmenge mit Supremum $\bigvee X \in P$, dann gilt

$$\iota \bigvee X = \left(\downarrow \bigvee X, \uparrow \bigvee X\right) = \left(\ldots, \bigcap_{p\in X} \uparrow p\right) = \bigvee_{p\in X} (\downarrow p, \uparrow p) = \bigvee \iota X$$

und dual für Teilmengen mit Infimum.

(II) Sei $\kappa\colon P \to V$ eine Ordnungseinbettung, es gilt also $p \leq q \Leftrightarrow \kappa p \leq \kappa q$. Also existiert auch eine Ordnungseinbettung $\lambda\colon (A,B) \mapsto \bigvee \kappa A$ von $\mathfrak{B}(P,P,\leq)$ in V. Damit gilt dann

$$(\lambda \circ \iota)(p) = \lambda(\downarrow p, \uparrow p) = \bigvee \kappa {\downarrow p} = \bigvee {\downarrow \kappa p} = \kappa p$$

■ für alle $p \in P$.

20 **Corollarium**

Eine geordnete Menge ist genau dann in einen vollständigen Verband V einbettbar, wenn ihre Dedekind-MacNeille-Vervollständigung in V einbettbar ist.

21 **Theorema: Birkhoff-Vervollständigung**

(I) Für jede geordnete Menge $(P, \leq)$ ist $\underline{\mathfrak{B}}(P, P, \ngeq)$ ein volldistributiver vollständiger Verband, in dem die Menge der $\bigvee$-irreduziblen Element $\bigvee$-dicht ist und

$$\omega : \begin{array}{l} P \to \mathfrak{B}(P, P, \ngeq) \\ p \mapsto (\downarrow p, P \setminus \downarrow p) \end{array}$$

eine Ordnungseinbettung ist, die die Elemente von P genau auf die $\bigvee$-irreduziblen Elemente in $\underline{\mathfrak{B}}(P, P, \ngeq)$ abbildet.

(II) Ist $(V, \leq)$ ein volldistributiver vollständiger Verband, in dem die Menge $\mathcal{J}_{(V,\leq)}$ aller $\bigvee$-irreduziblen Elemente $\bigvee$-dicht ist, dann ist $(V, \leq)$ isomorph zu $\underline{\mathfrak{B}}(\mathcal{J}_{(V,\leq)}, \mathcal{J}_{(V,\leq)}, \ngeq)$.

Approbatio (I) Die formalen Begriffe von $\underline{\mathfrak{B}}(P, P, \ngeq)$ sind genau die Paare (A, B), sodass A ein Ordnungsideal, B ein Ordnungsfilter und $\{A, B\}$ eine Partition in P sind.

■ (II)

3.1.3 Bereinigung & Reduzierung

22 **Definitio: bereinigt**

Ein Kontext (G, M, I) heißt

ZEILENBEREINIGT oder GEGENSTANDSBEREINIGT, wenn aus $g^I = h^I$ stets $g = h$ folgt.

SPALTENBEREINIGT oder MERKMALSBEREINIGT, wenn aus $m^I = n^I$ stets $m = n$ folgt.

BEREINIGT , wenn er zeilen- und spaltenbereinigt ist.

Der Kontext

$$\left({}^{G}/_{\ker \cdot^I}, {}^{M}/_{\ker \cdot^I}, {}^{I}/_{\ker \cdot^I} \right)$$

mit $${}^{G}/_{\ker \cdot^I} := \left\{ \underbrace{[g]_{\ker \cdot^I}}_{=\{h \in G \,|\, g^I = h^I\}} \;\middle|\; g \in G \right\}$$

und $${}^{M}/_{\ker \cdot^I} := \left\{ \underbrace{[m]_{\ker \cdot^I}}_{\{n \in M \,|\, m^I = n^I\}} \;\middle|\; m \in M \right\}$$

sowie $[g]_{\ker \cdot^I} \; {}^{I}/_{\ker \cdot^I} \; [m]_{\ker \cdot^I} :\Leftrightarrow gIm$ heißt BEREINIGTER Kontext zu (G, M, I).

Definitio: reduzibel, reduziert 23

Ein Gegenstand g heißt REDUZIBEL, wenn der zugehörige Gegenstandsbegriff γg $\bigvee$-reduzibel ist. Dual heißt ein Merkmal m REDUZIBEL, wenn der entsprechende Merkmalsbegriff μm $\bigwedge$-reduzibel ist. Ein Kontext (G, M, I) heißt

ZEILENREDUZIERT oder GEGENSTANDSREDUZIERT, wenn jeder Gegenstand irreduzibel ist.

SPALTENREDUZIERT oder MERKMALSREDUZIERT, wenn jedes Merkmal irreduzibel ist.

REDUZIERT, wenn er zeilen- und spaltenreduziert ist.

Wir bezeichnen mit G_{irr} die Menge aller reduziblen Gegenstände und dual ist M_{irr} die Menge der reduziblen Merkmale. Der Teilkontext $(G_{\text{irr}}, M_{\text{irr}}, I \cap G_{\text{irr}} \times M_{\text{irr}})$ heißt dann REDUZIERTER Kontext zu (G, M, I).

Lemma 24

(I) Vollzeilen, d.h. Gegenstände g mit $g^I = M$, und dual Vollspalten, d.h. Merkmale m mit $m^I = G$, sind stets reduzibel.

(II) Für einen reduziblen Gegenstand g ist $\gamma(G \setminus \{g\})$ $\bigvee$-dicht in $\mathfrak{B}(G, M, I)$ und dual ist für ein reduzibles Merkmal m die Menge $\mu(M \setminus \{m\})$ $\bigwedge$-dicht.

(III) Für einen reduziblen Gegenstand g gilt $\mathfrak{B}(G, M, I) \cong \mathfrak{B}(G \setminus \{g\}, M, I)$ und dual gilt für ein reduzibles Merkmal m stets $\mathfrak{B}(G, M, I) \cong \mathfrak{B}(G, M \setminus \{m\}, I)$.

APPROBATIO (I) Sei g ein Gegenstand mit $g^I = M$. Dann ist $M = \emptyset^I$ ein leerer Durchschnitt und damit $\gamma g = (M^I, M) = (\emptyset^{II}, \emptyset^I)$ ein leeres Supremum, also $\bigvee$-reduzibel. Es gibt dann nämlich keine Begriffe unterhalb γg (bzw. keine echten Obermengen von M).

(II) Für einen reduziblen Gegenstand g ist der zugehörige Gegenstandsbegriff γg $\bigvee$-reduzibel. Weil γG nach Corollarium 3.14 $\bigvee$-dicht ist, muss dann auch $(\gamma G) \setminus \{\gamma g\}$ $\bigvee$-dicht sein. Wegen $(\gamma G) \setminus \{\gamma g\} \subseteq \gamma(G \setminus \{g\})$ folgt die Dichtheit von $\gamma(G \setminus \{g\})$.

(III) Es ist stets μM $\bigwedge$-dicht und wegen (ii) ist $\gamma(G \setminus \{g\})$ $\bigvee$-dicht. Nach Theorema 3.17 ist $\mathfrak{B}(G, M, I)$ isomorph zu $\mathfrak{B}(G \setminus \{g\}, M, I)$. ■

3.1.4 Pfeilrelationen

Definitio: Pfeilrelationen 25

Für einen Kontext (G, M, I) definieren wir die drei PFEILRELATIONEN wie folgt:

(I) $g \swarrow m :\Leftrightarrow g \not I m \wedge \forall_{h \in G}\, g^I \subset h^I \Rightarrow hIm$

(II) $g \nearrow m :\Leftrightarrow g \not I m \wedge \forall_{n \in M}\, m^I \subset n^I \Rightarrow gIn$

(III) $g \swarrow\!\!\!\nearrow m :\Leftrightarrow g \swarrow m \wedge g \nearrow m$

26 **Lemma**

Die folgenden Aussagen sind für einen bereinigten Kontext (G, M, I) äquivalent:

(I) $g \swarrow m$

(II) $g \not I m \wedge \forall_{\substack{h \in G \\ g^I \subset h^I}} hIm$

(III) $g \not I m \wedge g^{II} \setminus \{g\} \subseteq m^I$

(IV) $m \notin g^I \wedge \forall_{\substack{h \in G \\ g^I \subset h^I}} m \in h^I$, d.h. g^I ist maximal unter allen Gegenstandsinhalten, die m nicht enthalten

(V) $g \not I m \wedge \forall_{(A,B) < \gamma g} m \in B$, d.h. g hat nicht das Merkmal m und jeder echte Unterbegriff von γg enthält das Merkmal m

(VI) $\gamma g \not\leq \mu m \wedge \forall_{(A,B) < \gamma g} (A, B) \leq \mu m$

(VII) $\gamma g \not\leq \mu m \;\&\; (\gamma g)_* \leq \mu m$

(VIII) $\gamma g \wedge \mu m = (\gamma g)_* \neq \gamma g$

APPROBATIO (I)⇔(II) nach Definition.

(II)⇔(III) Weil (G, M, I) bereinigt ist, existieren keine identischen Zeilen, d.h. $g^I = h^I$ impliziert stets $g = h$. Außerdem gilt $g^I \subseteq h^I$ genau dann, wenn $h \in g^{II}$. Insgesamt sind also $g^I \subset h^I$ und $h \in g^{II} \setminus \{g\}$ äquivalent.

(II)⇔(IV) $g \not I m$ gilt genau dann, wenn $m \notin g^I$. Damit ist (ii) äquivalent mit $m \notin g^I \wedge \forall_{h \in G}\, g^I \subset h^I \Rightarrow m \in h^I$ und das bedeutet, dass g^I der größte Gegenstandsinhalt ist, der m nicht enthält.

(II)⇔(V) Für einen echten Unterbegriff $(A, B) < \gamma g$ gilt $g^I \subset B = A^I = \bigcap_{h \in A} h^I$, also $g^I \subset h^I$ für alle $h \in A$. Demnach gilt hIm für alle $h \in A$, d.h. $m \in A^I$. Sei umgekehrt $g^I \subset h^I$, d.h. γh ist ein echter Unterbegriff von γg, dann gilt $m \in h^I$ bzw. hIm.

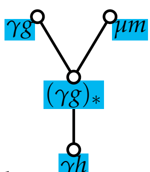
(V)⇔(VI) $(A, B) \leq \mu m$ gilt genau dann, wenn $A \subseteq m^I$ und das ist äquivalent zu $m \in A^I = B$.

(VI)⇔(VII) Nach Definition ist $(\gamma g)_*$ das Supremum aller echten Unterbegriffe von γg, d.h.

$$(\gamma g)_* = \bigvee_{(A,B) < \gamma g} (A, B)$$

und nach Lemma 2.12 gilt $(\gamma g)_* \leq \mu m$ genau dann, wenn μm eine obere Schranke von $\{(A, B) \mid (A, B) < \gamma g\}$ ist.

(VII)⇔(VIII) Es folgt zunächst $(\gamma g)_* \neq \gamma g$, also ist $(\gamma g)_*$ der einzige untere Nachbar von γg.



Somit ist $(\gamma g)_*$ eine untere Schranke von γg und μm. Das Infimum von γg und

μm ist die größte untere Schranke, und wegen der obigen Nachbarschaft muss das genau $(\gamma g)_*$ sein. In der umgekehrten Richtung folgt sofort $(\gamma g)_* \leq \mu m$ und wegen $\gamma g \wedge \mu m \neq \gamma g$ ist $\gamma g \nleq \mu m$. $\blacksquare$

Theorema 27

Ein Gegenstand g ist genau dann irreduzibel, wenn es ein Merkmal m mit $g \swarrow m$ gibt. Dual ist ein Merkmal m genau dann irreduzibel, wenn es einen Gegenstand g mit $g \nearrow m$ gibt.

APPROBATIO Sei g ein irreduzibler Gegenstand, d.h. der zugehörige Gegenstandsbegriff γg ist irreduzibel. Also hat γg genau einen unteren Nachbarn $(\gamma g)_*$, nämlich das Supremum aller echten Unterbegriffe von γg. Demnach muss $(\gamma g)_*$ ein Merkmal m enthalten, das g nicht hat. Dann haben auch alle echten Unterbegriffe von γg das Merkmal m und mit Lemma 3.26 folgt $g \swarrow m$. Die Rückrichtung folgt sofort aus Lemma 3.26. $\blacksquare$

3.1.5 Fundiertheit

Definitio: doppelt fundiert 28

Ein Kontext (G, M, I) heißt

GEGENSTANDSFUNDIERT, wenn für alle $g \not I m$ ein Gegenstand h mit $h \swarrow m$ und $g^I \subseteq h^I$ existiert.

MERKMALSFUNDIERT, wenn für alle $g \not I m$ ein Merkmal n mit $g \nearrow n$ und $m^I \subseteq n^I$ existiert.

DOPPELT FUNDIERT, wenn er gegenstands- und merkmalsfundiert ist.

Theorema 29

(I) Ein Kontext, der weder unendliche Ketten von Gegenständen mit $g_1^I \subset g_2^I \subset \dots$ noch unendliche Ketten von Merkmalen mit $m_1^I \subset m_2^I \subset \dots$ enthält, ist doppelt fundiert.

(II) Jeder endliche Kontext ist doppelt fundiert.

(III) Jeder Begriff eines doppelt fundierten Kontexts ist das Supremum von $\bigvee$-irreduziblen Begriffen und dual das Infimum von $\bigwedge$-irreduziblen Begriffen.

(IV) Für doppelt fundierte Kontexte gilt: Aus $g \swarrow m$ folgt $g \swarrow\!\!\!\!\!\nearrow n$ für ein n. Aus $g \nearrow m$ folgt $h \swarrow\!\!\!\!\!\nearrow m$ für ein h.

APPROBATIO (I) Sei $g \in G$ und $m \in M$ mit $g \not I m$. Es ist zu zeigen, dass es ein $n \in M$ mit $g \nearrow n$ und $m^I \subseteq n^I$ gibt. Wir geben nun eine Iteration an. Sei $g \not I m_i$. Falls nicht $g \nearrow m_i$ gilt, dann gibt es ein Merkmal m_{i+1} mit $m_i^I \subset m_{i+1}^I$, d.h. $m_i \neq m_{i+1}$, und $g \not I m_{i+1}$. Für $m_1 := m$ erhalten wir damit eine Kette $m_1^I \subset m_2^I \subset \dots$, die in jedem Falle endlich ist, also gibt es ein $n := m_k$ mit $g \nearrow n$ und $m^I \subset \dots \subset n^I$.

(II) Das folgt aus (i), denn in endlichen Kontexten gibt es keine unendlichen Ketten $g_1^I \subset g_2^I \subset \dots$ oder $m_1^I \subset m_2^I \subset \dots$.

(III) Sei (A,B) ein Begriff und (C,D) der kleinste gemeinsame Oberbegriff aller $\bigvee$-irreduziblen Unterbegriffe von (A,B). Wir zeigen, dass beide übereinstimmen. Zunächst ist klar, dass $(A,B) \geq (C,D)$ ist. Weil nach Corollarium 3.14 jeder $\bigvee$-irreduzible Begriff ein Gegenstandsbegriff ist, folgt

$$(C,D) = \bigvee_{\substack{g \in A \\ g \text{ irreduzibel}}} \gamma g.$$

Wäre nun (A,B) ein echter Oberbegriff von (C,D), dann gäbe es wegen $A^I \subset D$ einen Gegenstand $g \in A$ und ein Merkmal $m \in D$ mit $g \not\mathrel{I} m$. Weil (G,M,I) doppelt fundiert ist, existierte ein $h \in G$ mit $h \swarrow m$ und $g^I \subseteq h^I$. Wegen $g \in A$ wäre auch $h \in A$, und nach Theorema 3.27 wäre h irreduzibel. Demnach müsste $h \in C$ sein und es ergäbe sich hIm im Widerspruch zu $h \swarrow m$. Also sind die beiden Begriffe (A,B) und (C,D) gleich. Es gilt also in doppelt fundierten Kontexten stets

$$\bigvee_{\substack{g \in A \\ g \text{ irreduzibel}}} \gamma g = (A,B) = \bigwedge_{\substack{m \in B \\ m \text{ irreduzibel}}} \mu m.$$

(IV) Es gelte $g \swarrow m$, also ist $g \not\mathrel{I} m$ und für alle $h \in G$ mit $g^I \subset h^I$ folgt hIm. Wegen $g \not\mathrel{I} m$ gibt es ein Merkmal $n \in M$ mit $g \nearrow n$ und $m^I \subseteq n^I$, denn (G,M,I) ist doppelt fundiert. Es gilt dann auch $g \swarrow n$, denn für $h \in G$ mit $g^I \subset h^I$ folgt hIm, und damit auch hIn. Insgesamt ist $g \swarrow\!\!\!\nearrow n$. ■

30 **Corollarium**

In doppelt fundierten Kontexten gilt: Ein Gegenstand g ist genau dann irreduzibel, wenn es ein Merkmal m mit $g \swarrow\!\!\!\nearrow m$ gibt. Dual ist ein Merkmal m genau dann irreduzibel, wenn es einen Gegenstand g mit $g \swarrow\!\!\!\nearrow m$ gibt. Wenn der Kontext reduziert ist, dann gibt es für jeden Gegenstand g ein Merkmal m mit $g \swarrow\!\!\!\nearrow m$ und dual gibt es für jedes Merkmal m einen Gegenstand g mit $g \swarrow\!\!\!\nearrow m$.

31 **Corollarium**

Für einen doppelt fundierten Kontext ist die Menge der $\bigvee$-irreduziblen (Gegenstands-)Begriffe $\bigvee$-dicht in $\mathfrak{B}(G,M,I)$ und dual ist die Menge der $\bigwedge$-irreduziblen (Merkmals-)Begriffe $\bigwedge$-dicht in $\mathfrak{B}(G,M,I)$. Folglich ist der reduzierte Kontext $(G_{\text{irr}}, M_{\text{irr}}, I \cap G_{\text{irr}} \times M_{\text{irr}})$ dicht in (G,M,I). Der reduzierte Kontext ist natürlich pfeilabgeschlossen, also auch verträglich für doppelt fundierte Kontexte. $\pi_{H,N}$ ist dann ein vollständiger Isomorphismus.

Für jeden Gegenstand g und jede Menge $A \subseteq$ gilt

$$g \in A^{II} \Leftrightarrow g^{II} \cap G_{\text{irr}} \subseteq A^{II} \cap G_{\text{irr}}.$$

Allgemein gilt wegen Lemma 3.77 (i) stets $A^{II} \subseteq B^{II} \Leftrightarrow A^{II} \cap G_{\text{irr}} \subseteq B^{II} \cap G_{\text{irr}}$, denn $(A^{II} \cap G_{\text{irr}})^I = A^I$.

32 **Definitio: doppelt fundiert**

Ein vollständiger Verband $(V, \leq)$ heißt

$\bigvee$-FUNDIERT , wenn es für $x < y$ stets ein Element s gibt, welches minimal bezüglich $s \leq y$ und $s \nleq x$ ist.

$\bigwedge$-FUNDIERT , wenn es für $x < y$ stets ein Element t gibt, welches maximal bezüglich $t \geq x$ und $t \not\geq y$ ist.

DOPPELT FUNDIERT, wenn er $\bigvee$- und $\bigwedge$-fundiert ist.

Theorema 33

(I) Jeder (längen-)endliche Verband ist doppelt fundiert.

(II) In einem doppelt fundierten Verband liegen die $\bigvee$-irreduziblen Elemente $\bigvee$-dicht und die $\bigwedge$-irreduziblen Elemente $\bigwedge$-dicht.

APPROBATIO (I) Sei $x < y$. Weil der Verband (längen-)endlich ist, liegen (auf jeder Kette) zwischen x und y nur endlich viele Elemente und wir können für s einen oberen Nachbarn von x und für t einen unteren Nachbarn von y wählen.

(II) Sei $x \in V$ und $y := \bigvee_{\substack{z<x \\ z \in \mathcal{J}_{(V,\leq)}}} z$. Wäre $y < x$, dann gäbe es wegen der Fundiertheit ein Element $s \in V$, das minimal bezüglich $s \leq x$ und $s \not\leq y$ ist. s muss dann $\bigvee$-irreduzibel sein, denn sonst wäre s ein Supremum von Elementen, die echt kleiner als s, also wegen der Minimalität auch kleiner gleich y sind, und damit selbst kleiner gleich y. Widerspruch! Also folgt $x = y$. ∎

Theorema 34

(I) Wenn $\mathfrak{B}(G, M, I)$ doppelt fundiert ist, dann auch (G, M, I).

(II) Wenn ein vollständiger Verband $(V, \leq)$ nicht doppelt fundiert ist, dann auch nicht der Kontext $(V, V, \leq)$.

APPROBATIO (I) Sei $\mathfrak{B}(G, M, I)$ doppelt fundiert sowie $g \in G$ und $m \in M$ mit $g \not{I} m$. Dann gilt $\gamma g \not\leq \mu m$ und damit $\gamma g \wedge \mu m < \gamma g$. Wegen der Fundiertheit gibt es einen Begriff (A, B), der minimal bezüglich $(A, B) \not\leq \gamma g \wedge \mu m$ und $(A, B) \leq \gamma g$ ist. Folglich ist (A, B) $\bigvee$-irreduzibel und damit gibt es einen Gegenstand $h \in G$ mit $(A, B) = \gamma h$. Mit $\gamma h \leq \gamma g$ ergibt sich $g^I \subseteq h^I$. Aus $\gamma h \not\leq \gamma g \wedge \mu m$ folgt $h^{II} \not\subseteq g^{II} \cap m^I = \left(g^I \cup \{m\}\right)^I$, d.h. $g^I \cup \{m\} \not\subseteq h^I$ und demnach $h \not{I} m$. Für einen Gegenstand x mit $h^I \subset x^I$ folgt $\gamma x < \gamma h$, also $\gamma x \leq \gamma g \wedge \mu m$ wegen der Minimalität, und damit xIm. Insgesamt gilt $h \swarrow m$.

(II) Sei $(V, \leq)$ ein vollständiger Verband mit doppelt fundierter Ordinalskala $(V, V, \leq)$. Für $x < y$ gilt natürlich $y \not\leq x$ und wegen der Fundiertheit gibt es (einen Gegenstand) $s \in V$ mit $s \swarrow x$ und $y^I \subseteq s^I$. Wegen $\uparrow y = y^I \subseteq s^I = \uparrow s$ folgt $s \leq y$. Aus $s \swarrow x$ folgt $s \not\leq x$ und für alle (Gegenstände) $u \in V$ mit $s^I \subset u^I$, d.h. $u < s$, folgt $u \leq x$. Anders ausgedrückt ist s minimal bezüglich $s \leq y$ und $s \not\leq x$. ∎

Corollarium 35

Ein vollständiger Verband ist genau dann doppelt fundiert, wenn die Kontexte aller isomorphen Begriffsverbände doppelt fundiert sind.

Lemma 36

Sei $(V, \leq)$ ein vollständiger Verband. Genau dann ist v als Gegenstand irreduzibel in $(V, V, \leq)$, wenn v $\bigvee$-irreduzibel in $(V, \leq)$ ist. Dual ist v als Merkmal irreduzibel in $(V, V, \leq)$, wenn v $\bigwedge$-irreduzibel in $(V, \leq)$ ist.

APPROBATIO Ein vollständiger Verband $(V, \leq)$ ist nach Theorema 3.17 und Theorema: DEDEKIND-MACNEILLE-Vervollständigung 3.19 stets isomorph zum Begriffsverband $\mathfrak{B}(V, V, \leq)$ vermöge dem Isomorphismus $\iota = \gamma = \mu \colon v \to (\downarrow v, \uparrow v)$, denn jeder Begriff (A, B) von $\mathfrak{B}(V, V, \leq)$ ist von der Form $(\downarrow v, \uparrow v)$ für $v := \bigvee A = \bigwedge B$. Es folgt

$$\iota v_* = \iota \left(\bigvee_{x < v} x \right) = \bigvee_{x < v} \iota x = \bigvee_{\iota x < \iota v} \iota x = (\iota v)_*$$

für alle $v \in V$. Damit ist $v_* < v$ äquivalent mit $(\iota v)_* < \iota v$. ■

37 **Theorema: Standardkontext**

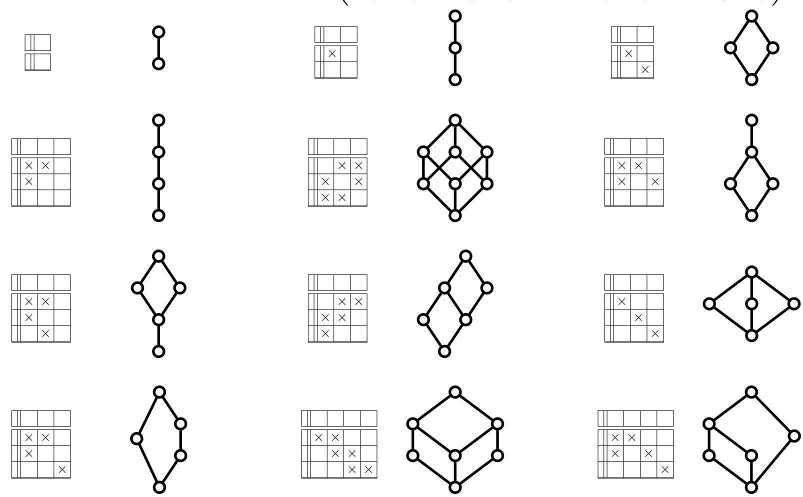
Für jeden vollständigen Verband $\mathbb{V} = (V, \leq)$ mit doppelt fundierter Ordinalskala $\mathbb{O}_{\mathbb{V}} = (V, V, \leq)$ gibt einen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmen reduzierten Kontext $\mathbb{K}_{\mathbb{V}}$ mit $\mathbb{V} \cong \mathfrak{B}\mathbb{K}_{\mathbb{V}}$, nämlich

$$\mathbb{K}_{\mathbb{V}} := \left(\mathcal{J}_{(V,\leq)}, \mathcal{M}_{(V,\leq)}, \leq \cap \mathcal{J}_{(V,\leq)} \times \mathcal{M}_{(V,\leq)} \right).$$

$\mathbb{K}_{\mathbb{V}}$ heißt STANDARDKONTEXT zu $\mathbb{V}$.

APPROBATIO Mit Corollarium 3.18, Corollarium 3.31, Lemma 3.77 und Lemma 3.36 folgt

$$\begin{aligned} (V, \leq) \cong \mathfrak{B}(V, V, \leq) &\cong \mathfrak{B}\left(V_{\gamma\mathrm{irr}}, V_{\mu\mathrm{irr}}, \leq \cap V_{\gamma\mathrm{irr}} \times V_{\mu\mathrm{irr}}\right) \\ &= \mathfrak{B}\left(\mathcal{J}_{(V,\leq)}, \mathcal{M}_{(V,\leq)}, \leq \cap \mathcal{J}_{(V,\leq)} \times \mathcal{M}_{(V,\leq)} \right). \end{aligned}$$ ■



3.1.6 Konstruktionen

Definitio: Kontextsummen 38

Seien $\mathbb{K}_1 = (G, M, I)$ und $\mathbb{K}_2 = (H, N, J)$ formale Kontexte. Dann lassen sich aus ihnen die folgenden Kontexte konstruieren.

(I) APPOSITION $\mathbb{K}_1|\mathbb{K}_2 := (G, M \dot{\cup} N, I \dot{\cup} J)$ (nur für $G = H$)

$$\begin{array}{c|c|c|} & M & N \\ \hline G & I & J \\ \hline \end{array}$$

(II) SUBPOSITION $\dfrac{\mathbb{K}_1}{\mathbb{K}_2} := (G \dot{\cup} H, M, I \dot{\cup} J)$ (nur für $M = N$)

$$\begin{array}{c|c|} & M \\ \hline G & I \\ \hline H & J \\ \hline \end{array}$$

(III) SUBDIREKTE SUMME $\begin{array}{c|c} \mathbb{K}_1 & R \\ \hline S & \mathbb{K}_2 \end{array} := (G \dot{\cup} H, M \dot{\cup} N, I \dot{\cup} J \dot{\cup} R \dot{\cup} S)$

$$\begin{array}{c|c|c|} & M & N \\ \hline G & I & R \\ \hline H & S & J \\ \hline \end{array}$$

(IV) HORIZONTALE SUMME $\mathbb{K}_1 \uplus \mathbb{K}_2 := \begin{array}{c|c} \mathbb{K}_1 & \varnothing \\ \hline \varnothing & \mathbb{K}_2 \end{array}$

$$\begin{array}{c|c|c|} & M & N \\ \hline G & I & \varnothing \\ \hline H & \varnothing & J \\ \hline \end{array}$$

(V) VERTIKALE SUMME $\mathbb{K}_1 \oplus \mathbb{K}_2 := \begin{array}{c|c} \mathbb{K}_1 & G \times N \\ \hline \varnothing & \mathbb{K}_2 \end{array}$

$$\begin{array}{c|c|c|} & M & N \\ \hline G & I & \times \\ \hline H & \varnothing & J \\ \hline \end{array}$$

(VI) DIREKTE SUMME $\mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2 := \begin{array}{c|c} \mathbb{K}_1 & G \times N \\ \hline H \times M & \mathbb{K}_2 \end{array}$

$$\begin{array}{c|c|c|} & M & N \\ \hline G & I & \times \\ \hline H & \times & J \\ \hline \end{array}$$

(VII) SUBSTITUTIONSSUMME $\mathbb{K}_1(g, m)\mathbb{K}_2 := \begin{array}{c|c} \mathbb{K}_1 \setminus \{g, m\} & m^I \times N \\ \hline H \times g^I & \mathbb{K}_2 \end{array}$

$$\begin{array}{c|c|c|} & M \setminus \{m\} & N \\ \hline G \setminus \{g\} & I & m^I \times N \\ \hline H & H \times g^I & J \\ \hline \end{array}$$

Definitio: Kontextprodukte 39

(I) SEMIPRODUKT $(G, M, I) \between (H, N, J) := (G \times H, M \uplus N, I \between J)$ mit

$$I \between J := \bigcup_{gIm} (\{g\} \times H) \times \{m\} \cup \bigcup_{hJn} (G \times \{h\}) \times \{n\}$$

(II) DIREKTES PRODUKT $(G, M, I) \times (H, N, J) := (G \times H, M \times N, I \times J)$ mit

$$I \times J := \bigcup_{gIm} (\{g\} \times H) \times (\{m\} \times N) \cup \bigcup_{hJn} (G \times \{h\}) \times (M \times \{n\})$$

(III) BIPRODUKT $(G, M, I) \mathbin{\&} (H, N, J) := (G \times H, M \times N, I \mathbin{\&} J)$ mit

$$I \mathbin{\&} J := \bigcup_{\substack{gIm \\ hJn}} \{((g, h), (m, n))\}$$

(IV) KOMPOSITIONSPRODUKT $(G,M,I)\circ(M,N,J) := (G,N,I\circ J)$ mit
$$I\circ J := \bigcup_{m\in M} m^I \times m^J$$

3.2 Mehrwertige Kontexte

40 **Definitio: Mehrwertiger Kontext**

Ein MEHRWERTIGER KONTEXT $\mathbb{K} = (G,M,W,I)$ hat eine GEGENSTANDSMENGE G, eine MERKMALSMENGE M, eine WERTEMENGE W und eine partielle INZIDENZABBILDUNG
$$I\colon G\times M \to_{\mathrm{p}} W.$$
Wir schreiben auch
$$g(m) = w :\Leftrightarrow m(g) = w :\Leftrightarrow (g,m,w)\in I :\Leftrightarrow gIm = w :\Leftrightarrow I(g,m) = w$$
und sagen, dass das Merkmal m für den Gegenstand g den Wert w HAT. Die Gegenstände $g\in G$ und Merkmale $m\in M$ können also als partielle Abbildungen $g\colon M\to_{\mathrm{p}} W$ bzw. $m\colon G\to_{\mathrm{p}} W$ aufgefasst werden. $\mathbb{K}$ heißt VOLLSTÄNDIG, wenn die Inzidenzabbildung nicht echt partiell ist, d.h. wenn sie jedem Gegenstands-Merkmal-Paar einen Wert zuordnet.

Manchmal ist es nützlich die gesamte Wertemenge W in einzelne Wertemengen $W_m := m(G)$ für jedes Merkmal $m\in M$ aufzuteilen, sodass $W = \bigcup_{m\in M} W_m$ und $gIm \in W_m$ für alle Gegenstände $g\in G$ gilt.

41 **Definitio: Nominale und invariante Autoskalierung**

Sei $\mathbb{K} = (G,M,W,I)$ ein mehrwertiger Kontext.

(I) Der Kontext $\mathbb{K}_{\mathrm{nom}} := (G, M\times W, I_{\mathrm{nom}})$ mit
$$gI_{\mathrm{nom}}(m,w) :\Leftrightarrow gIm = w$$
heißt NOMINALE AUTOSKALIERUNG von $\mathbb{K}$.

(II) Der Kontext $\mathbb{K}_{\mathrm{inv}} := (G\times G, M, I_{\mathrm{inv}})$ mit
$$(g,h)I_{\mathrm{inv}}m :\Leftrightarrow gIm = hIm$$
heißt INVARIANTE AUTOSKALIERUNG von $\mathbb{K}$. Für eine Gegenstandsmenge $A\subseteq G$ heißt der $\mathbb{K}_{\mathrm{inv}}$-Inhalt
$$A_{\mathrm{inv}} := (A\times A)^{I_{\mathrm{inv}}} = \left\{ m\in M \,\middle|\, \forall_{g,h\in A}\, gIm = hIm \right\}$$
auch $\mathbb{K}$-VARIETÄT zu A. Dual heißt für eine Merkmalsmenge $B\subseteq M$ der $\mathbb{K}_{\mathrm{inv}}$-Umfang
$$\theta_B := B^{I_{\mathrm{inv}}} = \left\{ (g,h)\in G\times G \,\middle|\, \forall_{m\in B}\, gIm = hIm \right\}$$
auch $\mathbb{K}$-KONGRUENZ zu B, und ist stets eine Äquivalenzrelation auf G.

Eine EXTENSIONALE PARTITIONIERUNG eines formalen Kontexts $\mathbb{K} = (G,M,I)$

ist eine Menge von Umfängen $\mathcal{P} \subseteq \operatorname{Ext}(\mathbb{K})$, die eine Partitionierung der Gegenstandsmenge G bildet.

Lemma 42

Sei $\mathbb{K} = (G, M, W, I)$ ein vollständiger mehrwertiger Kontext. Dann bilden die folgenden Mengen $\mathbb{K}_{\text{nom}}$-extensionale Partitionierungen:

(I)

$$G/_m := \left\{ (m, gIm)^{I_{\text{nom}}} \,\middle|\, g \in G \right\} = \left\{ (m, w)^{I_{\text{nom}}} \,\middle|\, w \in W_m \right\} = m^{-1}(W_m).$$

für jedes Merkmal $m \in M$.

(II)

$$G/_B := \left\{ \bigcap_{m \in B} (m, gIm)^{I_{\text{nom}}} \,\middle|\, g \in G \right\}.$$

für jede Merkmalsmenge $B \subseteq M$.

(III) $G/_\theta$ für jede $\mathbb{K}$-Kongruenz $\theta \in \operatorname{Ext}(\mathbb{K}_{\text{inv}})$.

Approbatio (I) Sei $m \in M$ ein Merkmal. m impliziert eine (partielle) Abbildung $m\colon G \to W_m$, also gilt zunächst für jeden Wert $w \in W_m$

$$m^{-1}(w) = \{g \in G \mid gIm = w\} = (m, w)^{I_{\text{nom}}} \in \operatorname{Ext}(\mathbb{K}_{\text{nom}}).$$

Weiterhin gilt für Werte $w_1 \neq w_2$ von m natürlich stets $m^{-1}(w_1) \cap m^{-1}(w_2) = \emptyset$. Weil $\mathbb{K}$ vollständig ist, gibt es für jeden Gegenstand $g \in G$ einen Wert $w \in W_m$ mit $gIm = w$ bzw. $g \in m^{-1}(w)$ – also folgt $G = \bigcup_{w \in W_m} m^{-1}(w)$. Insgesamt bildet also $m^{-1}(W_m)$ eine $\mathbb{K}_{\text{nom}}$-extensionale Partitionierung.

(II) Zunächst sind die Elemente von $G/_B$ paarweise disjunkt, weil nach dem ersten Teil bereits für jedes Merkmal $m \in B$ die Mengen $(m, gIm)^{I_{\text{nom}}}$ paarweise disjunkt sind. Natürlich sind die Mengen in $G/_B$ als Durchschnitt von $\mathbb{K}_{\text{nom}}$-Umfängen auch stets $\mathbb{K}_{\text{nom}}$-Umfänge. Weil $\mathbb{K}$ vollständig ist, gibt es für jeden Gegenstand $g \in G$ und jedes Merkmal $m \in B$ einen Wert $gIm \in W_m$, und demnach gilt $g \in \bigcap_{m \in B} m^{-1}(gIm)$. Schließlich folgt $G = \bigcup_{g \in G} \bigcap_{m \in B} m^{-1}(gIm)$, d.h. $G/_B$ ist eine $\mathbb{K}_{\text{nom}}$-extensionale Partitionierung.

(III) Sei $\theta = \theta^{I_{\text{inv}} I_{\text{inv}}}$ eine $\mathbb{K}$-Kongruenz. Dann gibt es eine Merkmalsmenge $B \subseteq M$ mit $\theta = B^{I_{\text{inv}}}$, beispielsweise $B := \theta^{I_{\text{inv}}}$. Dann folgt für alle Gegenstände $g \in G$

$$h \in [g]_\theta \Leftrightarrow g \,\theta\, h \Leftrightarrow (g, h) \in B^{I_{\text{inv}}} \Leftrightarrow \forall_{m \in B}\, gIm = hIm \Leftrightarrow h \in \bigcap_{m \in B} (m, gIm)^{I_{\text{nom}}}$$

und damit ist $G/_\theta = G/_B$ nach dem zweiten Teil eine $\mathbb{K}_{\text{nom}}$-extensionale Partitionierung. ■

Definitio: Skala, $\mathbb{S}$-Skalierung 43

Sei $\mathbb{K} = (G, M, W, I)$ ein mehrwertiger Kontext. Ein Kontext $\mathbb{S}_m = (V_m, N_m, J_m)$ mit

$$m(G) \subseteq V_m$$

heißt Skala für m. Die Gegenstände einer Skala heißen Skalenwerte und die Merkmale heißen Skalenmerkmale. Sei $\mathbb{S} = \{\mathbb{S}_m\}_{m \in M}$ eine Skalenfamilie für $\mathbb{K}$. Der Kontext $\mathbb{K}_\mathbb{S} := (G, M_\mathbb{S}, I_\mathbb{S})$ mit $M_\mathbb{S} := \bigcup_{m \in M} (\{m\} \times N_m)$ und

$$gI_\mathbb{S}(m,n) :\Leftrightarrow gImJ_mn \Leftrightarrow \underset{w \in W}{\exists}\, gIm = w \text{ und } wJ_mn$$

heißt $\mathbb{S}$-SKALIERUNG von $\mathbb{K}$.

Bezeichnung	*Symbol*	*Definition*
DICHTOMISCHE SKALA	$\mathbb{D}$	$(\{0,1\}, \{0,1\}, =)$
MULTIDICHTOMISCHE SKALA	$\mathbb{D}_n$	$\bigtimes_{k=1}^{n} \mathbb{D}$
BOOLE'SCHE SKALA zu M	$\mathbb{B}_M$	$(\wp M, \wp M, \subseteq)$
NOMINALE SKALA zu M	$\mathbb{N}_M$	$(M, M, =)$
KONTRANOMINALE SKALA zu M	$\mathbb{N}^{\complement}{}_M$	$(M, M, \neq)$
ORDINALE SKALA zu $(P, \leq)$	$\mathbb{O}_{(P,\leq)}$	$(P, P, \leq)$
KONTRAORDINALE SKALA zu $(P, \leq)$	$\mathbb{O}^{\complement\partial}_{(P,\leq)}$	$(P, P, \ngeq)$
INTERORDINALE SKALA zu $(P, \leq)$	$\mathbb{I}_{(P,\leq)}$	$\mathbb{O}_{(P,\leq)} \mid \mathbb{O}^{\partial}_{(P,\leq)}$
KONVEXORDINALE SKALA zu $(P, \leq)$	$\mathbb{C}_{(P,\leq)}$	$\mathbb{O}^{\complement\partial}_{(P,\leq)} \mid \mathbb{O}^{\complement}{}_{(P,\leq)}$
BIORDINALE SKALA zu $(P, \leq)$ und $(Q, \leq)$	$\mathbb{M}_{(P,\leq),(Q,\leq)}$	$\mathbb{O}_{(P,\leq)} \uplus \mathbb{O}_{(Q,\leq)}$
MULTIORDINALE SKALA zu $\{(P_t, \leq)\}_{t \in T}$	$\mathbb{M}_{\{(P_t,\leq)\}_{t \in T}}$	$\biguplus_{t \in T} \mathbb{O}_{(P_t,\leq)}$
GITTERARTIGE SKALA zu $\{(P_t, \leq)\}_{t \in T}$	$\mathbb{G}_{\{(P_t,\leq)\}_{t \in T}}$	$\bigtimes_{t \in T} \mathbb{O}_{(P_t,\leq)}$

44 **Lemma**

(I) $\mathbb{O}_{(P,\leq)} \uplus \mathbb{O}_{(Q,\leq)} \cong \mathbb{O}_{(P,\leq) \uplus (Q,\leq)}$

(II) $\mathbb{I}_{(P,\leq)} \uplus \mathbb{I}_{(Q,\leq)} \cong \mathbb{I}_{(P,\leq) \uplus (Q,\leq)}$

(III) $\mathbb{O}^{\complement\partial}_{(P,\leq)} + \mathbb{O}^{\complement\partial}_{(Q,\leq)} \cong \mathbb{O}^{\complement\partial}_{(P,\leq) \uplus (Q,\leq)}$

(IV) $\mathbb{C}_{(P,\leq)} + \mathbb{C}_{(Q,\leq)} \cong \mathbb{C}_{(P,\leq)\uplus(Q,\leq)}$

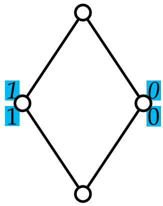
(V) $\mathbb{O}^{\mathbb{C}\partial}_{(P,\leq)} \times \mathbb{O}^{\mathbb{C}\partial}_{(Q,\leq)} \cong \mathbb{O}^{\mathbb{C}\partial}_{(P,\leq)\times(Q,\leq)}$

(VI) $\mathbb{O}^{\mathbb{C}\partial}_{(P,\leq)} \times \mathbb{O}^{\mathbb{C}\partial}_{(Q,\leq)} | \mathbb{O}^{\mathbb{C}}_{(P,\leq)} \times \mathbb{O}^{\mathbb{C}}_{(Q,\leq)} \cong \mathbb{C}_{(P,\leq)\times(Q,\leq)}$

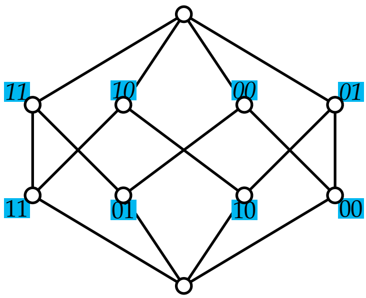
3.2.1 Einige Standardskalen

Dichotomische Skalen

	0	1
0	×	
1		×

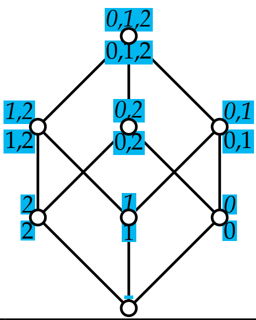


	00	10	01	11
00	×		×	
10		×	×	
01	×			×
11		×		×

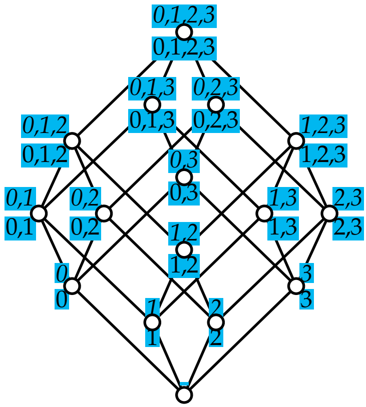


BOOLE'sche und Kontranominale Skalen

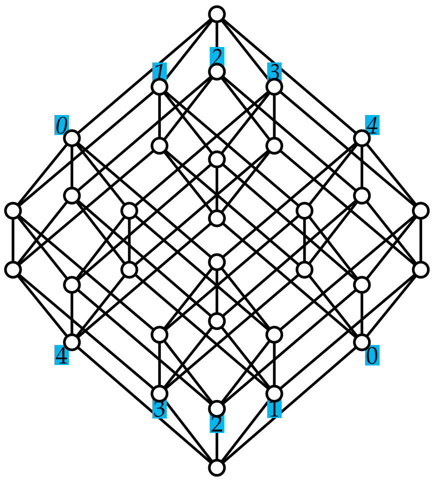
		0	1	0,1	2	0,2	1,2	0,1,2
	×	×	×	×	×	×	×	×
0		×		×		×		×
1			×	×			×	×
0,1				×				×
2					×	×	×	×
0,2						×		×
1,2							×	×
0,1,2								×



		0	1	0,1	2	0,2	1,2	0,1,2	3	0,3	1,3	0,1,3	2,3	0,2,3	1,2,3	0,1,2,3
	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
0		×		×		×		×		×		×		×		×
1			×	×			×	×			×	×			×	×
0,1				×				×				×				×
2					×	×	×	×					×	×	×	×
0,2						×		×						×		×
1,2							×	×							×	×
0,1,2								×								×
3									×	×	×	×	×	×	×	×
0,3										×		×		×		×
1,3											×	×			×	×
0,1,3												×				×
2,3													×	×	×	×
0,2,3														×		×
1,2,3															×	×
0,1,2,3																×

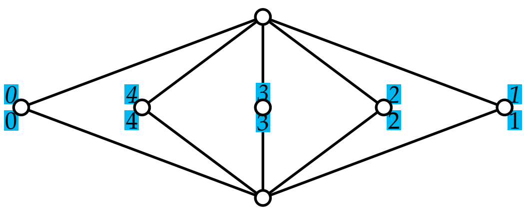


	0	1	2	3	4
0		×	×	×	×
1	×		×	×	×
2	×	×		×	×
3	×	×	×		×
4	×	×	×	×	



Nominale Skalen

	0	1	2	3	4
0	×				
1		×			
2			×		
3				×	
4					×



Ordinale Skalen

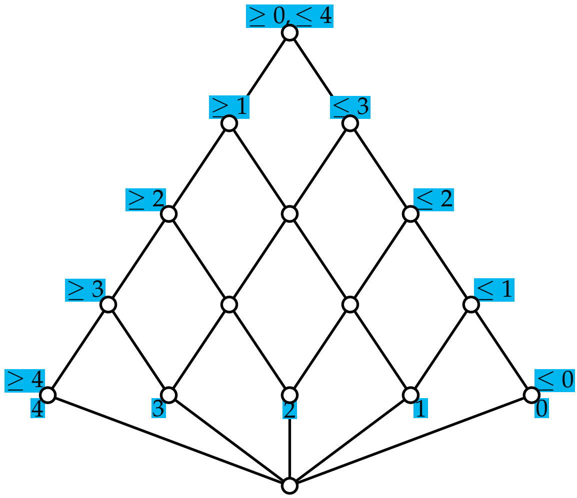
	0	1	2	3	4
0	×	×	×	×	×
1		×	×	×	×
2			×	×	×
3				×	×
4					×

Kontraordinale Skalen

	0	1	2	3	4
0		×	×	×	×
1			×	×	×
2				×	×
3					×
4					

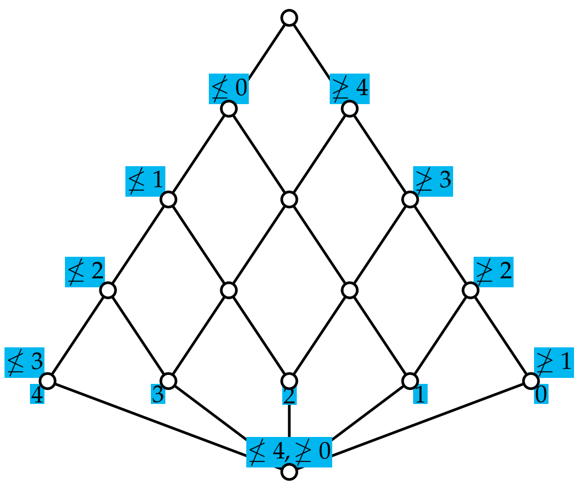
Interordinale Skalen

	≤ 0	≤ 1	≤ 2	≤ 3	≤ 4	≥ 0	≥ 1	≥ 2	≥ 3	≥ 4
0	×	×	×	×	×	×				
1		×	×	×	×	×	×			
2			×	×	×	×	×	×		
3				×	×	×	×	×	×	
4					×	×	×	×	×	×



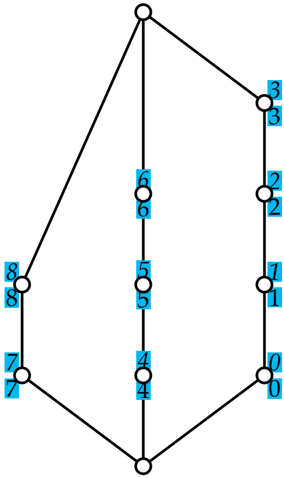
Konvexordinale Skalen

	$\ngeq 0$	$\ngeq 1$	$\ngeq 2$	$\ngeq 3$	$\ngeq 4$	$\nleq 0$	$\nleq 1$	$\nleq 2$	$\nleq 3$	$\nleq 4$
0		×	×	×	×					
1			×	×	×	×				
2				×	×	×	×			
3					×	×	×	×		
4						×	×	×	×	



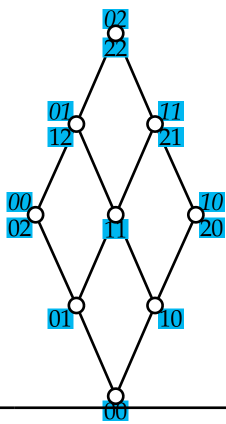
Multiordinale Skalen

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	×	×	×	×					
1		×	×	×					
2			×	×					
3				×					
4					×	×	×		
5						×	×		
6							×		
7								×	×
8									×

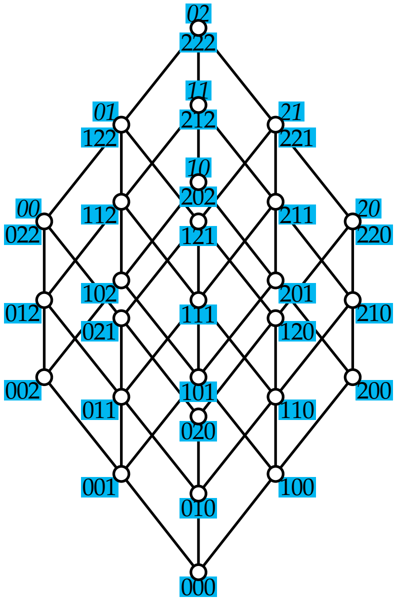


Gitterartige Skalen

	00	01	02	10	11	12
00	×	×	×	×	×	×
10		×	×	×	×	×
20			×	×	×	×
01	×	×	×		×	×
11		×	×		×	×
21			×		×	×
02	×	×	×			×
12		×	×			×
22			×			×



	00	01	02	10	11	12	20	21	22
000	×	×	×	×	×	×	×	×	×
100		×	×	×	×	×	×	×	×
200			×	×	×	×	×	×	×
010	×	×	×		×	×	×	×	×
110		×	×		×	×	×	×	×
210			×		×	×	×	×	×
020	×	×	×			×	×	×	×
120		×	×			×	×	×	×
220			×			×	×	×	×
001	×	×	×	×	×	×		×	×
101		×	×	×	×	×		×	×
201			×	×	×	×		×	×
011	×	×	×		×	×		×	×
111		×	×		×	×		×	×
211			×		×	×		×	×
021	×	×	×			×		×	×
121		×	×			×		×	×
221			×			×		×	×
002	×	×	×	×	×	×			×
102		×	×	×	×	×			×
202			×	×	×	×			×
012	×	×	×		×	×			×
112		×	×		×	×			×
212			×		×	×			×
022	×	×	×			×			×
122		×	×			×			×
222			×			×			×



3.3 Triadische Kontexte

Definitio: Triadischer Kontext 45

Ein TRIADISCHER KONTEXT ist ein Quadrupel $\mathbb{K} = (G, M, B, Y)$ bestehend aus drei Mengen G, M, B und einer dreistelligen Relation

$$Y \subseteq G \times M \times B.$$

Ein Element $g \in G$ heißt GEGENSTAND, ein Element $m \in M$ heißt MERKMAL, ein Element $b \in B$ heißt BEDINGUNG und Y heißt INZIDENZRELATION. Für ein Tripel $(g, m, b) \in Y$ sagen wir auch, dass der Gegenstand g das Merkmal m unter der Bedingung b hat. Ein QUADER oder TRIQUASIBEGRIFF von $\mathbb{K}$ ist ein Tripel (A_G, A_M, A_B), sodass

$$A_G \times A_M \times A_B \subseteq Y$$

gilt. Ein Triquasibegriff (A_G, A_M, A_B) heißt TRIBEGRIFF von $\mathbb{K}$, wenn er maximal bezüglich der Teilmengeninklusion in allen drei Komponenten ist, d.h. aus $X_G \times X_M \times X_B \subseteq Y$ mit $A_T \subseteq X_T$ für alle $T \in \{G, M, B\}$ folgt stets $(A_G, A_M, A_B) = (X_G, X_M, X_B)$. Für die Menge aller Tribegriffe von $\mathbb{K}$ schreiben wir $\mathfrak{T}(\mathbb{K})$.

(Wil95)

Im folgenden Text symbolisieren wir einen triadischen Kontext stets als $\mathbb{K} = (K_1, K_2, K_3, Y)$. Zu jedem triadischen Kontext $\mathbb{K}$ gibt es drei formale Kontexte

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}^{(1)} &:= (K_1, K_2 \times K_3, Y^{(1)}) \text{ mit } Y^{(1)} := \{(g, (m, b)) \mid (g, m, b) \in Y\}\\
\mathbb{K}^{(2)} &:= (K_2, K_1 \times K_3, Y^{(2)}) \text{ mit } Y^{(2)} := \{(m, (g, b)) \mid (g, m, b) \in Y\}\\
\mathbb{K}^{(3)} &:= (K_3, K_1 \times K_2, Y^{(3)}) \text{ mit } Y^{(3)} := \{(b, (g, m)) \mid (g, m, b) \in Y\}
\end{aligned}$$

und es resultieren sechs Ableitungsoperatoren

$$\cdot^{(1)}: \begin{aligned} &\wp(K_1) \to \wp(K_2 \times K_3)\\ &X_1 \mapsto X_1^{(1)} := \left\{(x_2, x_3) \in K_2 \times K_3 \,\middle|\, \underset{x_1 \in X_1}{\forall} (x_1, x_2, x_3) \in Y\right\}\end{aligned}$$

$$\cdot^{(1)}: \begin{aligned} &\wp(K_2 \times K_3) \to \wp(K_1)\\ &X_{23} \mapsto X_{23}^{(1)} := \left\{x_1 \in K_1 \,\middle|\, \underset{(x_2, x_3) \in X_{23}}{\forall} (x_1, x_2, x_3) \in Y\right\}\end{aligned}$$

$$\cdot^{(2)}: \begin{aligned} &\wp(K_2) \to \wp(K_1 \times K_3)\\ &X_2 \mapsto X_2^{(2)} := \left\{(x_1, x_3) \in K_1 \times K_3 \,\middle|\, \underset{x_2 \in X_2}{\forall} (x_1, x_2, x_3) \in Y\right\}\end{aligned}$$

$$\cdot^{(2)}: \begin{aligned} &\wp(K_1 \times K_3) \to \wp(K_2)\\ &X_{13} \mapsto X_{13}^{(2)} := \left\{x_2 \in K_2 \,\middle|\, \underset{(x_1, x_3) \in X_{13}}{\forall} (x_1, x_2, x_3) \in Y\right\}\end{aligned}$$

$$\cdot^{(3)}: \begin{aligned} &\wp(K_3) \to \wp(K_1 \times K_2)\\ &X_3 \mapsto X_3^{(3)} := \left\{(x_1, x_2) \in K_1 \times K_2 \,\middle|\, \underset{x_3 \in X_3}{\forall} (x_1, x_2, x_3) \in Y\right\}\end{aligned}$$

$$\cdot^{(3)}: \begin{array}{l} \wp(K_1 \times K_2) \to \wp(K_3) \\ \qquad X_{12} \mapsto X_{12}^{(3)} := \left\{ x_3 \in K_3 \,\middle|\, \underset{(x_1,x_2) \in X_{12}}{\forall} (x_1, x_2, x_3) \in Y \right\} \end{array}$$

Dies führt zu folgender Definition:

46 **Definitio: (i)-Ableitungsoperator**

Für einen triadischen Kontext $\mathbb{K}$ und eine Richtungsauswahl $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ werden die (i)-ABLEITUNGSOPERATOREN definiert als die beiden Abbildungen

$$\cdot^{(i)}: \begin{array}{l} \wp(K_i) \to \wp(K_j \times K_k) \\ \qquad X_i \mapsto X_i^{(i)} := \left\{ (x_j, x_k) \in K_j \times K_k \,\middle|\, \underset{x_i \in X_i}{\forall} (x_1, x_2, x_3) \in Y \right\} \end{array}$$

$$\cdot^{(i)}: \begin{array}{l} \wp(K_j \times K_k) \to \wp(K_i) \\ \qquad X_{jk} \mapsto X_{jk}^{(i)} := \left\{ x_i \in K_i \,\middle|\, \underset{(x_j,x_k) \in X_{jk}}{\forall} (x_1, x_2, x_3) \in Y \right\} \end{array}$$

Dabei heißen drei Elemente $x_i \in K_i$, $x_j \in K_j$ und $x_k \in K_k$ VERBUNDEN oder auch INZIDENT, falls genau eines ein Gegenstand, genau eines ein Merkmal und genau eines eine Bedingung von $\mathbb{K}$ ist, deren entsprechendes Tripel in Y liegt, d.h. falls $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ und $(x_1, x_2, x_3) \in Y$ gelten.

Nach der obigen Definition gilt also für alle Gegenstände $g \in K_1$, alle Merkmale $m \in K_2$ und alle Bedingungen $b \in K_3$

$$(g, m, b) \in Y :\Leftrightarrow g \overset{b}{Y} m \Leftrightarrow g \; Y^{(1)} \; (m, b) \Leftrightarrow m \; Y^{(2)} \; (g, b) \Leftrightarrow b \; Y^{(3)} \; (g, m).$$

47 **Definitio: (i, j, X_k)-Ableitungsoperator**

Für einen triadischen Kontext $\mathbb{K}$ und $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ sowie einer Teilmenge $X_k \subseteq K_k$ werden die (i, j, X_k)-ABLEITUNGSOPERATOREN definiert als die beiden Abbildungen

$$\cdot^{(i,j,X_k)}: \begin{array}{l} \wp(K_i) \to \wp(K_j) \\ \qquad X_i \mapsto X_i^{(i,j,X_k)} := \left\{ x_j \in K_j \,\middle|\, \underset{x_i \in X_i}{\forall} \; \underset{x_k \in X_k}{\forall} (x_1, x_2, x_3) \in Y \right\} \end{array}$$

$$\cdot^{(i,j,X_k)}: \begin{array}{l} \wp(K_j) \to \wp(K_i) \\ \qquad X_j \mapsto X_j^{(i,j,X_k)} := \left\{ x_i \in K_i \,\middle|\, \underset{x_j \in X_j}{\forall} \; \underset{x_k \in X_k}{\forall} (x_1, x_2, x_3) \in Y \right\} \end{array}$$

Die oben definierten Ableitungsoperatoren stammen jeweils von den formalen Kontexten

$$\mathbb{K}_{12}^{A_3} := (K_1, K_2, Y_{12}^{A_3}) \text{ mit } Y_{12}^{A_3} := \left\{ (g, m) \in K_1 \times K_2 \,\middle|\, \underset{b \in A_3}{\forall} (g, m, b) \in Y \right\}$$

$$\mathbb{K}_{13}^{A_2} := (K_1, K_3, Y_{13}^{A_2}) \text{ mit } Y_{13}^{A_2} := \left\{ (g, b) \in K_1 \times K_3 \,\middle|\, \underset{m \in A_2}{\forall} (g, m, b) \in Y \right\}$$

$$\mathbb{K}_{23}^{A_3} := (K_2, K_3, Y_{23}^{A_1}) \text{ mit } Y_{23}^{A_1} := \left\{ (m,b) \in K_2 \times K_3 \,\middle|\, \underset{g \in A_1}{\forall} (g,m,b) \in Y \right\}$$

Lemma 48

Für die oben definierten formalen Kontexte zu einem triadischen Kontext gilt

$$A_1^{(1,2,A_3)} = (A_1 \times A_3)^{(2)}$$

bzw. allgemein

$$A_i^{(i,j,A_k)} = (A_i \times A_k)^{(j)} \text{ und dual } A_j^{(i,j,A_k)} = (A_j \times A_k)^{(i)}$$

für jede beliebige Wahl $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ und Teilmengen $A_i \subseteq K_i$, $A_j \subseteq K_j$ sowie $A_k \subseteq K_k$.

Approbatio Sei $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$, dann gilt

$$\begin{aligned} A_i^{(i,j,A_k)} &= \left\{ x_j \in K_j \,\middle|\, \underset{x_i \in A_i}{\forall}\ \underset{x_k \in A_k}{\forall} (x_1,x_2,x_3) \in Y \right\} \\ &= \left\{ x_j \in K_j \,\middle|\, \underset{(x_i,x_k) \in A_i \times A_k}{\forall} (x_1,x_2,x_3) \in Y \right\} \\ &= (A_i \times A_k)^{(j)} \end{aligned}$$ ■

Lemma: Charakterisierung von triadischen Begriffen 49

Für jeden triadischen Kontext $\mathbb{K} = (K_1, K_2, K_3, Y)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(I) $(A_1, A_2, A_3) \in \mathfrak{T}(\mathbb{K})$

(II) $(A_1, A_2) \in \mathfrak{B}\left(\mathbb{K}_{12}^{A_3}\right)$, $(A_1, A_3) \in \mathfrak{B}\left(\mathbb{K}_{13}^{A_2}\right)$ und $(A_2, A_3) \in \mathfrak{B}\left(\mathbb{K}_{23}^{A_1}\right)$

(III) $(A_1 \times A_2)^{(3)} = A_3$, $(A_1 \times A_3)^{(2)} = A_2$ und $(A_2 \times A_3)^{(1)} = A_1$

In (II) sind bereits zwei der drei Forderungen hinreichend und implizieren stets die dritte.

Approbatio (I)⇒(II) Sei (A_1, A_2, A_3) ein triadischer Begriff von $\mathbb{K}$, d.h. $A_1 \times A_2 \times A_3$ bildet einen maximalen Quader in Y. Wir zeigen nur die erste Bedingung $A_1^{(1,2,A_3)} = A_2$, die übrigen folgen analog. Zunächst gilt

$$A_1^{(1,2,A_3)} = \left\{ m \in K_2 \,\middle|\, \underset{g \in A_1}{\forall}\ \underset{b \in A_3}{\forall} (g,m,b) \in Y \right\} \supseteq A_2.$$

Angenommen, es gäbe ein Merkmal $m_0 \in A_1^{(1,2,A_3)} \setminus A_2$, dann wäre auch $A_1 \times \{m_0\} \times A_3$ ein Quader in Y, also wäre der Quader $A_1 \times A_2 \times A_3$ nicht maximal in Y wegen

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \subset A_1 \times (A_2 \cup \{m_0\}) \times A_3 \subseteq Y.$$

Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung, und $A_1^{(1,2,A_3)} = A_2$ muss gelten.

(I)⇐(II) Angenommen, der Quader $A_1 \times A_2 \times A_3$ wäre nicht maximal in Y. Wir nehmen außerdem an, es gäbe ein $g_0 \in K_1 \setminus A_1$, sodass der Superquader $(A_1 \cup \{g_0\}) \times A_2 \times A_3$ auch in Y liegt. Dann wäre jedoch auch $g_0 \in A_2^{(1,2,A_3)} = A_1$.

Offensichtlich ist das ein Widerspruch zur Voraussetzung. Die Maximalität in den Merkmalen bzw. Bedingungen folgt analog.

(II)⇒(III) Wenn (A_1, A_2) ein formaler Begriff von $\mathbb{K}_{12}^{A_3}$ und (A_1, A_3) ein Begriff von $\mathbb{K}_{13}^{A_2}$ ist, dann folgt sofort

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2^{(1,2,A_3)} = (A_2 \times A_3)^{(1)}, \\ A_2 &= A_1^{(1,2,A_3)} = (A_1 \times A_3)^{(2)} \\ \text{und } A_3 &= A_1^{(1,3,A_2)} = (A_1 \times A_2)^{(3)}. \end{aligned}$$

(II)⇐(III) Es gelte $(A_1 \times A_2)^{(3)} = A_3$ und $(A_1 \times A_3)^{(2)} = A_2$ sowie $(A_2 \times A_3)^{(1)} = A_1$, dann folgt

$$\begin{aligned} A_3 &= (A_1 \times A_2)^{(3)} = A_1^{(1,3,A_2)} = A_2^{(2,3,A_1)}, \\ A_2 &= (A_1 \times A_3)^{(2)} = A_1^{(1,2,A_3)} = A_3^{(2,3,A_1)} \\ \text{und } A_1 &= (A_2 \times A_3)^{(1)} = A_2^{(1,2,A_3)} = A_3^{(1,3,A_2)}. \end{aligned}$$

Ersichtlich sind dann (A_1, A_2), (A_1, A_3) und (A_2, A_3) formale Begriffe der entsprechenden Kontexte $\mathbb{K}_{12}^{A_3}$, $\mathbb{K}_{13}^{A_2}$ bzw. $\mathbb{K}_{23}^{A_1}$. ■

50 **Theorema: Triset von Tribegriffen**

Für jeden triadischen Kontext $\mathbb{K} = (K_1, K_2, K_3, Y)$ ist die Menge der triadischen Begriffe trigeordnet vermöge den drei Quasiordnungen ($i \in \{1,2,3\}$)

$$(A_1, A_2, A_3) \sqsubseteq_i (B_1, B_2, B_3) :\Leftrightarrow A_i \subseteq B_i,$$

d.h. $\underline{\mathfrak{T}}(\mathbb{K}) := (\mathfrak{T}(\mathbb{K}), \sqsubseteq_1, \sqsubseteq_2, \sqsubseteq_3)$ ist ein Triset.

(Wil95)

Approbatio (Quasiordnungen) Die Reflexivität und Transitivität von $\sqsubseteq_i$ vererbt sich von der Teilmengeninklusion in der i-Komponente.

(Antiordinalität) Seien (A_1, A_2, A_3) und (B_1, B_2, B_3) Tribegriffe mit $A_i \subseteq B_i$ und $A_j \subseteq B_j$. Dann folgt sogleich

$$A_k = (A_i \times A_j)^{(k)} \supseteq (B_i \times B_j)^{(k)} = B_k.$$

(Triäquivalenz) Je zwei Tribegriffe, die 1, 2, 3-äquivalent sind, haben übereinstimmende 1, 2, 3-Komponenten (wegen der Antisymmetrie der Teilmengeninklusion), und sind damit gleich. ■

51 **Corollarium: Triset von Tribegriffen**

(I) Die zugehörigen Äquivalenzrelationen sind $\equiv_i := \sqsubseteq_i \cap \sqsupseteq_i$.

(II) Sei $\{i, j, k\} = \{1,2,3\}$. Für die oben definierten Quasiordnungen gilt

$$\sqsubseteq_i \cap \sqsubseteq_j \subseteq \sqsupseteq_k.$$

(III) Weiterhin ist jeder triadische Begriff bereits eindeutig durch zwei seiner Komponenten Umfang, Inhalt und Modus bereits eindeutig bestimmt, denn es gilt

$$\equiv_i \cap \equiv_j = \Delta_{\mathfrak{T}(\mathbb{K})}.$$

(IV) Die Relationen $\sqsubseteq_{ij} := \sqsubseteq_i \cap \sqsubseteq_j$ sind Ordnungen auf $\mathfrak{T}(\mathbb{K})$.

(Wil95)

Lemma: *ik*-Supremum von Tribegriffen 52

Sei $\mathbb{K} = (K_1, K_2, K_3, Y)$ ein triadischer Kontext und $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

(I) Für zwei beliebige Teilmengen $X_i \subseteq K_i$ und $X_k \subseteq K_k$ hat der Tribegriff $X_i \,{}_i\mathfrak{T}_k\, X_k$ vermöge der Abbildung

$$ {}_i\mathfrak{T}_k \colon \begin{array}{l} \wp(K_i) \times \wp(K_k) \to \mathfrak{T}(\mathbb{K}) \\ \qquad (X_i, X_k) \mapsto (A_1, A_2, A_3) \text{ mit } \begin{cases} A_j := (X_i \times X_k)^{(j)} = X_i^{(i,j,X_k)} \\ A_i := (A_j \times X_k)^{(i)} = A_j^{(i,j,X_k)} \\ A_k := (A_i \times A_j)^{(k)} = A_j^{(j,k,A_i)} \end{cases} \end{array} $$

die kleinste k-Komponente und die größte i-Komponente unter allen Tribegriffen (B_1, B_2, B_3) mit größter j-Komponente und $X_i \subseteq B_i$ sowie $X_k \subseteq B_k$.

(II) Insbesondere gilt $A_i \,{}_i\mathfrak{T}_k\, A_k = (A_1, A_2, A_3)$ für alle $(A_1, A_2, A_3) \in \mathfrak{T}(\mathbb{K})$.

(III) Für zwei Tribegriffsfamilien $\{(A_1^s, A_2^s, A_3^s)\}_{s\in S}$ und $\{(B_1^t, B_2^t, B_3^t)\}_{t\in T}$ existiert stets deren ik-Supremum vermöge

$$ \{(A_1^s, A_2^s, A_3^s)\}_{s\in S} \,{}_i\bigvee_k\, \{(B_1^t, B_2^t, B_3^t)\}_{t\in T} = \left(\bigcup_{s\in S} A_i^s\right) {}_i\mathfrak{T}_k \left(\bigcup_{t\in T} B_k^t\right). $$

(Wil95)

APPROBATIO (I) Seien $X_i \subseteq K_i$, $X_k \subseteq K_k$ und $(A_1, A_2, A_3) := X_i \,{}_i\mathfrak{T}_k\, X_k$.

($X_{i,k} \subseteq A_{i,k}$) Zuerst gilt für die i-Komponente

$$ X_i \subseteq X_i^{(i,j,X_k)(i,j,X_k)} = A_i, $$

und für die k-Komponente

$$ X_k \subseteq X_k^{(i,k,A_j)(i,k,A_j)} = A_j^{(i,j,X_k)(i,k,A_j)} = A_i^{(i,k,A_j)} = A_j^{(j,k,A_i)} = A_k. $$

(WOHLDEFINIERT) Wir zeigen nun mit Hilfe des Lemma: Charakterisierung von triadischen Begriffen 3.49, dass (A_1, A_2, A_3) ein Tribegriff ist. Es gilt bereits $A_k = (A_i \times A_j)^{(k)}$. Weiterhin gilt für die i-Komponente

$$ (A_j \times A_k)^{(i)} \subseteq (A_j \times X_k)^{(i)} = A_i \subseteq A_i^{(i,k,A_j)(i,k,A_j)} = A_k^{(i,k,A_j)} = (A_j \times A_k)^{(i)} $$

sowie analog für die j-Komponente

$$ (A_i \times A_k)^{(j)} \subseteq (X_i \times X_k)^{(j)} = A_j \subseteq A_j^{(j,k,A_i)(j,k,A_i)} = A_k^{(j,k,A_i)} = (A_i \times A_k)^{(j)}, $$

d.h. ${}_i\mathfrak{T}_k$ ist wohldefiniert.

(i,k) Sei $(B_1, B_2, B_3) \in \mathfrak{T}(\mathbb{K})$ mit maximaler j-Komponente und $X_i \subseteq B_i$ und $X_k \subseteq B_k$. Es ist $A_j = (X_i \times X_k)^{(j)} \supseteq (B_i \times B_k)^{(j)} = B_j$ und weil B_j ebenfalls maximal ist, muss $A_j = B_j$ sein. Damit gelten nun wie behauptet

$$ A_i = (A_j \times X_k)^{(i)} \supseteq (B_j \times B_k)^{(i)} = B_i $$
$$ A_k = (A_i \times A_j)^{(k)} \subseteq (B_i \times B_j)^{(k)} = B_k. $$

(II) Sei (A_1, A_2, A_3) ein Tribegriff, und sei $(B_1, B_2, B_3) = A_i \,{}_i\mathfrak{T}_k\, A_k$, dann folgt $B_j = (A_i \times A_k)^{(j)} = A_j$ sowie $B_i = (B_j \times A_k)^{(i)} = (A_j \times A_k)^{(i)} = A_i$ und ebenso $B_k = (B_i \times B_j)^{(k)} = (A_i \times A_j)^{(k)} = A_k$.

(III) Das *ik*-Supremum von $\mathcal{S} = \{(A_1^s, A_2^s, A_3^s)\}_{s\in S}$ und $\mathcal{T} = \{(B_1^t, B_2^t, B_3^t)\}_{t\in T}$ ist nach Lemma: *ik*-Supremum 1.50 der Tribegriff aus $\mathcal{S}\ {}_i{\upuparrows\!\uparrow}_k\ \mathcal{T} = \overline{(\mathcal{S}\ {}_i{\upuparrows}_k\ \mathcal{T})}^{\uparrow j}$ mit maximaler *i*-Komponente (oder minimaler *k*-Komponente) und nach Konstruktion sowie (I) ist das für $\left(\bigcup_{s\in S} A_i^s\right)\ {}_i\mathfrak{T}_k\ \left(\bigcup_{t\in T} B_k^t\right)$ erfüllt, demnach muss dieser Tribegriff genau das *ik*-Supremum sein. ■

53 **Theorema: Hauptsatz der triadischen Begriffsanalyse**

(I) Sei $\mathbb{K} = (K_1, K_2, K_3, Y)$ ein triadischer Kontext. Dann ist das Begriffstriset $\underline{\mathfrak{T}}(\mathbb{K})$ ein vollständiger Triverband, und heißt TRIBEGRIFFSVERBAND.

(II) Allgemein ist ein vollständiger Triverband $\mathbb{L} = (L, \lesssim_1, \lesssim_2, \lesssim_3)$ genau dann isomorph zu einem Tribegriffsverband $\underline{\mathfrak{T}}(\mathbb{K})$, wenn es drei Abbildungen $\lambda_i \colon K_i \to \mathcal{F}_i(\mathbb{L})$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ gibt, sodass $\lambda_i(K_i)$ *i*-dicht in $\mathbb{L}$ liegt und

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \subseteq Y \Leftrightarrow \bigcap_{i\in\{1,2,3\}} \bigcap \lambda_i(A_i) \neq \emptyset$$

für alle $A_1 \subseteq K_1, A_2 \subseteq K_2, A_3 \subseteq K_3$ gilt.

(III) Insbesondere gilt die Isomorphie

$$\mathbb{L} \cong \underline{\mathfrak{T}}(L, L, L, Y_L)$$

mit $Y_L := \{(\ell_1, \ell_2, \ell_3) \in L^3 \mid (\ell_1, \ell_2, \ell_3) \text{ supremal}\}$.

(Wil95)

APPROBATIO (I) gilt bereits nach Lemma: *ik*-Supremum von Tribegriffen 3.52.

(II) ($\Rightarrow$) Sei $\phi \colon \mathfrak{T}(\mathbb{K}) \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{L}$ ein Isomorphismus. Wir wählen zunächst die folgenden drei Filterzuordnungen ($i \in \{1, 2, 3\}$)

$$\kappa_i \colon \begin{array}{l} K_i \to \mathcal{F}_i(\underline{\mathfrak{T}}(\mathbb{K})) \\ a_i \mapsto \{(A_1, A_2, A_3) \in \mathfrak{T}(\mathbb{K}) \mid a_i \in A_i\}\,. \end{array}$$

(WOHLDEFINIERT) Die Bilder $\kappa_i(a_i)$ sind *i*-Filter in $\underline{\mathfrak{T}}(\mathbb{K})$, weil $a_i \in A_i \subseteq B_i$ stets $a_i \in B_i$ impliziert.

(*i*-DICHT) Weiterhin ist das Bild $\kappa_i(K_i)$ *i*-dicht im Tribegriffsverband, denn für jeden *i*-Primfilter gilt

$$\begin{aligned} (A_1, A_2, A_3)^{\uparrow i} &= \{(B_1, B_2, B_3) \in \mathfrak{T}(\mathbb{K}) \mid A_i \subseteq B_i\} \\ &= \bigcap_{a_i\in A_i} \{(B_1, B_2, B_3) \in \mathfrak{T}(\mathbb{K}) \mid a_i \in B_i\} = \bigcap_{a_i\in A_i} \kappa_i(a_i) = \bigcap \kappa_i(A_i). \end{aligned}$$

(Y) Für einen Quader $A_1 \times A_2 \times A_3 \subseteq K_1 \times K_2 \times K_3$ gilt schließlich

$$\begin{aligned} A_1 \times A_2 \times A_3 \subseteq Y &\Leftrightarrow \exists_{(B_1,B_2,B_3)\in\mathfrak{T}(\mathbb{K})} \underbrace{A_1 \times A_2 \times A_3 \subseteq B_1 \times B_2 \times B_3}_{\Leftrightarrow (B_1, B_2, B_3) \in \bigcap_{i\in\{1,2,3\}} \bigcap \kappa_i(A_i)} \\ &\Leftrightarrow \bigcap_{i\in\{1,2,3\}} \bigcap \kappa_i(A_i) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Weil ϕ ein Isomorphismus ist, muss das Bild $\lambda_i(K_i)$ der Filterabbildung

$$\lambda_i := \phi^{\wp} \circ \kappa_i \colon K_i \to \mathcal{F}_i(\mathbb{L})$$

auch i-dicht sein (und insbesondere nur aus i-Filtern von $\mathbb{L}$ bestehen) und es gilt mit der Bijektivität noch die Äquivalenz

$$\bigcap_{i\in\{1,2,3\}} \bigcap \kappa_i(A_i) \neq \emptyset \Leftrightarrow \bigcap_{i\in\{1,2,3\}} \bigcap \lambda_i(A_i) \neq \emptyset.$$

($\Leftarrow$) Seien $\lambda_i\colon K_i \to \mathcal{F}_i(\mathbb{L})$ für $i \in \{1,2,3\}$ Abbildungen mit den Eigenschaften aus (II). Dann ist ein Isomorphismus gegeben durch

$$\psi\colon \begin{array}{l} \mathbb{L} \to \mathfrak{T}(\mathbb{K}) \\ \ell \mapsto (A_1^\ell, A_2^\ell, A_3^\ell) \text{ mit } A_i^\ell := \{a_i \in K_i \mid \ell \in \lambda_i(a_i)\}. \end{array}$$

(WOHLDEFINIERT) Mit der Antiordinalität folgt für alle $\ell \in L$ zunächst

$$\ell^{\uparrow 1} \cap \ell^{\uparrow 2} \cap \ell^{\uparrow 3} = \{\ell\}.$$

Nach Voraussetzung ist für jedes $i \in \{1,2,3\}$ das Bild von λ_i i-dicht in $\mathbb{L}$, daher muss der Primfilter $\ell^{\uparrow i}$ ein Durchschnitt von λ_i-Bildern sein, genauer gilt $\ell^{\uparrow i} = \bigcap_{a_i \in A_i^\ell} \lambda_i(a_i)$. Demnach gilt

$$\emptyset \neq \{\ell\} = \bigcap_{i\in\{1,2,3\}} \ell^{\uparrow i} = \bigcap_{i\in\{1,2,3\}} \bigcap \lambda_i\left(A_i^\ell\right)$$

und daher ist $\psi(\ell)$ ein Triquasibegriff. Es verbleibt zu zeigen, dass dieser bereits maximal in Y ist. Für $A_3 := (A_1^\ell \times A_2^\ell)^{(3)} \supseteq A_3^\ell$ bildet $(A_1^\ell, A_2^\ell, A_3)$ ebenfalls einen Triquasibegriff und n.V. impliziert das

$$\emptyset \neq \bigcap \lambda_1(A_1^\ell) \cap \bigcap \lambda_2(A_2^\ell) \cap \bigcap \underbrace{\lambda_3(A_3)}_{\supseteq \lambda_3(A_3^\ell)} \ni \ell,$$

und nach Wahl der A_i^ℓ sind damit A_3 und A_3^ℓ gleich. Trial zeigt man das für A_1^ℓ und A_2^ℓ. Mit Lemma: Charakterisierung von triadischen Begriffen 3.49 ist $(A_1^\ell, A_2^\ell, A_3^\ell)$ also tatsächlich ein Tribegriff.

(MONOMORPHISMUS) ψ ist ordnungserhaltend und -reflektierend, denn

$$\ell \lesssim_i m \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \forall_{F\in\mathcal{F}_i(\mathbb{L})} (\ell \in F \Rightarrow m \in F) \overset{(**)}{\Leftrightarrow} A_i^\ell \subseteq A_i^m \Leftrightarrow \psi(\ell) \sqsubseteq_i \psi(m).$$

Dabei gilt die Rückrichtung bei $(*)$ durch Betrachten des Primfilters $\ell^{\uparrow i}$ und bei $(**)$ wegen der i-Dichtheit. Sei nämlich $A_i^\ell \subseteq A_i^m$, dann gilt $\ell \in \lambda_i(a_i) \Rightarrow m \in \lambda_i(a_i)$ für alle $a_i \in K_i$. Wenn F nun ein i-Filter von $\mathbb{L}$ ist, der ℓ enthält, dann gilt

$$\ell \in \ell^{\uparrow i} \begin{cases} = \bigcap \lambda_i\left(A_i^\ell\right) \\ \subseteq F. \end{cases}$$

Ersichtlich liegt ℓ in allen $\lambda(a_i)$ für $a_i \in A_i^\ell$, also enthalten diese i-Filter $\lambda(a_i)$ stets auch m, d.h. es folgt $m \in F$.
Weiter ist ψ injektiv, denn aus $\psi(\ell) = \psi(m)$ folgt mit obigem stets $\ell \sim_i m$ für alle $i \in \{1,2,3\}$ und mit der Triäquivalenz stimmen ℓ und m überein.

(SURJEKTIV) Schließlich ist ψ sogar ein Isomorphismus, denn sei (A_1, A_2, A_3) ein Tribegriff von $\mathbb{K}$, dann gibt es nach Voraussetzung ein Element $\ell \in L$ mit $\ell \in \bigcap_{i\in\{1,2,3\}} \bigcap \lambda_i(A_i)$ und daher folgt für alle $i \in \{1,2,3\}$

$$\psi(\ell)_i = A_i^\ell \supseteq A_i$$

und somit muss $\psi(\ell) = (A_1, A_2, A_3)$ sein.

(III) Wir wählen die drei kanonischen Filterzuordnungen

$$\lambda_i \colon \begin{array}{l} L \to \mathcal{F}_i(\mathbb{L}) \\ \ell \mapsto \ell^{\uparrow i} \end{array}$$

für $i \in \{1,2,3\}$. Die Bilder enthalten jeweils alle i-Primfilter, daher sind sie i-dicht in $\mathbb{L}$. Außerdem gilt noch

$$\begin{aligned} L_1 \times L_2 \times L_3 \subseteq Y_L &\Leftrightarrow \forall_{(\ell_1,\ell_2,\ell_3)\in L_1\times L_2\times L_3} (\ell_1,\ell_2,\ell_3) \text{ supremal} \\ &\overset{2.50}{\Leftrightarrow} (L_1, L_2, L_3) \text{ supremal} \\ &\overset{2.49}{\Leftrightarrow} \exists_{s\in L} \forall_{i\in\{1,2,3\}} \forall_{\ell_i\in L_i} \ell_i \lesssim_i s \\ &\Leftrightarrow \bigcap_{i\in\{1,2,3\}} \bigcap_{\ell_i\in L_i} \ell_i^{\uparrow i} \neq \emptyset \Leftrightarrow \bigcap_{i\in\{1,2,3\}} \bigcap \lambda_i(L_i) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

■ für beliebige Teilmengen $L_1, L_2, L_3 \subseteq L$, und (II) liefert nun die Isomorphie.

Man beachte in (III) das Analogon für vollständige (Bi-)Verbände $(L, \leq)$: Für diese ist ein Paar (x,y) genau dann supremal, wenn $x \leq y$ gilt, also wenn es ein Element $s \in P$ gibt, das 1-größer (d.h. größer) als x und 2-größer (d.h. kleiner) als y ist.

Die folgenden beiden Lemmata aus *The Basic Theorem of Triadic Concept Analysis* von RUDOLF WILLE (Wil95) zeigen, dass die Umfänge, Inhalte bzw. Modi nicht notwendig einen vollständigen Verband bilden (im Gegensatz zu den Umfängen und Inhalten von formalen Kontexten), bzw. dass die Umfänge und Merkmale sogar voneinander völlig unabhängige vollständige Verbände bilden können. (trial auch für Umfänge und Modi bzw. Merkmale und Modi)

54 **Lemma**

Für jede beschränkte geordnete Menge $(P, \leq)$ gilt

$$(P, \leq) \cong \left(\mathfrak{T}(P,P,P,Y_P)\big/{\sim_1}, \leq_1\right)$$

mit $Y_P := \{(p_1, p_2, p_3) \in P^3 \mid \bot \neq p_1 \leq p_2 = p_3\}$.

(Wil95)

55 **Lemma: Unabhängigkeitslemma**

Für zwei vollständige Verbände $(L, \leq)$ und $(M, \leq)$ gelten

$$(L, \leq) \cong \left(\mathfrak{T}(L,M,L\times M,Y_{LM})\big/{\sim_1}, \leq_1\right)$$

und

$$(M, \leq) \cong \left(\mathfrak{T}(L,M,L\times M,Y_{LM})\big/{\sim_2}, \leq_2\right)$$

mit $Y_{LM} := \left\{(l_1, m_1, (l_2, m_2)) \in L \times M \times (L \times M) \;\middle|\; \begin{array}{l} \bot \neq l_1 \leq l_2 \text{ und} \\ \bot \neq m_1 \leq m_2 \end{array}\right\}$.

(Wil95)

3.4 Implikationen

Definitio: formale Implikation 56

Sei $\mathbb{K} = (G, M, I)$ ein formaler Kontext und $B, D \subseteq M$ Merkmalsmengen. Ein Paar (B, D) nennt man FORMALE IMPLIKATION in $\mathbb{K}$ bzw. auf M und schreibt auch

$$B \to D,$$

falls jeder Gegenstand, der alle Merkmale aus B hat, auch alle Merkmale aus D hat, also falls

$$B^I \subseteq D^I.$$

Wir sagen dann auch B IMPLIZIERT D und bezeichnen B als die PRÄMISSE und D als die KONKLUSION der formalen Implikation.

Corollarium 57

(I) Für eine Merkmalsmenge $B \subseteq M$ ergeben sich sogleich die trivialen formalen Implikationen

$$B \to \emptyset \quad \text{und} \quad B \to B.$$

(II) $\to$ ist eine Ordnungsrelation auf M, also reflexiv, transitiv und antisymmetrisch. Gilt also $B \to D$, so gilt auch für jede Teilmenge $F \subseteq D$ die formale Implikation $B \to F$.

Definitio: Respektieren 58

Wir sagen, dass eine Merkmalsmenge $F \subseteq M$ die formale Implikation $B \to D$ RESPEKTIERT, falls

$$B \subseteq F \;\Rightarrow\; D \subseteq F$$

gilt. Wir setzen

$$\mathcal{H}_{B \to D} := \{F \subseteq M \mid F \text{ respektiert } B \to D\}.$$

Sei weiter $\mathcal{L} \subseteq 2^M \times 2^M$ eine Liste formaler Implikationen auf M. Wir sagen nun, dass eine Merkmalsmenge $F \subseteq M$ die Liste $\mathcal{L}$ RESPEKTIERT, falls F jede Implikation in $\mathcal{L}$ respektiert. Wir definieren

$$\mathcal{H}_{\mathcal{L}} := \{F \subseteq M \mid F \text{ respektiert } \mathcal{L}\}$$

und nennen sie die Menge der unter $\mathcal{L}$ möglichen Merkmalskombinationen.

Lemma 59

(I) Eine Merkmalsmenge $F \subseteq M$ respektiert eine Implikation $B \to D$ genau dann, wenn $B \not\subseteq F \;\vee\; D \subseteq F$ gilt.

(II) Es ist

$$\mathcal{H}_{\mathcal{L}} = \bigcap_{B \to D \in \mathcal{L}} \mathcal{H}_{B \to D}.$$

Theorema 60

Sei $\mathcal{L} \subseteq 2^M \times 2^M$ eine Liste formaler Implikationen auf M, dann gilt:

(I) $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}$ ist ein Hüllensystem auf M.

(II) Hat jede formale Implikation aus $\mathcal{L}$ eine ein-elementige Prämisse, so ist $\mathcal{H}_\mathcal{L}$ auch ein Kernsystem auf M.

APPROBATIO (I) Es ist $M \in \mathcal{H}_\mathcal{L}$, denn trivialerweise gilt für alle $B \to D$ stets $D \subseteq M$. Sei nun $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}_\mathcal{L}$, d.h.

$$\underset{F\in\mathcal{M}}{\forall}\ \underset{B\to D\in\mathcal{L}}{\forall}(B \subseteq F \Rightarrow D \subseteq F).$$

Es folgt

$$\underset{B\to D\in\mathcal{L}}{\forall}(B \subseteq \bigcap \mathcal{M} \Rightarrow \underset{F\in\mathcal{M}}{\forall} D \subseteq F$$

und damit

$$\underset{B\to D\in\mathcal{L}}{\forall}(B \subseteq \bigcap \mathcal{M} \Rightarrow D \subseteq \bigcap \mathcal{M},$$

also ist $\bigcap \mathcal{M} \in \mathcal{H}_\mathcal{L}$.

(II) Seien nun alle Implikationen in $\mathcal{L}$ von der Form $\{b\} \to D$. Dann ist $\emptyset \in \mathcal{H}_\mathcal{L}$, denn trivialerweise gilt für alle $\{b\} \to D$ stets $\{b\} \not\subseteq \emptyset$. Sei nun $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}_\mathcal{L}$, d.h.

$$\underset{F\in\mathcal{M}}{\forall}\ \underset{\{b\}\to D\in\mathcal{L}}{\forall}(b \in F \Rightarrow D \subseteq F).$$

Es folgt

$$\underset{\{b\}\to D\in\mathcal{L}}{\forall}(b \in \bigcup \mathcal{M} \Rightarrow \underset{F\in\mathcal{M}}{\exists} D \subseteq F$$

und damit

$$\underset{\{b\}\to D\in\mathcal{L}}{\forall}(b \in \bigcup \mathcal{M} \Rightarrow D \subseteq \bigcup \mathcal{M},$$

■ also ist $\bigcup \mathcal{M} \in \mathcal{H}_\mathcal{L}$.

61 **Definitio: Pseudoinhalt**

Sei $\mathbb{K} = (G, M, I)$ ein formaler Kontext. Eine Menge $B \subseteq M$ von Merkmalen heißt PSEUDOINHALT, wenn $B \neq B^{II}$ und für jeden Pseudoinhalt $D \subsetneq B$ gilt $D^{II} \subseteq B$.

62 **Theorema: Stammbasis**

Die Menge

$$\{B \to B^{II} \mid B \text{ ist Pseudoinhalt}\}$$

ist ein minimales Erzeugendensystem der formalen Implikationen und heißt STAMMBASIS.

63 **Theorema**

Die Menge aller Inhalte und Pseudoinhalte $\{B \subseteq M \mid X \subsetneq B \Rightarrow X^{II} \subseteq B\}$ ist ein Hüllensystem.

3.5 Appositionen

Definitio: Apposition 64

Let (G,M,I) and (G,N,J) be two contexts with disjoint attribute sets, *i.e.* $M \cap N = \emptyset$. Then their APPOSITION is defined as

$$(G,M,I)|(G,N,J) := (G, M \dot\cup N, I \dot\cup J).$$

Lemma: Rows and Columns in Apposition Context 65

Let (G,M,I) and (G,N,J) be two contexts with disjoint attribute sets. Then we have the following equations for objects $g \in G$ and attributes $m \in M$ and $n \in N$:

(I) $g(I \dot\cup J)m \Leftrightarrow gIm$ and $g(I \dot\cup J)n \Leftrightarrow gJn$

(II) $g^{I\dot\cup J} = g^I \dot\cup g^J$

(III) $m^{I\dot\cup J} = m^I$ and $n^{I\dot\cup J} = n^J$

APPROBATIO (I) This is obvious, since by construction of an apposition we have $(I \dot\cup J) \cap (G \times M) = I$ and dually $(I \dot\cup J) \cap (G \times N) = J$.

(II) For an object $g \in G$ we have

$$\begin{aligned} g^{I\dot\cup J} &= \{m \in M \dot\cup N \mid g(I \dot\cup J)m\} = \{m \in M \dot\cup N \mid gIm \dot\vee gJm\} \\ &= \{m \in M \mid gIm\} \dot\cup \{m \in N \mid gJm\} = g^I \dot\cup g^J \end{aligned}$$

(III) This follows from (i). ∎

Lemma: Common Rows and Common Columns in Apposition Context 66

Let (G,M,I) and (G,N,J) be two contexts with disjoint attribute sets. Then we have the following equations for object sets $A \subseteq G$ and attribute sets $B \subseteq M \dot\cup N$, $D \subseteq M$ and $F \subseteq N$:

(I) $A^{I\dot\cup J} \cap M = A^I$
and $A^{I\dot\cup J} \cap N = A^J$
and $A^{I\dot\cup J} = A^I \dot\cup A^J$

(II) $D^{I\dot\cup J} = D^I$
and $F^{I\dot\cup J} = F^J$
and $B^{I\dot\cup J} = (B \cap M)^I \cap (B \cap N)^J$

(III) $A^{I(I\dot\cup J)} = (A^{I\dot\cup J} \cap M)^I = A^{II}$
and $A^{J(I\dot\cup J)} = (A^{I\dot\cup J} \cap N)^J = A^{JJ}$
and $A^{(I\dot\cup J)(I\dot\cup J)} = A^{II} \cap A^{JJ}$

(IV) $D^{I(I\dot\cup J)} = D^{II} \dot\cup D^{IJ}$
and $F^{J(I\dot\cup J)} = F^{JI} \dot\cup F^{JJ}$
and $B^{(I\dot\cup J)(I\dot\cup J)} = ((B \cap M)^I \cap (B \cap N)^J)^I \dot\cup ((B \cap M)^I \cap (B \cap N)^J)^J$

APPROBATIO (I) Let $A \subseteq G$ be an object set. Then it holds that

$$A^{I\dot\cup J} \cap M = \bigcap_{g \in A} g^{I\dot\cup J} \cap M = \bigcap_{g \in A} (g^I \dot\cup g^J) \cap M = \bigcap_{g \in A} g^I = A^I.$$

Dually we have $A^{I\dot\cup J} \cap N = A^J$. Furthermore we conclude

$$A^{I\dot\cup J} = (A^{I\dot\cup J} \cap M) \dot\cup (A^{I\dot\cup J} \cap N) = A^I \dot\cup A^J.$$

Figure 3.1 shows what happens in the context when deriving an object set A.

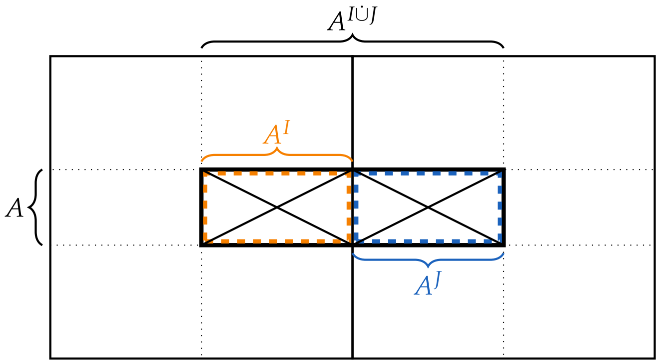


Abbildung 3.1: schema for closure of object sets

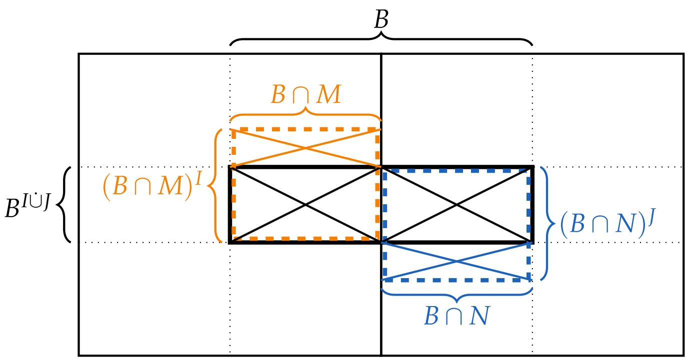


Abbildung 3.2: schema for closure of attribute sets

(II) Let now $D \subseteq M$ be an attribute set. Then

$$D^{I\dot{\cup}J} = \bigcap_{m\in D} m^{I\dot{\cup}J} = \bigcap_{m\in D} m^I = D^I$$

and dually $F^{I\dot{\cup}J} = F^I$. Furthermore for an attribute set $B \subseteq M \dot{\cup} N$ we have

$$\begin{aligned} B^{I\dot{\cup}J} &= ((B\cap M)\dot{\cup}(B\cap N))^{I\dot{\cup}J} \\ &= (B\cap M)^{I\dot{\cup}J} \cap (B\cap N)^{I\dot{\cup}J} = (B\cap M)^I \cap (B\cap N)^J. \end{aligned}$$

(III) For a set of objects $A \subseteq G$ it holds

$$A^{I(I\dot{\cup}J)} = (A^I\cap M)^I \cap (A^I \cap N)^J = A^{II}\cap \emptyset^J = A^{II}\cap G = A^{II}$$

and dually $A^{J(I\dot{\cup}J)} = A^{JJ}$. Also we have

$$(A^{(I\dot{\cup}J)}\cap M)^I = ((A^I \dot{\cup} A^J)\cap M)^I = A^{II}.$$

and $(A^{(I\dot{\cup}J)}\cap N)^J = A^{JJ}$ dually. It then follows that

$$A^{(I\dot{\cup}J)(I\dot{\cup}J)} = (A^I\dot{\cup}A^J)^{(I\dot{\cup}J)} = A^{I(I\dot{\cup}J)}\cap A^{J(I\dot{\cup}J)} = A^{II}\cap A^{JJ}.$$

(IV) We have $D^{I(I\dot\cup J)} = D^{II} \dot\cup D^{IJ}$ by (I). Dually it follows that $F^{J(I\dot\cup J)} = F^{JI} \dot\cup F^{JJ}$. As a conclusion we get

$$B^{(I\dot\cup J)(I\dot\cup J)} = ((B\cap M)^I \cap (B\cap N)^J)^{(I\dot\cup J)}$$
$$= ((B\cap M)^I \cap (B\cap N)^J)^I \dot\cup ((B\cap M)^I \cap (B\cap N)^J)^J. \qquad \blacksquare$$

We recall the definition of a dense subcontext in this special case: (G, M, I) is dense in $(G, M, I)|(G, N, J)$ iff μM is $\bigwedge$-dense in the concept lattice of $(G, M, I)|(G, N, J)$. Trivially γG is $\bigvee$-dense. By Lemma 3.77 (G, M, I) is dense iff $B^{(I\dot\cup J)} = (B\cap M)^{(I\dot\cup J)}(= (B\cap M)^I)$ holds for all attribute sets $B \subseteq M \dot\cup N$. Again, $A^{(I\dot\cup J)} = (A\cap G)^{(I\dot\cup J)}$ trivially holds for $A \subseteq G$. The context (G, N, J) is called REDUNDANT in $(G, M, I)|(G, N, J)$ iff (G, M, I) is dense in $(G, M, I)|(G, N, J)$.

Theorema: Embedding into Apposition Lattice 67

Let (G, M, I) and (G, N, J) be two contexts with disjoint attribute sets. Then every extent of (G, M, I) is also an extent of $(G, M, I)|(G, N, J)$ and

$$\phi\colon \begin{array}{l} \mathfrak{B}(G, M, I) \hookrightarrow \mathfrak{B}(G, M, I)|(G, N, J) \\ (A, B) \mapsto (A, A^{(I\dot\cup J)}) = (A, B \dot\cup A^J) \end{array}$$

is a $\bigwedge$-preserving order-embedding. Furthermore, if (G, M, I) is dense in $(G, M, I)|(G, N, J)$, then vice versa every extent of $(G, M, I)|(G, N, J)$ is an extent of (G, M, I) as well and ϕ is an isomorphism. The inverse mapping is then given by

$$\phi^{-1}\colon (A, B) \mapsto (A, B\cap M).$$

APPROBATIO Each extent of (G, M, I) has the form B^I for some attribute set $B \subseteq M$. By Lemma: Common Rows and Common Columns in Apposition Context 3.66 $B^{(I\dot\cup J)} = B^I$ then always hold and so B^I must also be an extent of $(G, M, I)|(G, N, J)$. Thus ϕ is well-defined in the sense that each ϕ-image of a (G, M, I)-concept is a $(G, M, I)|(G, N, J)$-concept. Again by the preceding Lemma: Common Rows and Common Columns in Apposition Context 3.66, $A^{(I\dot\cup J)} = A^I \dot\cup A^J = B \dot\cup A^J$ hold for the intents. As ϕ does not change the extent, it clearly must be an order-embedding. By **??** ??.**??** every infimum can be found by just intersecting extents, thereby ϕ is $\bigwedge$-preserving.
Finally let (G, M, I) be dense in $(G, M, I)|(G, N, J)$, *i.e.* $B^{(I\dot\cup J)} = (B\cap M)^I$ holds for every $B \subseteq M \dot\cup N$ as above. Clearly each extent $B^{(I\dot\cup J)}$ of $(G, M, I)|(G, N, J)$ must then be an extent of (G, M, I) as well. Furthermore ϕ is a surjection: Let $(A, B) \in \mathfrak{B}(G, M, I)|(G, N, J)$, then $(A, B\cap M)$ is a concept of (G, M, I) as $A^I = A^{(I\dot\cup J)} \cap M = B\cap M$ and $(B\cap M)^I = B^{(I\dot\cup J)} = A$, and $\phi(A, B\cap M) = (A, A^{(I\dot\cup J)}) = (A, B)$ holds. In summary ϕ is a surjective order-embedding, *i.e.* an order-isomorphism and a lattice-isomorphism. Moreover $(A, B) \mapsto (A, B\cap M)$ is indeed the inverse of ϕ as

$$\phi^{-1}\phi(A, B) = \phi^{-1}(A, B \dot\cup A^J) = (A, (B \dot\cup A^J) \cap M) = (A, B)$$

and

$$\phi\phi^{-1}(A,B) = \phi(A, B\cap M) = (A, \underbrace{(B\cap M)\mathbin{\dot\cup} A^J}_{\substack{=(A^{(I\dot\cup J)}\cap M)\dot\cup A^J\\ =A^I\dot\cup A^J\\ =A^{(I\dot\cup J)}\\ =B}}) = (A,B)$$

hold by Lemma: Common Rows and Common Columns in Apposition Context 3.66. ■

Theorema: Nested Concept Lattice 68

The concept lattice of a context apposition can be embedded in the direct product of the single concept lattices. Formal: For two contexts (G, M, I) and (G, N, J) the mapping

$$\psi\colon \begin{array}{l} \underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)|(G,N,J) \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \underline{\mathfrak{B}}(G,M,I) \boxtimes \underline{\mathfrak{B}}(G,N,J) \\ \qquad (A,B) \mapsto ((A^{II},A^{I}),(A^{JJ},A^{J})) = (((B\cap M)^{I}, B\cap M),((B\cap N)^{J}, B\cap N)) \end{array}$$

with $\mathfrak{B}(G,M,I) \boxtimes \mathfrak{B}(G,N,J) \subseteq \mathfrak{B}(G,M,I) \times \mathfrak{B}(G,N,J)$ and $((A,B),(C,D)) \in \mathfrak{B}(G,M,I) \boxtimes \mathfrak{B}(G,N,J) :\Leftrightarrow (A\cap C, B \dot\cup D) \in \mathfrak{B}(G,M,I)|(G,N,J)$ is an isomorphism. The inverse mapping of ψ is given by

$$\psi^{-1}\colon ((A,B),(C,D)) \mapsto (A\cap C, B\dot\cup D).$$

The set $\mathfrak{B}(G,M,I) \boxtimes \mathfrak{B}(G,N,J)$ together with the inherited coordinate-wise order is a complete lattice and is called NESTED CONCEPT LATTICE of (G,M,I) and (G,N,J).

APPROBATIO The order of $\mathfrak{B}(G,M,I) \boxtimes \mathfrak{B}(G,N,J)$ is the inherited coordinate-wise order from the cartesian product $\mathfrak{B}(G,M,I) \times \mathfrak{B}(G,N,J)$. The supremum equals the coordinate-wise supremum in the cartesian product, as can be seen on the intents: $(\bigcap_{t\in T} B_t) \dot\cup (\bigcap_{t\in T} D_t) = \bigcap_{t\in T}(B_t \dot\cup D_t)$ always hold for attribute sets $B_t \subseteq M$ and $D_t \subseteq N$ for all $t \in T$. So the supremum in $\mathfrak{B}(G,M,I) \boxtimes \mathfrak{B}(G,N,J)$ exist for all subsets of $\mathfrak{B}(G,M,I) \boxtimes \mathfrak{B}(G,N,J)$ and it is indeed a complete lattice. Now let (A,B) be a concept of the apposition $(G,M,I)|(G,N,J)$, then $A^{II} \cap A^{JJ} = A^{(I\dot\cup J)(I\dot\cup J)} = A$ and $A^{I} \dot\cup A^{J} = A^{(I\dot\cup J)} = B$ hold by Lemma: Common Rows and Common Columns in Apposition Context 3.66 and thereby $\psi(A,B)$ is an element of the nested product $\mathfrak{B}(G,M,I) \boxtimes \mathfrak{B}(G,N,J)$. So ψ is well-defined. For each concept $(A,B) \in \mathfrak{B}(G,M,I)|(G,N,J)$ it follows by the same arguments as above

$$\psi^{-1}\psi(A,B) = \psi^{-1}((A^{II},A^{I}),(A^{JJ},A^{J})) = (A^{II}\cap A^{JJ}, A^{I}\dot\cup A^{J}) = (A,B).$$

Now let $((A,B),(C,D)) \in \mathfrak{B}(G,M,I) \boxtimes \mathfrak{B}(G,N,J)$, then it holds that

$$\psi\psi^{-1}((A,B),(C,D)) = \psi(A\cap C, B\dot\cup D) = (((A\cap C)^{II},(A\cap C)^{I}),((A\cap C)^{JJ},(A\cap C)^{J}))$$

By Lemma: Common Rows and Common Columns in Apposition Context 3.66 $(A\cap C)^{I} = (A\cap C)^{(I\dot\cup J)} \cap M = (B\dot\cup D)\cap M = B$ and thus $(A\cap C)^{II} = B^{I} = A$ as well. Analogously for (C,D) in (G,N,J). In summary ψ is a bijection.
ψ is order-preserving as $A \subseteq C$ always implies $A^{I} \supseteq C^{I}$ and $A^{J} \supseteq C^{J}$ and thus $\psi(A,B) \leq \psi(C,D)$ hold for all concepts $(A,B) \leq (C,D)$. Overthis ψ is order-reversing since $A^{I} \supseteq C^{I}$ and $A^{J} \supseteq C^{J}$ implies

$$B = A^{(I\dot\cup J)} = A^{I}\dot\cup A^{J} \supseteq C^{I}\dot\cup C^{J} = C^{(I\dot\cup J)} = D.$$

So ψ is an order-isomorphism and a lattice-isomorphism.
When using ψ just as an embedding into the cartesian product $\mathfrak{B}(G,M,I) \times \mathfrak{B}(G,N,J)$, then ψ is only an order-embedding and overthis $\bigvee$-preserving as can be seen on the intents. ■

69 **Theorema**

Die beiden Abbildungen

$$\varepsilon\colon \begin{array}{l} \underline{\mathfrak{B}}\mathbb{K}_1|\mathbb{K}_2 \to \underline{\mathfrak{B}}\mathbb{K}_1 \times \underline{\mathfrak{B}}\mathbb{K}_2 \\ (A,B) \mapsto ((A^{II},A^{I}),(A^{JJ},A^{J})) \end{array}$$

und

$$\iota\colon \begin{array}{l} \underline{\mathfrak{B}}\mathbb{K}_1|\mathbb{K}_2 \to \underline{\mathfrak{B}}\mathbb{K}_1 \times \underline{\mathfrak{B}}\mathbb{K}_2 \\ (A,B) \mapsto ((B^{I},B^{II}),(B^{J},B^{JJ})) \end{array}$$

sind Ordnungseinbettungen, also ordnungserhaltend und injektiv. Zusätzlich ist ε supremumserhaltend und ι infimumserhaltend.

APPROBATIO (INJEKTIV) Sei $\varepsilon(A,B) = \varepsilon(C,D)$, d.h.

$$((A^{II},A^{I}),(A^{JJ},A^{J})) = ((C^{II},C^{I}),(C^{JJ},C^{J})).$$

Dann gilt $A^I = C^I$ sowie $A^J = C^J$, und mit Lemma ?? ??.??(1) folgt

$$A^{I\uplus J} = C^{I\uplus J},$$

d.h. $B = D$, also $(A,B) = (C,D)$.

(ORDNUNGSERHALTEND) Sei $(A,B) \leq (C,D)$, d.h. $A \subseteq C$. Es folgt sofort $A^I \supseteq C^I$ sowie $A^J \supseteq C^J$, und damit

$$(A^{II},A^{I}) \leq (C^{II},C^{I}) \text{ und } (A^{JJ},A^{J}) \leq (C^{JJ},C^{J}).$$

Demnach ist

$$((A^{II},A^{I}),(A^{JJ},A^{J})) \leq ((C^{II},C^{I}),(C^{JJ},C^{J})),$$

also $\varepsilon(A,B) \leq \varepsilon(C,D)$.

(SUPREMUMSERHALTEND BZW. INFIMUMSERHALTEND) Sei $(A,B) \vee (C,D) = (A,B)$. Es ist $(A,B) \vee (C,D) = ((B \cap D)^{(I\uplus J)}, B \cap D)$, und damit

$$A^{(I\uplus J)} = B = B \cap D = A^{(I\uplus J)} \cap C^{(I\uplus J)} = (A \cup C)^{(I\uplus J)}.$$

Mit Lemma ?? ??.??(4) folgt für $k \in \{1,2\}$

$$A^{I_k I_k} = (A \cup C)^{I_k I_k},$$

und weiter

$$A^{I_k} = (A \cup C)^{I_k}.$$

Nun haben wir

$$\begin{aligned} \varepsilon(A,B) \vee \varepsilon(C,D) &= ((A^{II},A^{I}),(A^{JJ},A^{J})) \vee ((C^{II},C^{I}),(C^{JJ},C^{J})) \\ &= ((A^{II},A^{I}) \vee (C^{II},C^{I}),(A^{JJ},A^{J}) \vee (C^{JJ},C^{J})) \\ &= (((A^{I} \cap C^{I})^{I},A^{I} \cap C^{I}),((A^{J} \cap C^{J})^{J},A^{J} \cap C^{J})) \\ &= (((A \cup C)^{II},(A \cup C)^{I}),((A \cup C)^{JJ},(A \cup C)^{J})) \\ &= ((A^{II},A^{I}),(A^{JJ},A^{J}) \\ &= \varepsilon(A,B) \end{aligned}$$

■ Für ι dual.

Corollarium 70

Der Begriffsverband der Merkmals-Apposition $\underline{\mathfrak{B}}\mathbb{K}_1|\mathbb{K}_2$ ist isomorph zu einem Supremumsunterhalbverband und zu einem Infimumsunterhalbverband des direkten Produkts $\underline{\mathfrak{B}}\mathbb{K}_1 \times \underline{\mathfrak{B}}\mathbb{K}_2$ der einzelnen Begriffsverbände.

3.6 Subdirekte Produkte

3.6.1 Dichte Teilkontexte

71 **Definitio: isomorph**

Zwei Kontexte (G, M, I) und (H, N, J) heißen ISOMORPH vermöge des KONTEXTISOMORPHISMUS (α, β), wenn $\alpha\colon G \to H$ und $\beta\colon M \to N$ bijektive Abbildungen mit $gIm \Leftrightarrow \alpha g J \beta m$ sind. Wir schreiben dafür auch $(G, M, I) \cong (H, N, J)$.

72 **Definitio: Teilkontext**

Für einen Kontext (G, M, I), eine Gegenstandsmenge $H \subseteq G$ und eine Merkmalsmenge $N \subseteq M$ heißt $(H, N, I \cap H \times N)$ TEILKONTEXT von (G, M, I). Auf der Menge der Teilkontexte lässt sich eine Ordnung definieren vermöge

$$(H_1, N_1, I \cap H_1 \times N_1) \leq (H_2, N_2, I \cap H_2 \times N_2) :\Leftrightarrow H_1 \subseteq H_2 \wedge N_1 \subseteq N_2.$$

73 **Lemma**

Für eine Teilmenge $N \subseteq M$ gelten:

(I) Jeder Umfang von $(G, N, I \cap G \times N)$ ist auch ein Umfang von (G, M, I).

(II) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \underline{\mathfrak{B}}(G, N, I \cap G \times N) &\to \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I) \\ (A, B) &\mapsto (A, A^I) \end{aligned}$$

ist eine $\bigwedge$-treue Ordnungseinbettung.

Dual gilt das auch für Teilmengen $H \subseteq G$.

APPROBATIO (I) Zunächst ist jeder Merkmalsumfang von $(G, N, I \cap G \times N)$ auch ein Merkmalsumfang von (G, M, I). Weil jeder Umfang ein Durchschnitt von Merkmalsumfängen ist, muss jeder Umfang von $(G, N, I \cap G \times N)$ auch ein Umfang von (G, M, I) sein.

■ (II) Das folgt leicht, weil jeder Umfang unter der Abbildung unverändert bleibt.

74 **Corollarium**

Die Abbildungen $(A, B) \mapsto (A^{II}, A^I)$ und $(A, B) \mapsto (B^I, B^{II})$ sind Ordnungseinbettungen des Begriffsverbands $\underline{\mathfrak{B}}(H, N, I \cap H \times N)$ eines Teilkontextes in $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$.

75 **Definitio: dicht**

Ein Teilkontext $(H, N, I \cap H \times N)$ heißt DICHT in einem Kontext (G, M, I), wenn γH $\bigvee$-dicht und μN $\bigwedge$-dicht in $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ ist.

76 **Lemma: Charakterisierung dichter Teilkontexte**

Ein Teilkontext (H, N) von (G, M, I) ist genau dann dicht in (G, M, I), wenn

$$(A \cap H)^{II} = A \text{ und } (B \cap N)^{II} = B.$$

für jeden Begriff (A, B) von (G, M, I) gilt.

APPROBATIO $(\Rightarrow)$ Sei (A,B) ein Begriff von (G,M,I). Wegen der Dichtheit gibt es eine Teilmenge $C \subseteq H$ mit $(A,B) = \bigvee_{g\in C} \gamma(g) = (C^{II}, C^{I})$, also gilt $A^I = C^I$ und somit $C \subseteq A^{II} = A$. Es folgt $(A\cap H)^I \subseteq C^I = A^I$ und außerdem gilt natürlich $(A\cap H)^I \supseteq A^I$. Dual folgt $(B\cap N)^I = B^I$ wegen $B^I = D^I$ für eine Teilmenge $D \subseteq N$.

$(\Leftarrow)$ Jeder Begriff (A,B) kann nach Voraussetzung stets als Supremum der Gegenstandsbegriffe von $A\cap H$ dargestellt werden, d.h. $\gamma(H)$ liegt $\bigvee$-dicht im Begriffsverband $\mathfrak{B}(G,M,I)$. Dual bilden die Merkmalsbegriffe $\mu(N)$ eine infimumdichte Menge in $\mathfrak{B}(G,M,I)$. Nach Definition ist also (H,N) ein dichter Teilkontext. ■

Lemma 77

Wenn $(H,N,I\cap H\times N)$ dicht in (G,M,I) ist, dann gilt $\mathfrak{B}(H,N,I\cap H\times N) \cong \mathfrak{B}(G,M,I)$ vermöge den Ordnungsisomorphismen $(A,B) \mapsto (A^{II}, A^{I})$ und $(A,B) \mapsto (B^I, B^{II})$.

APPROBATIO Nach Theorema 3.17 ist $\mathfrak{B}(H,N,I\cap H\times N)$ genau dann isomorph zu $\mathfrak{B}(G,M,I)$, wenn es Abbildungen $\alpha\colon H \to \mathfrak{B}(G,M,I)$ und $\beta\colon N \to \mathfrak{B}(G,M,I)$ gibt, sodass αH $\bigvee$-dicht und βN $\bigwedge$-dicht in $\mathfrak{B}(G,M,I)$ sind und $hIn \Rightarrow \alpha h \leq \beta n$ für alle $h\in H$ und $n \in N$ gilt. Wenn $(H,N,I\cap H\times N)$ dicht ist, dann ist das mit $\alpha := \gamma$ und $\beta := \mu$ erfüllt. Die Abbildung $(A,B) \mapsto (A^{II}, A^{I})$ ist nach obigem Korollar eine Ordnungseinbettung. Sie ist außerdem surjektiv, denn sei (A,B) ein Begriff von (G,M,I), dann ist

$$\left(\left(A^I \cap N\right)^I \cap H, A^I \cap N\right)$$

ein Begriff von $(H,N,I\cap H\times N)$ und es gilt

$$\left(\left(A^I \cap N\right)^I \cap H\right)^I = \left(A^I\cap N\right)^{II} = A^{III} = A^I = B.$$ ■

3.6.2 Verträgliche Teilkontexte

Definitio: Verträglicher Teilkontext 78

Ein Teilkontext $(H,N,I\cap H\times N)$ heißt VERTRÄGLICH, wenn für jeden Begriff (A,B) von (G,M,I) die Restriktion $(A\cap H, B\cap N)$ ein Begriff von $(H,N,I\cap H\times N)$ ist.

Theorema: Verträgliche Teilkontexte und Vollständige Epimorphismen 79

Ein Teilkontext $(H,N,I\cap H\times N)$ ist genau dann verträglich, wenn die Abbildung

$$\pi_{H,N}\colon \begin{array}{c} \mathfrak{B}(G,M,I) \to \mathfrak{B}(H,N,I\cap H\times N) \\ (A,B) \mapsto (A\cap H, B\cap N) \end{array}$$

ein vollständiger Epimorphismus ist.

APPROBATIO Nach Definition Definitio: Verträglicher Teilkontext 3.78 ist $(H,N,I\cap H\times N)$ genau dann verträglich, wenn $\pi_{H,N}$ eine Abbildung ist. Nun zeigen wir noch, dass dann $\pi_{H,N}$ ein surjektiver vollständiger Homomorphismus ist. $\pi_{H,N}$ ist $\bigwedge$-erhaltend, denn die Abbildung $A \mapsto A \cap H$ ist $\bigcap$-erhaltend, jeder Begriff ist durch seinen Umfang eindeutig bestimmt und das Infimum von Begriffen erhält man durch Schneiden von Umfängen. Formal: Für eine Familie $\{(A_t, B_t)\}_{t \in T}$ von Begriffen von (G, M, I) gilt

$$\begin{aligned}
\pi_{H,N} \bigwedge_{t\in T} (A_t, B_t) &= \pi_{H,N} \left(\bigcap_{t\in T} A_t, \left(\bigcap_{t\in T} A_t \right)^I \right) \\
&= \left(\bigcap_{t\in T} A_t \cap H, \left(\bigcap_{t\in T} A_t \right)^I \cap N \right) \\
&= \left(\bigcap_{t\in T} (A_t \cap H), \left(\bigcap_{t\in T} (A_t \cap H) \right)^I \right) \\
&= \bigwedge_{t\in T} (A_t \cap H, B_t \cap N) \\
&= \bigwedge_{t\in T} \pi_{H,N}(A_t, B_t)
\end{aligned}$$

Für das Supremum dual. Verbleibt noch zu zeigen, dass $\pi_{H,N}$ surjektiv ist. Sei also $(A, B) = (A, A^{I \cap H \times N}) = (A, A^I \cap N)$ ein Begriff von $(H, N, I \cap H \times N)$, dann ist (A^{II}, A^I) ein Begriff von (G, M, I) und es gilt

$$\pi_{H,N}(A^{II}, A^I) = (A^{II} \cap H, A^I \cap N) = (A, A^I \cap N) = (A, B).$$

$\blacksquare$

80 **Lemma: Charakterisierung verträglicher Teilkontexte**

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(I) $(H, N, I \cap H \times N)$ ist ein verträglicher Teilkontext von (G, M, I).

(II) Es gelten

(A) Für jeden Gegenstand $h \in H$ und jedes Merkmal $m \in M$ mit $h \not\mathrel{I} m$ existiert ein $n \in N$ mit $h \not\mathrel{I} n$ und $m^I \subseteq n^I$.

(B) Für jedes Merkmal $n \in N$ und jeden Gegenstand $g \in G$ mit $g \not\mathrel{I} n$ existiert ein $h \in H$ mit $h \not\mathrel{I} n$ und $g^I \subseteq h^I$.

(III) Es gelten

(A) $(A^I \cap N)^I \cap H \subseteq A^{II}$ für alle $A \subseteq G$.

(B) $(B^I \cap H)^I \cap N \subseteq B^{II}$ für alle $B \subseteq M$.

APPROBATIO (I)⇒(II) Sei $(H, N, I \cap H \times N)$ verträglich. Für ein Merkmal $m \in M$ ist $\pi_{H,N}\mu m = (m^I \cap H, m^{II} \cap N)$ ein Begriff des Teilkontextes. Für einen Gegenstand $h \in H$ mit $h \not\mathrel{I} m$ gilt $h \notin m^I \cap H$, also gibt es ein Merkmal $n \in m^{II} \cap N$ mit $h \not\mathrel{I} n$. Außerdem gilt wegen $n \in m^{II}$ auch $m^I \subseteq n^I$. Die zweite Eigenschaft folgt dual.

(II)⇒(III) Sei $A \subseteq G$. Für einen Gegenstand $h \in H$ mit $h \notin A^{II}$ gibt es ein Merkmal $m \in A^I$ mit $h \not\mathrel{I} m$, also existiert nach Voraussetzung ein $n \in N$ mit $h \not\mathrel{I} n$ und $m^I \subseteq n^I$. Weiter ist $A \subseteq m^I \subseteq n^I$, also $n \in A^I \cap N$, und damit $h \notin (A^I \cap N)^I$.

Also folgt $(A^I \cap N)^I \cap H \subseteq A^{II}$. Die andere Bedingung folgt dual.

(I)⇐(III) Sei (A, B) ein Begriff von (G, M, I). Dann gilt $(A \cap H)^I \cap N \supseteq A^I \cap N = B \cap N$ und $(A \cap H)^I \cap N = (B^I \cap H)^I \cap N \subseteq B^{II} \cap N = B \cap N$, also $(A \cap H)^I \cap N = B \cap N$ und dual folgt $A \cap H = (B \cap N)^I \cap H$. Also ist $(A \cap H, B \cap N)$ ein Begriff von $(H, N, I \cap H \times N)$. ∎

Lemma: Dichte und Verträgliche Teilkontexte 81

Ein Teilkontext (H, N) von (G, M, I) ist genau dann dicht in (G, M, I), wenn (H, N) verträglich und $\pi_{H,N} \colon (A, B) \mapsto (A \cap H, B \cap N)$ injektiv ist.[a]

[a] $\pi_{H,N}$ ist dann ein vollständiger Verbandsisomorphismus.

Approbatio (⇒) Sei (A, B) ein Begriff von (G, M, I), dann ist $(A \cap H, B \cap N)$ ein Begriff vom Teilkontext (H, N). Weil $\pi_{H,N}$ surjektiv ist, gilt auch

$$\pi_{H,N}((A \cap H)^{II}, (A \cap H)^I) = (A \cap H, B \cap N)$$

weil $\pi_{H,N}$ injektiv ist, muss $(A \cap H)^{II} = A$ gelten. Dual folgt $(B \cap N)^{II} = B$, denn $(A \cap H, B \cap N)$ ist auch gleich der Projektion $\pi_{H,N}((B \cap N)^I, (B \cap N)^{II})$.

(⇐) Sei $A \subseteq G$, dann ist (A^{II}, A^I) ein Begriff von (G, M, I) und es gilt nach Voraussetzung $(A^{II} \cap H)^{II} = A^{II}$ und $(A^I \cap N)^{II} = A^I$. Folglich ist dann

$$A^{II} = (A^{II} \cap H)^{II} = ((A^I \cap N)^I \cap H)^{II} \supseteq (A^I \cap N)^I \cap H.$$

Dual folgt $(B^I \cap H)^I \cap N \subseteq B^{II}$ für alle Teilmengen $B \subseteq M$. Lemma: Charakterisierung verträglicher Teilkontexte 3.80 liefert nun die Verträglichkeit des Teilkontextes (H, N). Die Projektion $\pi_{H,N}$ ist außerdem injektiv, denn für $\pi_{H,N}(A, B) = \pi_{H,N}(C, D)$ folgt $A \cap H = C \cap H$ und damit $A = (A \cap H)^{II} = (C \cap H)^{II} = C$. Die Umfänge stimmen überein, also sind die beiden Begriffe gleich. ∎

Definitio: Pfeilabgeschlossener Teilkontext 82

Ein Teilkontext (H, N) eines Kontextes (G, M, I) heißt PFEILABGESCHLOSSEN, wenn gilt

$$\forall_{g \in G} \forall_{n \in N} \; g \swarrow n \Rightarrow g \in H \text{ und } \forall_{h \in H} \forall_{m \in M} \; h \nearrow m \Rightarrow m \in N.$$

Theorema: Pfeilabgeschlossene und Verträgliche Teilkontexte 83

Jeder verträgliche Teilkontext ist pfeilabgeschlossen. In einem doppelt fundierten Kontext ist jeder pfeilabgeschlossene Teilkontext verträglich.

Approbatio (⇒) Sei $(H, N, I \cap H \times N)$ ein verträglicher Teilkontext. Für $g \swarrow n \in N$ gibt es ein $h \in H$ mit $h \not I n$ und $g^I \subseteq h^I$. Wegen $g \swarrow n$ ist g^I maximal unter allen Gegenstandsinhalten, die n nicht enthalten, also folgt $g^I = h^I$ und damit $g = h \in H$. Dual folgt aus $H \ni h \nearrow m$ stets $m \in N$.

(⇐) Sei $(H, N, I \cap H \times N)$ ein pfeilabgeschlossener Teilkontext eines doppelt fundierten Kontexts. Für $h \in H$ und $m \in M$ mit $h \not I m$ gibt es nach Definition Definitio: doppelt fundiert 3.28 ein Merkmal $n \in M$ mit $h \nearrow n$ und $m^I \subseteq n^I$, also folgt $n \in N$. Die andere Bedingung aus dem vorangegangenem Lemma folgt dual. ∎

84 **Definitio: Doppelpfeilrelation**

Für einen Kontext (G, M, I) definieren wir die DOPPELPFEILRELATION vermöge

$$g \swarrow\!\!\swarrow m :\Leftrightarrow \underset{n\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{g_0,\dots,g_n\in G}{\exists}\ \underset{m_0,\dots,m_n\in M}{\exists} g \swarrow m_0 \nwarrow g_0 \swarrow \cdots \swarrow m_n \nwarrow g_n \swarrow m.$$

85 **Lemma**

In einem reduzierten doppelt fundierten Kontext gelten für einen pfeilabgeschlossenen Teilkontext $(H, N, I \cap H \times N)$:

(I) Für alle $h \in H$ gibt es ein $n \in N$ mit $h \swarrow\!\!\!\!\nearrow n$ und dual gibt es für alle $n \in N$ ein $h \in H$ mit $h \swarrow\!\!\!\!\nearrow n$.

(II) Für alle $h \in \complement H$ gibt es ein $n \in \complement N$ mit $h \swarrow\!\!\!\!\nearrow n$ und dual gibt es für alle $n \in \complement N$ ein $h \in \complement H$ mit $h \swarrow\!\!\!\!\nearrow n$.

(III) Es ist $h \in H$ genau dann, wenn es ein Merkmal $n \in N$ mit $h \swarrow\!\!\swarrow n$ gibt.

APPROBATIO (I) Sei $h \in H$. Dann gibt es ein Merkmal $n \in M$ mit $h \swarrow\!\!\!\!\nearrow n$. Wegen $h \nearrow n$ folgt $n \in N$, denn $(H, N, I \cap H \times N)$ ist pfeilabgeschlossen.

(II) Sei $h \in \complement H$, dann gibt es ein Merkmal $n \in M$ mit $h \swarrow\!\!\!\!\nearrow n$. Wäre nun $n \in N$, dann ergäbe sich wegen der Pfeilabgeschlossenheit $h \in H$. Widerspruch! Also folgt $n \in \complement N$.

(III) $(\Rightarrow)$ Nach (i) gibt es für jedes $h \in H$ ein $n \in N$ mit $h \swarrow n$, und es folgt $h \swarrow\!\!\swarrow n$.

$(\Leftarrow)$ Sei $h \in G$ mit $h \swarrow\!\!\swarrow n$ für ein $n \in N$, dann gilt für gewisse $g_0, \dots, g_k \in G$ und $m_0, \dots, m_k \in M$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc} \underbrace{h}_{\in H} & \Leftarrow & \swarrow & \underbrace{m_0}_{\in N} & \Leftarrow & \nwarrow & \underbrace{g_0}_{\in H} & \Leftarrow & \swarrow & \underbrace{m_1}_{\in N} & \Leftarrow & \nwarrow & \underbrace{g_1}_{\in H} & \Leftarrow & \swarrow \cdots \swarrow & \Leftarrow & \underbrace{m_k}_{\in N} & \Leftarrow\ \nwarrow & \underbrace{g_k}_{\in H} & \Leftarrow\ \swarrow & \underbrace{n.}_{\in N} \end{array}$$

Wegen der Pfeilabgeschlossenheit können wir entlang den Pfeilen wandern und erhalten $h \in H$. ■

86 **Theorema: Begriffe von $(G, M, \not\swarrow\!\!\swarrow)$**

Genau dann ist $(H, N, I \cap H \times N)$ ein pfeilabgeschlossener Teilkontext eines reduzierten doppelt fundierten Kontexts (G, M, I), wenn $(\complement H, N)$ ein Begriff von $(G, M, \not\swarrow\!\!\swarrow)$ ist.

APPROBATIO $(\Rightarrow)$ Nach dem vorangegangenem Lemma folgt $h \in \complement H$ genau dann, wenn $h \not\swarrow\!\!\swarrow n$ für alle $n \in N$ gilt. Das bedeutet $\complement H = N^{\not\swarrow\!\!\swarrow}$. Daraus folgt $(\complement H)^{\not\swarrow\!\!\swarrow} \supseteq N$. Für alle $m \in \complement N$ gibt es ein $g \in \complement H$ mit $g \swarrow\!\!\!\!\nearrow m$, also auch $g \swarrow\!\!\swarrow m$ und damit ist $m \notin (\complement H)^{\not\swarrow\!\!\swarrow}$. Insgesamt ist demnach auch $(\complement H)^{\not\swarrow\!\!\swarrow} \subseteq N$ und $(\complement H, N)$ ein Begriff von $(G, M, \not\swarrow\!\!\swarrow)$.

$(\Leftarrow)$ Sei $(\complement H, N)$ ein Begriff von $(H, N, I \cap H \times N)$. Sei $g \swarrow n \in N$, dann gilt insbesondere $g \swarrow\!\!\swarrow n \in N$, und damit $g \in H$. Sei nun $H \ni h \nearrow m$. Wir müssen $m \in N$ zeigen. Angenommen, es wäre $m \in \complement N$, dann gäbe es einen Gegenstand $g \in \complement H$ mit $g \swarrow\!\!\!\!\nearrow m$. Außerdem gibt es wegen $h \in H$ ein $n \in N$ mit $h \swarrow\!\!\swarrow n$. Zusammen gilt also

$$g \swarrow\!\!\!\!\nearrow m \nwarrow h \swarrow\!\!\swarrow n.$$

Damit wäre $g \swarrow\!\!\swarrow n$ und $g \in H$ nach dem Lemma. Widerspruch! Also muss $m \in N$ sein. ■

Theorema 87

Jeder verträgliche Teilkontext eines bereinigten/reduzierten/doppelt fundierten Kontextes ist bereinigt/reduziert/doppelt fundiert. Die Pfeilrelationen vererben sich auf verträgliche Teilkontexte, d.h. $g \swarrow m$ gilt genau dann in $(H, N, I \cap H \times N)$, wenn $g \in H$ und $m \in N$ und $g \swarrow m$ in (G, M, I) gilt. Dual für $\nearrow$.

3.6.3 Vollständige Kongruenzen

Definitio: vollständige Kongruenz 88

Eine VOLLSTÄNDIGE KONGRUENZ Θ eines vollständigen Verbands V ist eine Äquivalenz auf V, die mit beliebigen Infima und Suprema verträglich ist, d.h. wenn $x_t \Theta y_t$ für alle $t \in T$ gilt, dann ist auch $(\bigwedge_{t\in T} x_t)\,\Theta\,(\bigwedge_{t\in T} y_t)$ und $(\bigvee_{t\in T} x_t)\,\Theta\,(\bigvee_{t\in T} y_t)$.

Theorema: Kongruenzintervall 89

Eine Äquivalenz Θ auf einem vollständigen Verband $\mathbb{V}$ ist genau dann eine vollständige Kongruenz auf $\mathbb{V}$, wenn folgendes gilt:

(I) Alle Äquivalenzklassen sind Intervalle.
(II) Die Menge der kleinsten Elemente der Intervalle ist $\bigvee$-abgeschlossen.
(III) Die Menge der größten Elemente der Intervalle ist $\bigwedge$-abgeschlossen.

APPROBATIO ($\Rightarrow$) Sei Θ eine vollständige Kongruenz, d.h. $\bigwedge$- und $\bigvee$-kompatibel.

(I) Für eine Kongruenzklasse $[v]\Theta$ sei $v_\Theta := \bigwedge[v]\Theta$ das Infimum und dual $v^\Theta := \bigvee[v]\Theta$ das Supremum. Damit gilt zunächst $[v]\Theta \subseteq [v_\Theta, v^\Theta]$. Natürlich ist $v\Theta w$ für alle $w \in [v]\Theta$, und es folgt

$$v\Theta\left(\bigwedge[v]\Theta\right) \quad \text{sowie} \quad v\Theta\left(\bigvee[v]\Theta\right),$$

also sind $v_\Theta, v^\Theta \in [v]\Theta$. Sei nun $w \in [v_\Theta, v^\Theta]$, dann gilt wegen $w\Theta w$ und $v_\Theta \Theta v^\Theta$ auch

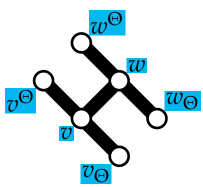
$$v_\Theta = (v_\Theta \wedge w)\Theta(v^\Theta \wedge w) = w.$$

Folglich ist $w \in [v]\Theta$. Die Kongruenzklasse $[v]\Theta$ ist also genau das Intervall $[v_\Theta, v^\Theta]$.

(II),(III) Die beiden Abbildungen $v \mapsto v_\Theta$ und $v \mapsto v^\Theta$ bilden eine Adjunktion auf $\mathbb{V}$. Die Zuordnung der unteren Intervallgrenze ist ordnungserhaltend. Sei nämlich $v \leq w$, dann gilt wegen $v\Theta v_\Theta$ und $w\Theta w_\Theta$

$$v = (v \wedge w)\Theta(v_\Theta \wedge w_\Theta).$$

Es folgt $(v_\Theta \wedge w_\Theta) \geq v_\Theta$ und damit $v_\Theta \leq w_\Theta$.



Dual ist die Zuordnung der oberen Intervallgrenze ordnungserhaltend. Die Verkettungen sind extensiv bzw. intensiv, denn die Abbildungen sind bereits extensiv bzw. intensiv. Es gilt stets $v_\Theta \Theta v \Theta v^\Theta$ und damit folgt

$$v_\Theta = \bigwedge [v]_\Theta = \bigwedge \left[v^\Theta\right]_\Theta = \left(v^\Theta\right)_\Theta$$

und dual $v^\Theta = (v_\Theta)^\Theta$. Außerdem gilt immer $v_\Theta \leq v \leq v^\Theta$, also ist

$$\left(v^\Theta\right)_\Theta \leq v \leq (v_\Theta)^\Theta$$

und die beiden Abbildungen bilden nach Definition Definitio: Adjunktion 2.31 eine Adjunktion. Die Abbildungen $v \mapsto v_\Theta$ und $v \mapsto v^\Theta$ sind also residuiert bzw. residual und damit nach Lemma 2.36 $\bigvee$-erhaltend bzw. $\bigwedge$-erhaltend. Also gelten (ii) und (iii).

($\Leftarrow$) Sei Θ eine Äquivalenzrelation mit den Eigenschaften (i) bis (iii). Seien $x_t \Theta y_t$ für $t \in T$. Es gilt stets $(x_t)_\Theta \leq x_t \leq (x_t)^\Theta$ und damit $\bigvee_{t\in T}(x_t)_\Theta \leq \bigvee_{t\in T} x_t \leq \bigvee_{t\in T}(x_t)^\Theta$, dual für die y_t. Mit $x_t \Theta y_t$ gelten $(x_t)_\Theta = (y_t)_\Theta$ und $(x_t)^\Theta = (y_t)^\Theta$ für alle $t \in T$ und damit ist

$$\bigvee_{t\in T} x_t, \bigvee_{t\in T} y_t \in \left[\bigvee_{t\in T}(x_t)_\Theta, \bigvee_{t\in T}(x_t)^\Theta\right].$$

Aus $v \leq w$ folgt wegen $v \leq v^\Theta$ und $w \leq w^\Theta$ stets $v \leq v^\Theta \wedge w^\Theta = u^\Theta \leq v^\Theta$ wegen (iii). Es folgt $v^\Theta \wedge w^\Theta = v^\Theta$, denn mit $v \leq u^\Theta \leq v^\Theta$ und $v \Theta v^\Theta$ folgt $v \Theta u^\Theta \Theta u$ weil die Äquivalenzklasse $[v]_\Theta$ ein Intervall ist. Also impliziert $v \leq w$ stets $v^\Theta \leq w^\Theta$. Weiter gilt $(x_s)_\Theta \leq \bigvee_{t\in T}(x_t)_\Theta$ für alle $s \in T$, also folgt $(x_s)^\Theta = ((x_s)_\Theta)^\Theta \leq (\bigvee_{t\in T}(x_t)_\Theta)^\Theta$ und damit

$$\bigvee_{t\in T}(x_t)^\Theta \leq \left(\bigvee_{t\in T}(x_t)_\Theta\right)^\Theta.$$

Insgesamt ist dann

$$\begin{aligned}\bigvee_{t\in T} x_t, \bigvee_{t\in T} y_t &\in \left[\bigvee_{t\in T}(x_t)_\Theta, \bigvee_{t\in T}(x_t)^\Theta\right]\\ &\subseteq \left[\bigvee_{t\in T}(x_t)_\Theta, \left(\bigvee_{t\in T}(x_t)_\Theta\right)^\Theta\right] = \left[z_\Theta, (z_\Theta)^\Theta\right] = [z]_\Theta,\end{aligned}$$

also $\bigvee_{t\in T} x_t \Theta \bigvee_{t\in T} y_t$. Dual für das Infimum. ■

90 **Theorema: Faktorverband**

Für eine vollständige Kongruenz Θ auf einem vollständigen Verband $\mathbb{V}$ bildet die Faktormenge

$$\mathbb{V}/_\Theta := \left\{ \underbrace{[v]\Theta}_{:=\{w\in V \mid v\Theta w\}} \;\middle|\; v \in V \right\}$$

mit der Faktorordnung

$$[v]\Theta \leq [w]\Theta :\Leftrightarrow v\Theta(v \wedge w) \Leftrightarrow (v \vee w)\Theta w$$

einen vollständigen Verband. Die Kongruenzintervalle $[v]_\Theta = [v_\Theta, v^\Theta] = [\bigwedge[v]\Theta, \bigvee[v]\Theta]$ sind entsprechend ihren kleinsten oder äquivalent entsprechend ihren größten Elementen geordnet, d.h. es gilt

$$[v]\Theta \leq [w]\Theta \Leftrightarrow v_\Theta \leq w_\Theta \Leftrightarrow v^\Theta \leq w^\Theta.$$

Für das Infimum und Supremum gilt

$$\bigwedge_{t\in T}[v_t]\Theta = \Big[\bigwedge_{t\in T} v_t\Big]\Theta \text{ und } \bigvee_{t\in T}[v_t]\Theta = \Big[\bigvee_{t\in T} v_t\Big]\Theta.$$

APPROBATIO Nach Theorema: Kongruenzintervall 3.89 sind die Kongruenzklassen Intervalle, also ist die Bezeichnung Kongruenzintervalle gerechtfertigt.

($\Leftrightarrow$) Für $v\Theta(v \wedge w)$ folgt mit dem Absorptionsgesetz $(v \vee w)\Theta((v \wedge w) \vee w) = w$. Die umgekehrte Richtung analog.

(WOHLDEFINIERT) Seien $[v]_\Theta \leq [w]_\Theta$ und $v\Theta x$ sowie $w\Theta y$. Dann gilt $v\Theta(v \wedge w)$ und $w\Theta(v \vee w)$ und es folgt

$$(x \wedge y)\Theta(v \wedge w)\Theta v\Theta x$$

und dual $(x \vee y)\Theta y$. Also gilt auch $[x]_\Theta \leq [y]_\Theta$.

(REFLEXIV) Für alle $v \in V$ gilt $v \wedge v = v\Theta v$, also $[v]_\Theta \leq [v]_\Theta$.

(ANTISYMMETRISCH) Für $v\Theta(v \wedge w)$ und $w\Theta(v \wedge w)$ ist $v\Theta w$ und damit $[v]_\Theta = [w]_\Theta$.

(TRANSITIV) Für $u\Theta(u \wedge v)$ und $w\Theta(v \vee w)$ gilt

$$(u \wedge w)\Theta(u \wedge v \wedge (v \vee w)) = (u \wedge v)\Theta u.$$

($\Leftrightarrow$) Für $v_\Theta \leq w_\Theta$ folgt $v^\Theta = (v_\Theta)^\Theta \leq (w_\Theta)^\Theta = w^\Theta$, und umgekehrt. Für $[v]_\Theta \leq [w]_\Theta$ gilt $v\Theta(v \wedge w) \leq w$ und es folgt $v_\Theta = (v \wedge w)_\Theta \leq w_\Theta$. Umgekehrt gilt für $v_\Theta \leq w_\Theta$

$$w\Theta w_\Theta = v_\Theta \vee w_\Theta = (v \vee w)_\Theta\Theta(v \vee w),$$

also $[v]_\Theta \leq [w]_\Theta$.

($\bigwedge$) Es ist $[v \wedge w]_\Theta = \left[(v \wedge w)_\Theta, \underbrace{(v \wedge w)^\Theta}_{=v^\Theta \wedge w^\Theta}\right]$ und damit gilt zunächst $[v \wedge w]_\Theta \leq [v]_\Theta$ sowie $[v \wedge w]_\Theta \leq [w]_\Theta$, d.h. $[v \wedge w]_\Theta$ ist eine untere Schranke. Analog für beliebige Infima.

($\bigvee$) dual. ■

Theorema: Homomorphiesatz 91

Die vollständige Kongruenzen sind genau die Kerne von vollständigen Epimorphismen. Genauer gilt: Für eine vollständige Kongruenz Θ auf einem vollständigen Verband $\mathbb{V}$ ist

$$\mathrm{nat}_\Theta : \begin{array}{l} \mathbb{V} \twoheadrightarrow \mathbb{V}/_\Theta \\ v \mapsto [v]_\Theta \end{array}$$

ein vollständiger Epimorphismus. Umgekehrt ist für einen vollständigen Epimorphismus $\phi\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ dessen Kern

$$\ker\phi := \{(v, w) \in V \times V \mid \phi v = \phi w\}$$

eine vollständige Kongruenz auf $\mathbb{V}$. Außerdem ist

$$\mathrm{val}_\phi : \begin{aligned} \mathbb{V}/\ker\phi &\hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{W} \\ [v]_{\ker\phi} &\mapsto \phi v \end{aligned}$$

ein vollständiger Isomorphismus und es gelten

$$\ker \mathrm{nat}_\Theta = \Theta \quad\text{und}\quad \mathrm{val}_\phi \circ \mathrm{nat}_{\ker\phi} = \phi.$$

APPROBATIO (I) Sei Θ eine vollständige Kongruenz. Die Abbildung

$$\mathrm{nat}_\Theta : \begin{aligned} \mathbb{V} &\twoheadrightarrow \mathbb{V}/\Theta \\ v &\mapsto [v]_\Theta \end{aligned}$$

ist dann ein surjektiver vollständiger Homomorphismus, denn aus Theorema: Faktorverband 3.90 folgt $\mathrm{nat}_\Theta \bigvee_{t\in T} v_t = \bigvee_{t\in T} \mathrm{nat}_\Theta v_t$ und dual für das Infimum.

(II) Sei umgekehrt $\phi\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ ein surjektiver vollständiger Homomorphismus. Dann ist dessen Kern $\ker\phi$ eine Äquivalenz, denn es gilt $(v,v') \in \ker\phi \Leftrightarrow \phi v = \phi v'$. Außerdem gilt für $(x_t, y_t) \in \ker\phi$ für $t \in T$ stets $\phi x_t = \phi y_t$ und damit $\phi \bigvee_{t\in T} x_t = \bigvee_{t\in T} \phi x_t = \bigvee_{t\in T} \phi y_t = \phi \bigvee_{t\in T} y_t$, d.h. $\ker\phi$ ist $\bigvee$-verträglich. Dual auch $\bigwedge$-verträglich.

(III) val_ϕ ist injektiv, denn aus $\phi x = \phi y$ folgt $(x,y) \in \ker\phi$ und damit $[x]_{\ker\phi} = [y]_{\ker\phi}$. Weil ϕ surjektiv ist, muss auch val_ϕ surjektiv sein. Außerdem ist

$$\bigvee_{t\in T} \mathrm{val}_\phi [v_t]_{\ker\phi} = \bigvee_{t\in T} \phi v_t = \phi \bigvee_{t\in T} v_t = \mathrm{val}_\phi \left[\bigvee_{t\in T} v_t\right]_{\ker\phi} = \mathrm{val}_\phi \bigvee_{t\in T} [v_t]_{\ker\phi}.$$ ■

92 **Corollarium**

Der Begriffsverband eines verträglichen Teilkontexts $(H, N, I \cap H \times N)$ von (G, M, I) ist stets isomorph zu einem Faktorverband von $\mathfrak{B}(G, M, I)$, nämlich

$$\mathfrak{B}(H, N, I \cap H \times N) \cong \mathfrak{B}(G, M, I)\big/\ker \pi_{H,N}$$

und es gilt $(A, B) \ker \pi_{H,N} (C, D) \Leftrightarrow A \cap H = C \cap H \Leftrightarrow B \cap N = D \cap N$. Für die Kongruenzklassen haben wir

$$[(A,B)]_{\ker \pi_{H,N}} = \left[\left((A\cap H)^{II}, (A\cap H)^{I}\right), \left((B\cap N)^{I}, (B\cap N)^{II}\right)\right].$$

APPROBATIO Sei $(H, N, I \cap H \times N)$ ein verträglicher Teilkontext. Nach Theorema: Verträgliche Teilkontexte und Vollständige Epimorphismen 3.79 ist die Projektion $\pi_{H,N}\colon \mathfrak{B}(G, M, I) \to \mathfrak{B}(H, N, I \cap H \times N)$ ein vollständiger Epimorphismus und nach Theorema: Homomorphiesatz 3.91 ist $\Theta_{H,N} := \ker \pi_{H,N}$ eine vollständige Kongruenz auf $\mathfrak{B}(G, M, I)$. Folglich ist

$$\mathfrak{B}(H, N, I \cap H \times N) \cong \mathfrak{B}(G, M, I)\big/\Theta_{H,N}.$$

Weiter gilt

$$(A,B)_{\ker \pi_{H,N}} = \bigwedge [(A,B)]_{\ker \pi_{H,N}} = \bigwedge_{\substack{(C,D)\in\mathfrak{B}(G,M,I)\\ A\cap H = C\cap H\\ B\cap N = D\cap N}} (C,D)$$

$$= \left(\bigcap_{\substack{C=C^{II}\\ C\cap H=A\cap H\\ C^{I}\cap N=B\cap N}} C, \left(\bigcap_{\substack{C=C^{II}\\ C\cap H=A\cap H\\ C^{I}\cap N=B\cap N}} C \right)^{I} \right) = \left((A\cap H)^{II}, (A\cap H)^{I} \right)$$

denn aus $C \cap H = A \cap H$ folgt $A \cap H \subseteq C \subseteq \bigcap_{\dots} C$ und weil der Schnitt von Umfängen stets wieder ein Umfang ist, folgt $(A \cap H)^{II} \subseteq \bigcap_{\dots} C$. Andererseits gilt auch $(A \cap H)^{II} \supseteq \bigcap_{\dots} C$, denn:

(I) Aus Lemma: Charakterisierung verträglicher Teilkontexte 3.80 und Lemma 3.8 folgt
$(A \cap H)^{II} = (B^I \cap H)^{II} \subseteq (B^I \cap H)^{II} \cup N^I \subseteq ((B^I \cap H)^I \cap N)^I \subseteq B^{III} = B^I = A$,
also gilt $(A \cap H)^{II} \cap H \subseteq A \cap H$.

(II) Trivial ist $(A \cap H)^{II} \cap H \supseteq A \cap H$.

(III) Mit Lemma: Charakterisierung verträglicher Teilkontexte 3.80 gilt $(A \cap H)^I \cap N = (B^I \cap H)^I \cap N \subseteq B^{II} = B$ und es folgt $(A \cap H)^I \cap N \subseteq B \cap N$.

(IV) Wegen Lemma 3.8 ist $(A \cap H)^I \supseteq A^I \cup H^I \supseteq A^I = B$ und damit $(A \cap H)^I \cap N \supseteq B \cap N$.

Dual ist $(A, B)^{\ker \pi_{H,N}} = \bigvee [(A, B)]_{\ker \pi_{H,N}} = \left((B \cap N)^I, (B \cap N)^{II}\right)$. ■

Definitio: Induzierte Kongruenz und Induzierender Teilkontext 93

Eine vollständige Kongruenz Θ eines Begriffsverbands $\mathfrak{B}(G, M, I)$ heißt durch den verträglichen Teilkontext $(H, N, I \cap H \times N)$ INDUZIERT, wenn

$$\Theta = \ker \pi_{H,N}.$$

Theorema: Induzierender Standardkontext 94

Für eine vollständige Kongruenz Θ von (G, M, I) sei G_Θ die Menge aller Gegenstände g, für die γg das kleinste Element einer Θ-Klasse ist, und dual M die Menge aller Merkmale $m \in M$, für die μm das größte Element einer Θ-Klasse ist. Wenn Θ durch einen verträglichen Teilkontext $(H, N, I \cap H \times N)$ induziert ist, dann gelten:

(I) Es gilt $g \in G_\Theta$ genau dann, wenn es eine Gegenstandsmenge $X \subseteq H$ mit $X^I = g^I$ gibt.

(II) Es gilt $H \subseteq G_\Theta$ sowie $N \subseteq M_\Theta$.

(III) Es gilt $(A, B)\Theta(C, D)$ genau dann, wenn $A \cap G_\Theta = C \cap G_\Theta$ und $B \cap M_\Theta = D \cap M_\Theta$ sind, d.h. $\Theta = \ker \pi_{G_\Theta, M_\Theta}$.

(IV) Θ ist auch durch den verträglichen Teilkontext $(G_\Theta, M_\Theta, I \cap G_\Theta \times M_\Theta)$ induziert.

APPROBATIO (I) Es gilt $g \in G_\Theta$ genau dann, wenn es einen Begriff $(A, B) \in \mathfrak{B}(G, M, I)$ mit $\gamma g = \bigwedge [(A, B)]_\Theta$ gibt. Weil Θ durch $(H, N, I \cap H \times N)$ induziert ist, gilt $\Theta = \ker \pi_{H,N}$ und nach Corollarium 3.92 gilt

$$\bigwedge [(A, B)]_\Theta = \left((A \cap H)^{II}, (A \cap H)^I\right).$$

Also ist $g \in G_\Theta$ genau dann, wenn es einen Umfang A mit $g^I = (A \cap H)^I$ gibt. Daraus folgt stets $g^I = X^I$ für $X := A \cap H \subseteq H$. Umgekehrt gilt für $X \subseteq H$ mit

$X^I = g^I$ stets

$$(X^{II} \cap H)^I = (X^{II} \cap H^{II})^I = (X^I \cup H^I)^{II} \subseteq (X \cap H)^I = X^I = g^I$$

sowie $(X^{II} \cap H)^I \supseteq X^I \cup H^I \supseteq X^I = g^I$, d.h. $g^I = (A \cap H)^I$ für $A := X^{II}$.

(II) Für alle $h \in H$ gilt $h^I = X^I$ für $X := \{h\} \subseteq H$, also folgt mit (i) $h \in G_\Theta$. Dual folgt $N \subseteq M_\Theta$.

(III) Es gilt $(A, B)\Theta(C, D)$ genau dann, wenn $A \cap H = C \cap H$ und $B \cap N = D \cap N$ sind. Im Falle $A \cap G_\Theta = C \cap G_\Theta$ und $B \cap M_\Theta = D \cap M_\Theta$ ist das wegen (ii) stets erfüllt. Sei umgekehrt $(A, B)\Theta(C, D)$ und $g \in A \cap G_\Theta$, dann gibt es eine Menge $X \subseteq H$ mit $X^I = g^I$ und es folgt $X \subseteq g^{II} \subseteq A^{II} = A$. Also ist $X = X \cap H \subseteq A \cap H = C \cap H \subseteq C$ und es folgt $g \in X^{II} \subseteq C$, d.h. $A \cap G_\Theta \subseteq C \cap G_\Theta$. Dual folgt $A \cap G_\Theta \supseteq C \cap G_\Theta$ sowie $B \cap M_\Theta = D \cap M_\Theta$.

(IV) Wegen (iii) ist Θ auch durch $(G_\Theta, M_\Theta, I \cap G_\Theta \times M_\Theta)$ induziert. Es verbleibt zu zeigen, dass $(G_\Theta, M_\Theta, I \cap G_\Theta \times M_\Theta)$ verträglich ist. Wir nutzen dazu Lemma: Charakterisierung verträglicher Teilkontexte 3.80. Sei dazu $g \in G_\Theta$ und $m \in M$ mit $g \not I m$. Wegen (i) gibt es eine Gegenstandsmenge $X \subseteq H$ mit $X^I = g^I$. Es folgt $m \notin X^I$ und damit gibt es einen Gegenstand $h \in X \subseteq H$ mit $h \not I m$. Weil $(H, N, I \cap H \times N)$ verträglich ist, existiert nach Lemma: Charakterisierung verträglicher Teilkontexte 3.80 schließlich ein $n \in N$ mit $h \not I n$ und $m^I \subseteq n^I$. Es folgt $g \notin n^I$, d.h. $g \not I n$, und wegen (ii) ist $n \in M_\Theta$. ■

95 **Definitio: Gesättigter Teilkontext**

Ein Teilkontext $(H, N, I \cap H \times N)$ eines Kontextes (G, M, I) heißt GESÄTTIGT, wenn gelten

$$\forall_{g \in G} \forall_{X \subseteq H} X^I = g^I \Rightarrow g \in H$$

$$\forall_{m \in M} \forall_{Y \subseteq N} Y^I = m^I \Rightarrow m \in N.$$

96 **Corollarium**

Wenn eine vollständige Kongruenz durch einen Teilkontext induziert ist, dann auch durch einen gesättigten Teilkontext, nämlich $(G_\Theta, M_\Theta, I \cap G_\Theta \times M_\Theta)$. In einem reduzierten Kontext ist jeder Teilkontext gesättigt, d.h. insbesondere sind induzierende Teilkontexte eindeutig.

APPROBATIO Nach Theorema: Induzierender Standardkontext 3.94 ist jede induzierte Kongruenz auch durch den verträglichen Teilkontext $(G_\Theta, M_\Theta, I \cap G_\Theta \times M_\Theta)$ induziert und dieser ist wegen (i) gesättigt. Sei nun $(H, N, I \cap H \times N)$ ein Teilkontext eines reduzierten Kontextes (G, M, I). Für einen Gegenstand $g \in G$ und eine Menge $X \subseteq H$ mit $X^I = g^I$ gilt zunächst $g^I = \bigcap_{h \in X} h^I$, d.h. $\gamma g = \bigvee_{h \in X} \gamma h$. Weil (G, M, I) reduziert und damit γg $\bigvee$-irreduzibel ist, folgt $g \in X \subseteq H$. Demnach ist in einem reduzierten Kontext jeder Teilkontext gesättigt. Wenn also eine Kongruenz Θ eines reduzierten Kontexts (G, M, I) induziert ist, dann ist der induzierende Teilkontext gerade $(G_\Theta, M_\Theta, I \cap G_\Theta \times M_\Theta)$ und damit eindeutig. ■

Theorema 97

Eine vollständige Kongruenz Θ ist genau dann durch einen Teilkontext induziert, wenn $\{[\gamma(g)]_\Theta \mid g \in G_\Theta\}$ $\bigvee$-dicht und $\{[\mu(m)]_\Theta \mid m \in M_\Theta\}$ $\bigwedge$-dicht im Faktorverband $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)\big/_\Theta$ sind.

Corollarium 98

Eine vollständige Kongruenz ist durch einen Teilkontext induziert, wenn der zugehörige Faktorverband doppelt fundiert ist.

APPROBATIO Falls das Kongruenzintervall $[(A,B)]_\Theta$ $\bigvee$-irreduzibel in $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)\big/_\Theta$ ist, dann ist auch dessen kleinstes Element $(A,B)_\Theta = \bigwedge[(A,B)]_\Theta$ $\bigvee$-irreduzibel in $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)$, d.h. ein Gegenstandsbegriff γg mit $g \in G_\Theta$.[2] Also gibt es für alle $\bigvee$-irreduziblen Kongruenzintervalle $[(A,B)]_\Theta$ einen (irreduziblen) Gegenstand $g \in G_\Theta$ mit $[(A,B)]_\Theta = [\gamma g]_\Theta$ und demnach gilt

$$\mathcal{J}_{\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)\big/_\Theta} \subseteq \{[\gamma g]_\Theta \mid g \in G_\Theta\}.$$

Weil der Quotient $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)\big/_\Theta$ doppelt fundiert ist, liegen nach Theorema 3.29 die $\bigvee$-irreduziblen Element $\bigvee$-dicht und damit ist auch $\{[\gamma g]_\Theta \mid g \in G_\Theta\}$ $\bigvee$-dicht. Dual ist $\{[\mu(m)]_\Theta \mid m \in M_\Theta\}$ $\bigwedge$-dicht. Nach Theorema 3.97 ist Θ durch einen (verträglichen) Teilkontext induziert. ■

Lemma 99

Jeder Faktorverband eines doppelt fundierten vollständigen Verbands ist doppelt fundiert.

APPROBATIO Analog Theorema 3.87 ■

Corollarium 100

In einem doppelt fundierten Begriffsverband ist jede vollständige Kongruenz durch einen Teilkontext induziert.

[2] Wenn $(A,B)_\Theta$ nämlich $\bigvee$-reduzibel ist, dann folgt

$$\begin{aligned}[(A,B)]_\Theta = [((A,B)_\Theta)_*]_\Theta &= \Big[\bigvee_{(X,Y)<(A,B)_\Theta} (X,Y)\Big]_\Theta \\ &= \bigvee_{(X,Y)<(A,B)_\Theta} [(X,Y)]_\Theta \leq \underbrace{\bigvee_{[(X,Y)]_\Theta<[(A,B)]_\Theta} [(X,Y)]_\Theta}_{=([(A,B)]_\Theta)_*} \leq [(A,B)]_\Theta,\end{aligned}$$

denn mit $(X,Y) < (A,B)_\Theta$ gilt $(X,Y)_\Theta < (A,B)_\Theta$, d.h. $[(X,Y)]_\Theta < [(A,B)]_\Theta$. Damit ist auch $[(A,B)]_\Theta$ $\bigvee$-reduzibel.

101 **Theorema: Begriffe von $(G, M, \swarrow\!\!\!\!\nearrow)$**

Der Verband aller vollständige Kongruenzen eines reduzierten doppelt fundierten Begriffsverbands $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ ist isomorph zum vollständig distributiven Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, \swarrow\!\!\!\!\nearrow)$.

APPROBATIO (I) Die vollständigen Kongruenzen sind geordnet vermöge der Teilmengeninklusion. Jeder Durchschnitt von Kongruenzen ist wieder eine Kongruenz, also bildet die Menge der Kongruenzen ein Hüllensystem auf $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ und ist nach Theorema 2.28 ein vollständiger Verband. Für vollständige Kongruenzen Θ, Ψ gilt

$$\begin{aligned}
\Theta \subseteq \Psi &\Leftrightarrow \underset{(A,B),(C,D) \in \underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)}{\forall} (A, B)\Theta(C, D) \Rightarrow (A, B)\Psi(C, D) \\
&\Leftrightarrow \underset{(A,B),(C,D) \in \underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)}{\forall} \left.\begin{array}{r} A \cap G_\Theta = C \cap G_\Theta \\ B \cap M_\Theta = D \cap M_\Theta \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A \cap G_\Psi = C \cap G_\Psi \\ B \cap M_\Psi = D \cap M_\Psi \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow G_\Psi \subseteq G_\Theta \wedge M_\Psi \subseteq M_\Theta.
\end{aligned}$$

Die letzte Implikation folgt so: Sei $g \in G_\Psi$, dann ist γg das kleinste Element einer Ψ-Klasse und mit $\Theta \subseteq \Psi$ folgt

$$\gamma g \geq (\gamma g)_\Theta = \bigwedge [\gamma g]_\Theta \geq \bigwedge [\gamma g]_\Psi = (\gamma g)_\Psi = \gamma g$$

Also gilt $(\gamma g)_\Theta = (\gamma g)_\Psi = \gamma g$ und damit folgt sofort $g \in G_\Theta$.

(II) Jeder verträgliche Teilkontext $(H, N, I \cap H \times N)$ induziert eine vollständige Kongruenz $\ker \pi_{H,N}$, siehe Theorema: Verträgliche Teilkontexte und Vollständige Epimorphismen 3.79 und Theorema: Homomorphiesatz 3.91. Wenn $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ reduziert und doppelt fundiert ist, dann ist nach Theorema: Induzierender Standardkontext 3.94 und Corollarium 3.100 jede vollständige Kongruenz Θ durch genau einen (gesättigten) verträglichen Teilkontext $(G_\Theta, M_\Theta, I \cap G_\Theta \times M_\Theta)$ induziert, d.h. es gibt eine bijektive Zuordnung zwischen den vollständigen Kongruenzen und den (gesättigten) verträglichen Teilkontexten. Weil der Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ doppelt fundiert ist, ist nach Theorema 3.34 auch der Kontext (G, M, I) doppelt fundiert. Demnach ist wegen Theorema: Pfeilabgeschlossene und Verträgliche Teilkontexte 3.83 jeder verträgliche Teilkontext pfeilabgeschlossen, und umgekehrt. Die bijektive Zuordnung zwischen den vollständigen Kongruenzen und den pfeilabgeschlossenen Teilkontexten ist also nach (i) ein dualer Ordnungsisomorphismus.

(III) Die Vereinigung und der Durchschnitt von pfeilabgeschlossenen Teilkontexten ist wieder pfeilabgeschlossen, daher bilden die pfeilabgeschlossenen Teilkontexte einen vollständig distributiven vollständigen Verband. Weiterhin gibt es einen dualen Ordnungsisomorphismus zwischen den pfeilabgeschlossenen Teilkontexten und den formalen Begriffen von $(G, M, \swarrow\!\!\!\!\nearrow)$, vergleiche Theorema: Begriffe von $(G, M, \swarrow\!\!\!\!\nearrow)$ 3.86.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{CEpi}\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I) \arrow[r, hook, two heads, shift left, "\ker"] & (\mathrm{CCon}\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I),\subseteq) \arrow[l, hook', shift left, "\mathrm{nat}"] \arrow[dl, hook, two heads, shift left, "\sigma"] \arrow[dd, dashed, hook, two heads, shift left] \\
(\mathrm{CSub}(G,M,I),\leq)^{\partial} \arrow[u, hook, two heads, "\pi"] \arrow[ur, hook, two heads, shift left, "\ker\pi"] \arrow[d, hook, shift left, "\subseteq"] & \\
(\mathrm{ASub}(G,M,I),\leq)^{\partial} \arrow[u, hook, shift left, "\supseteq"] \arrow[r, hook, two heads, shift left, "(\mathbb{C}\cdot,\cdot)"] & \underline{\mathfrak{B}}(G,M,\not\Swarrow) \arrow[l, hook', two heads, shift left, "(\mathbb{C}\cdot,\cdot)"] \arrow[uu, dashed, hook, two heads, shift left]
\end{tikzcd}$$

Also gibt es insgesamt auch einen Ordnungsisomorphismus zwischen dem Verband der vollständigen Kongruenzen und dem vollständig distributiven vollständigen Verband $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,\not\Swarrow)$.

	M_{irr}	$M \setminus M_{\mathrm{irr}}$
G_{irr}	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\swarrow$
$G \setminus G_{\mathrm{irr}}$	$\nearrow$	$\emptyset$

	M_{irr}	$M \setminus M_{\mathrm{irr}}$
G_{irr}	$\Swarrow$	$\Swarrow$
$G \setminus G_{\mathrm{irr}}$	$\emptyset$	$\emptyset$

	M_{irr}	$M \setminus M_{\mathrm{irr}}$
G_{irr}	$\not\Swarrow$	$\not\Swarrow$
$G \setminus G_{\mathrm{irr}}$	$\times$	$\times$

$$\forall_{(A,B)\in\underline{\mathfrak{B}}(G_{\mathrm{irr}},M_{\mathrm{irr}},\not\Swarrow)} \left(A\cup(G\setminus G_{\mathrm{irr}}),B\cup\left(A^{\not\Swarrow}\cap(M\setminus M_{\mathrm{irr}})\right)\right)\in\underline{\mathfrak{B}}(G,M,\not\Swarrow) \qquad \blacksquare$$

3.6.4 Abgeschlossene Teilrelationen

Definitio: Abgeschlossene Teilrelation 102

Eine Teilrelation $J \subseteq I$ heißt ABGESCHLOSSEN in (G,M,I), wenn jeder formale Begriff von (G,M,J) auch ein formaler Begriff von (G,M,I) ist.

Lemma 103

Sei (A,B) ein formaler Begriff von (G,M,I).

(I) Für eine abgeschlossene Teilrelation J von (G,M,I) ist (A,B) genau dann ein formaler Begriff von (G,M,J), wenn $A\times B\subseteq J$ gilt.

(II) Für eine Menge von abgeschlossenen Teilrelationen $\mathcal{J}$ von (G,M,I) ist (A,B) genau dann ein formaler Begriff in $\bigcap_{J\in\mathcal{J}}\mathfrak{B}(G,M,J)$, wenn $A\times B\subseteq\bigcap\mathcal{J}$ gilt.

APPROBATIO (I) ($\Rightarrow$) trivial.

($\Leftarrow$) Aus $A \times B \subseteq J$ folgt zunächst $B^I = A \subseteq B^J$. Andererseits gilt wegen $J \subseteq I$ auch $B^J \subseteq B^I$. Also ist $A = B^J$ und dual $B = A^J$, d.h. (A, B) ist ein Begriff von (G, M, J).

(II) Es gilt unter Zuhilfenahme des ersten Teils

$$\underset{J \in \mathcal{J}}{\forall} (A,B) \in \mathfrak{B}(G,M,J) \Leftrightarrow \underset{J \in \mathcal{J}}{\forall} A \times B \subseteq J \Leftrightarrow A \times B \subseteq \bigcap \mathcal{J}.$$

■

104 **Definitio: Vollständiger Unterverband**

Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt VOLLSTÄNDIGER UNTERVERBAND des vollständigen Verbandes V, wenn sie gegen beliebige Infima und Suprema in V abgeschlossen ist. Insbesondere enthält ein vollständiger Unterverband also stets das größte und das kleinste Element von V.

105 **Theorema: Abgeschlossene Teilrelationen und Vollständige Unterverbände**

(I) Ist J eine abgeschlossene Teilrelation eines Kontextes (G, M, I), dann ist $\mathfrak{B}(G, M, J)$ ein vollständiger Unterverband des Begriffsverbands $\mathfrak{B}(G, M, I)$ mit $J = \bigcup_{(A,B) \in \mathfrak{B}(G,M,J)} A \times B$.

(II) Ist umgekehrt U ein vollständiger Unterverband von $\mathfrak{B}(G, M, I)$, dann ist

$$J_U := \bigcup_{(A,B) \in U} A \times B$$

eine abgeschlossene Teilrelation von (G, M, I) und es gilt $U = \mathfrak{B}(G, M, J_U)$.

APPROBATIO (I) Sei J eine abgeschlossene Teilrelation von (G, M, I), d.h. jeder Begriff von (G, M, J) ist ebenfalls ein Begriff von (G, M, I). Das Infimum einer Familie von formalen Begriffen $(A_t, B_t), t \in T$ hat nach Theorema: Hauptsatz über formale Begriffsverbände 3.13 stets den Durchschnitt $\bigcap_{t \in T} A_t$ als Umfang, unabhängig von der konkreten Inzidenzrelation. Daher hat jedes Infimum in $\mathfrak{B}(G, M, J)$ den gleichen Umfang wie das entsprechende Infimum in $\mathfrak{B}(G, M, I)$, die Infima stimmen also überein und damit ist $\mathfrak{B}(G, M, J)$ gegen beliebige Infima in $\mathfrak{B}(G, M, I)$ abgeschlossen. Dual gilt das auch für das Supremum. Der Zusammenhang $J = \bigcup_{(A,B) \in \mathfrak{B}(G,M,J)} A \times B$ gilt für alle Kontexte, siehe Corollarium 3.6.

(II) Sei U ein vollständiger Unterverband von $\mathfrak{B}(G, M, I)$. Wir zeigen, dass $U = \mathfrak{B}(G, M, J_U)$ für die Teilrelation $J_U := \bigcup_{(A,B) \in U} A \times B$ gilt, woraus auch sofort die Abgeschlossenheit von J_U folgt.

($\subseteq$) Sei $(A, B) \in U$. Nach Definition von J_U gilt $A \times B \subseteq J_U$, und nach obigen Lemma ist $(A, B) \in \mathfrak{B}(G, M, J_U)$.

($\supseteq$) Wir zeigen zunächst, dass für jeden Gegenstand g der Gegenstandsbegriff (g^{JJ}, g^J) in U liegt. (Wir schreiben kurz $J := J_U$.) Sei dazu $g \in G$, dann liegt das Infimum

$$\bigwedge_{\substack{(A,B) \in U \\ g \in A}} (A, B) = \left(\bigcap_{\substack{(A,B) \in U \\ g \in A}} A, \left(\bigcup_{\substack{(A,B) \in U \\ g \in A}} B \right)^{II} \right) := (C_g, D_g) \in U$$

im vollständigen Unterverband U, ist also insbesondere ein Begriff von (G, M, J_U). Wegen $g \in C_g$ folgt $g^J \supseteq C_g^J$. Andererseits gilt auch $g^J \subseteq C_g^J$: Für jedes $m \in g^J$ gibt es nach Definition von J einen Begriff $(A, B) \in U$ mit $(g, m) \in A \times B$. Weiter gilt $C_g \subseteq A = B^J \subseteq m^J$ und demnach liegt $m \in C_g^J$.
Insgesamt gilt also $g^J = C_g^J$ bzw. $g^{JJ} = C_g$ und schließlich ist $(g^{JJ}, g^J) = (C_g, D_g)$ ein Begriff in U. Nach Corollarium 3.14 bilden die Gegenstandsbegriffe (g^{JJ}, g^J) eine $\bigvee$-dichte Menge in $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, J_U)$ und weil U ein vollständiger Unterverband, also insbesondere $\bigvee$-abgeschlossen ist, muss jeder Begriff von (G, M, J_U) auch in U liegen, d.h. $\mathfrak{B}(G, M, J_U) \subseteq U$. Schließlich sind U und $\mathfrak{B}(G, M, J_U)$ gleich, und damit folgt sofort die Abgeschlossenheit von J_U. ■

Lemma 106

Für eine Menge $\mathcal{J}$ von abgeschlossenen Teilrelationen eines formalen Kontexts (G, M, I) ist

$$J_0 := \bigcup_{\substack{(A,B) \in \mathfrak{B}(G,M,I) \\ A \times B \subseteq \bigcap \mathcal{J}}} A \times B$$

die größte abgeschlossene Teilrelation in $\bigcap \mathcal{J}$, und es gilt

$$\mathfrak{B}(G, M, J_0) = \bigcap_{J \in \mathcal{J}} \mathfrak{B}(G, M, J).$$

APPROBATIO Weil die Teilrelationen $J \in \mathcal{J}$ abgeschlossen sind, bilden alle $\mathfrak{B}(G, M, J)$ vollständige Unterverbände von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$. Also ist auch deren Durchschnitt $\bigcap_{J \in \mathcal{J}} \mathfrak{B}(G, M, J)$ ein vollständiger Unterverband von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$. Weiter gilt nach dem vorigen Korollar

$$J_0 = \bigcup_{\substack{(A,B) \in \mathfrak{B}(G,M,I) \\ A \times B \subseteq \bigcap \mathcal{J}}} A \times B = \bigcup_{(A,B) \in \bigcap_{J \in \mathcal{J}} \mathfrak{B}(G,M,J)} A \times B$$

und damit ist nach Theorema: Abgeschlossene Teilrelationen und Vollständige Unterverbände 3.105 J_0 die abgeschlossene Teilrelation mit

$$\mathfrak{B}(G, M, J_0) = \bigcap_{J \in \mathcal{J}} \mathfrak{B}(G, M, J).$$

Schließlich muss J_0 auch die größte abgeschlossene Teilrelation in $\bigcap \mathcal{J}$ sein, denn jede Hinzunahme eines Paares $(g, m) \in \bigcap \mathcal{J}$ mit $(g, m) \notin J_0$ führt auf einen Widerspruch: Es gäbe dann nämlich keinen Begriff (A, B) von (G, M, I) mit $(g, m) \in A \times B$, d.h. es wäre wegen Corollarium 3.6 dann $g \not\mathrel{I} m$. Dies wäre aber ein Widerspruch zu $(g, m) \in \bigcap \mathcal{J} \subseteq I$. ■

Corollarium 107

Die Abbildung $U \mapsto \bigcup \{A \times B \mid (A, B) \in U\}$ ist ein Ordnungsisomorphismus zwischen den vollständigen Unterverbänden von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ und den abgeschlossenen Teilrelationen von (G, M, I), ihre Umkehrung ist $J \mapsto \mathfrak{B}(G, M, J)$.

APPROBATIO Aus dem Theorema: Abgeschlossene Teilrelationen und Vollständige Unterverbände 3.105 folgt die Bijektivität der obigen Abbildung

$$U \mapsto \bigcup \{A \times B \mid (A, B) \in U\}$$

Dass sie ordnungserhaltend ist, sieht man sofort. Ihre Umkehrung $J \mapsto \mathfrak{B}(G,M,J)$ ist auch ordnungserhaltend, denn seien $J_1 \subseteq J_2$ zwei abgeschlossene Teilrelationen von (G,M,I), dann ist in obigen Lemma wegen $J_1 \cap J_2 = J_1$

$$J_0 = \bigcup_{\substack{(A,B)\in\mathfrak{B}(G,M,I)\\ A\times B\subseteq J_1}} A \times B = J_1,$$

und demzufolge gilt $\mathfrak{B}(G,M,J_1) = \mathfrak{B}(G,M,J_1) \cap \mathfrak{B}(G,M,J_2)$, d.h. $\mathfrak{B}(G,M,J_1)$ ist in $\mathfrak{B}(G,M,J_2)$ enthalten. Insbesondere ist dann J_1 auch eine abgeschlossene Teilrelation von (G,M,J_2). ■

108 **Theorema**

Für jede Begriffsmenge $T \subseteq \mathfrak{B}(G,M,I)$ gibt es eine kleinste abgeschlossene Teilrelation J_T von (G,M,I), die alle Mengen $A \times B$ für Begriffe $(A,B) \in T$ enthält. $\mathfrak{B}(G,M,J_T)$ ist dann der von T erzeugte vollständige Unterverband $\langle T \rangle$ von $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)$.

APPROBATIO Es gilt für den von T erzeugten vollständigen Unterverband $\langle T \rangle$ von $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)$

$$\langle T \rangle = \bigcap_{\substack{U \leq \underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)\\ T\subseteq U}} U, \text{ und } \mathcal{J} := \left\{ J_U := \bigcup_{(A,B)\in U} A \times B \right\}_{\substack{U \leq \underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)\\ T\subseteq U}}$$

ist eine Menge von abgeschlossenen Teilrelationen von (G,M,I). Also gibt es eine größte abgeschlossene Teilrelation J_T in $\bigcap \mathcal{J}$, sodass gilt:

$$\mathfrak{B}(G,M,J_T) = \bigcap_{\substack{U \leq \underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)\\ T\subseteq U}} \mathfrak{B}(G,M,J_U) = \bigcap_{\substack{U \leq \underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)\\ T\subseteq U}} U = \langle T \rangle.$$

Weil natürlich $\langle T \rangle = \mathfrak{B}(G,M,J_T)$ alle Begriffe aus T enthält, muss $\bigcup_{(A,B)\in T} A \times B$ in der entsprechenden abgeschlossenen Teilrelation J_T enthalten sein. Die Teilrelation J_T ist kleinstmöglich, denn es gibt keinen vollständigen Unterverband von $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)$, der T enthält und kleiner als $\langle T \rangle$ ist, d.h. es gibt keine abgeschlossene Teilrelation von (G,M,I), die $\bigcup_{(A,B)\in T} A \times B$ enthält und kleiner als J_T ist. ■

109 **Lemma: Charakterisierung abgeschlossener Teilrelationen**

Für jede Teilrelation $J \subseteq I$ eines Kontextes (G,M,I) sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(I) J ist eine abgeschlossene Teilrelation von (G,M,I).

(II) Alle formalen Begriffe von (G,M,J) sind formale Begriffe von (G,M,I).

(III) $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,J)$ ist ein vollständiger Unterverband von $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)$.

(IV) Für alle Mengen $X \subseteq G$ bzw. $X \subseteq M$ gilt $X^{JJ} \supseteq X^{JI}$.

(V) Für alle Mengen $X \subseteq G$ bzw. $X \subseteq M$ gilt $X^{JJ} = X^{JI}$.

(VI) Es gilt

$$\forall_{\substack{gIm\\ g\not{J}m}} \left(\exists_{\substack{h\in G\\ g^J\subseteq h^J}} h \not{I} m \text{ und } \exists_{\substack{n\in M\\ m^J\subseteq n^J}} g \not{I} n \right).$$

Falls (G, M, J) ein doppelt-fundierter bereinigter Kontext ist, dann ist auch die folgende Aussage zu den vorigen äquivalent:

(VII) I ist disjunkt zu den Pfeilen von J, d.h. es gilt $I \subseteq \not\swarrow_J \cap \not\nearrow_J$.

APPROBATIO Sei J eine Teilrelation eines formalen Kontextes (G, M, I).

(I)⇔(II) nach Definition Definitio: Abgeschlossene Teilrelation 3.102.

(I)⇔(III) nach Theorema: Abgeschlossene Teilrelationen und Vollständige Unterverbände 3.105.

(II)⇔(III) trivial, denn jeder Unterverband ist natürlich eine Teilmenge.

(IV)⇔(V) Zunächst gilt wegen $J \subseteq I$ stets $X^J \subseteq X^I$ für alle $X \subseteq G$ und alle $X \subseteq M$. Folglich gilt $X^{JJ} \supseteq X^{JI}$ genau dann, wenn $X^{JJ} = X^{JI}$ ist.

(II)⇒(V) Sei $A \subseteq G$ eine Menge von Gegenständen. Der Begriff $(A^{JJ}, A^J) \in \mathfrak{B}(G, M, J)$ ist dann auch ein Begriff von (G, M, I) und damit gilt $A^{JJ} = A^{JI}$.
Dual folgt $B^{JJ} = B^{JI}$ für alle Merkmalsmengen $B \subseteq M$.

(II)⇐(V) Für einen formalen Begriff (A, B) von (G, M, J) gilt stets $A = A^{JJ} = A^{JI} = B^I$ und dual $B = A^I$, also ist (A, B) auch immer ein Begriff von (G, M, I).

(II)⇒(VI) Sei $(g, m) \in I \setminus J$. Dann ist (g^{JJ}, g^J) ein Begriff von (G, M, I) mit $g^J = g^{JJI}$. Wegen $g \not{J} m$ folgt $m \notin g^J = g^{JJI}$ und damit $g^{JJ} \not\subseteq m^I$, also gibt es ein $h \in g^{JJ}$ (d.h. $g^J \subseteq h^J$), sodass $h \notin m^I$ (d.h. $h \not{I} m$) gilt. Dual folgt die Existenz eines Merkmals $n \in M$ mit $m^J \subseteq n^J$ und $g \not{I} n$ durch Betrachten des Merkmalbegriffs (m^J, m^{JJ}).

(II)⇐(VI) Für einen formalen Begriff (A, B) von (G, M, J) muss stets $B = A^I$ gelten. Wäre nämlich $B = A^J \subsetneq A^I$, dann gäbe es ein Merkmal $m \in A^I \setminus A^J$, d.h. es gäbe einen Gegenstand $g \in A$ mit gIm und $g \not{J} m$. Nach Voraussetzung existierte dann ein Gegenstand $h \in G$ mit $g^J \subseteq h^J$ und $h \not{I} m$. Wegen $g \in A$ wäre dann $h \in g^{JJ} \subseteq A$ und damit wäre $m \notin h^I \supseteq A^I$, im Widerspruch zu $m \in A^I$. Dual gilt stets $A = B^I$ für alle formalen Begriffe (A, B) von (G, M, J). Insgesamt ist also jeder Begriff von (G, M, J) auch ein Begriff von (G, M, I).

Sei nun (G, M, J) ein doppelt-fundierter bereinigter Kontext.

(VI)⇒(VII) Für ein Paar $(g, m) \in I \setminus J$ gibt es stets ein $h \in G$ mit $g^J \subseteq h^J$ und $h \not{I} m$, also auch $h \not{J} m$. Weil J bereinigt ist, muss $g^J \subsetneq h^J$ sein. Folglich gilt $g \not\swarrow_J m$. Das gilt auch immer für gJm. Also muss I disjunkt zu $\swarrow_J$ sein. Dual ist I auch disjunkt zu $\nearrow_J$. Insgesamt gilt also $I \subseteq \not\swarrow_J \cap \not\nearrow_J = \complement(\swarrow_J \cup \nearrow_J)$.

(IV)⇐(VII) Sei $A \subseteq G$ und $g \in A^{JI}$. Falls $g \notin A^{JJ}$ wäre, dann gäbe es ein $m \in A^J$ mit $g \not{J} m$. Weil (G, M, J) merkmalsfundiert ist, gäbe es dann ein $n \in M$ mit $g \nearrow_J n$ und $m^J \subseteq n^J$, d.h. $n \in m^{JJ} \subseteq A^{JJJ} = A^J \subseteq g^J$ und damit gJn. Widerspruch! Also gilt $A^{JI} \subseteq A^{JJ}$. Dual gilt das wegen der Gegenstandsfundiertheit auch für Merkmalsmengen. ■

110 **Theorema**

Für eine abgeschlossene Teilrelation J und einen verträglichen Teilkontext (H, N) von (G, M, I) ist

(I) (H, N) ein verträglicher Teilkontext von (G, M, J), und

(II) $J \cap H \times N$ eine abgeschlossene Teilrelation von $(H, N, I \cap H \times N)$.

APPROBATIO (I) Zunächst ist jeder Begriff (A, B) von (G, M, J) auch ein Begriff von (G, M, I) und damit ist die Restriktion $(A \cap H, B \cap N)$ stets ein Begriff von $(H, N, I \cap H \times N)$. Wegen $A \times B \subseteq J$ muss auch

$$(A \cap H) \times (B \cap N) \subseteq J \cap (H \times N)$$

gelten und damit folgt $(B \cap N)^{I \cap (H \times N)} = A \cap H \subseteq (B \cap N)^{J \cap (H \times N)}$ und andererseits gilt wegen $J \subseteq I$ auch die umgekehrte Inklusion. Dual gilt auch $B \cap N = (A \cap H)^{J \cap (H \times N)}$. Insgesamt ist also $(A \cap H, B \cap N)$ stets ein Begriff von $(H, N, J \cap (H \times N))$, d.h. (H, N) ist verträglich.

(II) Sei (A, B) ein Begriff von $(H, N, J \cap H \times N)$. Weil (H, N) ein verträglicher Teilkontext von (G, M, J) ist, gibt es nach Theorema: Verträgliche Teilkontexte und Vollständige Epimorphismen 3.79 einen Begriff (C, D) von (G, M, J) und damit auch von (G, M, I), sodass $(A, B) = (C \cap H, D \cap N)$ gilt. Schließlich muss dann die Restriktion (A, B) wieder ein Begriff von $(H, N, I \cap H \times N)$ sein, d.h. $J \cap H \times N$ ist abgeschlossen. ■

3.6.5 Subdirekte Zerlegungen

Definitio: Direktes Produkt 111

Für eine Familie $\{(V_t, \leq_t)\}_{t\in T}$ von vollständigen Verbänden ist deren DIREKTES PRODUKT definiert als

$$\bigtimes_{t\in T} (V_t, \leq_t) := \left(\bigtimes_{t\in T} V_t, \leq \right)$$

mit

$$(x_t)_{t\in T} \leq (y_t)_{t\in T} :\Leftrightarrow \underset{t\in T}{\forall} x_t \leq_t y_t.$$

Die $(V_t, \leq_t)$ heißen FAKTOREN des Produkts und die Abbildungen

$$\pi_t \colon \begin{aligned} \bigtimes_{t\in T} (V_t, \leq_t) &\to (V_t, \leq_t) \\ (x_t)_{t\in T} &\mapsto x_t \end{aligned}$$

für $t \in T$ sind die KANONISCHEN PROJEKTOREN.

Jedes direkte Produkt von vollständigen Verbänden ist ein vollständiger Verband, das Infimum bzw. Supremum wird komponentenweise gebildet. Die kanonischen Projektoren sind vollständige Epimorphismen.

Definitio: Subdirektes Produkt, Subdirekte Zerlegung 112

Ein SUBDIREKTES Produkt von vollständigen Verbänden ist ein vollständiger Unterverband des direkten Produkts, sodass alle kanonischen Projektoren surjektiv sind. Eine SUBDIREKTE ZERLEGUNG eines vollständigen Verbands V ist eine Famile $\{\Theta_t\}_{t\in T}$ von vollständige Kongruenzen auf V mit

$$\bigcap_{t\in T} \Theta_t = \Delta_V.$$

Die Diagonale Δ_V heißt auch TRIVIALE vollständige Kongruenz auf V. Die Faktorverbände ${}^{V}\!/_{\Theta_t}$ sind die FAKTOREN der subdirekten Zerlegung.

Theorema: Subdirekte Produkte und Subdirekte Zerlegungen 113

Wenn V ein subdirektes Produkt der vollständigen Verbände $\{V_t\}_{t\in T}$ ist, dann bilden die Kerne $\{\ker \pi_t\}_{t\in T}$ der kanonischen Projektoren eine subdirekte Zerlegung von V. Umgekehrt, wenn $\{\Theta_t\}_{t\in T}$ eine subdirekte Zerlegung von V ist, dann ist V isomorph zu einem subdirekten Produkt U der Faktoren $\left\{ {}^{V}\!/_{\Theta_t} \right\}_{t\in T}$ vermöge dem Isomorphismus

$$\iota \colon \begin{aligned} (V, \leq) &\to U \\ v &\mapsto \left([v]_{\Theta_t} \right)_{t\in T}. \end{aligned}$$

APPROBATIO (⇒) Sei $\mathbb{V}$ ein subdirektes Produkt der vollständigen Verbände $\{\mathbb{V}_t\}_{t\in T}$. Alle kanonischen Projektoren π_t sind vollständige Epimorphismen und demzufolge sind deren Kerne $\ker \pi_t$ vollständige Kongruenzen.

(⇐) tba. ■

114 **Definitio: subdirekt irreduzibel**

Ein vollständiger Verband V heißt (VOLLSTÄNDIG) SUBDIREKT IRREDUZIBEL, wenn jede subdirekte Zerlegung von V die triviale Kongruenz Δ_V enthält.

115 **Theorema**

Ein vollständiger Verband V ist genau dann subdirekt irreduzibel, wenn der vollständige Kongruenzenverband von V genau ein Atom hat, also wenn V eine kleinste nicht-triviale vollständige Kongruenz hat, d.h. eine vollständige Kongruenz $\Theta \neq \Delta$ mit $\Theta \leq \Psi$ für alle nicht-trivialen vollständige Kongruenzen $\Psi \neq \Delta$.

116 **Lemma**

Sei Θ eine vollständige Kongruenz auf $\mathfrak{B}(G, M, I)$ und $g \swarrow m$. Aus $\gamma g \Theta (\gamma g)_*$ folgt $\mu m \Theta (\mu m)^*$, d.h. Kongruenzen folgen den Pfeilen rückwärts.

117 **Lemma**

Ein vollständiger Verband V ist genau dann subdirekt irreduzibel, wenn zwei Elemente $v \neq w$ von V gibt, sodass jede nicht-triviale Kongruenz von V das Paar (v, w) enthält. Es genügt dabei für doppelt fundierte Begriffsverbände nur die Paare der Form $(\gamma g, (\gamma g)_*)$ und $(\mu m, (\mu m)^*)$ zu betrachten.

118 **Lemma**

Ein vollständiger Verband V ist genau dann subdirekt irreduzibel, wenn folgendes gilt: Falls V isomorph zu einem subdirekten Produkt von vollständigen Verbänden $\{V_t\}_{t \in T}$ ist, dann ist V bereits zu einem der Faktoren V_t kanonisch isomorph.[a]

[a] KANONISCH ISOMORPH meint hier, dass der kanonische Projektor π_t bijektiv und damit ein Isomorphismus von V nach V_t ist.

119 **Theorema: Überdeckungen mit pfeilabgeschlossenen Teilkontexten**

Sei (G, M, I) der reduzierte Kontext eines doppelt fundierten Begriffsverbands. Die subdirekten Zerlegungen von $\mathfrak{B}(G, M, I)$ entsprechen genau den Familien $\{(G_t, M_t, I \cap G_t \times M_t)\}_{t \in T}$ von pfeilabgeschlossenen Teilkontexten mit $G = \bigcup_{t \in T} G_t$ und $M = \bigcup_{t \in T} M_t$.

APPROBATIO Nach Theorema: Begriffe von $(G, M, \not\swarrow)$ 3.101 ist der Verband der vollständigen Kongruenzen und der Verband der pfeilabgeschlossenen Teilkontexte dual isomorph, also folgt dass $\bigcap_{t \in T} \Theta_t = \Delta$ genau dann gilt, wenn für die entsprechenden Teilkontexte $\bigcup_{t \in T} G_t = G$ und $\bigcup_{t \in T} M_t = M$ gilt. ■

120 **Definitio: 1-erzeugter pfeilabgeschlossener Teilkontext**

Für jeden Gegenstand g gibt es einen kleinsten pfeilabgeschlossenen Teilkontext, der g umfasst. Dieser Teilkontext wird auch 1-ERZEUGT genannt.

Theorema: Subdirekt irreduzible Begriffsverbände und 1-erzeugte Kontexte 121

Ein doppelt fundierter reduzierter Kontext (G, M, I) ist 1-erzeugt genau dann, wenn sein Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ subdirekt irreduzibel ist.

APPROBATIO (G, M, I) ist genau dann 1-erzeugt, wenn es einen Gegenstand $g \in G$ gibt, sodass der kleinste pfeilabgeschlossene Teilkontext, der g enthält, gerade (G, M, I) ist. Das ist äquivalent dazu, dass jede Überdeckung von (G, M, I) durch pfeilabgeschlossene Teilkontexte bereits (G, M, I) enthält. Wegen Theorema: Überdeckungen mit pfeilabgeschlossenen Teilkontexten 3.119 ist dies äquivalent dazu, dass jede subdirekte Zerlegung von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ bereits die triviale Kongruenz enthält, also genau dann, wenn $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ subdirekt irreduzibel ist. ■

Corollarium 122

Die folgenden Aussagen sind für einen reduzierten Kontext (G, M, I) mit doppelt fundierten Begriffsverband äquivalent:

(I) $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ ist subdirekt irreduzibel.

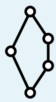
(II) (G, M, I) ist 1-erzeugt.

(III) Jede Überdeckung von (G, M, I) durch pfeilabgeschlossene Teilkontexte enthält (G, M, I).

Theorema: Subdirekte Zerlegung in subdirekt irreduzible Faktoren 123

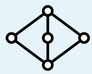
Jeder doppelt fundierte vollständige Verband besitzt eine subdirekte Zerlegung in subdirekt irreduzible Faktoren. Der Verband ist modular, wenn nicht

$$\mathrm{N}_5 = \underline{\mathfrak{B}} \begin{array}{|c|c|c|}\hline \times & \times & \\ \hline \times & & \\ \hline & & \times \\ \hline\end{array} =$$



als Faktor enthalten ist. Der Verband ist distributiv, wenn er modular ist und nicht

$$\mathrm{M}_3 = \underline{\mathfrak{B}} \begin{array}{|c|c|c|}\hline \times & & \\ \hline & \times & \\ \hline & & \times \\ \hline\end{array} =$$



als Faktor enthalten ist.

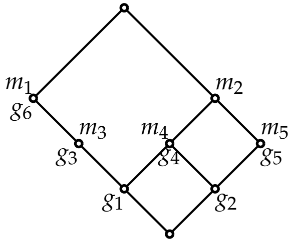
APPROBATIO Nach Theorema: Standardkontext 3.37 ist jeder vollständige Verband $\mathbb{V}$ mit doppelt fundierter Ordinalskala isomorph zum Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}\mathbb{K}_{\mathbb{V}}$ des Standardkontexts. Sei also o.E.d.A. $\mathbb{V} = \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ und (G, M, I) doppelt fundiert. Für jeden Gegenstand $g \in G$ sei $\left(G_g, M_g, I \cap G_g \times M_g\right)$ der kleinste pfeilabgeschlossene Teilkontext, der g enthält. Nach Theorema: Pfeilabgeschlossene und Verträgliche Teilkontexte 3.83 ist jeder dieser Teilkontexte verträglich und wegen Theorema 3.87 auch reduziert. Die Teilkontexte $\left(G_g, M_g, I \cap G_g \times M_g\right)$ sind natürlich 1-erzeugt und damit sind ihre Begriffsverbände subdirekt irreduzibel. Mit Theorema: Überdeckungen mit pfeilabgeschlossenen Teilkontexten 3.119 folgt, dass $\{\ker \pi_{G_g, M_g}\}_{g \in G}$ eine subdirekte Zerlegung von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ ist, und die Faktoren $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I) \big/ \ker \pi_{G_g, M_g} \cong \underline{\mathfrak{B}}\left(G_g, M_g, I \cap G_g \times M_g\right)$ sind subdirekt irreduzibel. ■

124 **Corollarium**

Die subdirekten Zerlegungen eines vollständigen Verbands in subdirekt irreduzible Faktoren entsprechen genau den Überdeckungen des zugehörigen Standardkontextes mit 1-erzeugten Teilkontexten.

125 **Exemplum**

Aufgabe H6: Geben Sie zu folgendem Diagramm den Standardkontext der zugehörigen geordneten Menge an, bestimmen Sie die Pfeilrelationen und die pfeilabgeschlossenen Teilkontexte.



Bestimmen Sie auch die Relation $\nearrow\!\!\!\!\!\swarrow$ und den zugehörigen Begriffsverband. Markieren Sie die durch die entsprechenden Homomorphismen induzierten Äquivalenzklassen.
Setze $G := \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\}$ und $M := \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$, dann stellt das obige Diagramm gerade den Begriffsverband $\mathfrak{B}(G, M, I)$ des formalen Kontextes (G, M, I) mit folgender Inzidenzrelation I dar:

I	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
g_1	×	×	×	×	
g_2		×		×	×
g_3	×		×		
g_4		×		×	
g_5		×			×
g_6	×				

(G, M, I) ist nicht reduziert, denn der Gegenstand g_4 ist reduzibel, d.h. der Gegenstandsbegriff γg_4 ist $\bigvee$-reduzibel, denn es gilt

$$\begin{aligned}
\gamma g_4 &= (\{g_4\}^{II}, \{g_4\}^{I}) \\
&= (\{g_1, g_2, g_4\}, \{m_2, m_4\}) \\
&= (\{g_1, g_2\}^{II}, \{m_1, m_2, m_3, m_4\} \cap \{m_2, m_4, m_5\}) \\
&= \bigvee\{(\{g_1\}, \{m_1, m_2, m_3, m_4\}), (\{g_2\}, \{m_2, m_4, m_5\})\} \\
&= \bigvee\{(\{g_1\}^{II}, \{g_1\}^{I}), (\{g_2\}^{II}, \{g_2\}^{I})\} \\
&= \bigvee\{\gamma g_1, \gamma g_2\}
\end{aligned}$$

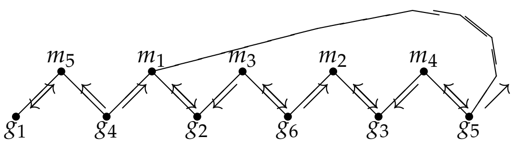
Ferner sind alle übrigen Gegenstände und Merkmale irreduzibel, denn alle übrigen Gegenstandbegriffe haben nur einen unteren Nachbarn und alle Merkmalsbegriffe haben nur einen oberen Nachbarn. Damit ist der Standardkontext

$$\begin{aligned}\mathbb{K}(\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)) &= (J(\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)), M(\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)), \leq) \\ &= (\{\gamma g_1, \gamma g_2, \gamma g_3, \gamma g_5, \gamma g_6\}, \{\mu m_1, \mu m_2, \mu m_3, \mu m_4, \mu m_5\}, \leq)\end{aligned}$$

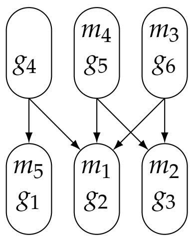
isomorph zum reduzierten Kontext $(G \setminus \{g_4\}, M, I \cap ((G \setminus \{g_4\}) \times M))$ Es ist noch anzumerken, dass der betrachtete formale Kontext endlich, also doppelt-fundiert ist. Ein Teilkontext ist somit pfeilabgeschlossen genau dann, wenn er verträglich ist. Die Pfeilrelationen $\swarrow$, $\nearrow$ und $\swarrow\!\!\!\!\nearrow$ ergeben sich in (G, M, I) zu:

$\swarrow, \nearrow$	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
g_1	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$
g_2	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\times$	$\swarrow$	$\times$	$\times$
g_3	$\times$	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\times$	$\swarrow$	
g_4	$\nearrow$	$\times$		$\times$	$\nearrow$
g_5	$\nearrow$	$\times$		$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$	$\times$
g_6	$\times$	$\nearrow$	$\swarrow\!\!\!\!\nearrow$		

Die Pfeilrelationen vererben sich sogleich auf den reduzierten Kontext $(G \setminus \{g_4\}, M, I \cap ((G \setminus \{g_4\}) \times M))$. Aus den Pfeilrelationen entsteht nun der gerichtete Graph $(G \uplus M, \swarrow \cup \nearrow)$.



Einerseits lässt sich hieran die Doppelpfeilrelation $\swarrow\!\!\!\swarrow$ recht schnell ablesen, andererseits sind die pfeilabgeschlossenen Teilkontexte erkennbar. Im Graphen sehen wir einige Zusammenhänge:

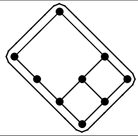
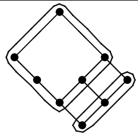
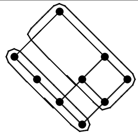
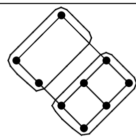
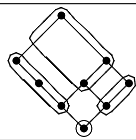
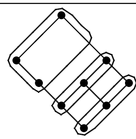
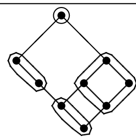
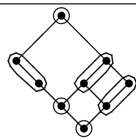
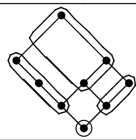
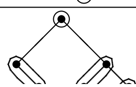


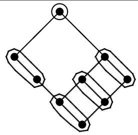
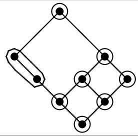
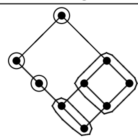
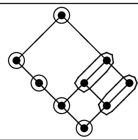
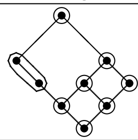
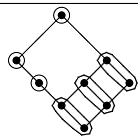
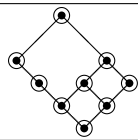
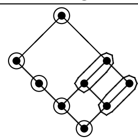
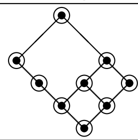
Hierbei wurden zuerst Komponenten gebildet, die aus Gegenständen und Merkmalen bestehen, die über $\swarrow\!\!\!\!\nearrow$ in Relation stehen. (Die Komponenten sind hier durch die Ovale dargestellt.) Jede Komponente ist somit bereits pfeilabgeschlossen. Die Verbindungen zwischen den Komponenten ergeben sich aus den Relationen $\swarrow \setminus \swarrow\!\!\!\!\nearrow$ und

$\nearrow \setminus \swarrow\!\!\!\nearrow$, indem man diese orientierungsinvariant übernimmt. Die pfeilabgeschlossenen Teilkontexte finden wir nun, indem wir alle möglichen Kombinationen der Komponenten bilden. Dabei ist zu beachten, dass mit der Auswahl einer Komponente sofort auch alle auf einem fallenden Pfad erreichbaren Komponenten ausgewählt sind. Die Gesamtheit der möglichen Kombinationen ist in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Anhand der mittleren Spalten ergeben sich die Gegenstandsmengen H und die Merkmalsmengen N der entsprechenden Teilkontexte (H, N, I) und damit haben wir für jede Kombination einen surjektiven vollständiger Homomorphismus

$$\varphi_{H,N}\colon \begin{array}{c} \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I) \to \underline{\mathfrak{B}}(H, N, I) \\ (A, B) \mapsto (A \cap H, B \cap N) \end{array}$$

dessen Kern $\ker \varphi_{H,N}$ eine Kongruenzrelation auf $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ ist. In der rechten Spalte ist die jeweils zugehörige Kongruenzklassenzerlegung $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I) \big/ \ker \varphi_{H,N}$ dargestellt. Erkennbar ist jede Kongruenzklasse ein Intervall im Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$.

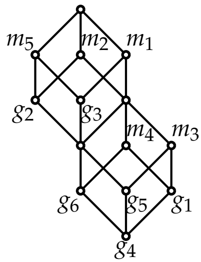
	g_4	m_4 g_5	m_3 g_6	m_5 g_1	m_1 g_2	m_2 g_3	$\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)/_{\ker \varphi_{H,N}}$
1							
2				×			
3					×		
4						×	
5				×	×		
6				×		×	
7					×	×	
8				×	×	×	
9≡5	×			×	×		
							

	g_4	m_4 g_5	m_3 g_6	m_5 g_1	m_1 g_2	m_2 g_3	$\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)/_{\ker\varphi_{H,N}}$
11		×			×	×	
12		×		×	×	×	
13			×		×	×	
14			×	×	×	×	
15≡12	×	×		×	×	×	
16		×	×		×	×	
17		×	×	×	×	×	
18≡14	×		×	×	×	×	
19≡17	×	×	×	×	×	×	

Andererseits haben wir für die Doppelpfeilrelation $\swarrow\!\!\!\swarrow$ folgenden Kontext:

$\swarrow\!\!\!\swarrow$	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
g_1					$\swarrow\!\!\!\swarrow$
g_2	$\swarrow\!\!\!\swarrow$		$\swarrow\!\!\!\swarrow$	$\swarrow\!\!\!\swarrow$	
g_3		$\swarrow\!\!\!\swarrow$	$\swarrow\!\!\!\swarrow$	$\swarrow\!\!\!\swarrow$	
g_4					
g_5				$\swarrow\!\!\!\swarrow$	
g_6			$\swarrow\!\!\!\swarrow$		

Wie wir sehen ist der reduzible Gegenstand g_4 unbedeutend in diesem Kontext. Betrachten wir die zur Doppelpfeilrelation $\swarrow\!\!\!\swarrow$ komplementäre Relation Nichtdoppelpfeilrelation $\not\swarrow\!\!\!\swarrow$, dann sieht deren zugehöriger Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, \not\swarrow\!\!\!\swarrow)$ so aus:



Die vierzehn formalen Begriffe von $(G, M, \not\swarrow\!\!\!\swarrow)$ bestimmen verträgliche Teilkontexte, d.h. für einen Begriff $(G \setminus H, N) \in \mathfrak{B}(G, M, \not\swarrow\!\!\!\swarrow)$ ist (H, N, I) ein verträglicher Teilkontext von (G, M, I).

	$(G \setminus H, N)$	(H, N)
1	$(G, \emptyset)$	$(\emptyset, \emptyset)$
2	$(\{g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\}, \{m_5\})$	$(\{g_1\}, \{m_5\})$
3	$(\{g_1, g_3, g_4, g_5, g_6\}, \{m_1\})$	$(\{g_2\}, \{m_1\})$
4	$(\{g_1, g_2, g_4, g_5, g_6\}, \{m_2\})$	$(\{g_3\}, \{m_2\})$
5	$(\{g_3, g_4, g_5, g_6\}, \{m_1, m_5\})$	$(\{g_1, g_2\}, \{m_1, m_5\})$
6	$(\{g_2, g_4, g_5, g_6\}, \{m_2, m_5\})$	$(\{g_1, g_3\}, \{m_2, m_5\})$
7	$(\{g_1, g_4, g_5, g_6\}, \{m_1, m_2\})$	$(\{g_2, g_3\}, \{m_1, m_2\})$
8	$(\{g_4, g_5, g_6\}, \{m_1, m_2, m_5\})$	$(\{g_1, g_2, g_3\}, \{m_1, m_2, m_5\})$
11	$(\{g_1, g_4, g_6\}, \{m_1, m_2, m_4\})$	$(\{g_2, g_3, g_5\}, \{m_1, m_2, m_4\})$
12	$(\{g_4, g_6\}, \{m_1, m_2, m_4, m_5\})$	$(\{g_1, g_2, g_3, g_5\}, \{m_1, m_2, m_4, m_5\})$
13	$(\{g_1, g_4, g_5\}, \{m_1, m_2, m_3\})$	$(\{g_2, g_3, g_6\}, \{m_1, m_2, m_3\})$
14	$(\{g_4, g_5\}, \{m_1, m_2, m_3, m_5\})$	$(\{g_1, g_2, g_3, g_6\}, \{m_1, m_2, m_3, m_5\})$
16	$(\{g_1, g_4\}, \{m_1, m_2, m_3, m_4\})$	$(\{g_2, g_3, g_5, g_6\}, \{m_1, m_2, m_3, m_4\})$
17	$(\{g_4\}, \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\})$	$(\{g_1, g_2, g_3, g_5, g_6\}, \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\})$

Nun ist der Kontext (G, M, I) jedoch nicht reduziert, d.h. nicht jeder verträgliche Teilkontext (H, N, I) erklärt auch einen Begriff $(G \setminus H, N) \in \mathfrak{B}(G, M, \not\swarrow\!\!\!\swarrow)$. Daher kann es weitere verträgliche Teilkontexte geben – und es gibt auch welche, nämlich solche die auch den Gegenstand g_4 enthalten: Wählt man diejenigen Teilkontexte, die bereits die Komponenten

$$\boxed{\begin{matrix} m_5 \\ g_1 \end{matrix}} \quad \text{und} \quad \boxed{\begin{matrix} m_1 \\ g_2 \end{matrix}}$$

enthalten, und fügt die Komponente

$$\boxed{\begin{matrix} \\ g_4 \end{matrix}}$$

hinzu, so sind die entstehenden Teilkontexte wieder pfeilabgeschlossen, also verträglich. (Alternativ kann man zu allen Teilkontexten die Komponenten

$$\boxed{\begin{matrix} m_5 \\ g_1 \end{matrix}} \quad \text{und} \quad \boxed{\begin{matrix} m_1 \\ g_2 \end{matrix}} \quad \text{und} \quad \boxed{\begin{matrix} \\ g_4 \end{matrix}}$$

hinzunehmen.) Auf diese Weise ergeben sich fünf weitere verträgliche Teilkontexte:

	(H, N)
9≡5	$(\{g_1, g_2, g_4\}, \{m_1, m_5\})$
10≡8	$(\{g_1, g_2, g_3, g_4\}, \{m_1, m_2, m_5\})$
15≡12	$(\{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}, \{m_1, m_2, m_4, m_5\})$
18≡14	$(\{g_1, g_2, g_3, g_4, g_6\}, \{m_1, m_2, m_3, m_5\})$
19≡17	$(\{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\}, \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\})$

3.6.6 Direkte Summen

126 **Lemma: Begriffsverband einer direkten Summe**

Der Begriffsverband einer direkten Summe von Kontexten ist isomorph zum direkten Produkt der einzelnen Begriffsverbände:

$$\underline{\mathfrak{B}}\left(\mathop{+}_{t\in T}(G_t, M_t, I_t)\right) \cong \mathop{\times}_{t\in T} \underline{\mathfrak{B}}(G_t, M_t, I_t)$$

APPROBATIO Sei zunächst (G, M, I) die direkte Summe der (G_t, M_t, I_t). Dann gilt für jede Gegenstandsmenge $A_t \subseteq G_t$

$$A_t^I = A_t^{I_t} \cup \bigcup_{s\neq t} M_s,$$

denn jeder Gegenstand von G_t hat in (G, M, I) insbesondere alle Merkmale der Kontexte (G_s, M_s, I_s) für $s \neq t$. Damit folgt für alle $A \subseteq G = \dot{\bigcup}_{t\in T} G_t$

$$A^I = \left(\dot{\bigcup}_{t\in T}(A \cap G_t)\right)^I = \bigcap_{t\in T}(A \cap G_t)^I = \bigcup_{t\in T}(A \cap G_t)^{I_t}.$$

Die folgende Abbildung beschreibt nun den gesuchten vollständigen Verbandsisomorphismus:

$$\phi\colon \begin{array}{l} \mathfrak{B}\left(\bigplus_{t\in T}(G_t, M_t, I_t)\right) \to \bigtimes_{t\in T} \mathfrak{B}(G_t, M_t, I_t) \\ \qquad\qquad (A, B) \mapsto (A \cap G_t, B \cap M_t)_{t\in T} \end{array}$$

(INJEKTIV) Aus $\phi(A, B) = \phi(C, D)$ folgt mit obigem

$$B = A^I = \bigcup_{t\in T}(A \cap G_t)^{I_t} = \bigcup_{t\in T}(C \cap G_t)^{I_t} = C^I = D$$

also $(A, B) = (C, D)$.

(SURJEKTIV) Jedes Element $(A_t, B_t)_{t\in T} \in \bigtimes_{t\in T} \mathfrak{B}(G_t, M_t, I_t)$ ist natürlich genau das ϕ-Bild von $\left(\dot\bigcup_{t\in T} A_t, \dot\bigcup_{t\in T} B_t\right)$. Dieses Paar ist auch tatsächlich ein Begriff, denn es gilt

$$\left(\dot\bigcup_{t\in T} A_t\right)^I = \bigcap_{t\in T} A_t^I = \bigcup_{t\in T} A_t^{I_t} = \bigcup_{t\in T} B_t.$$

(VOLLSTÄNDIG) Weil Infima und Suprema im direkten Produkt koordinatenweise gebildet werden, und durch den Schnitt der Umfänge bzw. Inhalte definiert sind, muss ϕ verträglich mit beliebigen Infima und Suprema sein. ■

Corollarium: Begriffsverband einer direkten Summe 127

Für die direkte Summe von zwei Kontexten gilt

$$\mathfrak{B}\left((G, M, I) + (H, N, J)\right) \cong \mathfrak{B}(G, M, I) \times \mathfrak{B}(H, N, J)$$

vermöge dem vollständigen Verbandsisomorphismus

$$\phi\colon \begin{array}{l} \mathfrak{B}((G, M, I) + (H, N, J)) \to \mathfrak{B}(G, M, I) \times \mathfrak{B}(H, N, J) \\ \qquad\qquad (A, B) \mapsto ((A \cap G, B \cap M), (A \cap H, B \cap N)). \end{array}$$

128 **Theorema: Subdirekte Produkte und Abgeschlossene Teilrelationen**
Jedes subdirekte Produkt der Begriffsverbände $\mathfrak{B}(G_t, M_t, I_t)$ entspricht einer abgeschlossenen Teilrelation J vom Summenkontext $\mathop{+}_{t\in T}(G_t, M_t, I_t)$ mit $J \cap G_t \times M_t = I_t$ für alle $t \in T$.

APPROBATIO Nach Theorema: Abgeschlossene Teilrelationen und Vollständige Unterverbände 3.105 bestimmt jeder vollständige Unterverband eine abgeschlossene Teilrelation und umgekehrt. Jedes subdirekte Produkt ist insbesondere ein vollständiger Unterverband, also isomorph zu einem Begriffsverband $\mathfrak{B}(\dot{\bigcup}_{t\in T} G_t, \dot{\bigcup}_{t\in T} M_t, J)$ mit einer abgeschlossenen Teilrelation J.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{B}(G,M,J) \arrow[r, hook, "\mathrm{id}"] \arrow[d, shift left, dashed, two heads, "\phi"] & \mathfrak{B}(G,M,I) := \mathfrak{B}\left(\mathop{+}_{t\in T}(G_t,M_t,I_t)\right) \arrow[d, shift left, two heads, "\phi"] \\
U \arrow[u, shift left, dashed, hook, two heads, "\phi^{-1}"] \arrow[r, hook, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, dashed, two heads, "\pi_t"] & \bigtimes_{t\in T} \mathfrak{B}(G_t,M_t,I_t) \arrow[u, shift left, hook, two heads, "\phi^{-1}"] \arrow[d, two heads, "\pi_t"] \\
& \mathfrak{B}(G_t,M_t,I_t)
\end{tikzcd}$$

Weiterhin gilt

$$J \cap G_t \times M_t = \bigcup_{(A,B)\in\mathfrak{B}(G,M,J)} (A \cap G_t) \times (B \cap M_t)$$

und

$$I_t = \bigcup_{(A_t,B_t)\in\mathfrak{B}(G_t,M_t,I_t)} A_t \times B_t,$$

also folgt aus der Surjektivität der Projektionen $\pi_t \circ \phi\colon (A, B) \mapsto (A \cap G_t, B \cap M_t)$ stets $I_t = J \cap G_t \times M_t$. Das gilt auch umgekehrt, denn für eine nicht surjektive Projektion wäre $J \cap G_t \times M_t \subsetneq I_t$ für einen Index $t \in T$. $\lightning$ ■

3.6.7 Bindungen

Der spezielle Fall mit zwei Kontexten

Seien (G, M, I) und (H, N, J) zwei (disjunkte) formale Kontexte. Deren direkte Summe entsteht durch diagonales Übereinandersetzen der beiden Kontexte und Füllen der übrigen Felder mit Kreuzen, formalisiert als

	M	N
G	I	×
H	×	J

$$(G,M,I)+(H,N,J) := \left(G\,\dot\cup\, H, M\,\dot\cup\, N, \begin{array}{c|c} I & \times \\ \hline \times & J \end{array}\right)$$
$$\text{mit } \begin{array}{c|c} I & \times \\ \hline \times & J \end{array} := I\,\dot\cup\, J\,\dot\cup\, G\times N\,\dot\cup\, H\times M.$$

Nach dem vorherigen Theorem 3.128 entsprechen die subdirekten Produkte der beiden Begriffsverbände $\mathfrak{B}(G,M,I)$ und $\mathfrak{B}(H,N,J)$ genau den abgeschlossenen Teilrelationen im Summenkontext $(G,M,I)+(H,N,J)$ mit der Darstellung $I\,\dot\cup\, J\,\dot\cup\, R\,\dot\cup\, S$ für binäre Relationen $R\subseteq G\times N$ und $S\subseteq H\times M$, und das sind subdirekte Summen

$$\begin{array}{c|cc} & M & N \\ G & I & R \\ H & S & J \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} (G,M,I) & R \\ \hline S & (H,N,J) \end{array} := \left(G\,\dot\cup\, H, M\,\dot\cup\, N, \begin{array}{c|c} I & R \\ \hline S & J \end{array}\right) \text{ mit } \begin{array}{c|c} I & R \\ \hline S & J \end{array} := I\,\dot\cup\, J\,\dot\cup\, R\,\dot\cup\, S.$$

Lemma: Abgeschlossene Teilrelationen der direkten Summe 129

Sei $\begin{array}{c|c} I & R \\ \hline S & J \end{array}$ abgeschlossen im Summenkontext. Dann gelten:

(I) Für alle $g\in G$ ist g^R ein Inhalt von (H,N,J) mit $g^I\subseteq g^{RJS}$.

(II) Für alle $h\in H$ ist h^S ein Inhalt von (G,M,I) mit $h^J\subseteq h^{SJR}$.

(III) Für alle $m\in M$ ist m^S ein Umfang von (H,N,J) mit $m^I\subseteq m^{SJR}$.

(IV) Für alle $n\in N$ ist n^R ein Umfang von (G,M,I) mit $n^J\subseteq n^{RJS}$.

Approbatio (I) Sei $g\in G$. Weil $\begin{array}{c|c} I & R \\ \hline S & J \end{array}$ eine abgeschlossene Teilrelation ist, muss $\left(g^{\begin{array}{c|c} I & R \\ \hline S & J \end{array}\begin{array}{c|c} I & R \\ \hline S & J \end{array}}, g^{\begin{array}{c|c} I & R \\ \hline S & J \end{array}}\right)$ ein $\begin{array}{c|c} I & \times \\ \hline \times & J \end{array}$-Begriff sein, also ist die Projektion

$$\left(g^{\begin{array}{c|c} I & R \\ \hline S & J \end{array}\begin{array}{c|c} I & R \\ \hline S & J \end{array}}\cap H, g^{\begin{array}{c|c} I & R \\ \hline S & J \end{array}}\cap N\right) = \left(g^{RJ}, g^R\right)$$

ein Begriff von (H,N,J). Damit folgt nun, dass g^R ein J-Inhalt ist, und weiterhin gilt

$$g^I = g^{\begin{array}{c|c} I & R \\ \hline S & J \end{array}}\cap M = g^{\begin{array}{c|c} I & R \\ \hline S & J \end{array}\begin{array}{c|c} I & R \\ \hline S & J \end{array}\begin{array}{c|c} I & R \\ \hline S & J \end{array}}\cap M = g^{\begin{array}{c|c} I & R \\ \hline S & J \end{array}\begin{array}{c|c} I & R \\ \hline S & J \end{array}\begin{array}{c} I \\ \hline S \end{array}}$$
$$\subseteq \left(g^{\begin{array}{c|c} I & R \\ \hline S & J \end{array}\begin{array}{c|c} I & R \\ \hline S & J \end{array}}\cap H\right)^{\begin{array}{c} I \\ \hline S \end{array}} = \left(g^{\begin{array}{c|c} I & R \\ \hline S & J \end{array}\begin{array}{c|c} I & R \\ \hline S & J \end{array}}\cap H\right)^{S} = g^{RJS}.$$

(II) dual wegen $h^{\begin{array}{c|c} I & R \\ \hline S & J \end{array}} = h^S\,\dot\cup\, h^J$.

(III) dual mit $m^{\begin{array}{c|c} I & R \\ \hline S & J \end{array}} = m^I\,\dot\cup\, m^S$.

(IV) analog wegen $n^{\begin{array}{c|c} I & R \\ \hline S & J \end{array}} = n^R\,\dot\cup\, n^J$. ■

Definitio: Bindung 130

Eine Relation $R\subseteq G\times N$ heißt Bindung von (G,M,I) nach (H,N,J), wenn $g^R = g^{RJJ}$ für alle Gegenstände $g\in G$ und $n^R = n^{RII}$ für alle Merkmale $n\in N$ gelten. Symbol: $R\in\operatorname{Bond}((G,M,I),(H,N,J))$

Wenn R eine Bindung von (G,M,I) nach (H,N,J) ist, dann ist sogar jeder beliebige Inhalt von (G,N,R) stets ein Inhalt von (H,N,J), denn es gilt bekanntlich

$$A^R = \bigcap_{g\in A} g^R,$$

und dual ist jeder R-Umfang stets ein Umfang von (G, M, I). Insbesondere ist I und auch jede abgeschlossene Teilrelation von (G, M, I) stets eine Bindung von (G, M, I) nach (G, M, I).

131 **Lemma: Durchschnitt von Bindungen**

Der Durchschnitt von Bindungen ist eine Bindung, d.h. $\operatorname{Bond}((G, M, I), (H, N, J))$ ist abgeschlossen gegen beliebige Durchschnitte.

APPROBATIO Seien R_1 und R_2 Bindungen von (G, M, I) nach (H, N, J). Für jeden Gegenstand $g \in G$ gilt $g^{R_1 \cap R_2} = g^{R_1} \cap g^{R_2}$ und folglich ist $g^{R_1 \cap R_2}$ als Durchschnitt von (H, N, J)-Inhalten selbst ein Inhalt von (H, N, J). Dual gilt das für die Umfänge. Analog gilt dies auch für den Durchschnitt von beliebig vielen Bindungen. ∎

132 **Lemma: Bindungsprodukt**

Es seien $\mathbb{K}_1 = (G_1, M_1, I)$ und $\mathbb{K}_2 = (G_2, M_2, J)$ und $\mathbb{K}_3 = (G_3, M_3, K)$ formale Kontexte. Ferner sei R eine Bindung von $\mathbb{K}_1$ nach $\mathbb{K}_2$ und S eine Bindung von $\mathbb{K}_2$ nach $\mathbb{K}_3$. Nun wird eine Bindung zwischen $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_3$ induziert, genauer gelten die folgenden Aussagen:

	M_1	M_2	M_3
G_1	I	R	
G_2		J	S
G_3			K

(I) Für alle $g \in G_1$ und jedes $m \in M_3$ gilt

$$g \in m^{SJR} \Leftrightarrow g^R \supseteq m^{SJ} \Leftrightarrow g^{RJ} \subseteq m^S \Leftrightarrow g^{RJS} \ni m.$$

(II) Das BINDUNGSPRODUKT $R \circ S$ ist eine Bindung von $\mathbb{K}_1$ nach $\mathbb{K}_3$.

$$R \circ S := \left\{ (g, m) \in G_1 \times M_3 \;\middle|\; g^R \supseteq m^{SJ} \right\} = \bigcup_{(A,B) \in \mathfrak{B}(G_2, M_2, J)} B^R \times A^S$$

(III) Für jede Bindung T von $\mathbb{K}_1$ nach $\mathbb{K}_3$ sind äquivalent:

(A) $T \subseteq R \circ S$

(B) $g^T \subseteq g^{RJS}$ für alle $g \in G_1$

(C) $m^T \subseteq m^{SJR}$ für alle $m \in M_3$

APPROBATIO (I) gilt nach fundamentalen Ableitungsregeln für formale Kontexte. Insbesondere sind nämlich auch (G_1, M_2, R) und (G_2, M_3, S) Kontexte.

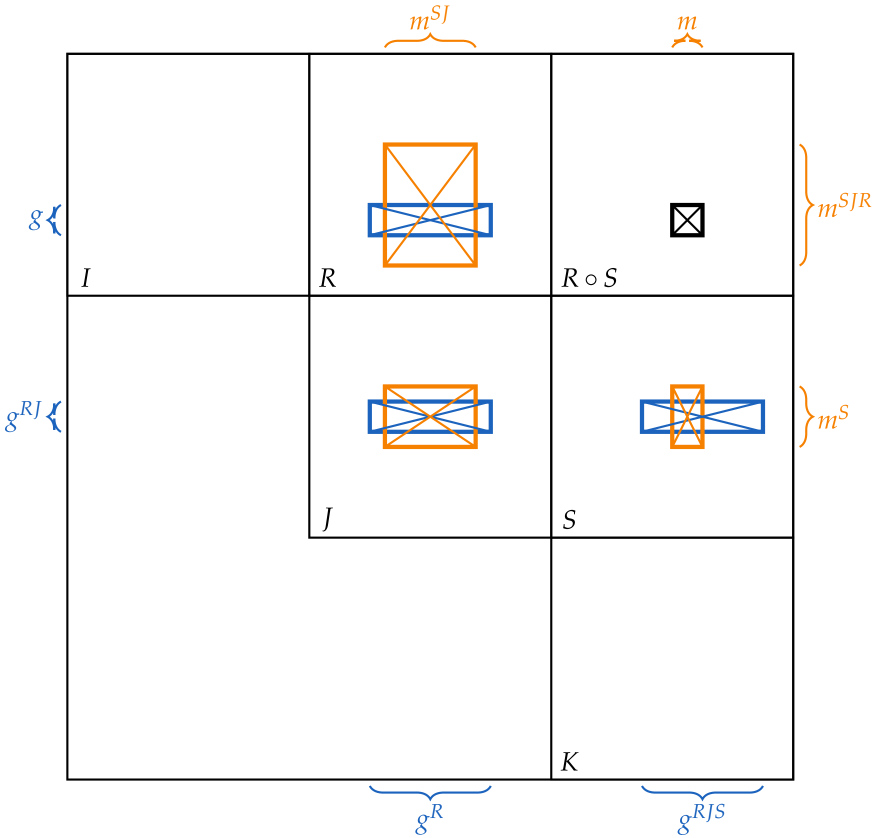
(II) Zunächst hat das Bindungsprodukt nach dem ersten Teil die Darstellungen

$$R \circ S = \bigcup_{g \in G_1} \{g\} \times g^{RJS} = \bigcup_{m \in M_3} m^{SJR} \times \{m\}.$$

Für einen beliebigen Gegenstand $g \in G_1$ gilt demnach $g^{R \circ S} = g^{RJS}$, und das ist ein S-Inhalt, also auch ein K-Inhalt. Dual ist $m^{R \circ S} = m^{SJR}$ ein I-Umfang für alle Merkmale $m \in M_3$. Daher ist das Bindungsprodukt tatsächlich eine Bindung. Schließlich folgt die obige äquivalente Darstellung mit folgender Argumentation:

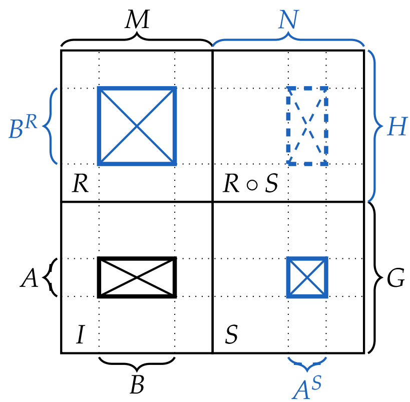
($\subseteq$) Sei $(g, m) \in R \circ S$, das heißt $g^R \supseteq m^{SJ}$. Dann ist (g^{RJ}, g^R) ein Begriff von (G_2, M_2, J) und es gilt natürlich $g \in g^{RR}$ sowie $m \in g^{RJS}$ (nach (I)).

($\supseteq$) Umgekehrt sei (A, B) ein beliebiger Begriff von (G_2, M_2, J) sowie $(g, m) \in B^R \times A^S$. Es folgt $B \subseteq g^R$ und $A \subseteq m^S$, also gilt $g^R \supseteq B = A^J \supseteq m^{SJ}$ und damit liegt (g, m) im Bindungsprodukt $R \circ S$.



(III) Die Äquivalenz der Aussagen folgt durch zeilen- bzw. spaltenweises Betrachten wegen $T = \bigcup_{g \in G_1} \{g\} \times g^T = \bigcup_{m \in M_3} m^T \times \{m\}$ und den obigen Darstellungen für das Bindungsprodukt $R \circ S$. ■

Jeder formale Begriff (A, B) von (G, M, I) induziert einen Begriff $(A \dot{\cup} B^R, B \dot{\cup} A^S)$ in der subdirekten Summe $\frac{R}{(G,M,I)} \Big| \frac{(H,N,R\circ S)}{S}$, denn nach Definition des Bindungsprodukts enthält $R \circ S$ das gesamte Rechteck $B^R \times A^S$. Weil das Teilrechteck $A \times B$ in (G, M, I) bereits maximal ist, muss auch $(A \dot{\cup} B^R) \times (B \dot{\cup} A^S)$ ein größtmögliches Rechteck sein, also ist $(A \dot{\cup} B^R, B \dot{\cup} A^S)$ in der Tat ein Begriff. Dieser Homomorphismus ist natürlich injektiv,



und sogar surjektiv (siehe nächstes Lemma), demnach bildet (G, M, I) einen dichten Teilkontext.

133 **Lemma: Bindungen und Dichte Teilkontexte**

Genau dann ist (G, M, I) ein dichter Teilkontext der subdirekten Summe $\frac{R}{(G,M,I)}\Big|\frac{(H,N,T)}{S}$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

	M	N
H	R	T
G	I	S

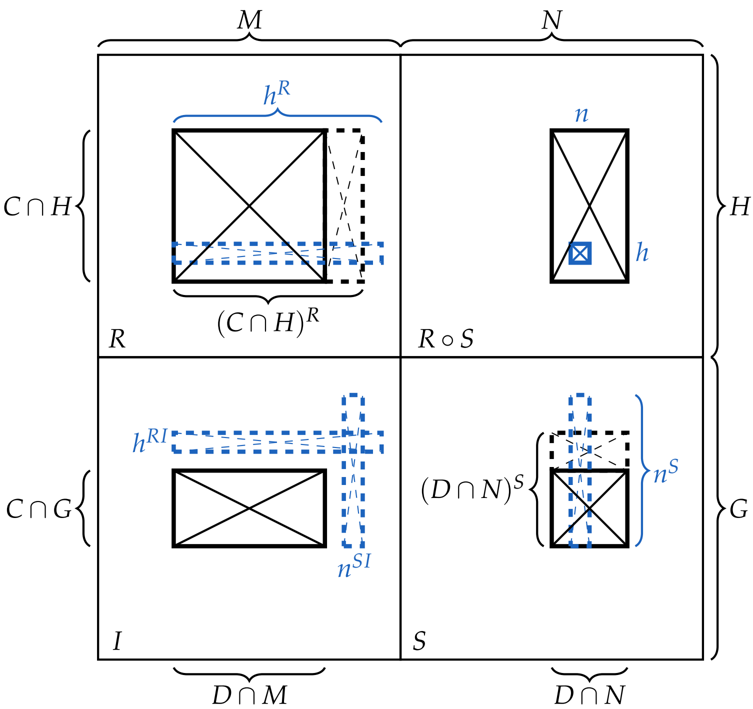
(I) Für jedes Merkmal $n \in N$ ist n^S ein Umfang von (G, M, I).

(II) Für jeden Gegenstand $h \in H$ ist h^R ein Inhalt von (G, M, I).

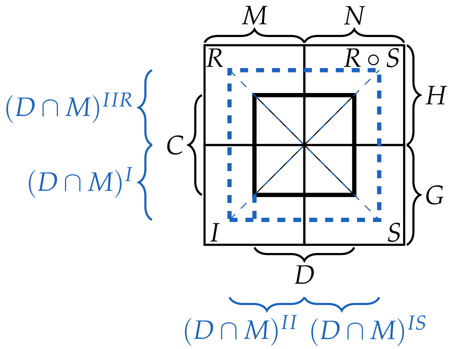
(III) Es gilt $R \circ S = T$.

APPROBATIO $(\Leftarrow)$ Wir zeigen, dass $\pi_{G,M}$ ein Isomorphismus ist. Mit Lemma: Dichte und Verträgliche Teilkontexte 3.81 erhalten wir dann, dass (G, M, I) dicht ist.

(VERTRÄGLICH) Sei (C, D) ein Begriff von $\frac{R}{(G,M,I)}\Big|\frac{(H,N,R\circ S)}{S}$. Für alle Inzidenzen $(h, n) \in (C \cap H) \times (D \cap N) \subseteq R \circ S$ gilt insbesondere $h^R \supseteq n^{SI}$ bzw. äquivalent dazu $n^S \supseteq h^{RI}$. Daraus folgt $n^{SI} \subseteq (C \cap H)^R$ für alle Merkmale $n \in D \cap N$ bzw. $h^{RI} \subseteq (D \cap N)^S$ für jeden Gegenstand $h \in C \cap H$.



Weil das Rechteck $C \times D$ maximal in $\frac{R}{I}\Big|\frac{R\circ S}{S}$ ist, muss $h^{RI} \subseteq C \cap G$ und $n^{SI} \subseteq D \cap M$ für alle $h \in C \cap H$ bzw. $n \in D \cap N$ gelten. Nach den Voraussetzungen (I) und (II) folgt stets $h^R \supseteq (C \cap G)^I$ bzw. $n^S \supseteq (D \cap M)^I$, und daraus folgern wir $(C \cap H)^R \supseteq (C \cap G)^I$ und ebenso $(D \cap N)^S \supseteq (D \cap M)^I$. Damit gilt $C \cap H \subseteq (C \cap G)^{IR}$ und $D \cap N \subseteq (D \cap M)^{IS}$. Natürlich ist $C \cap G \subseteq (D \cap M)^I$ und damit $(C \cap G)^{IR} \subseteq (D \cap M)^{IIR}$, also auch $C \cap H \subseteq (D \cap M)^{IIR}$.



Weil das Rechteck $C \times D$ maximal ist, muss insbesondere $(D \cap M)^I = C \cap G$ und $(D \cap M)^{II} = D \cap M$ gelten, d.h. $(C \cap G, D \cap N)$ ist tatsächlich ein Begriff vom Teilkontext (G, M, I) und damit ist die Projektion $\pi_{G,M}$ ein Homomorphismus. Außerdem folgt $(D \cap M)^R = C \cap H$ und $(C \cap G)^S = D \cap N$. Weiterhin muss $\pi_{G,M}$ offensichtlich surjektiv sein, denn für jeden Begriff (A, B) von (G, M, I) ist $(A \dot\cup B^R, B \dot\cup A^S)$ ein formaler Begriff der subdirekten Summe mit der Projektion (A, B).

(INJEKTIV) $\pi_{G,M}$ ist sogar bijektiv mit der Umkehrfunktion

$$\pi_{G,M}^{-1}\colon (A, B) \mapsto \left(A \dot\cup B^R, B \dot\cup A^S\right),$$

denn einerseits gilt $\pi_{G,M} \circ \pi_{G,M}^{-1} = \mathrm{id}$ nach der Surjektivität oben, und andererseits erhalten wir für alle $\frac{R|R\circ S}{I|\;S}$-Begriffe (C, D)

$$\pi_{G,M}^{-1}(C \cap G, D \cap M) = \left((C \cap G) \dot\cup \underbrace{(D \cap M)^R}_{=C \cap H}, (D \cap M) \dot\cup \underbrace{(C \cap G)^S}_{=D \cap N} \right) = (C, D).$$

($\Rightarrow$) Sei (G, M, I) dicht in der subdirekten Summe.

(I) Sei $n \in N$ ein Merkmal, dann ist die Projektion $\pi_{G,M}(\mu(n)) = (n^S, n^{SI})$ ein Begriff von (G, M, I). Es folgt natürlich $n^S \in \mathrm{Ext}(G, M, I)$.

(II) Dual gilt für alle $h \in H$ stets $\pi_{G,M}(\gamma(h)) = (h^{RI}, h^R) \in \mathfrak{B}(G, M, I)$.

(III) ($\subseteq$) Sei (A, B) ein Begriff von (G, M, I). Dann ist $\left(B^{\frac{R|T}{I|S}}, A^{\frac{R|T}{I|S}}\right)$ ein Begriff der direkten Summe, welcher von $\pi_{G,M}$ auf (A, B) projiziert wird. Es gilt auch $A^{\frac{R|T}{I|S}} \cap N = (A^I \dot\cup A^S) \cap N = A^S$ und dual $B^{\frac{R|T}{I|S}} \cap H = B^R$, also folgt

$$B^R \times A^S = \left(B^{\frac{R|T}{I|S}} \cap H\right) \times \left(A^{\frac{R|T}{I|S}} \cap N\right) \subseteq T.$$

Weil dies für alle Begriffe von (G, M, I) gilt, erhalten wir $R \circ S \subseteq T$.

($\supseteq$) Andererseits gilt für jeden Gegenstand $h \in H$

$$h^{RIS} = \underbrace{\left(h^{RI}\right)}_{=h^{R\frac{R|T}{I|S}} \cap G}{}^{\frac{R|T}{I|S}} \cap N \supseteq \underbrace{\left(h^{R}\right)}_{=h^{\frac{R|T}{I|S}} \cap M}{}^{\frac{R|T}{I|S}\frac{R|T}{I|S}} \cap N = \left(h^{\frac{R|T}{I|S}} \cap M\right)^{\frac{R|T}{I|S}\frac{R|T}{I|S}} \cap N$$

$$\overset{(*)}{=} h^{\frac{R|T}{I|S}} \cap N = h^T,$$

dabei gilt $(*)$ nach Lemma: Charakterisierung dichter Teilkontexte 3.76. Also folgt auch $R \circ S \supseteq T$. ■

134 **Theorema: Abgeschlossene Teilrelationen und Bindungen**

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(I) Der Begriffsverband $\mathfrak{B}\left(\begin{array}{c|c} (G,M,I) & R \\ \hline S & (H,N,J) \end{array}\right)$ ist isomorph zu einem subdirekten Produkt von $\mathfrak{B}(G,M,I)$ und $\mathfrak{B}(H,N,J)$.

(II) $\begin{array}{c|c} I & R \\ \hline S & J \end{array}$ ist eine abgeschlossene Teilrelation von $(G,M,I) + (H,N,J)$.

(III) R und S sind Bindungen mit $I \subseteq R \circ S$ sowie $J \subseteq S \circ R$.

APPROBATIO (I)⇔(II) ist ein spezieller Fall von Theorema: Subdirekte Produkte und Abgeschlossene Teilrelationen 3.128.

(II)⇒(III) gilt bereits nach Lemma: Abgeschlossene Teilrelationen der direkten Summe 3.129.

(II)⇐(III) Seien R und S Bindungen. Um die Abgeschlossenheit von $\begin{array}{c|c} I & R \\ \hline S & J \end{array}$ zu zeigen, wird Lemma: Charakterisierung abgeschlossener Teilrelationen 3.109 (VI) benutzt. Sei dazu $(g,m) \in \begin{array}{c|c} I & \times \\ \hline \times & J \end{array} \setminus \begin{array}{c|c} I & R \\ \hline S & J \end{array}$, o.E.d.A.ist $g\overline{R}m$. (Für $g\overline{S}m$ verläuft der Beweis dual.) Weil R eine Bindung ist, bildet g^R einen Inhalt von (H,N,J). Daher gibt es einen Gegenstand $h \in g^{RJ}$ mit $(h,m) \notin \begin{array}{c|c} I & \times \\ \hline \times & J \end{array}$; denn andernfalls wäre $g^{RJ} \subseteq m^{\begin{array}{c|c} I & \times \\ \hline \times & J \end{array}}$ bzw. $g^{RJ} \subseteq m^J$ und damit $m \in g^R$. ↯ Weiterhin folgt mit $h \in g^{RJ}$ bereits $g^R \subseteq h^J$. Außerdem gilt wegen $I \subseteq R \circ S$ auch $g^I \subseteq g^{RJS} \subseteq h^S$, und damit insgesamt

$$g^{\begin{array}{c|c} I & R \\ \hline S & J \end{array}} = g^I \,\dot\cup\, g^R \subseteq h^S \,\dot\cup\, h^J = h^{\begin{array}{c|c} I & R \\ \hline S & J \end{array}}.$$

■ Dual gibt es ein Merkmal $n \in m^{SJ}$ mit $(g,n) \notin \begin{array}{c|c} I & \times \\ \hline \times & J \end{array}$ und $m^{\begin{array}{c|c} I & R \\ \hline S & J \end{array}} \subseteq n^{\begin{array}{c|c} I & R \\ \hline S & J \end{array}}$.

Der allgemeine Fall mit beliebig vielen Kontexten

Die Ergebnisse aus dem vorherigen Teil für die subdirekten Produkte von zwei Faktoren sollen nun auf beliebig viele Faktoren verallgemeinert werden. Dazu betrachten wir eine Menge von Kontexten $\{\mathbb{K}_t\}_{t\in T} = \{(G_t, M_t, I_t)\}_{t\in T}$ und deren direkte Summe $\mathbb{K} := (G,M,I) := \bigplus_{t\in T} \mathbb{K}_t$. Analog entspricht jedes subdirekte Produkt der Begriffsverbände $\{\mathfrak{B}\mathbb{K}_t\}_{t\in T}$ einer abgeschlossenen Teilrelation J vom Summenkontext $\bigplus_{t\in T} \mathbb{K}_t$ mit der Eigenschaft $J \cap G_t \times M_t = I_t$ für alle $t \in T$. Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir auch $J_{st} := J \cap G_s \times M_t$ und damit $g^t := g^{J_{st}}$ für $g \in G_s$, $A^t := A^{J_{st}}$ für $A \subseteq G_s$, sowie $m^s := m^{J_{st}}$ für $m \in M_t$, $B^s := B^{J_{st}}$ für $B \subseteq M_t$. Damit erhalten wir die folgenden analogen Definitionen und Sätze.

135 **Definitio: Bindung**

Eine BINDUNG von einem Kontext $\mathbb{K}_s$ nach einem Kontext $\mathbb{K}_t$ ist eine Relation $J_{st} \subseteq G_s \times M_t$ mit folgenden Eigenschaften:

(I) Für jeden Gegenstand $g \in G_s$ ist g^t ein Inhalt von $\mathbb{K}_t$.

(II) Für jedes Merkmal $m \in M_t$ ist m^s ein Umfang von $\mathbb{K}_s$.

Lemma: Bindungsprodukt 136

Sei J_{rs} eine Bindung von $\mathbb{K}_r$ nach $\mathbb{K}_s$ und J_{st} eine Bindung von $\mathbb{K}_s$ nach $\mathbb{K}_t$. Dann gelten:

(I) Für alle Gegenstände $g \in G_r$ und Merkmale $m \in M_t$ ist

$$m \in g^{sst} \Leftrightarrow m^s \supseteq g^{ss} \Leftrightarrow g^s \supseteq m^{ss} \Leftrightarrow g \in m^{ssr}.$$

(II)

$$J_{rs} \circ J_{st} = \{(g,m) \in G_r \times M_t \mid g \in m^{ssr}\} = \bigcup_{(A,B) \in \mathfrak{B}\mathbb{K}_s} B^r \times A^t$$

ist eine Bindung von $\mathbb{K}_r$ nach $\mathbb{K}_t$.

(III) Für jede Bindung J_{rt} von $\mathbb{K}_r$ nach $\mathbb{K}_t$ sind äquivalent:

(A) $J_{rt} \subseteq J_{rs} \circ J_{st}$

(B) $g^t \subseteq g^{sst}$ gilt für alle $g \in G_r$

(C) $m^r \subseteq m^{ssr}$ gilt für alle $m \in M_t$

APPROBATIO folgt unmittelbar aus Lemma: Bindungsprodukt 3.132 unter Beachtung der Notation $A^t = A^{J_{st}}$ und $B^t = B^{J_{st}}$. ■

Theorema: Abgeschlossene Teilrelationen und Bindungen 137

Für jede Teilrelation J im Summenkontext $\mathbb{K} = \dot{+}_{t \in T} \mathbb{K}_t$ sind äquivalent:

	M_r	M_s	M_t
G_r	I_r	J_{rs}	J_{rt}
G_s	J_{sr}	I_s	J_{st}
G_t	J_{tr}	J_{ts}	I_t

(I) $\mathfrak{B}(G,M,J)$ ist isomorph zu einem subdirekten Produkt der Begriffsverbände $\{\mathfrak{B}\mathbb{K}_t\}_{t \in T}$.

(II) J ist eine abgeschlossene Teilrelation und für alle $t \in T$ gilt $J_{tt} = I_t$.

(III) Für alle $r, s, t \in T$ ist J_{rt} eine Bindung von $\mathbb{K}_r$ nach $\mathbb{K}_t$ und es gilt $J_{tt} = I_t$ sowie $J_{rt} \subseteq J_{rs} \circ J_{st}$.

APPROBATIO analog Theorema: Abgeschlossene Teilrelationen und Bindungen 3.134. ■

3.6.8 *P*-Fusionen

Definitio: *P*-Verband, *P*-Produkt 138

Sei P eine Menge und $\alpha\colon P \to V$ eine Abbildung in einen vollständigen Verband V, deren Bild ein Erzeugendensystem von V ist, d.h. $\langle \alpha(P) \rangle = V$. Dann heißt (V, α) P-VERBAND. Jeder $\{1,2,\ldots,n\}$-Verband heißt schlicht n-VERBAND. Für eine Familie $\{(V_t, \alpha_t)\}_{t \in T}$ von P-Verbänden ist das P-PRODUKT definiert als der P-Verband

$$\bigtimes_{t \in T}^{P} (V_t, \alpha_t) := (\langle \alpha(P) \rangle, \alpha) \ \text{ mit } \alpha\colon p \mapsto (\alpha_t(p))_{t \in T}\,.$$

Ein n-PRODUKT ist ein $\{1,2,\ldots,n\}$-Produkt. Schreibweise: $\bigtimes^{n}_{t \in T}(V_t, \alpha_t)$

139 **Lemma: P-Produkte von P-Begriffsverbänden**

(I) Jedes P-Produkt ist ein subdirektes Produkt.

(II) Jedes P-Produkt von P-Begriffsverbänden $\{(\mathfrak{B}\mathbb{K}_t, \alpha_t)\}_{t\in T}$ induziert eine abgeschlossene Teilrelation in der direkten Summe $+_{t\in T}\mathbb{K}_t$.

Approbatio (I) Das P-Produkt $\bigtimes^P_{t\in T}(V_t, \alpha_t)$ ist nach Definition ein vollständiger Unterverband des direkten Produkts der Verbände $\{V_t\}_{t\in T}$. Weil α_t stets den gesamten Verband V_t erzeugt und die Suprema bzw. Infima im direkten Produkt komponentenweise gebildet werden, müssen die Projektionen von $\langle\alpha(p)\rangle$ auf die einzelnen Faktoren surjektiv sein, d.h. das P-Produkt ist ein subdirektes Produkt.

(II) Sei $\{(\mathfrak{B}\mathbb{K}_t, \alpha_t)\}_{t\in T}$ eine Menge von P-Begriffsverbänden. Also bildet das P-Produkt $\bigtimes^P_{t\in T}(\mathfrak{B}\mathbb{K}_t, \alpha_t)$ ein subdirektes Produkt der Begriffsverbände $\{\mathfrak{B}\mathbb{K}_t\}_{t\in T}$. Nach Theorema: Abgeschlossene Teilrelationen und Bindungen 3.137 gibt es dann eine abgeschlossene Teilrelation J in der direkten Summe $+\mathbb{K}_t$, deren Begriffsverband isomorph zu dem P-Produkt ist. ■

140 **Definitio: P-Kontext, P-Fusion**

Für einen Kontext $\mathbb{K}$ heißt $(\mathbb{K}, \alpha)$[a] P-Kontext, wenn $(\mathfrak{B}\mathbb{K}, \alpha)$ ein P-Verband ist. Für eine Menge von P-Kontexten $\{(\mathbb{K}_t, \alpha_t)\}_{t\in T}$[b] ist deren P-Fusion definiert als der P-Kontext

$$\mathop{+}^{P}_{t\in T}(\mathbb{K}_t, \alpha_t) := ((G, M, J), \alpha) \ \text{ mit } \ \forall_{p\in P} (A^p, B^p) := \left(\dot{\bigcup_{t\in T}} A^p_t, \dot{\bigcup_{t\in T}} B^p_t\right),$$

und J ist durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

(TT) $I_t = J_{tt}$ für alle $t \in T$.

(RT) Für alle $r, t \in T$ ist J_{rt} die kleinste Bindung von $\mathbb{K}_r$ nach $\mathbb{K}_t$, die alle Mengen der Form $A^p_r \times B^p_t$ für alle $p \in P$ enthält.

Für eine Menge von Kontexten $\{\mathbb{K}_t\}_{t\in T} = \{(G, M, I_t)\}_{t\in T}$ mit derselben Gegenstandsmenge G und übereinstimmender Merkmalsmenge M werden definiert:

(I) Gegenstandsfusion $+^G_{t\in T}(\mathbb{K}_t, \gamma_t)$

(II) Merkmalsfusion $+^M_{t\in T}(\mathbb{K}_t, \mu_t)$

(III) Fusion $+^{G\dot\cup M}_{t\in T}(\mathbb{K}_t, \gamma_t \dot\cup \mu_t)$

[a] Für alle $p \in P$ schreiben wir für den erzeugenden Begriff $\alpha(p) =: (A^p, B^p)$.
[b] Analog sei $\alpha_t(p) =: (A^p_t, B^p_t)$ für alle $p \in P$.

Nach Lemma: Durchschnitt von Bindungen 3.131 ist der Durchschnitt von Bindungen stets eine Bindung, daher gibt es stets eine eindeutige kleinste Bindung von $\mathbb{K}_r$ nach $\mathbb{K}_t$, die $\bigcup_{p\in P} A^p_t \times B^p_r$ enthält. Also bestimmen (TT) und (RT) eindeutig eine Inzidenzrelation J.

Theorema: P-Fusion und P-Produkt 141

Sei $\{(\mathbb{K}_t, \alpha_t)\}_{t\in T}$ eine Familie von P-Kontexten. Der Begriffsverband der P-Fusion ist isomorph zum P-Produkt der Begriffsverbände.

$$\underline{\mathfrak{B}}\left(\underset{t\in T}{\overset{P}{+}}(\mathbb{K}_t, \alpha_t)\right) \cong \underset{t\in T}{\overset{P}{\times}}(\underline{\mathfrak{B}}\mathbb{K}_t, \alpha_t)$$

APPROBATIO Wir zeigen, dass dass die Inzidenzrelation J der P-Fusion mit der abgeschlossenen Teilrelation J^P des P-Produkts übereinstimmt.

(J ABGESCHLOSSEN) Nach Theorema: Abgeschlossene Teilrelationen und Bindungen 3.137 genügt es zu zeigen, dass J_{rt} stets im Bindungsprodukt von J_{rs} und J_{st} liegt. Für jedes Merkmal $m \in B_t^p$ folgt wegen $A_s^p \times B_t^p \subseteq J_{st}$ stets $m^s \supseteq A_s^p$. Dual gilt für jeden Gegenstand $g \in A_r^p$ immer $g^s \supseteq B_s^p$ und damit $g^{ss} \subseteq A_s^p$. Für alle Paare $(g, m) \in A_r^p \times B_t^p$ gilt somit $g^{ss} \subseteq m^s$, d.h. $(g, m) \in J_{rs} \circ J_{st}$; insgesamt folgt

$$\bigcup_{p\in P} A_r^p \times B_t^p \subseteq J_{rs} \circ J_{st}$$

und weil das Bindungsprodukt $J_{rs} \circ J_{st}$ auch eine Bindung von $\mathbb{K}_r$ nach $\mathbb{K}_t$ ist, muss es J_{rt} enthalten.

($J \subseteq J^P$) Das P-Produkt $\left(\underline{\mathfrak{B}}(G, M, J^P), \alpha\right)$ wird im Summenkontext durch die Begriffe $(A^p, B^p) = \left(\dot{\bigcup}_{t\in T} A_t^p, \dot{\bigcup}_{t\in T} B_t^p\right)$ erzeugt, d.h. es gilt

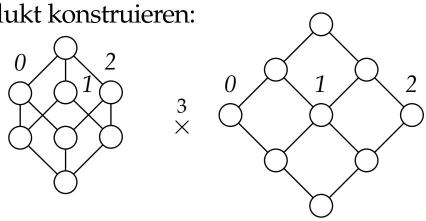
$$\underset{r,t\in T}{\forall} \dot{\bigcup_{p\in P}} A_r^p \times B_t^p \subseteq J_{rt}^P.$$

Nach Voraussetzung ist J_{rt} die kleinste Bindung mit dieser Eigenschaft und das impliziert $J_{rt} \subseteq J_{rt}^P$ für alle $r, t \in T$, also gilt schonmal $J \subseteq J^P$.

($J \supseteq J^P$) Andererseits existiert für das P-Produkt keine kleinere abgeschlossene Teilrelation, die $\bigcup_{p\in P} A^p \times B^p$ enthält, also gilt dual $J \supseteq J^P$. ■

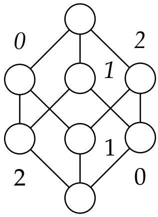
Exemplum: 3-Produkt 142

Wir wollen hier ein 3-Produkt konstruieren:

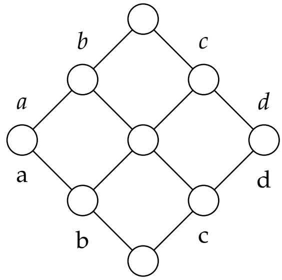


Die Standardkontexte der beiden Faktorkontexte sind die kontranominale Skala $\mathbb{K}_1 = \mathbb{N}_3^{\complement} = (\{0,1,2\}, \{0,1,2\}, \neq)$ und die Gitterskala $\mathbb{K}_2 = \mathbb{G}_{3,3} = \mathbb{O}_3 \between \mathbb{O}_3$ zu zwei drei-elementigen Ketten bzw. Ordinalskalen $\mathbb{O}_3 = (\{0,1,2\}, \{0,1,2\}, \leq)$.

$\mathbb{K}_1$	0	1	2
0	↗	×	×
1	×	↗	×
2	×	×	↗



$\mathbb{K}_2$	a	b	c	d
a	×	×	↗	
b	×	×	×	↗
c	↗	×	×	×
d		↗	×	×

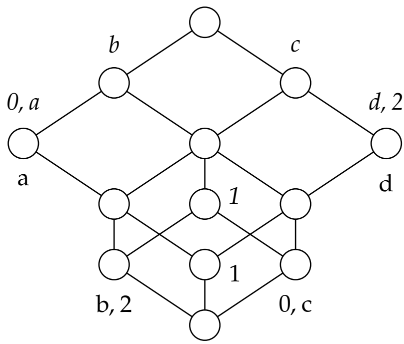


Der erste 3-Kontext wird von den Merkmalsbegriffen $\alpha(0) = \mu(0), \alpha(1) = \mu(1)$ und $\alpha(2) = \mu(2)$ erzeugt. Die Generatorbegriffe im zweiten 3-Kontext sind $\alpha(0) = \mu(a)$, $\alpha(1) = \mu(b) \vee \mu(c)$ und $\alpha(2) = \mu(d)$.

	$\mathbb{K}_1$	$\mathbb{K}_2$
$\alpha(0)$	$(\{1,2\},\{0\})$	$(\{a,b\},\{a,b\})$
$\alpha(1)$	$(\{0,2\},\{1\})$	$(\{b,c\},\{b,c\})$
$\alpha(2)$	$(\{0,1\},\{2\})$	$(\{c,d\},\{c,d\})$

Es werden nun zunächst alle Mengen $\{1,2\} \times \{a,b\}$, $\{0,2\} \times \{b,c\}$ und $\{0,1\} \times \{c,d\}$ (für die Bindung *rechts oben*), sowie dual $\{a,b\} \times \{0\}$, $\{b,c\} \times \{1\}$, und $\{c,d\} \times \{2\}$ (für die Bindung *links unten*). Wie wir leicht verifizieren, sind alle Spalten im Rechteck rechts oben bereits Umfänge von $\mathbb{K}_1$ und alle Zeilen sind bereits Inhalte von $\mathbb{K}_2$, d.h. diese Teilrelation bindet vom ersten 3-Kontext nach dem zweiten 3-Kontext. Dual ist die Teilrelation *links unten* eine Bindung von $\mathbb{K}_2$ nach $\mathbb{K}_1$. Damit haben wir die 3-Fusion und das 3-Produkt bereits gefunden.

$\mathbb{K}_1 \overset{3}{+} \mathbb{K}_2$	0	1	2	a	b	c	d
0	↗	×	×	↗	×	×	×
1	×	↗	×	×	×	×	×
2	×	×	↗	×	×	×	↗
a	×			×	×	↗	
b	×	×	↗	×	×	×	↗
c	↗	×	×	↗	×	×	×
d			×		↗	×	×



3.6.9 Rough Sets

Die folgenden Definitionen und Sätze sind im Original im Paper *Lattices of Rough Set Abstractions as P-Products* von BERNHARD GANTER (Gan08) zu finden. Weiterführende Theoreme und Anwendungen enthält CHRISTIAN MESCHKE's Dissertation *Concept Approximations - Approximative Notions for Concept Lattices* (Mes12). Jedes Hüllensystem $\mathcal{H}$ in G ist insbesondere ein vollständiger Verband und entspricht eineindeutig einem Hüllenoperator $g \mapsto \lceil g \rceil$ in G, daher ist $(\mathcal{H}, \lceil\cdot\rceil)$ ein G-Verband. Dual bildet jedes Kernsystem $\mathcal{K}$ mit dem zugehörigen Kernoperator $\lfloor\cdot\rfloor$ auch einen G-Verband. Damit ist auch das direkte Produkt $\mathcal{K} \times \mathcal{H}$ ein vollständiger

Verband und für die Infima bzw. Suprema gelten

$$\bigvee_{t\in T}(k_t,h_t) = \left(\bigvee_{t\in T} k_t, \left\lceil \bigvee_{t\in T} h_t \right\rceil\right) \quad \text{und} \quad \bigwedge_{t\in T}(k_t,h_t) = \left(\left\lfloor \bigwedge_{t\in T} k_t \right\rfloor, \bigwedge_{t\in T} h_t\right).$$

Wir nennen dann $((\mathcal{K},\lfloor\cdot\rfloor),(\mathcal{H},\lceil\cdot\rceil))$ ein KERN-HÜLLEN-PAAR in G.

Definitio: Approximationsverband 143

Für jedes Kern-Hüllen-Paar $((\mathcal{K},\lfloor\cdot\rfloor),(\mathcal{H},\lceil\cdot\rceil))$ in einer Menge G ist der zugehörige APPROXIMATIONSVERBAND definiert als das G-Produkt

$$\Xi(\mathcal{K},\mathcal{H}) := (\mathcal{K},\lfloor\cdot\rfloor) \overset{G}{\times} (\mathcal{H},\lceil\cdot\rceil),$$

also genau der G-Verband, der von $g \mapsto (\lfloor g\rfloor, \lceil g\rceil)$ in $\mathcal{K}\times\mathcal{H}$ erzeugt wird. Falls $((\mathcal{K},\lfloor\cdot\rfloor),(\mathcal{H},\lceil\cdot\rceil))$ ein Kern-Hüllen-Paar auf G ist, dann heißt $\Xi(\mathcal{K},\mathcal{H})$ MENGENAPPROXIMATIONSVERBAND oder ROUGH SET ABSTRACTIONS VERBAND.

(Gan08), (Mes12)

Die Menge aller Umfangskomplemente eines Kontexts (G,M,I) sei

$$\mathtt{C}\mathrm{Ext}(G,M,I) := \left\{A^{\mathtt{C}} \,\middle|\, A\in\mathrm{Ext}(G,M,I)\right\} = \left\{A^{II\mathtt{C}} \,\middle|\, A\subseteq G\right\}.$$

Lemma: Hüllen, Kerne und Umfänge 144

Sei G eine Menge.

(I) Jedes Hüllensystem $\mathcal{H}$ auf G ist gleich $\mathrm{Ext}(G,\mathcal{H},\in)$.

(II) Für jeden Kontext (G,M,I) ist $\mathrm{Ext}(G,M,I)$ ein Hüllensystem auf G mit dem zugehörigen Hüllenoperator $X\mapsto X^{II}$.

(III) Jedes Kernsystem $\mathcal{K}$ auf G ist gleich $\mathtt{C}\mathrm{Ext}(G,\mathcal{K},\notin)$.

(IV) Für jeden Kontext (G,M,I) ist $\mathtt{C}\mathrm{Ext}(G,M,I)$ ein Kernsystem auf G mit dem zugehörigem Kernoperator $X\mapsto X^{\mathtt{C}II\mathtt{C}}$.

(Gan08), (Mes12)

APPROBATIO (I) Für jede Teilmenge $A\subseteq G$ erhalten wir die zugehörige Hülle durch Berechnung des Umfangs $A^{\in\in}$, denn es gilt

$$A^{\in\in} = \{H\in\mathcal{H} \mid A\subseteq H\}^{\in} = \bigcap_{A\subseteq H\in\mathcal{H}} H = \lceil A\rceil.$$

Natürlich sind alle Umfänge von dieser Form, und stets Hüllen, daher folgt die Behauptung.

(II) Es ist allgemein bekannt, dass $A\mapsto A^{II}$ einen Hüllenoperator darstellt.

(III) Sei $A\subseteq G$ eine beliebige Teilmenge, dann gilt $A^{\notin} = \{K\in\mathcal{K} \mid A\cap K = \emptyset\}$ und für alle $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{K}$ gilt $\mathcal{A}^{\notin} = (\bigcup\mathcal{A})^{\mathtt{C}}$, daher lassen sich die Kerne wie folgt bestimmen:

$$A^{\mathtt{C}\notin\notin\mathtt{C}} = \{K\in\mathcal{K} \mid K\subseteq A\}^{\notin\mathtt{C}} = \bigcup_{A\supseteq K\in\mathcal{K}} K = \lfloor A\rfloor.$$

Dual sind auch alle Umfänge von dieser Form, d.h. $\mathcal{K} = \mathtt{C}\mathrm{Ext}(G,\mathcal{K},\notin)$.

(IV) Die Abbildung $A\mapsto A^{\mathtt{C}II\mathtt{C}}$ beschreibt tatsächlich einen Kernoperator auf G, denn für beliebige Teilmengen $A,C\subseteq G$ gilt

$$A^{\mathtt{C}II\mathtt{C}}\subseteq C \Leftrightarrow A^{\mathtt{C}I}\subseteq C^{\mathtt{C}I} \Leftrightarrow A^{\mathtt{C}II\mathtt{C}}\subseteq C^{\mathtt{C}II\mathtt{C}}. \qquad \blacksquare$$

Ein Gegenstand g eines Kontextes (G, M, I) heißt EXTREMAL, falls $g^{\mathtt{C}}$ ein Umfang ist. Das ist genau dann der Fall, wenn es ein Merkmal $m \in M$ mit $m^I = g^{\mathtt{C}}$ gibt. Sei nämlich $g^{\mathtt{C}} = g^{\mathtt{C}II}$, dann gilt für jedes Merkmal $m \in g^{\mathtt{C}I}$ stets $m^I \in \{g^{\mathtt{C}}, G\}$ und weil $g^{\mathtt{C}}$ der Durchschnitt aller dieser Merkmalsumfänge m^I ist, muss mindestens einer die Bedingung $m^I = g^{\mathtt{C}}$ erfüllen.

145 **Theorema: Approximationsfusion**

Sei $((\mathcal{K}, \lfloor\cdot\rfloor), (\mathcal{H}, \lceil\cdot\rceil))$ das Kern-Hüllen-Paar auf G zu den beiden Kontexten $\mathbb{K} = (G, M, I)$ und $\mathbb{H} = (G, N, J)$, d.h. für die Kerne und Hüllen einer Menge $A \subseteq G$ gilt

$$\lfloor A \rfloor = A^{\mathtt{C}II\mathtt{C}} = \bigcup_{g^{\not{I}} \subseteq A} g^{\not{I}} \quad \text{und} \quad \lceil A \rceil = A^{JJ} = \bigcap_{A \subseteq g^J} g^J.$$

Dann ist der Mengenapproximationsverband $\underline{\Xi}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ isomorph zum Begriffsverband der $\wp(G)$-Fusion

$$\mathbb{RS}(\mathbb{K}, \mathbb{H}) := \mathbb{K}^{\top} \overset{\wp(G)}{+} \mathbb{H} = \begin{array}{c|c} \overset{*}{\times} & \mathbb{H} \\ \hline \mathbb{K}^{\top} & \perp \end{array}$$

Die beiden Bindungen $\overset{*}{\times}$ und $\perp$ sind durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

($\overset{*}{\times}$) $g \mathrel{\overset{*}{\times}} h \Leftrightarrow g = h$ ist nicht extremal in $\mathbb{K}$ oder in $\mathbb{H}$, oder $g \neq h$

($\perp$) $m \perp n \Leftrightarrow m^I \cup n^J = G$

Extremale Gegenstände von $\mathbb{K}$ und $\mathbb{H}$, die in einer Hülle enthalten sind, liegen stets auch im entsprechenden Kern, d.h. falls g extremal mit $g \in \lceil A \rceil$ für $A \subseteq G$ ist, dann folgt $g \in \lfloor A \rfloor$. Solche Gegenstände heißen ISOLIERT.

(Gan08), (Mes12)

APPROBATIO (I) Zunächst ist das Kernsystem $\mathcal{K}$ dual isomorph zum Begriffsverband $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ vermöge $\kappa\colon K \mapsto (K^{\mathtt{C}}, K^{\mathtt{C}I})$ und dual ist das Hüllensystem $\mathcal{H}$ isomorph zu $\mathfrak{B}(\mathbb{H})$ vermöge $\eta\colon H \mapsto (H, H^J)$. Das direkte Produkt $\mathcal{K} \times \mathcal{H}$ ist daher isomorph zum direkten Produkt der beiden Begriffsverbände $\mathfrak{B}\left(\mathbb{K}^{\top}\right)$ und $\mathfrak{B}(\mathbb{H})$. Weiterhin ist $\mathbb{K}$ ein $\wp(G)$-Kontext für $\kappa \circ \lfloor\cdot\rfloor : A \mapsto \left(A^{\mathtt{C}II}, A^{\mathtt{C}I}\right)$ und entsprechend auch $\mathbb{H}$ für die Generatoren $\eta \circ \lceil\cdot\rceil : A \mapsto \left(A^{JJ}, A^J\right)$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{K} \arrow[rr, hook, two heads, "\kappa^\top"] & & \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}^\top) & \\
\wp(G) \arrow[urr, "\lfloor\cdot\rfloor"] \arrow[drr, "\lceil\cdot\rceil"'] \arrow[ddr, dashed, "(\lfloor\cdot\rfloor,\lceil\cdot\rceil)"'] & \mathcal{K}\times\mathcal{H} \arrow[ur, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] \arrow[rr, hook, two heads, "(\kappa^\top,\eta)"] & & \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}^\top)\times\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{H}) \arrow[ur, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] \arrow[rr, hook, two heads, "\phi"] & & \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}^\top+\mathbb{H}) \\
 & & \mathcal{H} \arrow[rr, hook, two heads, "\eta"] & & \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{H}) & \\
 & \underline{\Xi}(\mathcal{K},\mathcal{H}) \arrow[uu, hook, "\mathrm{id}"] \arrow[rrrr, dashed, hook, two heads, "\phi\circ(\kappa^\top,\eta)"] & & & & \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{RS}(\mathbb{K},\mathbb{H})) \arrow[uu, hook, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
$$

Nach Theorema: Subdirekte Produkte und Abgeschlossene Teilrelationen 3.128 und Theorema: P-Fusion und P-Produkt 3.141 ist dann der Mengenapproximationsverband $\underline{\Xi}(\mathcal{K},\mathcal{H})$ isomorph zum Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{RS}(\mathbb{K},\mathbb{H}))$.

($\overset{*}{\times}$) Wir wollen zuerst die Bindung von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{K}^\top$ bestimmen. Sei dazu

$$\overset{*}{\times} := \bigcup_{A\subseteq G} A^{JJ}\times A^{\complement II},$$

dann gilt $g \overset{*}{\times} h$ für $g,h\in G$ genau dann, wenn es eine Teilmenge $A\subseteq G$ mit $g\in A^{JJ}$ und $h\in A^{\complement II}$ gibt. Falls $g\neq h$ ist, dann gilt wegen $h\in g^{\complement II}\in\{g^\complement, G\}$ bereits

$$(g,h)\in g^{JJ}\times g^{\complement II}\subseteq \overset{*}{\times}\subseteq G\times G.$$

Wenn g nicht extremal in $\mathbb{K}$ ist, folgt $g\in g^{\complement II}$ und damit sofort $(g,g)\in g^{JJ}\times g^{\complement II}$, d.h. $g\overset{*}{\times} g$. Falls g nicht extremal in $\mathbb{H}$ ist, so gilt dual $(g,g)\in g^{\complement JJ}\times g^{II}$, und demzufolge auch $g\overset{*}{\times} g$.
Wenn umgekehrt $g\overset{*}{\times} g$ ist, dann gibt es eine Teilmenge $A\subseteq G$ mit $g\in A^{JJ}\cap A^{\complement II}$. Für $g\in A$ folgt $A^{\complement II}\subseteq g^{\complement II}$, und außerdem gilt $A^{\complement II}\not\subseteq g^\complement$, also müssen $g^{\complement II}$ und $g^\complement$ verschieden sein und daher ist g nicht extremal in $\mathbb{K}$. Wenn andernfalls g nicht in A liegt, dann ist dual g nicht extremal in $\mathbb{H}$.
Schließlich ist $\overset{*}{\times}$ eine Bindung von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{K}^\top$; wenn nämlich g extremal in $\mathbb{K}$ und $\mathbb{H}$ ist, dann gilt für jede Zeile bzw. Spalte $g^{\overset{*}{\times}}=g^\complement$, und andernfalls $g^{\overset{*}{\times}}=G$ – jedenfalls ist $g^{\overset{*}{\times}}$ ein Inhalt von $\mathbb{K}^\top$ bzw. ein Umfang von $\mathbb{H}$.

($\perp$) Die Bindung von $\mathbb{K}^\top$ nach $\mathbb{H}$ umfasst zumindest die Rechtecke $A^{\complement I}\times A^J$ für alle Teilmengen $A\subseteq G$. Wir setzen daher

$$\perp := \bigcup_{A\subseteq G} A^{\complement I}\times A^J\subseteq M\times N,$$

Dann gilt $m\perp n$ genau dann, wenn es eine Gegenstandsmenge A mit $A^\complement\subseteq m^I$ sowie $A\subseteq n^J$ gibt, und es folgt $G=A\cup A^\complement\subseteq m^I\cup n^J\subseteq G$. Umgekehrt gilt

$$m^I\cup n^J=G\Leftrightarrow n^{J\complement}\subseteq m^I\Leftrightarrow (m,n)\in n^{J\complement I}\times n^{JJ},\text{ d.h. } m\perp n.$$

Es ist auch schnell klar, dass $\perp$ eine Bindung $\mathbb{K}^{\top}$ nach $\mathbb{H}$ ist, denn für die Zeilen und Spalten gilt

$$m^{\perp} = m^{I\complement J} \in \operatorname{Int}(\mathbb{H}) \qquad \text{und} \qquad n^{\perp} = n^{J\complement I} \in \operatorname{Int}(\mathbb{K}) = \operatorname{Ext}(\mathbb{K}^{\top}).$$

(IV) Für Gegenstände g, die sowohl extremal in $\mathbb{K}$ als auch in $\mathbb{H}$ sind, gilt nicht $g \overset{*}{\times} g$ und somit $g \notin A^{JJ} \cap A^{\complement II}$ für alle Teilmengen $A \subseteq G$. Falls also $g \in \lceil A \rceil = A^{JJ}$ in der Hülle liegt, dann folgt stets $g \notin A^{\complement II}$, d.h. $g \in A^{\complement II \complement} = \lfloor A \rfloor$. ■

Der kanonische Fall

146 **Corollarium: Kanonische Approximationsfusion**

Der Mengenapproximationsverband jedes Kern-Hüllen-Paars $((\mathcal{K}, \lfloor\cdot\rfloor), (\mathcal{H}, \lceil\cdot\rceil))$ ist kanonisch isomorph zum Begriffsverband der $\wp(G)$-Fusion von $(\mathcal{K}, G, \not\ni)$ und $(G, \mathcal{H}, \in)$. Genauer gilt

$$\underline{\Xi}(\mathcal{K}, \mathcal{H}) \cong \underline{\mathfrak{B}} \left(\begin{array}{c|c} \overset{*}{\times} & (G, \mathcal{H}, \in) \\ \hline (\mathcal{K}, G, \not\ni) & \perp \end{array} \right)$$

und die beiden Bindungen $\overset{*}{\times}$ und $\perp$ sind wie folgt charakterisiert:

(I) $g \overset{*}{\times} h \Leftrightarrow g = h$ und $\{g\}$ ist ein Kern oder $g^{\complement}$ eine Hülle, oder $g \neq h$

(II) $K \perp H \Leftrightarrow K \subseteq H$

Äquivalenz

Ein disjunktes Granulat kann durch eine Äquivalenzrelation gegeben sein, es besteht hier aus allen Äquivalenzklassen. Jede Äquivalenzrelation $\sim$ auf G induziert nämlich ein Kern-Hüllen-Paar auf G vermöge

$$\lfloor A \rfloor := \bigcup_{[g]_\sim \subseteq A} [g]_\sim = \left\{ g \in G \;\middle|\; \underset{h \sim g}{\forall}\ h \in A \right\}$$

$$\lceil A \rceil := \bigcup_{g \in A} [g]_\sim = \left\{ g \in G \;\middle|\; \underset{h \sim g}{\exists}\ h \in A \right\}$$

Nun lassen sich die Hüllen als Umfänge von $(G, G, \not\sim)$ finden, denn es gilt

$$A^{\complement \not\sim} = \bigcap_{g \notin A} [g]_\sim^{\complement} = \left(\bigcup_{g \notin A} [g]_\sim \right)^{\complement} = \bigcup_{[g]_\sim \subseteq A} [g]_\sim = \lfloor A \rfloor,$$

und andererseits sind die Kerne genau die Umfangskomplemente vermöge

$$A^{\not\sim \complement} = \left(\bigcap_{g \in A} [g]_\sim^{\complement} \right)^{\complement} = \bigcup_{g \in A} [g]_\sim = \lceil A \rceil.$$

Der Mengenapproximationsverband $\underline{\Xi}(\sim)$ ist nach Theorema: Approximationsfusion 3.145 nun isomorph zum Begriffsverband der $\wp(G)$-Fusion

$$\begin{array}{c|c} \overset{*}{\times} & (G, G, \not\sim) \\ \hline (G, G, \not\sim) & \not\sim \end{array}.$$

Für zwei Gegenstände gilt $g \perp h$ genau dann, wenn die beiden Äquivalenzklassen disjunkt sind, d.h. genau für $g \not\sim h$. Die Inzidenzen (g,g) die auf der Diagonale von $\nearrow\!\!\!\!\swarrow$ fehlen, korrespondieren genau zu den Gegenständen g, die zu keinem anderen Gegenstand äquivalent sind, also wenn das Singleton $\{g\}$ eine Äquivalenzklasse bildet; ein Gegenstand g ist nämlich extremal in $(G,G,\not\sim)$, falls das Singletonkomplement $g^{\complement}$ bereits ein Umfang ist, also falls $g^{\complement\not\sim\not\sim} = g^{\complement}$. Nach obigem gilt hier bereits

$$g^{\complement\not\sim} = \bigcup_{[h]_\sim \subseteq \{g\}} [h]_\sim = \begin{cases} \{g\} & ([g]_\sim = \{g\}) \\ \emptyset & (\text{sonst}). \end{cases}$$

Ingesamt kann daher $g^{\complement\not\sim\not\sim} = g^{\complement}$ nur gelten, wenn das Singleton $\{g\}$ eine Äquivalenzklasse bildet.

Eine andere Perspektive auf Rough Sets, die durch Äquivalenzrelationen induziert sind, geben ZDZISLAW PAWLAK und ANDRZEJ SKOWRON in (PS06a), (PS06b) und (PS07). Einige Anmerkungen hierzu sind in (Kri08) enthalten.

Granulat

Es ist nun möglich die Approximation durch Äquivalenzklassen zu verallgemeinern. Wir halten zunächst fest, dass die Menge der Äquivalenzklasse eine disjunkte Zerlegung der Gegenstandsmenge G bildet. In der Approximationsfusion kann der darstellende Kontext $(G,G,\not\sim)$ auch verkleinert werden, indem dieser durch $(G, {}^{G}\!/_{\sim}, \notin)$ ersetzt wird. Es kann allerdings auf die Disjunktheit der Klassen verzichtet werden und einfach eine beliebige Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq \wp(G)$ gewählt werden, deren Vereinigung die gesamte Menge G ergibt.

Sei $\mathcal{F} \subseteq \wp(G)$ ein GRANULAT, die Elemente von $\mathcal{F}$ heißen KLASSEN oder KÖRNCHEN. Dann definiert

$$\lfloor A \rfloor := \bigcup_{\substack{F\in\mathcal{F}\\ F\subseteq A}} F \qquad \text{und} \qquad \lceil A \rceil := \left(\bigcup_{\substack{F\in\mathcal{F}\\ F\cap A=\emptyset}} F \right)^{\complement} = \left\lfloor A^{\complement} \right\rfloor^{\complement}$$

ein Kern-Hüllen-Paar auf G. Das Kernsystem und das Hüllensystem kann durch den Kontext $(G,\mathcal{F},\notin)$ dargestellt werden, denn es gilt

$$\begin{aligned} A^{\notin\notin} &= \left\{ g \in G \;\middle|\; \forall_{F\in\mathcal{F}}\, F \cap A = \emptyset \Rightarrow g \notin F \right\} \\ &= \left\{ g \in G \;\middle|\; \exists_{F\in\mathcal{F}}\, F \cap A = \emptyset \text{ und } g \in F \right\}^{\complement} = \lceil A \rceil, \end{aligned}$$

sowie entsprechend

$$\begin{aligned} A^{\complement\notin\notin\complement} &= \left\{ g \in G \;\middle|\; \forall_{F\in\mathcal{F}}\, F \subseteq A \Rightarrow g \notin F \right\}^{\complement} \\ &= \left\{ g \in G \;\middle|\; \exists_{F\in\mathcal{F}}\, F \subseteq A \text{ und } g \in F \right\} = \lfloor A \rfloor. \end{aligned}$$

Nach Theorema: Approximationsfusion 3.145 ist der Mengenapproximationsverband $\Xi(\mathcal{F})$ isomorph zum Begriffsverband der $\wp(G)$-Fusion

$$\begin{array}{c|c} \nearrow\!\!\!\!\swarrow & (G,\mathcal{F},\notin) \\ \hline (\mathcal{F},G,\not\ni) & \perp \end{array}$$

und hierbei gilt $F_1 \perp F_2$ genau dann, wenn $G = F_1^{\notin} \cup F_2^{\notin} = F_1^{\complement} \cup F_2^{\complement}$ gilt, also falls F_1 und F_2 disjunkt sind. Die fehlenden Inzidenzen auf der Diagonale der Bindung $\overset{*}{\times}$ entsprechen genau den Gegenständen g, deren Singleton $\{g\}$ bereits im Granulat liegt. g ist nämlich extremal, wenn $g^{\complement}$ ein Umfang ist; offensichtlich ist das äquivalent zu $g^{\complement} = \lceil g^{\complement} \rceil = \lfloor \{g\} \rfloor^{\complement}$ bzw. $\{g\} = \lfloor \{g\} \rfloor$, und das kann nur für $\{g\} \in \mathcal{F}$ erfüllt sein.

Quasiordnungen

Eine weitere Verallgemeinerung kann mit Quasiordnungen erzielt werden. Sei dazu $(G, \leq)$ eine quasigeordnete Menge. Die unteren bzw. oberen Approximationen einer Teilmenge $A \subseteq G$ sind hier definiert vermöge

$$\lfloor A \rfloor := \bigcup_{g^{\downarrow} \subseteq A} g^{\downarrow} \qquad \text{und} \qquad \lceil A \rceil := \Biggl(\bigcup_{g^{\uparrow} \cap A = \emptyset} g^{\uparrow} \Biggr)^{\complement}$$

Ein Kontext zum Kernsystem ist $\mathbb{K} = (G, G, \not\leq)$ und dual ist $\mathbb{H} = (G, G, \not\geq)$ ein Kontext zum Hüllensystem. Für die Umfänge im Kontext $\mathbb{H}$ gilt

$$A^{\not\geq\not\leq} = \left\{ h \in G \;\middle|\; \underbrace{\forall_{g \in A}\, h \not\leq g}_{\Leftrightarrow A \cap h^{\uparrow} = \emptyset} \right\}^{\not\leq} = \lceil A \rceil$$

und dual gilt für die Inhaltskomplemente

$$A^{\complement\not\leq\not\geq\complement} = \bigcup_{h^{\downarrow} \subseteq A} h^{\downarrow} = \lfloor A \rfloor \,.$$

Daher ist das Kernsystem dual isomorph zum Begriffsverband von $\mathbb{K}$ und dual ist das Hüllensystem isomorph zu $\mathfrak{B}(\mathbb{H})$. Die Relation $\perp$ ist gleich $\not\geq$, denn es gilt

$$g \perp h \Leftrightarrow g^{\not\leq} \cup h^{\not\geq} = G \Leftrightarrow g^{\downarrow} \cap h^{\uparrow} = \emptyset \Leftrightarrow g \not\geq h.$$

Ein Gegenstand g ist extremal in $(G, G, \not\geq)$, wenn $g^{\complement}$ ein Umfang ist, d.h. falls $g^{\complement} = g^{\complement\not\geq\not\leq} = \lceil g^{\complement} \rceil = \lfloor \{g\} \rfloor^{\complement}$, gdw. $\lfloor \{g\} \rfloor = \{g\}$, also wenn g ein minimales Element in der Quasiordnung $(G, \leq)$ ist. Dual ist g genau dann extremal in $(G, G, \not\leq)$, wenn g maximal in $(G, \leq)$ ist. Die fehlenden Inzidenzen auf der Diagonale von $\overset{*}{\times}$ entsprechen daher genau den Paaren (g, g) mit einem minimalen oder maximalen Element g. Der darstellende Kontext kann hier angegeben werden als

$$\begin{array}{c|c} \overset{*}{\times} & (G, G, \not\geq) \\ \hline (G, G, \not\geq) & \not\geq \end{array}.$$

Inneres und Äußeres Granulat

Setzen wir nun $\mathcal{E} := \{ g^{\downarrow} \mid g \in G \}$ als die Menge aller Primideale sowie $\mathcal{F} := \{ g^{\uparrow} \mid g \in G \}$ als die Menge aller Primfilter, dann lassen sich die Approximationen auch darstellen vermöge

$$\lfloor A \rfloor = \bigcup_{\substack{E \in \mathcal{E} \\ E \subseteq A}} E \quad \text{und} \quad \lceil A \rceil = \left(\bigcup_{\substack{F \in \mathcal{F} \\ F \cap A = \emptyset}} F \right)^{\complement}.$$

Die unteren Approximationen werden also durch Vereinigung von inneren Körnchen gebildet, und dual werden die oberen Approximationen als das Komplement der Vereinigung aller zu A disjunkten äußeren Körnchen gebildet. Das führt nun zu folgender Verallgemeinerung.

Sei $\mathcal{E} \subseteq \wp(G)$ eine Menge von Teilmengen von G, deren Vereinigung die gesamte Menge G ergibt, sowie entsprechend auch $\mathcal{F} \subseteq \wp(G)$ eine Menge mit $\bigcup \mathcal{F} = G$. Wir nennen $\mathcal{E}$ INNERES GRANULAT und $\mathcal{F}$ ÄUSSERES GRANULAT, deren Elemente heißen INNERE KLASSEN bzw. ÄUSSERE KÖRNCHEN.

Der darstellende Kontext der Approximationsfusion ist nun gegeben vermöge

$$\begin{array}{c|c} \overset{*}{\times} & (G, \mathcal{F}, \notin) \\ \hline (\mathcal{E}, G, \not\ni) & \perp \end{array}.$$

Analog zum Fall, wenn beide Granulate übereinstimmen, gilt nun für alle Teilmengen $A \subseteq G$

$$\lfloor A \rfloor = A^{\complement \notin \notin \complement} \text{ (bzgl. } \mathcal{E}) \text{ und } \lceil A \rceil = A^{\notin\notin} \text{ (bzgl. } \mathcal{F}).$$

Dabei gilt $E \perp F$ genau dann, wenn beide Körnchen disjunkt sind. Außerdem gilt $g \overset{*}{\times} g$ genau dann nicht, falls das Singleton $\{g\}$ ein inneres oder ein äußeres Körnchen darstellt.

3.7 Faktoranalyse

3.7.1 FERRERS-Dimension

147 **Lemma**

Die Ordnungsdimension einer geordneten Menge und deren ordinaler Vervollständigung sind gleich.

APPROBATIO Sei $(P, \leq)$ eine geordnete Menge. Nach DEDEKIND ist P genau dann in einen vollständigen Verband V einbettbar, wenn $\mathfrak{B}(P, P, \leq)$ in V einbettbar ist. Ein direktes Produkt von Ketten ist stets ein vollständiger Verband. Also folgt, dass P genau dann in ein direktes Produkt von Ketten eingebettet werden kann, wenn $\mathfrak{B}(P, P \leq)$ in ein direktes Produkt von Ketten einbettbar ist. Also stimmen die Ordnungsdimensionen der geordneten Menge und ihrer Vervollständigung überein. ■

148 **Definitio: FERRERS-Relation**

Eine FERRERS-Relation ist eine Relation $F \subseteq G \times M$ mit der Eigenschaft

$$\underset{g,h \in G}{\forall} \; \underset{m,n \in M}{\forall} \left(gFm \wedge hFn \Rightarrow gFn \vee hFm \right).$$

149 **Lemma**

Für einen formalen Kontext (G, M, I) sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(I) Der Begriffsverband $\mathfrak{B}(G, M, I)$ ist eine Kette.

(II) Die Inzidenzrelation I ist eine FERRERS-Relation.

(III) Es gibt lineare Ordnungen $\leq_G$ der Gegenstandsmenge G und $\leq_M$ der Merkmalsmenge M, sodass I ein Ordnungsideal des direkten Ordnungsprodukts von $(G, \leq_G)$ und $(M, \leq_M)$ ist.

(DP02)

APPROBATIO Sei (G, M, I) ein formaler Kontext.

(I)⇒(II) Der Begriffsverband $\mathfrak{B}(G, M, I)$ sei eine Kette, d.h. je zwei formale Begriffe sind vergleichbar. Wir zeigen, dass die Inzidenz I ferrersch ist. Seien dazu $g, h \in G$ und $m, n \in M$ mit gIm, hIn und $g\not{I}n$. Für die Gegenstands- und Merkmalbegriffe ergibt sich zunächst $\gamma g \leq \mu m$, $\gamma h \leq \mu n$ und $\gamma g \not\leq \mu n$. Weil $\mathfrak{B}(G, M, I)$ linear ist, muss dann $\mu n \leq \gamma g$ gelten und damit haben wir $\gamma h \leq \mu n \leq \gamma g \leq \mu m$, d.h. hIm.

(I)⇐(II) Sei I ferrersch. Es wird gezeigt, dass je zwei formale Begriffe vergleichbar sind. Seien also (A, B), (C, D) zwei formale Begriffe mit $(A, B) \not\leq (C, D)$, d.h. $A \not\subseteq C$. Dann gibt es einen Gegenstand $g \in A$ mit $g \notin C = D^I$, d.h. es gibt ein Merkmal $n \in D$ mit $g\not{I}n$. Weil (A, B) und (C, D) formale Begriffe sind, gilt $A \times B \subseteq I$ und $C \times D \subseteq I$. Insgesamt gilt also gIm für alle $m \in B$ sowie hIn für alle $h \in C$ und $g\not{I}n$, also ergibt sich mit der FERRERS-Eigenschaft hIm für alle $m \in B$ und $h \in C$, d.h. $B \times C \subseteq I$. Damit ist $C \subseteq B^I = A$, also $(C, D) \leq (A, B)$.

(I)⇒(III) Setze $g \leq_G h :\Leftrightarrow \gamma g \leq \gamma h$ und $m \leq_M n :\Leftrightarrow \mu m \geq \mu n$, dann sind $\leq_G$ und $\leq_M$ lineare Ordnungen. I ist ein Ordnungsideal, denn sei $(h, n) \leq (g, m) \in I$, dann gilt $h \leq_G g$ und $n \leq_M m$, also insgesamt $\gamma h \leq \gamma g \leq \mu m \leq \mu n$ bzw. $(h, n) \in I$.

(II)⇐(III) Sei gIm und hIn.

$(g \leq h, m \leq n)$ Es ist $(g,n) \leq (h,n) \in I$, also gIn. Es gilt $(h,m) \leq (h,n) \in I$, also hIm.

$(g \leq h, m \geq n)$ Es ist $(g,n) \leq (h,n) \in I$, also gIn.

$(g \geq h, m \leq n)$ Es gilt $(h,m) \leq (g,m) \in I$, also hIm.

$(g \geq h, m \geq n)$ Es ist $(g,n) \leq (g,m) \in I$, also gIn. Es ist $(h,m) \leq (g,m) \in I$, also hIm.

Also ist I eine FERRERS-Relation. ■

Definitio: FERRERS-Dimension 150

Die FERRERS-DIMENSION eines formalen Kontexts (G, M, I) ist die kleinste Anzahl von FERRERS-Erweiterungen, deren Durchschnitt die Inzidenzrelation I ergibt.

Lemma 151

Für einen formalen Kontext (G, M, I) sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(I) Es gibt eine Ordnungseinbettung von $\mathfrak{B}(G, M, I)$ in ein direktes Produkt $\times_{t \in T} (V_t, \leq_t)$.

(II) Es gibt Abbildungen $\alpha_t \colon G \to V_t$ und $\beta_t \colon M \to V_t$ für $t \in T$ mit

$$gIm \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{t \in T} \alpha_t g \leq_t \beta_t m.$$

(III) Es gibt Kontexte (G, M, J_t) und Ordnungseinbettungen von $\mathfrak{B}(G, M, J_t)$ in $(V_t, \leq_t)$ für jedes $t \in T$, sodass gilt

$$I = \bigcap_{t \in T} J_t.$$

APPROBATIO (I)⇔(II) folgt aus Lemma 3.16

(II)⇒(III) Seien α_t und β_t Abbildungen wie in (ii). Wir definieren die Inzidenzen

$$J_t := \{(g, m \in G \times M \mid \alpha_t g \leq \beta_t m\}$$

und für diese gilt ersichtlich $\bigcap_{t \in T} J_t = I$. Die Abbildung

$$\phi_t \colon \begin{array}{l} \mathfrak{B}(G, M, J_t) \to V_t \\ (A, B) \mapsto \bigvee \alpha_t A \end{array}$$

ist dann analog zu Lemma 3.16 eine Ordnungseinbettung.

(II)⇐(III) Seien (G, M, J_t) formale Kontexte mit $I = \bigcap_{t \in T} J_t$ und $\phi_t \colon \mathfrak{B}(G, M, J_t) \to V_t$ Ordnungseinbettungen. Nun definieren wir Abbildungen $\alpha_t := \phi_t \circ \gamma_t$ und $\beta_t := \phi_t \circ \mu_t$ und dann gilt für alle Gegenstände g und alle Merkmale m

$$\begin{aligned} \forall_{t \in T} \alpha_t g \leq \beta_t m &\Leftrightarrow \forall_{t \in T} \phi_t(g^{J_t J_t}, g^{J_t}) \leq \phi_t(m^{J_t}, m^{J_t J_t}) \\ &\Leftrightarrow \forall_{t \in T} (g^{J_t J_t}, g^{J_t}) \leq (m^{J_t}, m^{J_t J_t}) \\ &\Leftrightarrow \forall_{t \in T} g^{J_t J_t} \subseteq m^{J_t} \\ &\Leftrightarrow \forall_{t \in T} g^{J_t} \ni m \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \underset{t\in T}{\forall} gJ_t m$$

$$\Leftrightarrow gIm. \qquad \blacksquare$$

152 **Theorema: FERRERS- und Ordnungsdimension**

Die FERRERS-Dimension von (G, M, I) stimmt mit der Ordnungsdimension von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ überein:

$$\operatorname{fdim}(G, M, I) = \operatorname{odim}\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I).$$

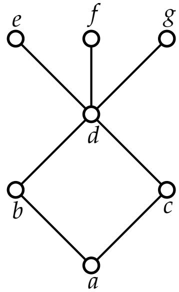
Insbesondere für geordnete Mengen gilt $\operatorname{odim}(P, \leq) = \operatorname{fdim}(P, P, \leq)$.

APPROBATIO $(\leq)$ Nach Lemma 3.151 ist $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ genau dann in ein Produkt von Ketten $(K_t, \leq_t)$ einbettbar, wenn es formale Kontexte (G, M, J_t) und Ordnungseinbettungen von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, J_t)$ in $(K_t, \leq_t)$ mit $\bigcap_{t\in T} J_t = I$ gibt. Dann sind auch die Begriffsverbände $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, J_t)$ Ketten, also sind nach Lemma 3.149 alle Inzidenzen J_t FERRERS-Relationen.

$(\geq)$ Seien umgekehrt F_t FERRERS-Relationen zwischen G und M mit $\bigcap_{t\in T} F_t = I$. Dann sind nach Lemma 3.149 alle Begriffsverbände $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, F_t)$ Ketten. Nach Lemma 3.151 gibt es dann also eine Ordnungseinbettung von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ in das direkte Produkt $\bigtimes_{t\in T} \underline{\mathfrak{B}}(G, M, F_t)$. $\blacksquare$

Exemplum

Aufgabe H4: Geben Sie (möglichst wenige) FERRERS-Relationen an, so dass deren Schnitt gerade die folgende Ordnung ergibt:



Bezeichnen wir die durch obigen Ordnungsdiagramm definierte Ordnungsrelation auf $M = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ mit R. Nun lässt sich R auch durch folgende Inzidenzmatrix darstellen:

$$R \equiv \begin{array}{c|ccccccc|}
 & a & b & c & d & e & f & g \\ \hline
a & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
b & & \times & & \times & \times & \times & \times \\
c & & & \times & \times & \times & \times & \times \\
d & & & & \times & \times & \times & \times \\
e & & & & & \times & & \\
f & & & & & & \times & \\
g & & & & & & & \times \\ \hline
\end{array}$$

Schauen wir uns die Definition einer FERRERS-Relation an: Eine binäre Relation $R \subseteq M \times M$ auf einer Menge M heißt FERRERS-Relation, falls $(a_1 R b_1 \wedge a_2 R b_2 \Longrightarrow a_1 R b_2 \vee a_2 R b_1)$ für alle $a_1, a_2, b_1, b_2 \in M$ gilt. Betrachten wir die obige Matrix, so stellen wir fest, dass der Relation zu einer FERRERS-Relation einige Inzidenzen fehlen:

	a	b	c	d	e	f	g
a	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
b		$\times$	$\times^{\blacktriangle}_{1}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
c		$\times^{\blacktriangledown}_{1}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
d				$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
e					$\times$	$\times^{\blacktriangle}_{2}$	$\times^{\blacktriangle}_{3}$
f					$\times^{\blacktriangledown}_{2}$	$\times$	$\times^{\blacktriangle}_{4}$
g					$\times^{\blacktriangledown}_{3}$	$\times^{\blacktriangledown}_{4}$	$\times$

Insbesondere fehlt R zu einer FERRERS-Relation von den neu eingetragenen Inzidenzen $\times^{\blacktriangle}_{i}$ bzw. $\times^{\blacktriangledown}_{i}$ für $i \in \{1,2,3,4\}$ jeweils eine, d.h. für jede Abbildung $\blacklozenge : \{1,2,3,4\} \longrightarrow \{\blacktriangle, \blacktriangledown\} : i \longmapsto \blacklozenge_i$ ist $R \cup \{ \times^{\blacklozenge_i}_{i} \mid i \in \{1,2,3,4\}\}$ eine FERRERS-Relation. Hierbei repräsentiert $\times^{\blacklozenge_i}_{i}$ dasjenige Paar (x,y), sodass $\times^{\blacklozenge_i}_{i}$ in Zeile x und Spalte y steht.

Daraus können wir nun 8 verschiedene zweielementige Mengen von FERRERS-Relationen erzeugen, deren Schnitt die gegebene Ordnungsrelation ergibt. Eine Möglichkeit ist, alle großen Kreuze mit oberen Index $\blacktriangle$ zur einen und alle großen Kreuze mit $\blacktriangledown$ zur anderen Relation hinzunehmen. Ersichtlich sind beide FERRERS-Relationen und der Schnitt ergibt R.

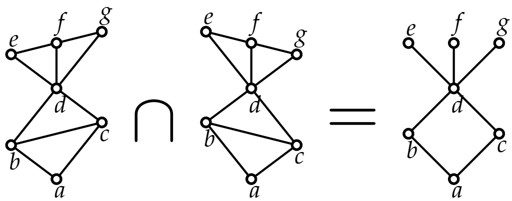
	a	b	c	d	e	f	g
a	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
b		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
c			$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
d				$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
e					$\times$	$\times$	$\times$
f						$\times$	$\times$
g							$\times$

$\cap$

	a	b	c	d	e	f	g
a	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
b		$\times$		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
c		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
d				$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
e					$\times$		
f					$\times$	$\times$	
g					$\times$	$\times$	$\times$

$=$

	a	b	c	d	e	f	g
a	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
b		$\times$		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
c			$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
d				$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
e					$\times$		
f						$\times$	
g							$\times$



3.7.2 Begriffliche Faktorisierungen

154 **Definitio: Faktorisierung**

Eine FAKTORISIERUNG $\mathcal{F} = (F, R, S)$ eines formalen Kontexts (G, M, I) besteht aus zwei formalen Kontexten (G, F, R) und (F, M, S), sodass

$$gIm \Leftrightarrow g^R \cap m^S \neq \emptyset \Leftrightarrow \underset{f \in F}{\exists} gRfSm$$

gilt. Jedes Element $f \in F$ bzw. $(G, \{f\}, R \cap G \times \{f\})$ heißt EINWERTIGER FAKTOR und jede Teilmenge $E \subseteq F$ bzw. $(G, E, R \cap G \times E)$ heißt MEHRWERTIGER FAKTOR.

Die beiden Kontexte (G,F,R) und (F,M,S) heißen FAKTORKONTEXTE und wir schreiben für eine Faktorisierung auch

$$(G,M,I) = (G,F,R) \circ (F,M,S) \equiv \mathcal{F}.$$

Eine Faktorisierung heißt OPTIMAL, wenn es keine Faktorisierung mit weniger (einwertigen) Faktoren gibt.

(GG12)

Definitio: Überdeckung 155

Eine Menge $\mathcal{C}$ von Quasibegriffen/Rechtecken eines Kontexts (G,M,I) heißt ÜBERDECKUNG von (G,M,I), wenn

$$I = \bigcup_{(A,B)\in\mathcal{C}} A \times B$$

gilt. Wenn $\mathcal{C}$ nur Begriffe von (G,M,I) enthält, d.h. $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{B}(G,M,I)$ gilt, dann heißt $\mathcal{C}$ BEGRIFFLICHE ÜBERDECKUNG von (G,M,I). Eine Überdeckung heißt OPTIMAL, wenn es keine Überdeckung mit weniger Quasibegriffen/Rechtecken gibt.

(GG12)

Jede Überdeckung ist in einer begrifflichen Überdeckung enthalten, genauer gilt: Für jede Überdeckung $\mathcal{C}$ von (G,M,I) sind

$$\mathcal{A} := \left\{(A^{II}, A^{I}) \,\middle|\, (A,B) \in \mathcal{C}\right\} \text{ und } \mathcal{B} := \left\{(B^{I}, B^{II}) \,\middle|\, (A,B) \in \mathcal{C}\right\}$$

höchstens gleichmächtige begriffliche Überdeckungen von (G,M,I), die $\mathcal{C}$ überdecken, d.h. es gilt $|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{C}|$ bzw. $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{C}|$ und für jedes Rechteck $(C,D) \in \mathcal{C}$ existiert ein Begriff $(A,B) \in \mathcal{A}$ bzw. $(A,B) \in \mathcal{B}$ mit $C \times D \subseteq A \times B$.

Theorema: Faktorisierungen und Überdeckungen 156

(I) Für jede Faktorisierung $\mathcal{F} \equiv (G,F,R) \circ (F,M,S)$ von (G,M,I) ist

$$\mathcal{C}_{\mathcal{F}} := \left\{\left(f^R, f^S\right) \,\middle|\, f \in F\right\}$$

eine Überdeckung.

(II) Für jede Überdeckung $\mathcal{C} = \left\{(A_f, B_f) \,\middle|\, f \in F\right\}$ von (G,M,I) ist $\mathcal{F}_{\mathcal{C}} \equiv (G,F,R) \circ (F,M,S)$ mit

$$gRf :\Leftrightarrow g \in A_f \text{ und } fSm :\Leftrightarrow m \in B_f$$

eine Faktorisierung.

(III) Die beiden Übergänge sind invers zueinander, d.h. für jede Faktorisierung $\mathcal{F}$ von (G,M,I) gilt $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ und umgekehrt gilt für jede Überdeckung $\mathcal{C}$ von (G,M,I) stets $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{F}_{\mathcal{C}}}$.

(GG12)

APPROBATIO (I) $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ überdeckt (G,M,I), denn es gilt

$$gIm \Leftrightarrow \underset{f\in F}{\exists}\, gRfSm \Leftrightarrow \underset{f\in F}{\exists}\, (g,m) \in f^R \times f^S.$$

(II) $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ faktorisiert (G,M,I), denn es gilt

$$gIm \Leftrightarrow \underset{f\in F}{\exists}\, (g,m) \in A_f \times B_f \Leftrightarrow \underset{f\in F}{\exists}\, gRfSm.$$

(III) Es gilt $f^R = A_f$ bzw. $R = \bigcup_{f\in F} A_f \times \{f\}$ und $f^S = B_f$ bzw. $S = \bigcup_{f\in F}\{f\} \times B_f$. ■

157 **Lemma**

Eine optimale Faktorisierung hat genau $\dim_2 \mathfrak{B}(G, M, \complement I)$ (einwertige) Faktoren.

(GG12)

Approbatio Es gilt $\dim_2 \mathfrak{B}(G, M, \complement I) = \operatorname{fdim}_2(G, M, \complement I)$. Zunächst ist zu beachten, dass die Quasibegriffe genau die einstufigen Ferrers-Relationen sind. Die 2-Ferrers-Dimension $\operatorname{fdim}_2(G, M, \complement I)$ stimmt also mit der kleinsten Anzahl von (G, M, I)-Quasibegriffen, deren Vereinigung (G, M, I) überdecken, überein. Jede optimale Überdeckung muss also aus genau $\operatorname{fdim}_2(G, M, \complement I)$ Rechtecken bestehen. Nach dem vorangegangenem Theorem ist die Anzahl der Faktoren einer optimalen Faktorisierung gleich der Anzahl der Rechtecke einer optimalen Überdeckung. ■

Eine Mengenrepräsentation bzw. T-Repräsentation eines formalen Kontexts (G, M, I) ist ein Paar von Abbildungen $\alpha\colon G \to \wp T$ und $\beta\colon M \to \wp T$, sodass gilt

$$gIm \Leftrightarrow \alpha g \cap \beta m \neq \emptyset.$$

Die Mengendimension $\operatorname{setdim}(G, M, I)$ von (G, M, I) ist die kleinste Mächtigkeit einer Mengenrepräsentation von (G, M, I), und stimmt mit der 2-Dimension von $\mathfrak{B}(G, M, \complement I)$ überein. Für jede Faktorisierung $(G, F, R) \circ (F, M, S)$ von (G, M, I) bilden $\alpha\colon G \to \wp F$ mit $\alpha g = g^R$ und $\beta\colon M \to \wp F$ mit $\beta m = m^S$ eine F-Repräsentation von (G, M, I). Für jede T-Repräsentation (α, β) von (G, M, I) ist $(G, T, R) \circ (T, M, S)$ mit $g^R = \alpha g$ sowie $m^S = \beta m$ eine Faktorisierung von (G, M, I).

158 **Corollarium**

Eine optimale Faktorisierung von (G, M, I) hat genau $\operatorname{setdim}(G, M, I)$ Faktoren.

(GG12)

159 **Definitio: Begriffliche Faktorisierung**

Eine Faktorisierung $\mathcal{F} \equiv (G, F, R) \circ (F, M, S)$ heißt begriffliche Faktorisierung von (G, M, I), wenn die zugehörige Überdeckung $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ eine begriffliche Überdeckung von (G, M, I) ist, d.h. falls für alle Faktoren $f \in F$ stets $f^S = f^{RI}$ sowie $f^R = f^{SI}$ gelten.

(GG12)

Jeder formale Kontext (G, M, I) hat die beiden trivialen begrifflichen Faktorisierungen

$$(G, G, \to) \circ (G, M, I) = (G, M, I) = (G, M, I) \circ (M, M, \to).$$

Es ist natürlich möglich die Faktoren auf die irreduziblen Gegenstände bzw. Merkmale einzuschränken.

Wir erkennen auch sofort, dass jede begriffliche Faktorisierung bereits durch ihren ersten (oder zweiten) Faktorkontext eindeutig bestimmt ist. Es gilt nämlich $S = \bigcup_{f\in F}\{f\} \times f^{RI}$ bzw. dual $R = \bigcup_{f\in F} f^{SI} \times \{f\}$.

Lemma: Eigenschaften von Begrifflichen Faktorisierungen 160

Sei $(G, F, R) \circ (F, M, S)$ eine begriffliche Faktorisierung von (G, M, I). Dann gelten:

(I) Jeder (G, F, R)-Umfang ist ein (G, M, I)-Umfang.

(II) Jeder (F, M, S)-Inhalt ist ein (G, M, I)-Inhalt.

(III) Die duale Merkmalsordnung von (G, F, R) und die Gegenstandsordnung von (F, M, S) stimmen überein, d.h. für alle Faktoren $f_1, f_2 \in F$ gilt

$$f_1^R \subseteq f_2^R \Leftrightarrow f_1^S \supseteq f_2^S.$$

(GG12)

APPROBATIO Für jeden Faktor $f \in F$ bildet (f^R, f^S) einen formalen Begriff von (G, M, I), d.h. alle Merkmalsumfänge von (G, F, R) sind auch Umfänge von (G, M, I). Alle (G, F, R)-Umfänge können bekanntlich als Durchschnitt von (G, F, R)-Merkmalsumfängen dargestellt werden, also müssen alle (G, F, R)-Umfänge auch (G, M, I)-Umfänge sein. Dual sind alle (F, M, S)-Inhalte auch (G, M, I)-Inhalte, denn dies gilt bereits für die erzeugende Teilmenge aller Gegenstandsinhalte von (F, M, S). ■

Lemma 161

Eine (G, M, I)-Faktorisierung $(G, F, R) \circ (F, M, S)$ ist genau dann eine begriffliche Faktorisierung, wenn gelten:

(I) Jeder (G, F, R)-Inhalt ist ein $(F, M, \complement S)$-Umfang.

(II) Jeder (F, M, S)-Umfang ist ein $(G, F, \complement R)$-Inhalt.

(GG12)

APPROBATIO (I)⇒(II) Angenommen, es gäbe einen (G, F, R)-Gegenstandsinhalt g^R, der kein $(F, M, \complement S)$-Umfang ist. Dann gälte

$$g^R \subsetneq g^{R\complement S\complement S} = \bigcap_{\substack{m \in M \\ m^{\complement S} \supseteq g^R}} m^{\complement S}$$

und demzufolge müsste es einen Faktor $f \in F$ geben, der nicht in g^R aber in jedem $(F, M, \complement S)$-Merkmalsumfang $m^{\complement S} = \complement m^S$, der g^R enthält, enthalten ist. Weiterhin wäre dann $g \notin f^R = f^{SI}$, d.h. es gäbe ein Merkmal $m \in f^S$ mit $g \not I m$. Wegen $g \not I m \Leftrightarrow g^R \cap m^S = \emptyset$ müsste also g^R in $\complement m^S$ enthalten sein. Das wäre aber ein Widerspruch, denn der $(F, M, \complement S)$-Merkmalsumfang $\complement m^S$ enthält nicht den Faktor f. Insgesamt ist jeder (G, F, R)-Gegenstandsinhalt g^R ein $(F, M, \complement S)$-Umfang, und demnach auch jeder (G, F, R)-Inhalt. Dual folgt $\operatorname{Ext}(F, M, S) \subseteq \operatorname{Int}(G, F, \complement R)$.

(I)⇐(II) Sei $f \in F$. Wegen $f^R \times f^S \subseteq I$ gilt zunächst $f^{RI} \supseteq f^S$. Sei $m \notin f^S$, d.h. $f \notin m^S$. Dann ist m^S ein $(G, F, \complement R)$-Inhalt, und damit gibt es einen $(G, F, \complement R)$-Gegenstandsinhalt $g^{\complement R}$, der m^S enthält, aber nicht f. Anders ausgedrückt gilt dann $g^R \cap m^S = \emptyset$, d.h. $g \not I m$, und mit $g \in f^R$ folgt $m \notin f^{RI}$. Folglich gilt auch $f^{RI} \subseteq f^S$. Dual folgt $f^{SI} = f^R$. ■

162 **Lemma: Notwendige Faktoren**

Jede begriffliche Überdeckung von (G, M, I) enthält $\gamma G \cap \mu M$.

(GG12)

APPROBATIO Sei $(A, B) \in \gamma G \cap \mu M$, dann gibt es einen Gegenstand $g \in G$ und ein Merkmal $m \in M$, sodass $(A, B) = \gamma g = \mu m$ gilt. Weiterhin ist dann (A, B) der einzige Begriff der g und m enthält: Für jeden Begriff (C, D) mit $g \in C$ und $m \in D$ folgt nämlich $A = g^{II} \subseteq C$, also $B \supseteq D$, und außerdem $B = m^{II} \subseteq D$, d.h. (C, D) und (A, B) sind gleich. Anders ausgedrückt ist (A, B) der einzige Begriff der das Inzidenzpaar gIm überdeckt, muss also zwingend in jeder begrifflichen Überdeckung enthalten sein. ∎

163 **Definitio: Starkes Inzidenzpaar**

Ein Inzidenzpaar gIm heißt STARK, wenn es kein Inzidenzpaar hIn gibt, sodass gilt:

$$[\gamma h, \mu n] \subsetneq [\gamma g, \mu m]\,.$$

(GG12)

Durch einfache Umformungen erhält man die äquivalenten Charakterisierungen:

$$\begin{aligned} gIm \text{ stark} &\Leftrightarrow \forall_{\substack{hIn \\ g^I \neq h^I \text{ oder } m^I \neq n^I}} \quad h^I \not\subseteq g^I \text{ oder } n^I \not\subseteq m^I \\ &\Leftrightarrow \nexists_{\substack{hIn \\ g^I \neq h^I \text{ oder } m^I \neq n^I}} \quad (g, m) \in h^{II} \times n^{II} \end{aligned}$$

164 **Lemma**

In jedem doppelt-fundierten formalen Kontext (G, M, I) gilt sogar

$$gIm \text{ nicht stark} \Leftrightarrow \exists_{\substack{hIn \text{ stark} \\ g^I \neq h^I \text{ oder } m^I \neq n^I}} \quad (g, m) \in h^{II} \times n^{II}.$$

(GG12)

APPROBATIO ($\Rightarrow$) Für jedes nicht starke Inzidenzpaar gIm gibt es stets ein Inzidenzpaar $h_0 I n_0$ mit $g^I \neq h_0^I$ oder $m^I \neq n_0^I$ und $(g, m) \in h_0^{II} \times n_0^{II}$. Wenn $h_k I n_k$ nicht stark ist, dann gibt es ein Inzidenzpaar $h_{k+1} I n_{k+1}$ mit $h_k^I \neq h_{k+1}^I$ oder $n_k^I \neq n_{k+1}^I$ und $h_{k+1}^I \subseteq h_k^I$ sowie $n_{k+1}^I \subseteq n_k^I$, d.h. $(g, m) \in h_{k+1}^{II} \times n_{k+1}^{II}$. Nach Theorema 3.29 gibt es in (G, M, I) weder unendliche Ketten von Gegenständen mit $g_0^I \subsetneq g_1^I \subsetneq \ldots$ noch unendliche Ketten von Merkmalen mit $m_0^I \subsetneq m_1^I \subsetneq \ldots$. Demnach muss diese Folge von Inzidenzpaaren $h_k I n_k$ endlich sein, d.h. irgendwann gibt es ein starkes Inzidenzpaar hIn mit $(g, m) \in h^{II} \times n^{II}$.

($\Leftarrow$) trivial. ∎

165 **Theorema: Hinreichende Faktoren**

Für jeden doppelt-fundierten formalen Kontext (G, M, I) ist

$$\left\{ \left(g^{II}, m^{II} \right) \,\middle|\, gIm \text{ stark} \right\}$$

eine Überdeckung. Die entsprechenden begrifflichen Überdeckungen sind

$$\left\{\gamma g \,\middle|\, \underset{m\in M}{\exists} gIm \text{ stark}\right\} \text{ und } \left\{\mu m \,\middle|\, \underset{g\in G}{\exists} gIm \text{ stark}\right\}.$$

(GG12)

APPROBATIO (I) Für jedes (starke) Inzidenzpaar gIm gilt stets $g^{II} \subseteq m^{III}$, also $g^{II} \times m^{II} \subseteq I$. Somit folgt zunächst

$$I \supseteq \bigcup_{gIm \text{ stark}} g^{II} \times m^{II}.$$

Sei umgekehrt gIm. Wenn gIm stark ist, dann folgt natürlich sofort $(g, m) \in \bigcup_{gIm \text{ stark}} g^{II} \times m^{II}$. Andernfalls gibt es nach obigem Lemma ein starkes Inzidenzpaar hIn mit $(g, m) \in h^{II} \times n^{II}$, also folgt auch $(g, m) \in \bigcup_{gIm \text{ stark}} g^{II} \times m^{II}$.

(II) Es gilt stets $\gamma g = (g^{IIII}, g^{III})$ und dual $\mu m = (m^{III}, m^{IIII})$, also sind

$$\left\{\gamma g \,\middle|\, \underset{m\in M}{\exists} gIm \text{ stark}\right\} \text{ und } \left\{\mu m \,\middle|\, \underset{g\in G}{\exists} gIm \text{ stark}\right\}$$

die beiden kanonischen begrifflichen Überdeckungen zur Überdeckung

$$\left\{\left(g^{II}, m^{II}\right) \,\middle|\, gIm \text{ stark}\right\}.$$

$\blacksquare$

Definitio: Maß 166

Sei $\mathbb{K} = (G, M, I)$ ein formaler Kontext und $\mathbb{S} = (G_{\mathbb{S}}, M_{\mathbb{S}}, I_{\mathbb{S}})$ eine Skala. Ein $\mathbb{S}$-MAß auf $\mathbb{K}$ ist eine Abbildung $\sigma\colon G \to G_{\mathbb{S}}$, sodass jedes σ-Urbild eines $\mathbb{S}$-Umfangs stets ein $\mathbb{K}$-Umfang ist. Ein $\mathbb{S}$-Maß σ heißt VOLL, wenn jeder $\mathbb{K}$-Umfang das σ-Urbild irgendeines $\mathbb{S}$-Umfangs ist.

(GG12)

Weil jede Urbildabbildung $\cap$-kompatibel ist, müssen die Umfangsverbände von $\mathbb{S}$ und $\mathbb{K}$ für jedes volle $\mathbb{S}$-wertige Maß auf $\mathbb{K}$ isomorph sein.

Lemma: Charakterisierung begrifflicher Faktoren 167

$\mathbb{S} = (G, E, R)$ ist genau dann ein (mehrwertiger) begrifflicher Faktor von $\mathbb{K} = (G, M, I)$, wenn die G-Identität ein $\mathbb{S}$-Maß ist, d.h. wenn jeder $\mathbb{S}$-Umfang auch ein $\mathbb{K}$-Umfang ist.

(GG12)

APPROBATIO Nach Definition Definitio: Begriffliche Faktorisierung 3.159 ist (G, E, R) genau dann ein mehrwertiger (erster) begrifflicher Faktor von (G, M, I), wenn es eine begriffliche Faktorisierung $(G, F, \overline{R}) \circ (F, M, S)$ von (G, M, I) mit $E \subseteq F$ sowie $\overline{R} \cap E \times M = R$ gibt.

($\Rightarrow$) Das gilt bereits nach Lemma: Eigenschaften von Begrifflichen Faktorisierungen 3.160.

($\Leftarrow$) Sei umgekehrt id_G ein $\mathbb{S}$-wertiges Maß auf $\mathbb{K}$, d.h. sei jeder $\mathbb{S}$-Umfang ein $\mathbb{K}$-Umfang, dann ist insbesondere jede Spalte f^R mit $f \in E$ ein Umfang von $\mathbb{K}$. Also bildet $\mathcal{C}_E := \{(f^R, f^{RI}) \mid f \in E\}$ eine begriffliche Teilüberdeckung von $\mathbb{K}$. Die Menge $\mathcal{C}_\gamma := \{\gamma g \mid \exists_{m\in M}\, gIm \text{ stark}\}$ bildet nach dem vorherigen

Lemma stets eine begriffliche Überdeckung von $\mathbb{K}$. Wähle nun eine Teilmenge $A \subseteq \{g \in G \mid \exists_{m \in M}\, gIm \text{ stark}\}$, sodass $\mathcal{C}_E \cup \gamma(A)$ eine begriffliche Überdeckung des gesamten Kontexts ist. (Man kann für A natürlich die gesamte Menge der starken Gegenstände wählen; will man jedoch eine (möglichst) optimale Faktorisierung, dann sollte man eine möglichst kleine Teilmenge wählen.) Die zugehörige (G, M, I)-Faktorisierung ist $(G, F, \overline{R}) \circ (F, M, S)$ mit $F = E \cup A$ und

$$\overline{R} = R \cup \left\{(h, g) \,\middle|\, g \in A \text{ und } h \in g^{II}\right\} = R \cup \bigcup_{g \in A} g^{II} \times \{g\}$$

sowie

$$S = \bigcup_{f \in E} \{f\} \times f^{RI} \cup \bigcup_{g \in A} \{g\} \times g^{I}.$$

■ Folglich ist (G, E, R) ein begrifflicher (erster) mehrwertiger Faktor von (G, M, I).

168 **Definitio: Faktor**

Sei $\mathbb{S}$ eine Skala. Ein mehrwertiger Faktor (G, E, R) von (G, M, I) heißt $\mathbb{S}$-FAKTOR, wenn es ein surjektives volles $\mathbb{S}$-Maß auf (G, E, R) gibt. Falls $\mathbb{S}$ eine nominale, ordinale, …Skala ist, dann nennen wir (G, E, R) auch einen NOMINALEN, ORDINALEN, … FAKTOR von (G, M, I). Eine Faktorisierung heißt NOMINAL, ORDINAL, …, wenn der erste Faktorkontext als Apposition von nominalen, ordinalen, …Faktoren dargestellt werden kann.

(GG12)

Anders ausgedrückt: Für jede ordinale Faktorisierung lässt sich der erste Faktorkontext als abgeleiteter Kontext eines mehrwertigen Kontexts bezüglich einer ordinalen Skalierung darstellen. Dual lässt sich dann der zweite Faktorkontext auch als abgeleiteter Kontext eines mehrwertigen Kontexts bezüglich der entsprechenden dualen ordinalen Skalierung darstellen.

169 **Lemma**

Sei $\mathbb{K} = (G, M, I)$. Ein formaler Kontext (G, E, R) ist genau dann ein

(I) n-dimensionaler nominaler Faktor von $\mathbb{K}$, wenn seine Umfänge ohne $\emptyset$ und G eine $\mathbb{K}$-extensionale Partitionierung in n Umfänge bilden.

(II) ein-dimensionaler ordinaler Faktor von $\mathbb{K}$, wenn seine Merkmalsumfänge eine Kette in den $\mathbb{K}$-Umfängen bilden.

(GG12)

APPROBATIO (I) Sei (G, E, R) ein n-dimensionaler nominaler Faktor von $\mathbb{K}$, dann gibt es eine n-dimensionale nominale Skala $\mathbb{S}_n$ und ein surjektives volles $\mathbb{S}_n$-wertiges Maß σ auf (G, E, R). Weiterhin entspricht die Menge der (G, E, R)-Umfänge genau der Menge aller σ_n-Urbilder von $\mathbb{S}_n$-Umfängen. $\mathbb{S}_n$ besitzt abgesehen vom kleinsten und größten Umfang genau n weitere Umfänge, die eine $\mathbb{S}_n$-extensionale Partitionierung bilden. Weil jede Urbildabbildung $\cap$-kompatibel ist, müssen die Umfangsverbände von $\mathbb{S}_n$ und (G, E, R) isomorph sein.

■ (II) ähnlich zu (I).

Corollarium 170

Für jede ordinale Faktorisierung gibt es eine Partitionierung der Faktoren, sodass alle Begriffsverbände der entsprechenden Teilkontexte des ersten Faktorkontexts eine Kette bilden.

(GG12)

Lemma 171

Eine Relation $R \subseteq G \times M$ ist genau dann eine FERRERS-Relation, wenn es Mengen $A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \cdots \subseteq G$ und $M \supseteq B_0 \supsetneq B_1 \supsetneq B_2 \supsetneq \ldots$ gibt, sodass gilt:

$$R = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \times B_n$$

APPROBATIO $(\Rightarrow)$ Für eine FERRERS-Relation $I \subseteq G \times M$ ist nach Lemma 3.149 der zugehörige Begriffsverband $\mathfrak{B}(G, M, I)$ eine Kette. Die Gegenstandsbegriffe $\gamma g = (g^{II}, g^{I})$ für $g \in G$ bilden dann insbesondere auch eine Kette, und natürlich gilt $I = \bigcup_{g \in G} g^{II} \times g^{I}$. Für eine geeignete Nummerierung einer Teilmenge der Gegenstände gilt dann also $g_0^{II} \subsetneq g_1^{II} \subsetneq g_2^{II} \subsetneq \cdots \subseteq G$ und $M \supsetneq g_0^{I} \supsetneq g_1^{I} \supsetneq g_2^{I} \supsetneq \ldots$ sowie

$$I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} g_n^{II} \times g_n^{I}.$$

$(\Leftarrow)$ Sei gRm und hRn. Nach Voraussetzung gibt es dann $i, j \in \mathbb{N}$ mit $(g, m) \in A_i \times B_i$ und $(h, n) \in A_j \times B_j$. Für $i \leq j$ gilt $B_i \supseteq B_j$, also auch

$$(g, n) \in A_i \times B_i \subseteq R.$$

Dual gilt für $i \geq j$ stets hRm. Demnach ist R eine Definitio: FERRERS-Relation 3.148. ■

Definitio: Begriffliche FERRERS-Relation 172

Eine FERRERS-Relation $R \subseteq G \times M$ heißt BEGRIFFLICH in (G, M, I), wenn es formale Begriffe

$$(A_0, B_0) \lneq (A_1, B_1) \lneq (A_2, B_2) \lneq \ldots$$

von (G, M, I) gibt, sodass $R = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \times B_n$ gilt.

(GG12)

Corollarium 173

Jede FERRERS-Relation $R \subseteq I$ ist in einer begrifflichen FERRERS-Relation in (G, M, I) enthalten.

(GG12)

APPROBATIO Sei $R = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \times B_n$. Dann gilt natürlich

$$R \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^{II} \times A_n^{I} \subseteq I \text{ und dual } R \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^{I} \times B_n^{II} \subseteq I$$ ■

Definitio: Ordinale Faktorisierungsweite 174

Die WEITE einer begrifflichen Überdeckung $\mathcal{C}$ ist die größte Mächtigkeit einer Antikette in $\mathcal{C}$. Die ORDINALE FAKTORISIERUNGSWEITE von (G, M, I) ist die kleinste Weite einer begrifflichen Überdeckung von (G, M, I).

(GG12)

175 **Theorema: Charakterisierung der ordinalen Faktorisierungsweite**

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(I) (G, M, I) hat eine ordinale Faktorisierungsweite $\leq n$.

(II) (G, M, I) besitzt eine ordinale Faktorisierung mit $\leq n$ ein-dimensionalen Faktoren.

(III) $\mathfrak{B}(G, M, \complement I)$ hat eine Ordnungsdimension $\leq n$.

(IV) I kann als Vereinigung von $\leq n$ FERRERS-Relationen dargestellt werden.

(GG12)

APPROBATIO (I)⇒(II) Sei (G, M, I) ein Kontext mit ordinaler Faktorisierungsweite $\leq n$, dann gibt es eine begriffliche Überdeckung $\mathcal{C}$ von (G, M, I) mit Weite $\leq n$. Nach dem Theorema: Satz von DILWORTH 1.26 kann $\mathcal{C}$ von $\leq n$ Ketten überdeckt werden, und jede dieser Ketten induziert einen ein-dimensionalen Faktor von (G, M, I). Der erste Faktorkontext der Faktorisierung zu $\mathcal{C}$ kann dann als Apposition dieser $\leq n$ Faktoren dargestellt werden, also hat (G, M, I) eine ordinale Faktorisierung mit $\leq n$ ein-dimensionalen Faktoren.

(II)⇒(IV) Für jeden der $\leq n$ ein-dimensionalen Faktoren bildet die entsprechende Teilüberdeckung eine Kette in den (G, M, I)-Begriffen. Die in diesen Ketten auftauchenden Inzidenzen bilden dann jeweils FERRERS-Relationen in I, deren Vereinigung die gesamte Inzidenzrelation I ergibt.

(III)⇔(IV) gilt bereits nach dem Satz über die Theorema: FERRERS- und Ordnungsdimension 3.152.

(I)⇐(IV) Wenn I als Vereinigung von $\leq n$ FERRERS-Relationen dargestellt werden kann, dann natürlich auch als Vereinigung von $\leq n$ begrifflichen FERRERS-Relationen von (G, M, I). Die aufspannenenden (G, M, I)-Begriffe bilden dann jeweils Ketten, deren Vereinigung eine begriffliche Überdeckung von (G, M, I) der Weite $\leq n$ bilden. Also hat (G, M, I) eine ordinale Faktorisierungsweite $\leq n$. ■

Corollarium 176

(I) (G, M, I) hat die ordinale Faktorisierungsweite 1 genau dann, wenn I eine FERRERS-Relation ist.

(II) Eine nominale Skala mit n Werten hat die ordinale Faktorisierungsweite n.

(III) Eine kontranominale Skala mit n Werten hat die ordinale Faktorisierungsweite n.

(IV) Eine BOOLEsche Skala auf n Werten hat die ordinale Faktorisierungsweite n.

(V) Die interordinale Skala zu einer ordinalen Skala mit der ordinalen Faktorisierungsweite n hat (höchstens?) die ordinale Faktorisierungsweite $2 \cdot n$.

(VI) Die kontraordinale Skala zu einer interordinalen Skala mit der ordinalen Faktorisierungsweite 1 hat auch die ordinale Faktorisierungsweite 1.

(VII) Die ordinale Faktorisierungsweite einer multiordinalen Skala ist die Summe der ordinalen Faktorisierungsweiten der einzelnen ordinalen Summanden-Skalen.

(GG12)

3.7.3 Triadische Faktorisierungen

Definitio: Triadische Faktorisierung 177

Eine TRIFAKTORISIERUNG eines triadischen Kontexts $\mathbb{K} = (K_1, K_2, K_3, Y)$ ist definiert als ein Quadrupel $\mathcal{F} = (F, R_1, R_2, R_3)$ bestehend aus einer Menge F und drei Relationen $R_1 \subseteq K_1 \times F$, $R_2 \subseteq K_2 \times F$ und $R_3 \subseteq K_3 \times F$, sodass

$$(g, m, b) \in Y \Leftrightarrow \underset{f \in F}{\exists}\, g\ R_1\ f \text{ and } m\ R_2\ f \text{ and } b\ R_3\ f$$

$$\Leftrightarrow g^{R_1} \cap m^{R_2} \cap b^{R_3} \neq \emptyset$$

gilt. Wir schreiben dann auch

$$(K_1, K_2, K_3, Y) = (K_1, F, R_1) \circ (K_2, F, R_2) \circ (K_3, F, R_3) \equiv \mathcal{F}.$$

Die Elemente $f \in F$ heißen FAKTOREN von $\mathcal{F}$. Eine Faktorisierung heißt OPTIMAL, wenn es keine Faktorisierung mit weniger Faktoren gibt; die kleinstmögliche Faktorenanzahl symbolisieren wir mit $\rho(\mathbb{K})$.

(Glo13)

Definitio: Triadische Überdeckung 178

Eine Teilmenge $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{T}(\mathbb{K})$ von triadischen Begriffen eines triadischen Kontexts $\mathbb{K} = (K_1, K_2, K_3, Y)$ heißt ÜBERDECKUNG von $\mathbb{K}$, falls

$$Y = \bigcup_{(A_1, A_2, A_3) \in \mathcal{C}} A_1 \times A_2 \times A_3$$

gilt. Falls $\mathcal{C}$ minimal bezüglich der Anzahl seiner Elemente ist, d.h. wenn es keine triadische Überdeckung mit weniger triadischen Begriffen von $\mathbb{K}$ gibt, dann nennen wir $\mathcal{C}$ eine OPTIMALE triadische Überdeckung.

(Glo13)

179 **Lemma: Triadische Faktorisierungen und Überdeckungen**

(I) Für jede Faktorisierung $\mathcal{F} = (F, R_1, R_2, R_3)$ ist

$$\mathcal{C}_{\mathcal{F}} := \left\{ (f^{R_1}, f^{R_2}, f^{R_3}) \right\}_{f \in F}$$

eine Überdeckung.

(II) Für jede Überdeckung $\mathcal{C} = \left\{ (A_1^f, A_2^f, A_3^f) \right\}_{f \in F}$ ist

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}} := (F, S_1, S_2, S_3) \text{ mit } \begin{cases} gS_1 f :\Leftrightarrow g \in A_1^f \\ mS_2 f :\Leftrightarrow m \in A_2^f \\ bS_3 f :\Leftrightarrow b \in A_3^f \end{cases}$$

eine Faktorisierung.

(III) Die beiden Übergänge sind invers zueinander; genauer gilt für jede Faktorisierung $\mathcal{F}$ stets $\mathcal{F}_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$, und für jede Überdeckung $\mathcal{C}$ gilt stets $\mathcal{C}_{\mathcal{F}_{\mathcal{C}}}$.

(Glo13)

180 **Lemma**

Sei $\mathbb{K} = (K_1, K_2, K_3, Y)$ ein Trikontext mit $n_1 := |K_1|$ Objekten, $n_2 := |K_2|$ Merkmalen und $n_3 := |K_3|$ Bedingungen. Dann gelten:

(I) $\rho(\mathbb{K}) \leq \min\{n_1 \cdot n_2, n_1 \cdot n_3, n_2 \cdot n_3\}$

(II) Es gibt eine begriffliche Triüberdeckung mit $\rho(\mathbb{K})$ Tribegriffen.

(Glo13)

181 **Lemma**

Seien $a_1, c_1 \in K_1$ Objekte, $a_2, b_2 \in K_2$ Merkmale und $b_3, c_3 \in K_3$ Bedingungen. Falls es Richtungen $\{i_a, j_a\} = \{1, 2\}$, $\{i_b, j_b\} = \{2, 3\}$ und $\{i_c, j_c\} = \{1, 3\}$ gibt, sodass

$$\mathfrak{b}_{i_a j_a}(a_1, a_2) = \mathfrak{b}_{i_b j_b}(b_2, b_3) = \mathfrak{b}_{i_c j_c}(c_1, c_3)$$

gilt, dann ist $(A_1, A_2, A_3) := \mathfrak{b}_{i_x j_x}(x_{i_x}, x_{j_x})$ mit $x \in \{a, b, c\}$ der einzige Tribegriff, der den Quader $\{a_1, c_1\} \times \{a_2, b_2\} \times \{b_3, c_3\}$ enthält, d.h. sodass gilt

$$\{a_1, c_1\} \times \{a_2, b_2\} \times \{b_3, c_3\} \subseteq A_1 \times A_2 \times A_3.$$

(Glo13)

182 **Definitio: Notwendiger Faktor**

Ein triadischer Begriff $\mathfrak{b}$ von $\mathbb{K}$ heißt NOTWENDIGER Faktor von $\mathbb{K}$, wenn jede begriffliche Triüberdeckung den Begriff $\mathfrak{b}$ enthält.

(BGV13)

183 **Lemma**

Seien $\mathfrak{b} \in \mathfrak{T}\mathbb{K}$ ein Tribegriff, $x_1 \in K_1$ ein Gegenstand, $x_2 \in K_2$ ein Merkmal und $x_3 \in K_3$ eine Bedingung eines Trikontexts $\mathbb{K} = (K_1, K_2, K_3, Y)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(I) $\mathfrak{b}$ ist der einzige Tribegriff, der x_1, x_2 und x_3 umfasst.

(II) Es gibt eine Richtungswahl $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$, sodass gilt:

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_{ij}(x_i, x_j) = \mathfrak{b}_{ik}(x_i, x_k) = \mathfrak{b}_{jk}(x_j, x_k).$$

(III) Für jede beliebige Richtungswahl $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ gilt:

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_{ij}(x_i, x_j) = \mathfrak{b}_{ik}(x_i, x_k) = \mathfrak{b}_{jk}(x_j, x_k).$$

(BGV13)

Corollarium: Notwendige Trifaktoren 184

Ein Tribegriff $\mathfrak{b}$ ist ein notwendiger Faktor eines Trikontexts $\mathbb{K} = (K_1, K_2, K_3, Y)$ genau dann, wenn es ein Objekt $x_1 \in K_1$, ein Merkmal $x_2 \in K_2$ und eine Bedingung $x_3 \in K_3$ gibt, sodass eine der Bedingungen des vorigen Lemmas erfüllt ist.

(BGV13)

Definitio: Dyadischer Schnitt 185

Für einen Trikontext $\mathbb{K} = (K_1, K_2, K_3, Y)$, eine Richtungswahl $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ und ein Element $\alpha \in K_i$ heißt der formale Kontext

$$c_i^\alpha := \mathbb{K}_{jk}^{\{\alpha\}} = (K_j, K_k, Y_{jk}^{\{\alpha\}})$$

DYADISCHER SCHNITT von $\mathbb{K}$ bezüglich α.

(BGV13)

Zu jedem Trikontext existieren drei Familien von dyadischen Schnitten:

$$c_1 := \left\{(K_2, K_3, Y_{23}^{\{g\}}\right\}_{g \in K_1}$$

$$c_2 := \left\{(K_1, K_3, Y_{13}^{\{m\}}\right\}_{m \in K_2}$$

$$c_3 := \left\{(K_1, K_2, Y_{12}^{\{b\}}\right\}_{b \in K_3}$$

Nun lässt sich der ursprüngliche Trikontext als eine Triapposition jeder der obigen d-Schnitt-Familien darstellen, es gilt nämlich

$$\begin{aligned} Y &= \bigcup_{g \in K_1} \{g\} \times Y_{23}^g \\ &= \bigcup_{m \in K_2} \bigcup_{(g,b) \in Y_{13}^m} \{(g,m,b)\} \\ &= \bigcup_{b \in K_3} Y_{12}^b \times \{b\}. \end{aligned}$$

Theorema: Transformation der Faktoren 186

Sei $\mathcal{F} = (F, R_1, R_i, R_j)$ eine Trifaktorisierung des Trikontexts $\mathbb{K} = (K_1, K_2, K_3, Y)$ und $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ eine beliebige Richtungswahl mit $i < j$. Für die beiden

Abbildungen

$$\phi_{ij}\colon \begin{array}{l} \wp(F) \to \wp(K_i \times K_j) \\ P \mapsto \underbrace{\left\{(x_i, x_j) \in K_i \times K_j \,\middle|\, \underset{f\in F}{\exists} f \in P \text{ and } x_i\, R_i\, f \text{ and } x_j\, R_j\, f\right\}}_{= \bigcup_{f\in P} f^{R_i} \times f^{R_j}} \end{array}$$

$$\psi_{ij}\colon \begin{array}{l} \wp(K_i \times K_j) \to \wp(F) \\ Q \mapsto \underbrace{\left\{ f \in F \,\middle|\, \underset{x_i\in K_i}{\forall}\ \underset{x_j\in K_j}{\forall} x_i\, R_i\, f \text{ and } x_j\, R_j\, f \Rightarrow x_i\, Q\, x_j \right\}}_{= \left\{ f\in F \,\middle|\, f^{R_i} \times f^{R_j} \subseteq Q\right\}} \end{array}$$

bildet deren Paar (ϕ_{ij}, ψ_{ij}) eine Adjunktion zwischen F und $K_i \times K_j$.

(BGV13)

187 **Lemma**

Für $x_k \in K_k$ gilt

$$\phi_{ij}(x_k^{R_k}) = Y_{ij}^{\{x_k\}} \text{ and } \psi_{ij}(Y_{ij}^{\{x_k\}}) = x_k^{R_k}.$$

(BGV13)

188 **Corollarium**

Einige bekannte allgemeine Eigenschaften von Adjunktionen liefern insbesondere:

(I) ϕ_{ij} ist ordnungserhaltend, d.h. für alle Teilmengen $P_1 \subseteq P_2 \subseteq F$ gilt $\phi_{ij}(P_1) \subseteq \phi_{ij}(P_2)$.

(II) ψ_{ij} ist ordnungserhaltend, d.h. für alle Teilmengen $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq K_i \times K_j$ gilt $\psi_{ij}(Q_1) \subseteq \psi_{ij}(Q_2)$.

(III) $\psi_{ij} \circ \phi_{ij}$ ist ein Hüllenoperator, d.h. für alle Teilmengen $P \subseteq F$ gilt $P \subseteq \psi_{ij}(\phi_{ij}(P))$.

(IV) $\phi_{ij} \circ \phi_{ij}$ ist ein Kernoperator, d.h. für alle Teilmengen $Q \subseteq K_i \times K_j$ gilt $\phi_{ij}(\psi_{ij}(Q)) \subseteq Q$.

(V) Für jede Teilmenge $P \subseteq F$ ist $\psi_{ij}^{-1}(P)$ eine konvexe Teilmenge von $(\wp(K_i \times K_j), \subseteq)$ mit dem kleinsten Element $\phi_{ij}(P)$.

(VI) Für jede Teilmenge $Q \subseteq K_i \times K_j$ ist $\phi_{ij}^{-1}(Q)$ eine konvexe Teilmenge von $(\wp(F), \subseteq)$ mit dem größten Element $\psi_{ij}(Q)$.

(BGV13)

3.8 Algorithmen

3.8.1 Next-Closure

Lexikalische Ordnung auf einem Produkt

Lemma 189

Sei $(P, \leq)$ eine Kette, in der jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt (d.h. eine wohlgeordnete Menge), und seien $(Q_p, \leq_p)$ Ketten für alle $p \in P$. Die Relationen $\sqsubset_q$ für $q \in P$ auf $\bigtimes_{p \in P} Q_p$ mit

$$(x_p) \sqsubset_q (y_p) \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{p<q}{\forall} x_p = y_p \quad \wedge \quad x_q <_q y_q$$

haben folgende Eigenschaften:

(I) $(x_p) \sqsubset_i (y_p) \wedge (x_p) \sqsubset_j (z_p) \wedge i < j \implies (z_p) \sqsubset_i (y_p)$

(II) $(x_p) \sqsubset_i (y_p) \wedge (x_p) \sqsubset_j (z_p) \implies i \geq j \vee (z_p) \sqsubset_i (y_p)$

(III) $(x_p) \sqsubset_i (y_p) \wedge (y_p) \sqsubset_j (z_p) \implies (x_p) \sqsubset_{\min\{i,j\}} (z_p)$

APPROBATIO (I) Seien $(x_p) \sqsubset_i (y_p)$, $(x_p) \sqsubset_j (z_p)$ und $i < j$. Also folgt

$$\underset{p<i}{\forall} z_p = x_p = y_p \quad \wedge \quad z_i = x_i <_i y_i$$

und das bedeutet $(z_p) \sqsubset_i (y_p)$.

(II) folgt aus (i) durch logisch äquivalente Umformung.

(III) Für $(x_p) \sqsubset_i (y_p)$ und $(y_p) \sqsubset_j (z_p)$ folgt

$$\underset{p<\min\{i,j\}}{\forall} x_p = y_p = z_p.$$

Falls $i < j$ ist, so gilt $x_i <_i y_i = z_i$. Für $i = j$ gilt $x_i <_i y_i <_i z_i$. Wenn $i > j$, dann ist $x_j = y_j <_j z_j$. Insgesamt also

$$\underset{p<\min\{i,j\}}{\forall} x_p = z_p \quad \vee \quad x_{\min\{i,j\}} <_{\min\{i,j\}} y_{\min\{i,j\}},$$

d.h. $(x_p) \sqsubset_{\min\{i,j\}} (z_p)$. ■

Theorema: Lexikalische Ordnung 190

Sei $(P, \leq)$ eine Kette, in der jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt, und seien $(Q_p, \leq_p)$ Ketten für alle $p \in P$. Dann ist auch das LEXIKALISCHE PRODUKT

$$\bigotimes_{p \in (P, \leq)} (Q_p, \leq_p) := \Big(\bigtimes_{p \in P} Q_p, \sqsubseteq \Big)$$

eine Kette vermöge der LEXIKALISCHEN ORDNUNG

$$(x_p) \sqsubseteq (y_p) \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{p \in P}{\forall} x_p = y_p \quad \vee \quad \underset{q \in P}{\exists} (x_p) \sqsubset_q (y_p).$$

Die lexikalische Ordnung des lexikalischen Produkts ist eine lineare Erweiterung der punktweisen Ordnung des direkten Produkts.

APPROBATIO (REFLEXIV) trivial.

(ANTISYMMETRISCH) Für $(x_p) = (y_p)$ trivial. Wäre $(x_p) \sqsubset (y_p)$ und $(y_p) \sqsubset (x_p)$, dann gäbe es $i, j \in P$ mit $(x_p) \sqsubset_i (y_p)$ und $(y_p) \sqsubset_j (x_p)$. Nach Lemma 3.189 wäre $(x_p) \sqsubset_{\min\{i,j\}} (x_p)$. Widerspruch zur Irreflexivität von $\sqsubset_{\min\{i,j\}}$.

(TRANSITIV) Für $(x_p) = (y_p)$ oder $(y_p) = (z_p)$ trivial. Falls $(x_p) \sqsubset (y_p)$ und $(y_p) \sqsubset (z_p)$, dann gibt es $i, j \in P$ mit $(x_p) \sqsubset_i (y_p)$ und $(y_p) \sqsubset_j (z_p)$. Nach Lemma 3.189 ist dann $(x_p) \sqsubset_{\min\{i,j\}} (z_p)$ und damit $(x_p) \sqsubset (z_p)$.

(LINEAR) Sei $(x_p) \neq (y_p)$. Die Menge $\{p \in P \mid x_p \neq y_p\} \neq \emptyset$ hat ein kleinstes Element $i \in P$ und es gilt

$$\forall_{p<i} x_p = y_p \;\wedge\; x_i \neq y_i.$$

Weil die Ordnung $\leq_i$ linear ist, gilt entweder $x_i <_i y_i$ oder $y_i <_i x_i$ und damit folgt $(x_p) \sqsubset_i (y_p)$ oder $(y_p) \sqsubset_i (x_p)$.

(ERWEITERUNG) Für $(x_p) = (y_p)$ trivial. Sei also $(x_p) < (y_p)$ bezüglich der punktweisen Ordnung, d.h. für alle $p \in P$ gilt $x_p \leq_p y_p$ und es gibt ein $q \in P$ mit $x_q \neq y_q$. Die Menge $\{p \in P \mid x_p <_p y_p\} \neq \emptyset$ hat ein kleinstes Element $i \in P$ und damit folgt

$$\forall_{p<i} x_p = y_p \;\wedge\; x_i <_i y_i,$$

d.h. $(x_p) \sqsubset_i (y_p)$. ∎

Lexikalische Ordnung auf einer Potenzmenge

191 **Lemma**

Sei P eine Menge. Dann sind die Potenzmenge $\wp P$ und das kartesische Produkt $\mathbf{2}^P = \bigtimes_P \mathbf{2} = \bigtimes_{p\in P}\{0,1\}$ isomorph vermöge den Abbildungen

$$\iota\colon \begin{array}{l} \wp P \to \mathbf{2}^P \\ A \mapsto \left(\begin{cases} 0 & (p \notin A) \\ 1 & (p \in A)\end{cases}\right)_{p\in P}\end{array}$$

und

$$\kappa\colon \begin{array}{l} \mathbf{2}^P \to \wp P \\ (x_p)_{p\in P} \mapsto \{p \in P \mid x_p = 1\}. \end{array}$$

(I) Die Abbildungen ι und κ sind Ordnungsisomorphismen zwischen der Potenzmenge $(\wp P, \subseteq)$ und dem direkten Produkt $(\mathbf{2}, \leq)^P$.

(II) Sei $(P, \leq)$ eine Kette, in der jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt. Die Abbildungen ι und κ sind Ordnungsisomorphismen zwischen der LEXIKALISCH GEORDNETEN Potenzmenge $(\wp P, \sqsubseteq)$ und dem lexikalischen Produkt $(\mathbf{2}, \leq)^{(P,\leq)}$. Die LEXIKALISCHE ORDNUNG auf $\wp P$ ergibt sich zu

$$A \sqsubseteq B \iff A = B \;\vee\; \min(A \Delta B) \in B.$$

$$\iff A = B \lor \exists_{i \in B \setminus A} A \cap \Downarrow i = B \cap \Downarrow i$$

APPROBATIO (I) trivial.

(II) Es gilt durch einfache Umformungen

$A \sqsubseteq B \Leftrightarrow \iota A \sqsubseteq \iota B$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(\begin{cases} 0 & (p \notin A) \\ 1 & (p \in A) \end{cases}\right)_{p \in P} \sqsubseteq \left(\begin{cases} 0 & (p \notin A) \\ 1 & (p \in B) \end{cases}\right)_{p \in B} \\
&\Leftrightarrow \left(\forall_{p \in P} \begin{cases} 0 & (p \notin A) \\ 1 & (p \in A) \end{cases} = \begin{cases} 0 & (p \notin A) \\ 1 & (p \in B) \end{cases}\right) \\
&\qquad \lor \left(\exists_{q \in P} \left(\forall_{p < q} \begin{cases} 0 & (p \notin A) \\ 1 & (p \in A) \end{cases} = \begin{cases} 0 & (p \notin A) \\ 1 & (p \in B) \end{cases}\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. \land \left(\begin{cases} 0 & (q \notin A) \\ 1 & (q \in A) \end{cases} < \begin{cases} 0 & (q \notin A) \\ 1 & (q \in B) \end{cases}\right)\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\forall_{p \in P} p \in A \Leftrightarrow p \in B\right) \lor \left(\exists_{q \in P} \left(\forall_{p < q} p \in A \Leftrightarrow p \in B\right) \land q \notin A \land q \in B\right) \\
&\Leftrightarrow A = B \lor \exists_{q \in B \setminus A} A \cap \Downarrow q = B \cap \Downarrow q \\
&\Leftrightarrow A = B \lor \min(A \Delta B) \in B.
\end{aligned}$$

■

Corollarium: Binärer Darstellungssatz 192

Jede geordnete Menge ist in eine Potenz von **2** einbettbar.

APPROBATIO Jede geordnete Menge $(P, \leq)$ lässt sich in ihre Potenzmenge $(\wp P, \subseteq)$ einbetten vermöge der Abbildung $p \mapsto \downarrow p$, also ist die Abbildung

$$\xi : \begin{array}{c} (P, \leq) \hookrightarrow (\mathbf{2}, \leq)^P \\ p \mapsto \begin{array}{c} P \to \mathbf{2} \\ q \mapsto \begin{cases} 0 & (p \not\leq q) \\ 1 & (p \leq q) \end{cases} \end{array} \end{array}$$

auch eine Ordnungseinbettung. ■

Corollarium 193

Es gelten:

(I) $A \sqsubset_g B \iff \min(A \Delta B) = g \in B$

(II) $A \sqsubset_g B \iff g \in B \setminus A \land A \cap \Downarrow g = B \cap \Downarrow g$

Corollarium 194

Sei $(P, \leq)$ eine Kette, in der jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt. Die Relationen $\sqsubset_q$ für $q \in P$ auf $\wp P$ haben folgende Eigenschaften:

(I) $A \sqsubset_i B \land A \sqsubset_j C \land i < j \implies C \sqsubset_i B$

(II) $A \sqsubset_i B \wedge A \sqsubset_j C \implies i \geq j \vee C \sqsubset_i B$
(III) $A \sqsubset_i B \wedge B \sqsubset_j C \implies A \sqsubset_{\min\{i,j\}} C$

195 **Corollarium: Lexikalische Ordnung**

Sei $(P, \leq)$ eine Kette, in der jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt. Dann ist auch die Potenzmenge

$$(\wp P, \sqsubseteq)$$

eine Kette vermöge der LEXIKALISCHEN ORDNUNG

$$A \sqsubseteq B \iff A = B \ \vee \ \min(A \Delta B) \in B.$$

Die lexikalische Ordnung der Teilmengen ist eine lineare Erweiterung der üblichen Enthaltensein-Ordnung der Teilmengen.

Next-Closure-Algorithmus und Beweis

196 **Definitio**

$A \oplus g := ((A \cap \Downarrow g) \cup \{g\})^{II} = ((A \cup \{g\}) \cap \downarrow g)^{II}$

197 **Lemma**

Es gelten:

(I) $g \notin A \implies A \sqsubset A \oplus g$
(II) $A \sqsubset_g B = B^{II} \implies A \oplus g \subseteq B$
(III) $A \sqsubset_g B = B^{II} \implies A \sqsubset_g A \oplus g$

APPROBATIO (I) Sei $g \notin A$. Es gilt zunächst durch einfache Umformung

$$A \cap \Downarrow g = ((A \cap \Downarrow g) \cup \{g\}) \cap \Downarrow g.$$

Ersichtlich ist, dass $g \in (A \cap \Downarrow g) \cup \{g\}$ ist, und es folgt

$$A \sqsubset_g (A \cap \Downarrow g) \cup \{g\}.$$

Außerdem gilt

$$(A \cap \Downarrow g) \cup \{g\} \subseteq ((A \cap \Downarrow g) \cup \{g\})^{II} = A \oplus g.$$

Insgesamt ist nun $A \sqsubset (A \cap \Downarrow g) \cup \{g\} \sqsubseteq A \oplus g$ und die Transitivität liefert $A \sqsubset A \oplus g$.

(II) Sei $A \sqsubset_g B$ und $B = B^{II}$. Es ist $g \in B \setminus A$ und $A \cap \Downarrow g = B \cap \Downarrow g$, also ergibt sich $(A \cap \Downarrow g) \cup \{g\} \subseteq B$ und damit folgt

$$A \oplus g = ((A \cap \Downarrow g) \cup \{g\})^{II} \subseteq B^{II} = B.$$

(III) Sei $A \sqsubset_g B$ und $B = B^{II}$. Nach (ii) gilt $A \oplus g \subseteq B$ und damit

$$A \cap \Downarrow g = B \cap \Downarrow g \supseteq (A \oplus g) \cap \Downarrow g.$$

Andererseits ist wie in (i)

$$A \cap \Downarrow g \subseteq (A \cap \Downarrow g) \cup \{g\} \subseteq A \oplus g$$

und weiter $A \cap \Downarrow g \subseteq (A \oplus g) \cap \Downarrow g$. Zusammengefasst haben wir also $A \cap \Downarrow g = (A \oplus g) \cap \Downarrow g$ mit $g \notin A$ und $g \in A \oplus g$, d.h. $A \sqsubset_g A \oplus g$. ■

Theorema: Next-Closure 198

Für eine Menge $A \subseteq G$ ist

$$A^+ := A \oplus \max_{\substack{g \in G \\ A \sqsubset_g A \oplus g}} g$$

der lexikalisch nächstgrößere Umfang, d.h. es gibt keinen Umfang, der zwischen A und A^+ bezüglich der lexikalischen Ordnung liegt. Der lexikalisch kleinste Umfang ist $\emptyset^+ = \emptyset^{II}$.

APPROBATIO Sei $A \subseteq G$ und B der lexikalisch nächstgrößere Umfang nach A. Es gilt also $A \sqsubset B$, d.h. es existiert ein $g \in G$ mit $A \sqsubset_g B = B^{II}$ und mit Lemma 3.197 erhalten wir $A \sqsubset_g A \oplus g \subseteq B$. Weil $A \oplus g$ und B Umfänge sind und B der lexikalische Nachfolgerumfang von A ist, muss

$$B = A \oplus g$$

sein. Sei $h \in G \setminus \{g\}$ mit $A \sqsubset_h A \oplus h$. Weil $A \oplus g$ der lexikalisch nächstgrößere Umfang nach A ist, folgt $A \sqsubset A \oplus g \sqsubseteq A \oplus h$, d.h.

$$A \oplus h \not\sqsubset_g A \oplus g.$$

Nach Corollarium 3.194 gilt $g \geq h$ oder $A \oplus h \sqsubset_g A \oplus g$ und demnach muss $g \geq h$ bzw. $g > h$ sein. Folglich gilt

$$g = \max_{\substack{h \in G \\ A \sqsubset_h A \oplus h}} h.$$

■

Theorema: Next-Closure 199

Falls $\mathcal{F}$ eine Menge von Umfängen des Kontextes (G, M, I) mit der Eigenschaft

$$A \in \mathcal{F} \ \wedge \ g \in G \implies (A \cap \Downarrow g)^{II} \in \mathcal{F}$$

ist, dann ist für eine Menge $A \subseteq G$

$$A^+ := A \oplus \max_{\substack{g \in G \\ A \sqsubset_g A \oplus g \\ A \oplus g \in \mathcal{F}}} g$$

der lexikalisch nächstgrößere Umfang in $\mathcal{F}$, d.h. es gibt keinen Umfang in $\mathcal{F}$, der zwischen A und A^+ bezüglich der lexikalischen Ordnung liegt. Der lexikalisch kleinste Umfang in $\mathcal{F}$ ist $\emptyset^+$.

3.8.2 iPred

tba.

3.8.3 iFox

Suppose a context $\mathbb{K} = (G, M, I)$ and a new column $\mathbb{C} = (G, \{n\}, J)$ with $n \notin M$ are given. Then we describe in terms of structure what happens with the labeled concept lattice diagram upon insertion of $\mathbb{C}$ into $\mathbb{K}$ and removal of $\mathbb{C}$ from $\mathbb{K}|\mathbb{C}$. For this purpose the notion of formal concepts is extended to a quadrupel $(A, B, A_\lambda, B_\lambda)$ with A and B being the extent and intent as usual, and furthermore A_λ and B_λ

contain all object and attribute labels. Such a quadrupel is called concept node. The concept nodes of $\mathbb{K}|\mathbb{C}$ can be computed from those of $\mathbb{K}$ and vice versa, by classifying them and then updating them by the following mappings.

(OLD) Each old concept of $\mathbb{K}$ *w.r.t.* $\mathbb{C}$ is an old concept of $\mathbb{K}|\mathbb{C}$ as well, and conversely every old concept of $\mathbb{K}|\mathbb{C}$ is an old concept of $\mathbb{K}$ *w.r.t.* $\mathbb{C}$, by the bijection $\mathsf{old}_{\mathbb{C}}\colon \mathbf{n}^{\mathbb{C}}_{\mathsf{old}}(\mathbb{K}) \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathbf{n}_{\mathsf{old}}(\mathbb{K}|\mathbb{C})$ with

$$\mathsf{old}_{\mathbb{C}}(A,B,A_\lambda,B_\lambda) = \begin{cases} (A,B,A_\lambda,B_\lambda) & \text{if } (A,B) \notin \mathfrak{B}^{\mathbb{C}}_{\mathsf{gen}}(\mathbb{K}) \\ (A,B,A_\lambda \setminus n^J,B_\lambda) & \text{if } (A,B) \in \mathfrak{B}^{\mathbb{C}}_{\mathsf{gen}}(\mathbb{K}) \end{cases}$$

and

$$\mathsf{old}^{-1}_{\mathbb{C}}(A,B,A_\lambda,B_\lambda) = \begin{cases} (A,B,A_\lambda,B_\lambda) & \text{if } (A,B) \notin \mathfrak{B}_{\mathsf{gen}}(\mathbb{K}|\mathbb{C}) \\ (A,B,A_\lambda \,\dot\cup\, C_\lambda,B_\lambda) & \text{if } (A,B) \in \mathfrak{B}_{\mathsf{gen}}(\mathbb{K}|\mathbb{C}) \\ & \text{and } (C,D) = \mathsf{new}_{\mathbb{C}}(\mathsf{old}^{-1}_{\mathbb{C}}(A,B)) \end{cases}$$

with $\mathfrak{B}^{\mathbb{C}}_{\mathsf{old}}(\mathbb{K}) = \{(A,B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}) \mid A \not\subseteq n^J\}$
and $\mathfrak{B}_{\mathsf{old}}(\mathbb{K}|\mathbb{C}) = \{(A,B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}|\mathbb{C}) \mid n \notin B\}$.

(VAR) Every varying concept of $\mathbb{K}$ *w.r.t.* $\mathbb{C}$ is mapped to a varied concept of $\mathbb{K}|\mathbb{C}$ by adding the new attribute n to the intent, and reversely each varied concept of $\mathbb{K}|\mathbb{C}$ become a varying concept of $\mathbb{K}$ *w.r.t.* $\mathbb{C}$ be removing n from its intent. This is due to the bijection $\mathsf{var}_{\mathbb{C}}\colon \mathbf{n}^{\mathbb{C}}_{\mathsf{var}}(\mathbb{K}) \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathbf{n}_{\mathsf{var}}(\mathbb{K}|\mathbb{C})$ such that

$$\mathsf{var}_{\mathbb{C}}(A,B,A_\lambda,B_\lambda) = (A,B \,\dot\cup\, \{n\},A_\lambda,B_\lambda)$$

and

$$\mathsf{var}^{-1}_{\mathbb{C}}(A,B,A_\lambda,B_\lambda) = (A,B \setminus \{n\},A_\lambda,B_\lambda)$$

with $\mathfrak{B}^{\mathbb{C}}_{\mathsf{var}}(\mathbb{K}) = \{(A,B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}) \mid A \subseteq n^J\}$
and $\mathfrak{B}_{\mathsf{var}}(\mathbb{K}|\mathbb{C}) = \{(A,B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}|\mathbb{C}) \mid n \in B \text{ and } (B \setminus \{n\})^I = A\}$.

(GEN/NEW) Each new concept of $\mathbb{K}|\mathbb{C}$ can be constructed from a unique generating concept of $\mathbb{K}$ *w.r.t.* $\mathbb{C}$ by intersecting the extent with the new attribute extent n^J and adding the new attribute n to the intent. The map $\mathsf{new}_{\mathbb{C}}\colon \mathbf{n}^{\mathbb{C}}_{\mathsf{gen}}(\mathbb{K}) \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathbf{n}_{\mathsf{new}}(\mathbb{K}|\mathbb{C})$ defined by

$$\mathsf{new}_{\mathbb{C}}(A,B,A_\lambda,B_\lambda) = \begin{cases} (A \cap n^J,B \,\dot\cup\, \{n\},A_\lambda \cap n^J,B_\lambda) & \text{if } n^J \not\subset A \\ & \text{iff } (A,B) \neq \top^{\mathbb{C}}_{\mathsf{gen}} \\ (n^J,B \,\dot\cup\, \{n\},A_\lambda \cap n^J,B_\lambda \,\dot\cup\, \{n\}) & \text{if } n^J \subset A \\ & \text{iff } (A,B) = \top^{\mathbb{C}}_{\mathsf{gen}} \end{cases}$$

is bijective with domain $\mathfrak{B}^{\mathbb{C}}_{\mathsf{gen}}(\mathbb{K}) = \{(A,B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}) \mid A \not\subseteq n^J \text{ and } (A \cap n^J)^I = B\}$ and range $\mathfrak{B}_{\mathsf{new}}(\mathbb{K}|\mathbb{C}) = \{(A,B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}|\mathbb{C}) \mid n \in B \text{ and } (B \setminus \{n\})^I \neq A\}$. Although not needed for practical purposes, also the generator concept nodes can be computed from the new concept nodes. Upon removal of the column $\mathbb{C}$ these new concept nodes are rather removed from the concept diagram.

We are able to completely describe the neighborhood relation of $\mathbb{K}|\mathbb{C}$ by means of the cover relation of $\mathbb{K}$ and vice versa. Especially when thinking of cover relations as binary relations encoded by binary matrices, the cover relations can be determined from each other by simply copying some parts, deleting some parts, and computing few parts. For this purpose the cover relation of $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ and also the cover relation of $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}|\mathbb{C})$ are split up in components:

	$\mathfrak{B}^{\mathbb{C}}_{o\neg g}(\mathbb{K})$	$\mathfrak{B}^{\mathbb{C}}_{\text{gen}}(\mathbb{K})$	$\mathfrak{B}^{\mathbb{C}}_{\text{var}}(\mathbb{K})$
$\mathfrak{B}^{\mathbb{C}}_{o\neg g}(\mathbb{K})$	$\prec_{\text{old}}$		$\emptyset$
$\mathfrak{B}^{\mathbb{C}}_{\text{gen}}(\mathbb{K})$			
$\mathfrak{B}^{\mathbb{C}}_{\text{var}}(\mathbb{K})$	$\prec_{\text{v:o}}$	$\prec_{\text{v:g}}$	$\prec_{\text{var}}$

$$\downarrow\uparrow$$

	$\mathfrak{B}_{o\neg g}(\mathbb{K}\vert\mathbb{C})$	$\mathfrak{B}_{\text{gen}}(\mathbb{K}\vert\mathbb{C})$	$\mathfrak{B}_{\text{new}}(\mathbb{K}\vert\mathbb{C})$	$\mathfrak{B}_{\text{var}}(\mathbb{K}\vert\mathbb{C})$
$\mathfrak{B}_{o\neg g}(\mathbb{K}\vert\mathbb{C})$	$\prec_{\text{old}}$		$\emptyset$	
$\mathfrak{B}_{\text{gen}}(\mathbb{K}\vert\mathbb{C})$				
$\mathfrak{B}_{\text{new}}(\mathbb{K}\vert\mathbb{C})$	$\emptyset$	$\times\ \times\ \times\ \times\ \times$	$\prec_{\text{new}}$	$\emptyset$
$\mathfrak{B}_{\text{var}}(\mathbb{K}\vert\mathbb{C})$	$\prec_{\text{v:o}}$	$\emptyset$	$\prec_{\text{v:n}}$	$\prec_{\text{var}}$

The unknown parts can be computed via

$$\forall_{(A,B),(C,D)\in\mathfrak{B}^{\mathbb{C}}_{\text{gen}}(\mathbb{K})} \quad \text{new}_{\mathbb{C}}(A,B) \prec_{\text{new}} \text{new}_{\mathbb{C}}(C,D)$$

$$\Leftrightarrow (A,B) < (C,D) \text{ and } \nexists_{(X,Y)\in\mathfrak{B}^{\mathbb{C}}_{\text{gen}}(\mathbb{K})} \quad (A,B) < (X,Y) < (C,D)$$

and

$$\forall_{\substack{(A,B)\in\mathfrak{B}^{\mathbb{C}}_{\text{var}}(\mathbb{K})\\(C,D)\in\mathfrak{B}^{\mathbb{C}}_{\text{gen}}(\mathbb{K})}} \quad \text{var}_{\mathbb{C}}(A,B) \prec_{\text{v:n}} \text{new}_{\mathbb{C}}(C,D)$$

$$\Leftrightarrow (A,B) < (C,D) \text{ and } \nexists_{(X,Y)\in\mathfrak{B}^{\mathbb{C}}_{\text{gen}}(\mathbb{K})\dot\cup\mathfrak{B}^{\mathbb{C}}_{\text{var}}(\mathbb{K})} \quad (A,B) < (X,Y) < (C,D)$$

when inserting the new attribute column, and

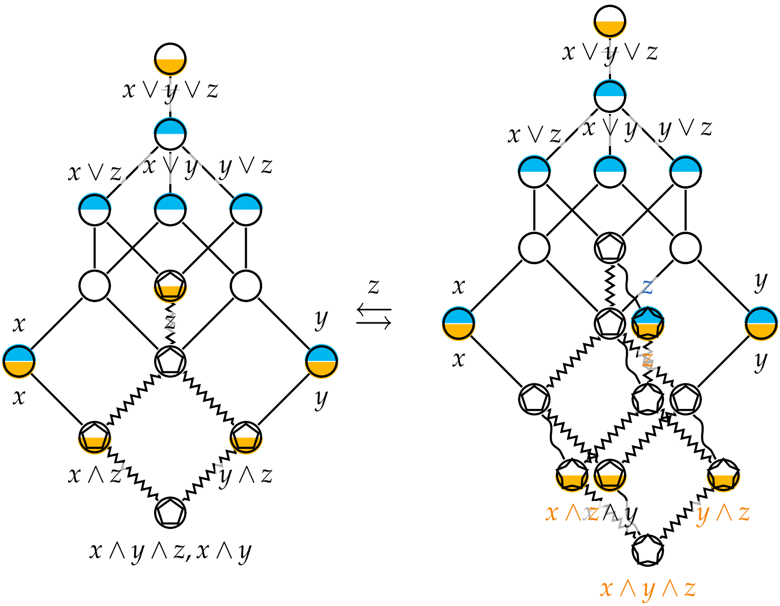
$$\forall_{\substack{(A,B)\in\mathfrak{B}_{\text{var}}(\mathbb{K}\vert\mathbb{C})\\(C,D)\in\mathfrak{B}_{\text{new}}(\mathbb{K}\vert\mathbb{C})}} \quad \text{var}^{-1}_{\mathbb{C}}(A,B) \prec_{\text{v:g}} \text{gen}_{\mathbb{C}}(C,D)$$

$$\Leftrightarrow (A,B) \prec_{\text{v:n}} (C,D) \text{ and } \nexists_{(X,Y)\in\mathfrak{B}_{o\neg g}(\mathbb{K}\vert\mathbb{C})} \quad (A,B) < (X,Y) < \text{old}_{\mathbb{C}}\text{gen}_{\mathbb{C}}(C,D)$$

for removal of the attribute column, respectivelly. Furthermore, to have clear diagram structures, the reduciblity of the attributes and objects used as seeds must be updated. The reducibility of attributes can be updated via the following results.

(I) Each $\mathbb{K}$-reducible attribute is also $\mathbb{K}|\mathbb{C}$-reducible. A $\mathbb{K}$-irreducible attribute m is $\mathbb{K}|\mathbb{C}$-reducible, iff $\mu_{\mathbb{K}}(m) \in \mathfrak{B}^{\mathbb{C}}_{\text{var}}(\mathbb{K})$ and $(\mu_{\mathbb{K}}(m))^* \in \mathfrak{B}^{\mathbb{C}}_{o\neg g}(\mathbb{K})$, and furthermore at least one superconcept of $(\mu_{\mathbb{K}}(m))^*$ is a generator concept.

(II) Each $\mathbb{K}|\mathbb{C}$-irreducible attribute from $\mathbb{K}$ is also $\mathbb{K}$-irreducible. A $\mathbb{K}|\mathbb{C}$-reducible attribute $m \in M$ is $\mathbb{K}$-irreducible, iff $\mu_{\mathbb{K}|\mathbb{C}}(m) \in \mathfrak{B}_{\mathsf{var}}(\mathbb{K}|\mathbb{C})$ has exactly one old upper neighbor ω and overthis only new upper neighbors, whose generators are superconcepts of ω.



200 **Lemma: Up Arrows in $\mathbb{K}$ and $\mathbb{K}|\mathbb{C}$**

For an object $g \in G$ and an attribute $m \in M$ the following statement hold:

$$g \nearrow_{\mathbb{K}|\mathbb{C}} m \Leftrightarrow \begin{cases} g \nearrow_{\mathbb{K}} m & \text{if } m^I \not\subset n^J \\ g \nearrow_{\mathbb{K}} m \text{ and } g \in n^J & \text{if } m^I \subset n^J \end{cases}$$

We conclude, that up arrows do not change in columns m^I which are no subset of the new column n^J.

201 **Theorema: Up Arrow Transition**

Let $g \in G$ and $m \in M$ such that $m^I \subset n^J$.

(I) For the arrow transition from $\mathbb{K}$ to $\mathbb{K}|\mathbb{C}$ it holds:

$$g \nearrow_{\mathbb{K}|\mathbb{C}} m \Leftrightarrow g \nearrow_{\mathbb{K}} m \text{ and } g \in n^J.$$

(II) For the arrow transition from $\mathbb{K}|\mathbb{C}$ to $\mathbb{K}$ it holds: If $g \in n^J$, then

$$g \nearrow_{\mathbb{K}} m \Leftrightarrow g \nearrow_{\mathbb{K}|\mathbb{C}} m.$$

If $g \notin n^J$, then $g \nearrow_{\mathbb{K}} m$ holds, iff one of the following statements hold:

(A) m is $\mathbb{K}|\mathbb{C}$-reducible, and $\mu_{\mathbb{K}|\mathbb{C}}(m) \in \mathfrak{B}_{\mathsf{var}}(\mathbb{K}|\mathbb{C})$ has exactly one old upper neighbor ω and overthis only new upper neighbors, whose generators are superconcepts of ω, and furthermore $\gamma_{\mathbb{K}|\mathbb{C}}(g)$ is a subconcept of ω.

(B) m is $\mathbb{K}|\mathbb{C}$-irreducible, $((\mu_{\mathbb{K}|\mathbb{C}}(m))^* \in \mathfrak{B}_{\mathsf{new}}(\mathbb{K}|\mathbb{C})$ and $\gamma_{\mathbb{K}|\mathbb{C}}(g) \in \mathfrak{B}_{\mathsf{old}}(\mathbb{K}|\mathbb{C})$ is a subconcept of the generator $\mathsf{old}_{\mathbb{C}}(\mathsf{gen}_{\mathbb{C}}((\mu_{\mathbb{K}|\mathbb{C}}(m))^*))$.

A Appendix

Kapitelübersicht

A.1 Relationen

Seien A und B Mengen. Jede Teilmenge $R \subseteq A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ heißt BINÄRE RELATION zwischen A und B. Für $(a,b) \in R$ schreiben wir auch aRb. Die zu R DUALE oder INVERSE Relation ist $R^{\partial} := R^{-1} := \{(b,a) \in B \times A \mid aRb\}$, und die zu R KOMPLEMENTÄRE Relation ist $R^{\complement} := \not{R} := \complement R = \{(a,b) \in A \times B \mid \neg aRb\}$. Die Menge $a^R := \{b \in B \mid aRb\}$ heißt ZEILE von $a \in A$ bezüglich R und dual nennen wir ${}^{R}b := \{a \in A \mid aRb\}$ die SPALTE von $b \in B$ bezüglich R. Für jede Teilmenge $X \subseteq A$ ist

$$XR := \bigcup_{x \in X} x^R = \left\{ y \in B \,\middle|\, \exists_{x \in X}\, xRy \right\}$$

$$X^R := \bigcap_{x \in X} x^R = \left\{ y \in B \,\middle|\, \forall_{x \in X}\, xRy \right\}$$

die RECHTSNEBENKLASSE bzw. SCHNITTZEILE von X und für alle Teilmengen $Y \subseteq B$ bezeichnen wir

$$RY := \bigcup_{y \in Y} {}^{R}y = \left\{ x \in A \,\middle|\, \exists_{y \in Y}\, xRy \right\}$$

$${}^{R}Y := \bigcap_{y \in Y} {}^{R}y = \left\{ x \in A \,\middle|\, \forall_{y \in Y}\, xRy \right\}$$

als LINKSNEBENKLASSE bzw. SCHNITTSPALTE von Y. Für zwei binäre Relationen $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ ist

$$R \circ S := \bigcup_{b \in B} {}^{R}b \times b^S = \left\{ (a,c) \in A \times C \,\middle|\, \exists_{b \in B} (a,b) \in R \wedge (b,c) \in S \right\}$$

eine Relation zwischen A und C und heißt RELATIONENPRODUKT von R und S. Manchmal wird $R \circ S$ auch als $R;S$ geschrieben. Eine Relation $R \subseteq A \times A$ nennen wir HOMOGENE Relation auf A und dann sei $R^0 := \Delta_A := \{(a,a) \mid a \in A\}$ sowie $R^{n+1} := R^n \circ R$ für $n > 0$. Eine homogene Relation R auf A heißt

(I) REFLEXIV, wenn

$$\boxed{\Delta_A \subseteq R} \Leftrightarrow \not{R} \cap \Delta_A = \emptyset \Leftrightarrow R \cup \not{\Delta}_A = \nabla_A \Leftrightarrow \forall_{a \in A}\, a \, R \, a$$

(II) IRREFLEXIV, falls

$$\Delta_A \subseteq \not{R} \Leftrightarrow \boxed{R \cap \Delta_A = \emptyset} \Leftrightarrow \not{R} \cup \not{\Delta}_A = \nabla_A \Leftrightarrow \forall_{a \in A}\, a \, \not{R} \, a$$

(III) SYMMETRISCH, wenn

$$\boxed{R \subseteq R^{-1}} \Leftrightarrow R \cap \not{R}^{-1} = \emptyset \Leftrightarrow \not{R} \cup R^{-1} = \nabla_A \Leftrightarrow \forall_{a,b \in A}\, aRb \Rightarrow b \, R \, a$$

(IV) ASYMMETRISCH, wenn

$$R \subseteq \not{R}^{-1} \Leftrightarrow \boxed{R \cap R^{-1} = \emptyset} \Leftrightarrow \not{R} \cup \not{R}^{-1} = \nabla_A \Leftrightarrow \forall_{a,b \in A}\, aRb \Rightarrow b \, \not{R} \, a$$

(V) KONNEX, falls

$$\not{R} \subseteq R^{-1} \Leftrightarrow \not{R} \cap \not{R}^{-1} = \emptyset \Leftrightarrow \boxed{R \cup R^{-1} = \nabla_A} \Leftrightarrow \forall_{a,b \in A}\, a \, \not{R} \, b \Rightarrow b \, R \, a$$

(VI) ANTISYMMETRISCH, falls

$$R \setminus \Delta_A \subseteq \not{R}^{-1} \setminus \Delta_A \Leftrightarrow \boxed{R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A} \Leftrightarrow \not{R} \cup \not{R}^{-1} \supseteq \not{\Delta}_A \Leftrightarrow \forall_{\substack{a,b \in A \\ a \neq b}}\, aRb \Rightarrow b \, \not{R} \, a$$

(VII) QUASIKONNEX, wenn

$$\not{R} \setminus \Delta_A \subseteq R^{-1} \setminus \Delta_A \Leftrightarrow \not{R} \cap \not{R}^{-1} \subseteq \Delta_A \Leftrightarrow \boxed{R \cup R^{-1} \supseteq \not{\Delta}_A} \Leftrightarrow \forall_{\substack{a,b \in A \\ a \neq b}}\, a \, \not{R} \, b \Rightarrow b \, R \, a$$

(VIII) ALTERNATIV, falls

$$R \setminus \Delta_A = \not{R}^{-1} \setminus \Delta_A \Leftrightarrow \underset{a,b\in A,\; a\neq b}{\forall} aRb \Leftrightarrow b \not{R}\, a$$

(IX) TRANSITIV, falls

$$\boxed{R^2 \subseteq R} \Leftrightarrow R^2 \cap \not{R} = \varnothing \Leftrightarrow \underset{a,b,c\in A}{\forall} aRb \wedge b\,R\,c \Rightarrow a\,R\,c$$

(X) ZYKLISCH, wenn

$$\boxed{R^\infty \subseteq R^{-1}} \Leftrightarrow R^\infty \cap \not{R}^{-1} = \varnothing \Leftrightarrow \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{a_0,\dots,a_n\in A}{\forall} \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\forall}} a_{i-1}\,R\,a_i \right) \Rightarrow a_n\,R\,a_0$$

(XI) AZYKLISCH, wenn

$$R^\infty \subseteq \not{R}^{-1} \Leftrightarrow \boxed{R^\infty \cap R^{-1} = \varnothing} \Leftrightarrow \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{a_0,\dots,a_n\in A}{\forall} \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\forall}} a_{i-1}\,R\,a_i \right) \Rightarrow a_n \not{R}\, a_0$$

(XII) DUAL TRANSITIV, falls

$$\not{R}^2 \subseteq \not{R} \Leftrightarrow \not{R}^2 \cap R = \varnothing \Leftrightarrow \underset{a,b,c\in A}{\forall} a \not{R}\, b \wedge b \not{R}\, c \Rightarrow a \not{R}\, c$$

(XIII) ATRANSITIV, wenn

$$R^2 \subseteq \not{R} \Leftrightarrow \boxed{R^2 \cap R = \varnothing} \Leftrightarrow \underset{a,b,c\in A}{\forall} aRb \wedge b\,R\,c \Rightarrow a \not{R}\, c$$

(XIV) DUAL ATRANSITIV, falls

$$\not{R}^2 \subseteq R \Leftrightarrow \not{R}^2 \cap \not{R} = \varnothing \Leftrightarrow \underset{a,b,c\in A}{\forall} a \not{R}\, b \wedge b \not{R}\, c \Rightarrow a\,R\,c$$

(XV) DUAL ZYKLISCH, wenn

$$\boxed{\not{R}^\infty \subseteq \not{R}^{-1}} \Leftrightarrow \not{R}^\infty \cap R^{-1} = \varnothing \Leftrightarrow \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{a_0,\dots,a_n\in A}{\forall} \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\forall}} a_{i-1} \not{R}\, a_i \right) \Rightarrow a_n \not{R}\, a_0$$

(XVI) DUAL AZYKLISCH, falls

$$\not{R}^\infty \subseteq R^{-1} \Leftrightarrow \boxed{\not{R}^\infty \cap \not{R}^{-1} = \varnothing} \Leftrightarrow \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{a_0,\dots,a_n\in A}{\forall} \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\forall}} a_{i-1} \not{R}\, a_i \right) \Rightarrow a_n\,R\,a_0$$

(XVII) n-ZYKLISCH, wenn

$$\boxed{R^n \subseteq R^{-1}} \Leftrightarrow R^n \cap \not{R}^{-1} = \varnothing \Leftrightarrow \underset{a_0,\dots,a_n\in A}{\forall} \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\forall}} a_{i-1}\,R\,a_i \right) \Rightarrow a_n\,R\,a_0$$

(XVIII) DUAL n-ZYKLISCH, falls

$$\boxed{\not{R}^n \subseteq \not{R}^{-1}} \Leftrightarrow \not{R}^n \cap R^{-1} = \varnothing \Leftrightarrow \underset{a_0,\dots,a_n\in A}{\forall} \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\forall}} a_{i-1} \not{R}\, a_i \right) \Rightarrow a_n \not{R}\, a_0$$

(XIX) n-AZYKLISCH, wenn

$$R^n \subseteq \not{R}^{-1} \Leftrightarrow \boxed{R^n \cap R^{-1} = \varnothing} \Leftrightarrow \underset{a_0,\dots,a_n\in A}{\forall} \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\forall}} a_{i-1}\,R\,a_i \right) \Rightarrow a_n \not{R}\, a_0$$

(XX) DUAL n-AZYKLISCH, falls

$$\not{R}^n \subseteq R^{-1} \Leftrightarrow \boxed{\not{R}^n \cap \not{R}^{-1} = \varnothing} \Leftrightarrow \underset{a_0,\dots,a_n\in A}{\forall} \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\forall}} a_{i-1} \not{R}\, a_i \right) \Rightarrow a_n\,R\,a_0$$

(XXI) n-TRANSITIV, wenn

$$\boxed{R^n \subseteq R} \Leftrightarrow R^n \cap \not{R} = \varnothing \Leftrightarrow \underset{a_0,\dots,a_n\in A}{\forall} \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\forall}} a_{i-1}\,R\,a_i \right) \Rightarrow a_0\,R\,a_n$$

(XXII) DUAL n-TRANSITIV, wenn

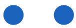
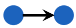
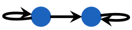
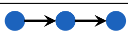
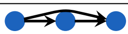
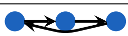
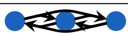
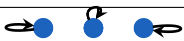
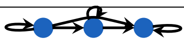
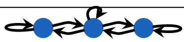
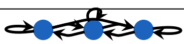
$$\boxed{\not R^n \subseteq \not R} \Leftrightarrow \not R^n \cap R = \emptyset \Leftrightarrow \underset{a_0,\ldots,a_n \in A}{\forall} \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\forall}} a_{i-1} \not R\, a_i \right) \Rightarrow a_0 \not R\, a_n$$

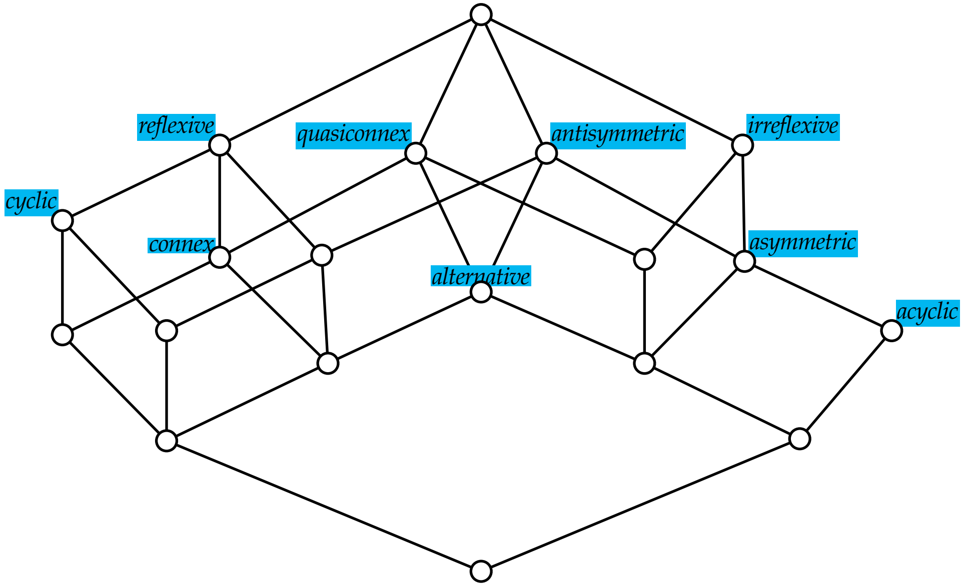
(XXIII) n-ATRANSITIV, falls

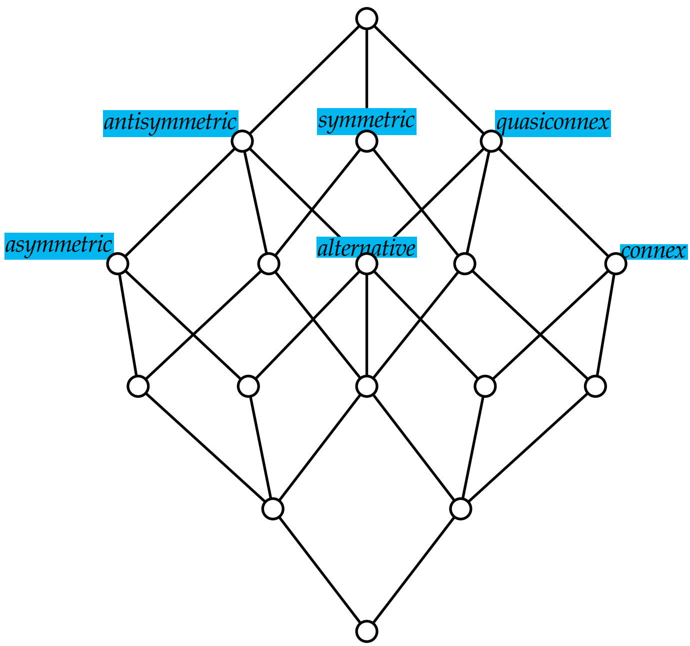
$$R^n \subseteq \not R \Leftrightarrow \boxed{R^n \cap R = \emptyset} \Leftrightarrow \underset{a_0,\ldots,a_n \in A}{\forall} \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\forall}} a_{i-1}\, R\, a_i \right) \Rightarrow a_0 \not R\, a_n$$

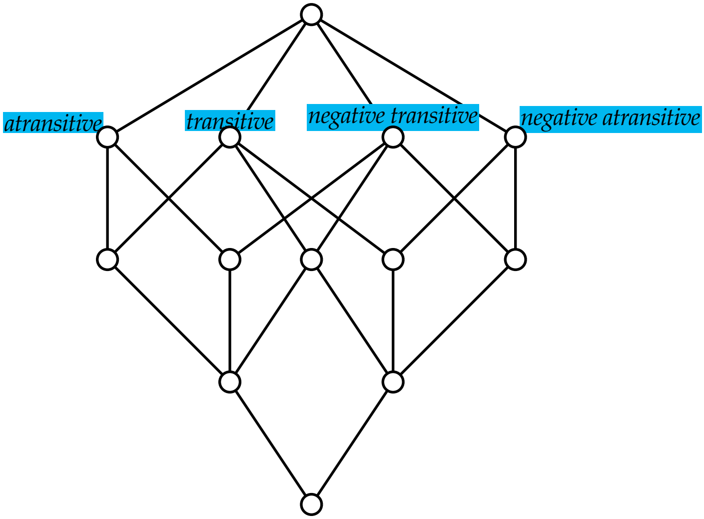
(XXIV) DUAL n-ATRANSITIV, falls

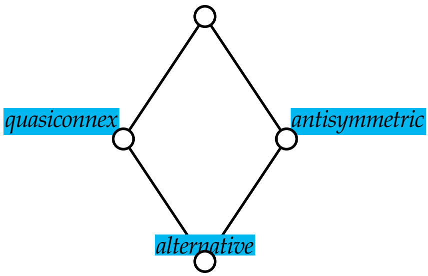
$$\not R^n \subseteq R \Leftrightarrow \boxed{\not R^n \cap \not R = \emptyset} \Leftrightarrow \underset{a_0,\ldots,a_n \in A}{\forall} \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\forall}} a_{i-1} \not R\, a_i \right) \Rightarrow a_0\, R\, a_n$$

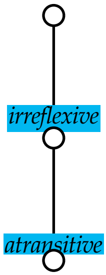
	reflexive	irreflexive	symmetric	asymmetric	connex	antisymmetric	quasiconnex	alternative	transitive	negative transitive	atransitive	negative atransitive	cyclic	acyclic
	⤢	×	×	×	↙	×	×	×	×	×	×	↙	↙	×
	×	⤢	×	↙	×	×	×	×	×	×	↙	×	×	↙
	↗	×	×	×		×	⤢	↙	×	×	×			×
	↗	×	⤢	×		×	×	×	×	×	×			×
	↗	×	×	↙		⤢	×	↙	⤢	×	×			↙
	×	↗	×		↙	×	⤢	↙	×	⤢		×	×	
	×	↗	⤢		×	×	×	×	×	×		×	↙	
	×	↗	×		×	⤢	×	↙	×	×		×	×	
	↗	×	↗	×		×	↗		×	⤢	×			×
	↗	×	×			↗	↗		↗	⤢	×			
	↗	×	↗	×		×	↗		⤢	↗	×			×
	↗	×	↗	×		×	×	×	×	×	⤢			×
	↗	×	↗	×		×	×	×	⤢	⤢	×			⤢
	↗	×	×			↗	×		↗	×	⤢			
	×	↗	×			×	↗		×	↗		⤢	×	
	×	↗	↗		×	×	×	×	×	×		⤢		
	×	↗	×			↗	↗		⤢	↗		×	↙	
	×	↗	↗		×	×	×	×	⤢	⤢		×		
	×	↗	↗		×	↗	×		⤢	×		×		

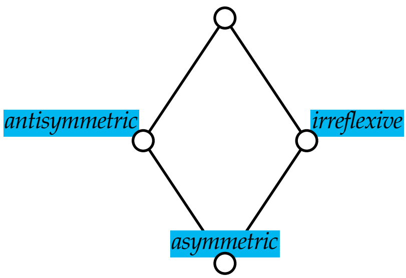

reflexive
quasiconnex
antisymmetric
irreflexive
cyclic
connex
asymmetric
alternative
acyclic

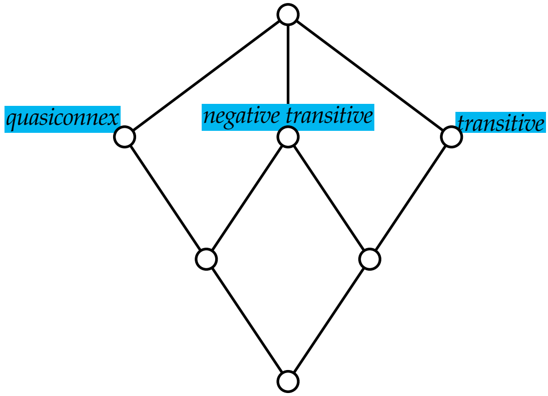

antisymmetric
symmetric
quasiconnex
asymmetric
alternative
connex

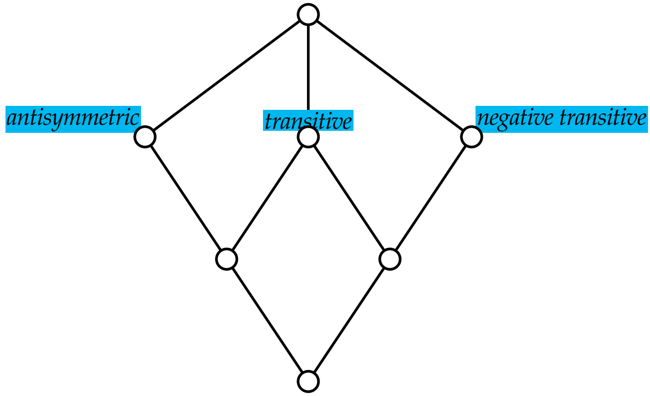

atransitive
transitive
negative transitive
negative atransitive

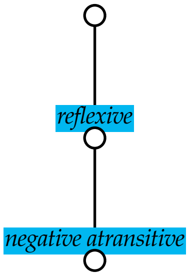

quasiconnex
antisymmetric
alternative

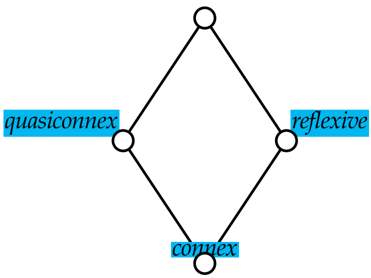

irreflexive
atransitive

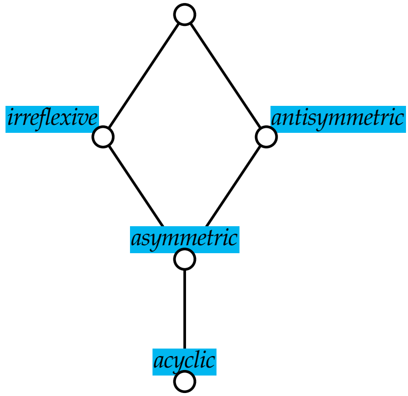

antisymmetric
irreflexive
asymmetric

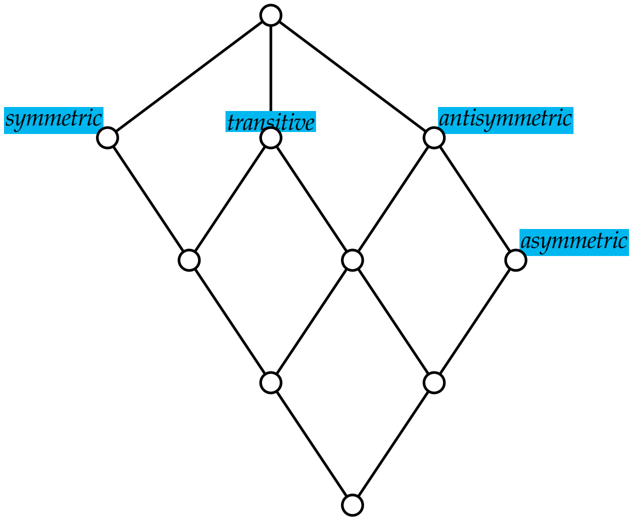

quasiconnex
negative transitive
transitive

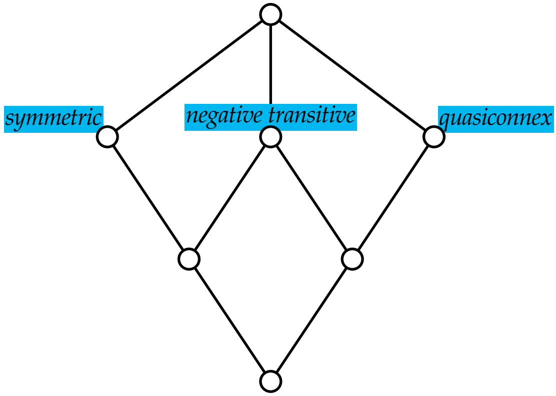

antisymmetric
transitive
negative transitive

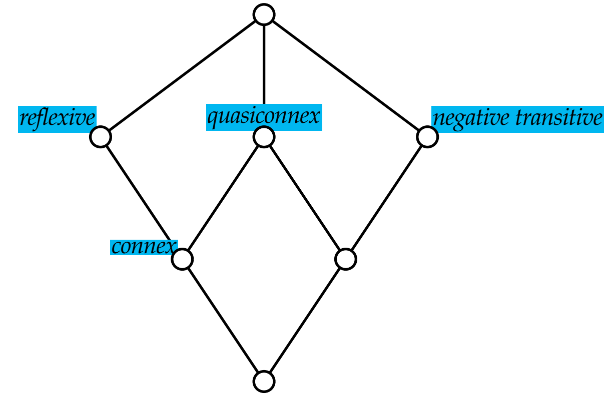

reflexive
negative atransitive

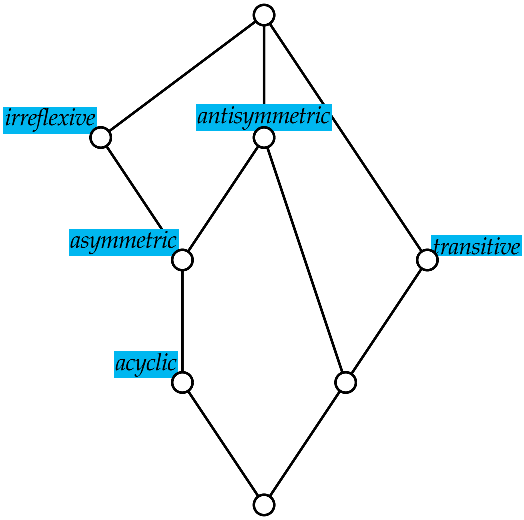

quasiconnex
reflexive
connex

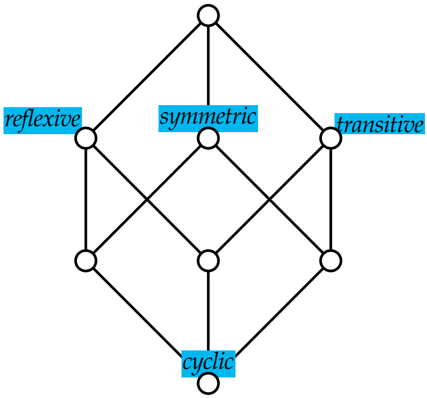

irreflexive
antisymmetric
asymmetric
acyclic

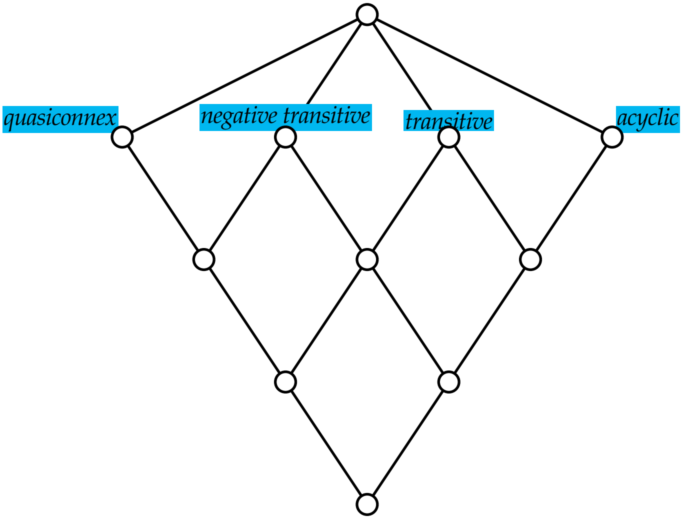

symmetric
transitive
antisymmetric
asymmetric

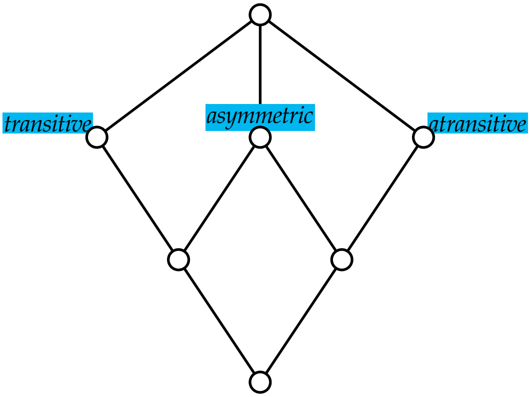

symmetric
negative transitive
quasiconnex

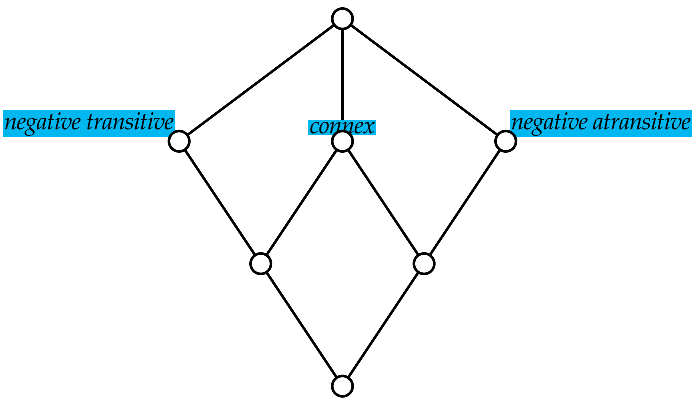

reflexive
quasiconnex
negative transitive
connex

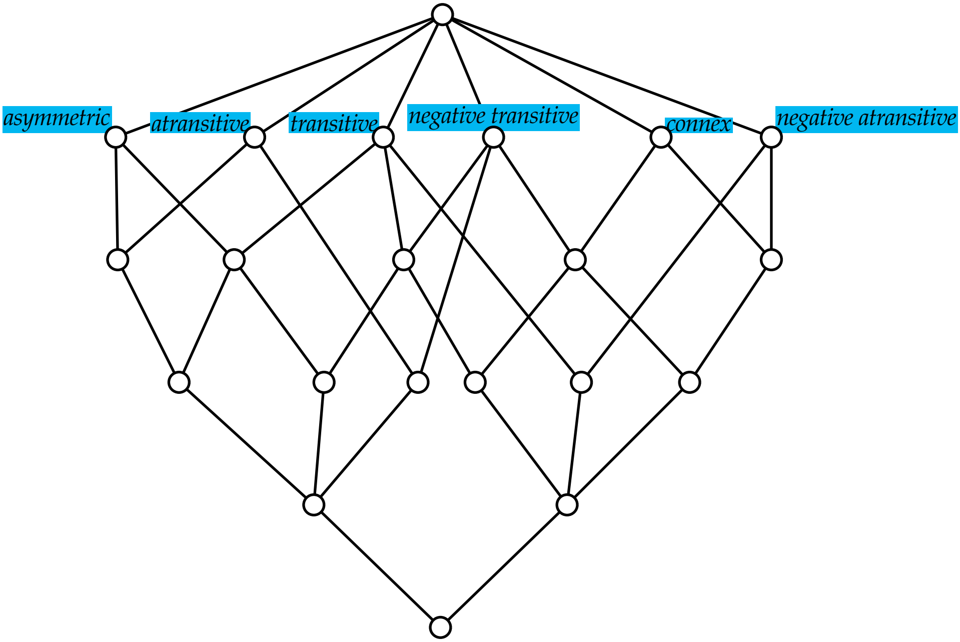

irreflexive
antisymmetric
asymmetric
transitive
acyclic

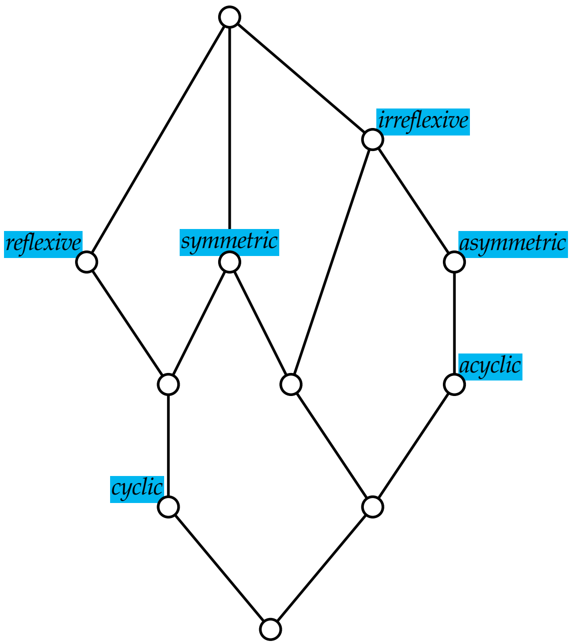

reflexive
symmetric
transitive
cyclic

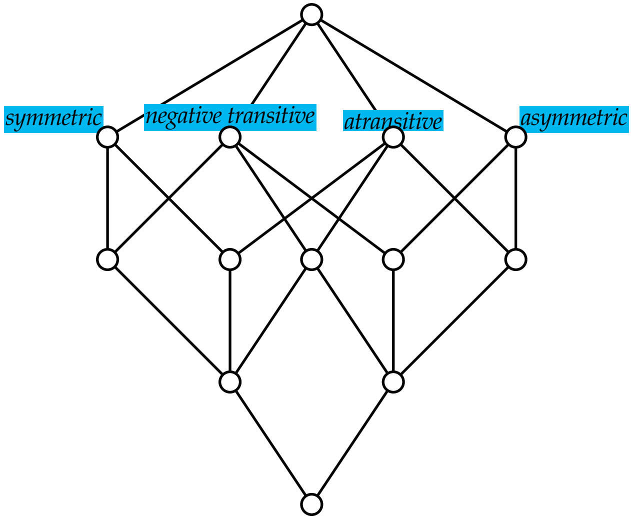

quasiconnex
negative transitive
transitive
acyclic

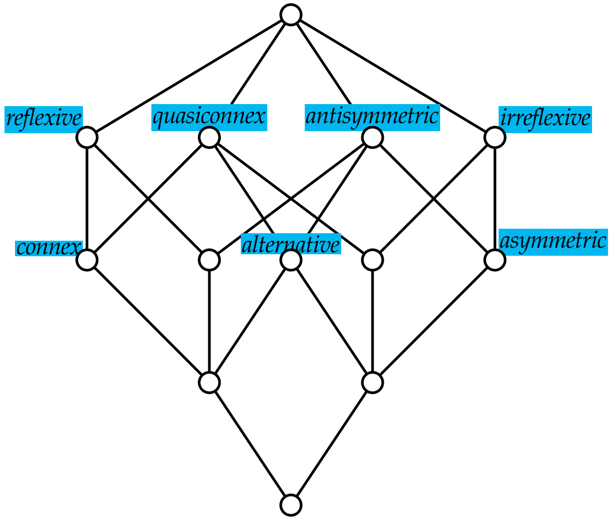

transitive
asymmetric
atransitive

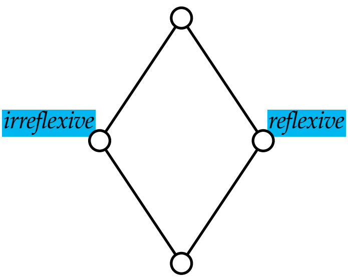

negative transitive
connex
negative atransitive

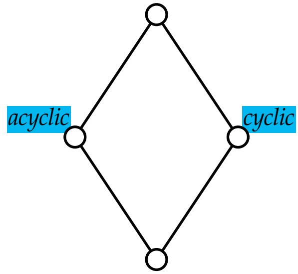

asymmetric
atransitive
transitive
negative transitive
connex
negative atransitive

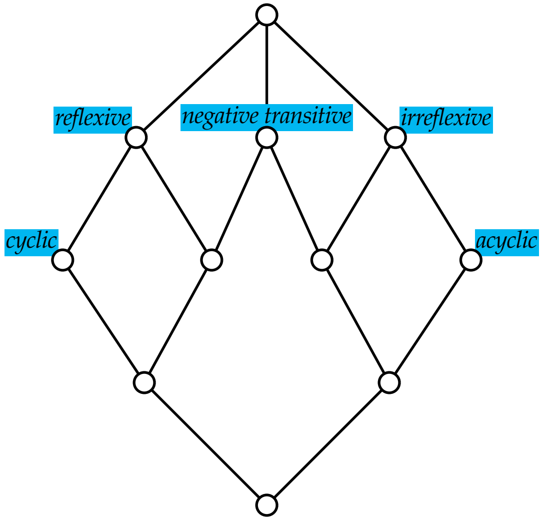

irreflexive
reflexive
symmetric
asymmetric
acyclic
cyclic

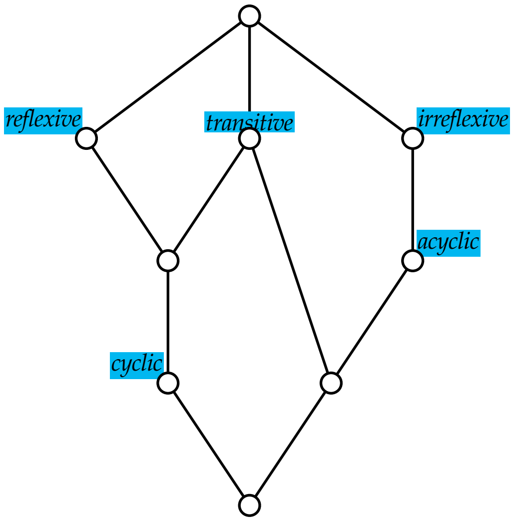

symmetric
negative transitive
atransitive
asymmetric

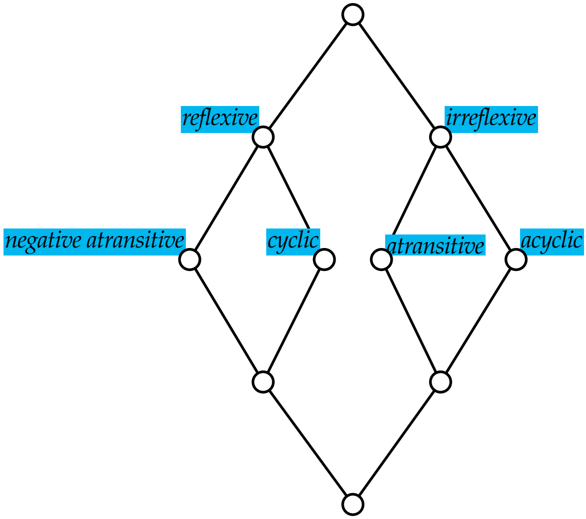

reflexive
quasiconnex
antisymmetric
irreflexive
connex
alternative
asymmetric


irreflexive
reflexive


acyclic
cyclic


reflexive
negative transitive
irreflexive
cyclic
acyclic


reflexive
transitive
irreflexive
acyclic
cyclic



A.2 Äquivalenzen

1 **Definitio: Äquivalenzrelation**

Eine ÄQUIVALENZRELATION auf einer Menge M ist eine reflexive symmetrische transitive Relation auf M. Für ein Element $x \in M$ ist die ÄQUIVALENZKLASSE von x definiert als

$$[x]_R := xR = \{y \in M \mid xRy\}.$$

Die Menge aller Äquivalenzklassen heißt FAKTORMENGE

$$M/R := \{[x]_R \mid x \in M\}.$$

Äquivalenzen sind symmetrische Quasiordnungen. Um dies zu verdeutlichen, verwendet man gern symmetrische Symbole, zum Beispiel $\sim$, $\|$, $\equiv$. Statt xRy manchmal auch $x = y \mod R$. Aufgrund der Symmetrie stimmen die Links- und Rechtsnebenklassen stets überein und entsprechen genau den Äquivalenzklassen.
Gnutpuaheb: Wenn eine Relation symmetrisch und transitiv ist, ist sie auch reflexiv, also eine Äquivalenz.
Sieweb: Sei $\sim$ eine symmetrische und transitive Relation auf einer Menge X. Sei $x \in X$ beliebig, und sei $x \sim y$. Wegen der Symmetrie ist dann auch $y \sim x$ und aufgrund der Transitivität folgt dann auch $x \sim x$. Also ist $\sim$ reflexiv. ■ (Manchmal ist es hilfreich, *nichts* zu betrachten...)

2 **Definitio: Zerlegung**

Eine ZERLEGUNG einer Menge M ist eine Menge $\mathcal{Z} \subseteq \wp(A)$ von paarweise disjunkten Teilmengen von M, deren Vereinigung die gesamte Menge M ergibt, d.h. es gelten

$$M = \dot{\bigcup} \mathcal{Z} \qquad \text{und} \qquad \underset{X,Y \in \mathcal{Z}}{\forall} X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset.$$

Theorema: Zerlegungen und Äquivalenzen 3

Sei M eine Menge.

(I) Für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von M ist

$$R_{\mathcal{Z}} := \bigcup_{X \in \mathcal{Z}} X \times X$$

eine Äquivalenz auf M.

(II) Für jede Äquivalenz Θ auf M bildet die Faktormenge

$$M/_{\Theta} = \{a\Theta \mid a \in A\}$$

eine Partitionierung von M.

(III) Die beiden Übergänge sind invers zueinander, genauer: Für jede Partitionierung $\mathcal{Z}$ von M bzw. für jede Äquivalenz Θ auf M gilt

$$M/_{R_{\mathcal{Z}}} = \mathcal{Z} \qquad \text{bzw.} \qquad R_{M/_{\Theta}} = \Theta.$$

A.3 Abbildungen

Definitio: linkstotal, injektiv, surjektiv, partielle Abbildung 4

Eine Relation R zwischen zwei Mengen A und B heißt

(I) LINKSTOTAL, falls

$$RB = A \Leftrightarrow \forall_{a \in A} \exists_{b \in B} aRb,$$

(II) RECHTSTOTAL oder SURJEKTIV, falls

$$AR = B \Leftrightarrow \forall_{b \in B} \exists_{a \in A} aRb$$

(III) LINKSEINDEUTIG bzw. INJEKTIV, wenn

$$R;R^{-1} \subseteq \Delta_A \Leftrightarrow \forall_{a,a' \in A} \forall_{b \in B} aRb \wedge a'Rb \Rightarrow a = a',$$

(IV) RECHTSEINDEUTIG, FUNKTIONAL oder PARTIELLE ABBILDUNG, wenn

$$R^{-1};R \subseteq \Delta_B \Leftrightarrow \forall_{a \in A} \forall_{b,b' \in B} aRb \wedge aRb' \Rightarrow b = b'.$$

Eine binäre Relation $R \subseteq A \times B$ ist genau dann

(I) linkstotal, wenn für jedes Element $a \in A$ mindestens ein zu a in Relation stehendes Element $b \in B$ mit aRb existiert, also falls $|aR| \geq 1$ für alle $a \in A$.

(II) rechtstotal, falls es für jedes $b \in B$ mindestens ein $a \in A$ gibt mit aRb, d.h. falls für alle $b \in B$ $|Rb| \geq 1$.

(III) linkseindeutig, falls alle Linksnebenklassen höchstens einelementig sind, d.h. falls für $b \in B$ $|Rb| \leq 1$ gilt bzw. falls für jedes $b \in B$ höchstens ein $a \in A$ mit aRb existiert.

(IV) rechtseindeutig, falls alle Rechtsnebenklassen höchstens einelementig sind, d.h. falls für $a \in A$ $|aR| \leq 1$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn für jedes $a \in A$ höchstens ein $b \in B$ mit aRb existiert.

5 **Definitio: Abbildung**

Eine linkstotale partielle Abbildung $f \subseteq A \times B$ zwischen zwei Mengen A und B heißt ABBILDUNG, FUNKTION oder OPERATOR von A nach/in B. Dann ist vermöge f jedem $a \in A$ eindeutig ein $b \in B$ zugeordnet, und daher schreiben wir auch

$$f\colon \begin{aligned} A &\to B \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned} \qquad \text{mit } f(a) = b \text{ für } (a,b) \in f.$$

(I) $f(a)$ heißt BILD des Elements $a \in A$ unter f.

(II) Für eine Teilmenge $X \subseteq A$ ist das BILD von X unter f definiert als

$$f(X) := Xf = \bigcup_{a \in X} a^f = \{f(a) \mid a \in X\}.$$

(III) Das URBILD eines Elements $b \in B$ unter f ist

$$f^{-1}(b) := {}^f b = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

(IV) Für eine Teilmenge $Y \subseteq B$ wird das URBILD von Y unter f definiert als

$$f^{-1}(Y) := fY = \bigcup_{b \in Y} {}^f b = \left\{ a \in A \;\middle|\; \underset{b \in Y}{\exists} f(a) = b \right\}.$$

Die Menge aller Abbildungen von A in B symbolisieren wir oft durch B^A. Eine Abbildung heißt BIJEKTIV, wenn sie injektiv und surjektiv ist. Falls die inverse Relation f^{-1} eine Abbildung von B nach A ist, so heißt f^{-1} die INVERSE ABBILDUNG zu f. Für eine Teilmenge $A_0 \subseteq A$ heißt die Abbildung

$$f|_{A_0}\colon \begin{aligned} A_0 &\to B \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

EINSCHRÄNKUNG von f auf A_0. Für eine Menge A definieren wir die IDENTITÄT auf A als Abbildung

$$\mathrm{id}_A\colon \begin{aligned} A &\to A \\ a &\mapsto a. \end{aligned}$$

Etwas verwirren mag an dieser Stelle die Tatsache, dass für afb bzw. $(a,b) \in f$ nun $f(a) = b$ statt $af = b$ geschrieben wird. Dies rührt daher, dass wir das Argument hinter das Abbildungssymbol schreiben wollen – aus Gründen der Anschaulichkeit bzw. besseren Lesbarkeit. (Ausserdem ist af eine Menge, aber das sollte nicht unbedingt ein Problem darstellen, denn af hat für eine Abbildung f stets genau ein Element.) Im weiteren Text nach diesem Unterkapitel werden manchmal auch die Klammern um das Argument weggelassen und wir schreiben der Faulheit wegen einfach fa für $f(a)$.

Theorema 6

Sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung von A in B. Die inverse Abbildung f^{-1} existiert genau dann, falls f bijektiv ist. Insbesondere ist dann auch f^{-1} bijektiv und ausserdem eindeutig bestimmt.

APPROBATIO Diese Tatsache ergibt sich daraus, dass die Linkseindeutigkeit und Rechtstotalität von f gleichbedeutend mit der der Rechtseindeutigkeit und Linkstotalität von f^{-1} sind. ■

Definitio: Komposition, Hintereinanderausführung 7

Sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung von A in B und $g\colon B \to C$ eine Abbildung von B in C. Die (Relationenkomposition $f \circ g$ ist dann eine Abbildung von A nach C, Schreibweise:

$$g \circ f\colon \begin{aligned} A &\to C \\ a &\mapsto g(f(a)), \end{aligned}$$

und heißt KOMPOSITION bzw. HINTEREINANDERAUSFÜHRUNG von f und g. Wir lesen $g \circ f$ als g *nach* f.

Mitunter werden für die Komposition von f und g auch die Symboliken gf, $g \cdot f$ oder aber auch fg, $f; g$ verwendet. Um Missverständnisse auszuschließen, verwenden wir im gesamten Text stets die Symbolik $g \circ f$.

Lemma 8

(I) Die Komposition $\circ$ ist assoziativ, d.h. für beliebige Abbildungen $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ und $h\colon C \to D$ gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f =: h \circ g \circ f.$$

(II) Die Komposition $\circ$ hat als neutrales Element die identische Abbildung, d.h. für alle Abbildungen von bzw. nach A gilt

$$\mathrm{id}_A \circ f = f \text{ und } f \circ \mathrm{id}_A = f.$$

Theorema 9

Sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung von A nach B. Dann ist f genau dann

(I) injektiv, falls eine Abbildung $g\colon B \to A$ existiert, sodass $g \circ f = \mathrm{id}_A$ gilt.

(II) surjektiv, falls eine Abbildung $g\colon B \to A$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_B$ existiert.

(III) bijektiv, falls eine Abbildung $g\colon B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$ existiert. In diesem Fall gilt $g = f^{-1}$.

APPROBATIO Der Beweis ist recht schnell getan. Dazu beachtet man zum einen, dass eine injektive Abbildung eine ein-eindeutige Zuordnung ist, und zum anderen, dass eine surjektive Abbildung die gesamte Zielmenge B *trifft*. ■

Falls die inverse Abbildung f^{-1} existiert, so gilt $f^{-1}(f(a)) = a$ für jedes $a \in A$, und für jedes $b \in B$ ist $f(f^{-1}(b)) = b$.

10 **Definitio: Fixelement, idempotent, Involution, Permutation**

Sei $f\colon A \to A$ eine Selbstabbildung von A.

(I) Ein Element $a \in A$ heißt FIXELEMENT von f, falls $f(a) = a$ gilt.

(II) f heißt IDEMPOTENT, falls $f \circ f = f$ gilt.

(III) f heißt INVOLUTION, falls $f \circ f = \mathrm{id}_A$ gilt.

(IV) f heißt PERMUTATION, wenn f bijektiv ist.

Natürlich gibt es auch Abbildungen der Form $f\colon A \times A \to B$, die Paaren $(a_1, a_2) \in A \times A$ ein Element $f(a_1, a_2) := f((a_1, a_2)) \in B$ zuordnen. Manchmal ist es dann auch üblich, das Abbildungssymbol zwischen die beiden Argumente zu schreiben, d.h.

$$a_1 f a_2 := f(a_1, a_2).$$

11 **Definitio: kommutativ**

Eine Abbildung $f\colon A \times A \to B$ heißt KOMMUTATIV, falls

$$a_1 f a_2 = a_2 f a_1$$

für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt.

A.4 Bemerkung zur Notation

Für eine Menge M und ein Prädikat P über M, sowie einen Mengenoperator $\Xi\colon \wp(M) \to T$ nach einer beliebigen Menge T, werden in diesem Dokument auch die folgenden Notationen verwendet:

$$\underset{\substack{x \in M \\ P(x)}}{\Xi} x := \Xi \{x \in M \mid P(x)\}.$$

Wenn die Grundmenge M klar ist, dann wird sie gern weg gelassen, und wir schreiben dann schlicht $\Xi_{P(x)}\, x$.

A.5 Themen für die Prüfung am 15. August 2013 um 11:00 Uhr

A.5.1 Subdirekte Produkte

Dichte Teilkontexte

- Definitio: dicht 3.75
- Lemma: Charakterisierung dichter Teilkontexte 3.76

Verträgliche Teilkontexte

- Definitio: Verträglicher Teilkontext 3.78
- Theorema: Verträgliche Teilkontexte und Vollständige Epimorphismen 3.79
- Lemma: Dichte und Verträgliche Teilkontexte 3.81

Vollständige Kongruenzen

-

Abgeschlossene Teilrelationen

- Definitio: Abgeschlossene Teilrelation 3.102
- Definitio: Vollständiger Unterverband 3.104
- Theorema: Abgeschlossene Teilrelationen und Vollständige Unterverbände 3.105
- Lemma: Charakterisierung abgeschlossener Teilrelationen 3.109

Subdirekte Zerlegungen

-

Direkte Summen

- Lemma: Begriffsverband einer direkten Summe 3.126
- Theorema: Subdirekte Produkte und Abgeschlossene Teilrelationen 3.128

Bindungen

- Lemma: Abgeschlossene Teilrelationen der direkten Summe 3.129
- Definitio: Bindung 3.130
- Lemma: Bindungsprodukt 3.132
- Lemma: Bindungen und Dichte Teilkontexte 3.133
- Theorema: Abgeschlossene Teilrelationen und Bindungen 3.134

P-Fusionen

- Definitio: P-Verband, P-Produkt 3.138
- Lemma: P-Produkte von P-Begriffsverbänden 3.139
- Definitio: P-Kontext, P-Fusion 3.140
- Theorema: P-Fusion und P-Produkt 3.141

Rough Sets

- Definitio: Approximationsverband 3.143
- Lemma: Hüllen, Kerne und Umfänge 3.144
- Theorema: Approximationsfusion 3.145

A.5.2 Faktoranalyse

Begriffliche Faktorisierungen

Triadische Faktorisierungen

A.5.3 Triadische Begriffsanalyse

Triadische Ordnungen

Vollständige Triverbände

Triadische Kontexte

Literaturverzeichnis

[BGV13] BELOHLAVEK, Radim ; GLODEANU, Cynthia ; VYCHODIL, Vilem: Optimal factorization of three-way binary data using triadic concepts. In: *Order* (2013), 1–18. http://dx.doi.org/10.1007/s11083-012-9254-4. – DOI 10.1007/s11083–012–9254–4

[Bie97] BIEDERMANN, Klaus: *How triadic diagrams represent conceptual structures*. Springer, 1997 http://link.springer.com/chapter/10.1007/BFb0027879

[Bie99] BIEDERMANN, Klaus: An equational theory for trilattices. In: *algebra universalis* 42 (1999), Nr. 4, 253–268. http://link.springer.com/article/10.1007/s000120050002

[BV09] BELOHLAVEK, Radim ; VYCHODIL, Vilem: Factor analysis of incidence data via novel decomposition of matrices. Version: 2009. http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-01815-2_8. In: *Formal Concept Analysis*. Springer, 2009, 83–97

[DP02] DAVEY, Brian A. ; PRIESTLEY, Hilary A.: *Lattices and Order*. 2. Auflage. Cambridge University Press, 2002. – ISBN 9780521784511

[DW00] DAU, Frithjof ; WILLE, Rudolf: *On the modal understanding of triadic contexts*. Springer, 2000 http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-57280-7_9

[Gan99] GANTER, Bernhard: *Attribute exploration with background knowledge*. Version: 1999. http://www.math.tu-dresden.de/~ganter/fba.html

[Gan00] GANTER, Bernhard: *Begriffe und Implikationen*. Version: 2000. http://www.math.tu-dresden.de/~ganter/fba.html

[Gan04a] GANTER, Bernhard: *Conflict avoidance in additive order diagrams*. Version: 2004. http://www.math.tu-dresden.de/~ganter/fba.html

[Gan04b] GANTER, Bernhard: Conflict Avoidance in additive order diagrams. In: *Journal of Universal Computer Science* 10 (2004), Nr. 8, S. 955–966

[Gan06] GANTER, Bernhard: *Sildes from the Summer School "Knowledge Structures", Dresden June 2006*. Version: 6 2006. http://www.math.tu-dresden.de/~ganter/fba.html

[Gan08] GANTER, Bernhard: Lattices Of Rough Set abstractions as P-products. In: *Institut für Algebra, Dresden University of Technology, D-01062 Dresden* (2008)

[Gan09] GANTER, Bernhard: *Seminar Algebra*. Wintersemester 2008/2009

[GG12] Ganter, Bernhard ; Glodeanu, Cynthia V.: Ordinal factor analysis. (2012), 128–139. http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-29892-9_15

[GH08] Ganter, Bernhard ; Hereth, Joachim: *Strukturtheorie vollständiger Verbände*. Wintersemester 2007/2008

[GK98] Ganter, Bernhard ; Kuznetsov, Sergei O.: *Stepwise construction of the Dedekind-MacNeille completion*. Version: 1998. http://www.math.tu-dresden.de/~ganter/fba.html

[GK01] Ganter, Bernhard ; Kuznetsov, Sergei: *Pattern Structures and their Projections*. Version: 2001. http://www.math.tu-dresden.de/~ganter/fba.html

[GK03] Ganter, Bernhard ; Krausse, Rüdiger: *Pseudo models and propositional Horn inference*. Version: 1 2003. http://www.math.tu-dresden.de/~ganter/fba.html

[GKS01] Ganter, Bernhard ; Krolak-Schwerdt, S.: *Cognitive organization of person attributes: Measurement procedures and statistical models*. Version: 2001. http://www.math.tu-dresden.de/~ganter/fba.html

[GL08] Ganter, Bernhard ; Liebscher, Sebastian: *Ordnungs- und Verbandstheorie*. Sommersemester 2008

[Glo10a] Glodeanu, Cynthia V.: *Factor Analysis of Triadic Data*. Technische Universität, 2010 http://tu-dresden.de/Members/cynthia_vera.glodeanu/dateien/FAofTriadicData.pdf

[Glo10b] Glodeanu, Cynthia V.: *Scales as Optimal Factors in Factor Analysis*. Technische Universität, 2010 http://tu-dresden.de/Members/cynthia_vera.glodeanu/dateien/ScalesAsOptimalFactors.pdf

[Glo13] Glodeanu, Cynthia V.: Tri-ordinal Factor Analysis. Version: 2013. http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-38317-5_8. In: *Formal Concept Analysis*. Springer, 2013, 125–140

[GO04] Ganter, Bernhard ; Obiedkov, Sergei: Implications in triadic formal contexts. Version: 2004. http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-540-27769-9_12. In: *Conceptual Structures at Work*. Springer, 2004, 186–195

[GS02] Ganter, Bernhard ; Stumme, Gerd: Formal Concept Analysis: Methods and Applications in Computer Science. (2002)

[GW96] Ganter, Bernhard ; Wille, Rudolf: *Formale Begriffsanalyse: Mathematische Grundlagen*. 1. Springer, Berlin, 1996 http://amazon.de/o/ASIN/3540608680/. – ISBN 9783540608684

[GW97] GANTER, Bernhard ; WILLE, Rudolf: *Applied Lattice Theory: Formal Concept Analysis*. Version: 1997. http://www.math.tu-dresden.de/~ganter/fba.html

[GW98] GANTER, Bernhard ; WILLE, Rudolf: *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations*. 1. Auflage. Springer, 1998. – ISBN 9783540627715

[GW01] GANTER, Bernhard ; WILLE, Rudolf: *Formal Concept Analysis. Mathematical Foundations*. 1. Springer, Berlin, 2001 http://amazon.de/o/ASIN/3540627715/. – ISBN 9783540627715

[IKMZ11] IGNATOV, Dmitry I. ; KUZNETSOV, Sergei O. ; MAGIZOV, Ruslan A. ; ZHUKOV, Leonid E.: From triconcepts to triclusters. Version: 2011. http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-21881-1_41. In: *Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining and Granular Computing*. Springer, 2011, 257–264

[JHS+06] JÄSCHKE, Robert ; HOTHO, Andreas ; SCHMITZ, Christoph ; GANTER, Bernhard ; STUMME, Gerd: TRIAS–An Algorithm for Mining Iceberg Tri-Lattices. In: *Data Mining, 2006. ICDM'06. Sixth International Conference on* IEEE, 2006, 907–911

[KO09] KONECNY, Jan ; OSICKA, Petr: General approach to triadic concept analysis. In: *SIAM Review* 51 (2009), Nr. 3, 455–500. http://www.glc.us.es/cla2010/slides/osicka-cla-slides.pdf

[Kri08] KRIEGEL, Francesco: Rough Sets - Unexakte Mengen. (2008)

[LW95] LEHMANN, Fritz ; WILLE, Rudolf: *A triadic approach to formal concept analysis*. Springer, 1995 http://link.springer.com/chapter/10.1007/3-540-60161-9_27

[Mes12] MESCHKE, Christian: Concept Approximations. Approximative Notions for Concept Lattices. (2012)

[PS06a] PAWLAK, Zdzislaw ; SKOWRON, Andrzej: Rough sets and Boolean reasoning. In: *Institute of Mathematics, Warsaw University, ul. Banacha 2, 02-097 Warsaw, Poland* Information Sciences 177 (2007) (2006), S. 41–73

[PS06b] PAWLAK, Zdzislaw ; SKOWRON, Andrzej: Rudiments of rough sets. In: *Institute of Mathematics, Warsaw University, Banacha 2, 02-097 Warsaw, Poland* Information Sciences 177 (2007) (2006), S. 3–27

[PS07] PAWLAK, Zdzislaw ; SKOWRON, Andrzej: Rough sets: Some extensions. In: *Institute of Mathematics, Warsaw University, Banacha 2, 02-097 Warsaw, Poland* Information Sciences 177 (2007) (2007), S. 28–40

[Sch05] SCHOOLMANN, Lars: Triadic concept graphs and their conceptual contents. Version: 2005. http://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-540-32262-7_20.pdf. In: *Formal Concept Analysis*. Springer, 2005, 285–298

[Sch08] SCHMIDT, Stefan E.: *Tropische Geometrie und Algebraische Statistik*. Sommersemester 2008

[SH07a] SCHMIDT, Stefan E. ; HERETH, Joachim: *Algebra*. Wintersemester 2006/2007

[SH07b] SCHMIDT, Stefan E. ; HERETH, Joachim: *Qualitative Datenanalyse*. Sommersemester 2007

[Vou02] VOUTSADAKIS, George: Polyadic concept analysis. In: *Order* 19 (2002), Nr. 3, 295–304. http://www.springerlink.com/index/m7u1p3w1584gr515.pdf

[Vou03] VOUTSADAKIS, George: An Equational Theory of n-Lattices. In: *submitted to Algebra Universalis, preprint available at http://pigozzi. lssu. edu/WWW/research/papers. html* (2003). http://voutsadakis.com/RESEARCH/PAPERS/conmultilat.pdf

[Wil95] WILLE, Rudolf: The Basic Theorem of Triadic Concept Analysis. In: *Order* 12 (1995), S. 149–158

[Wil98] WILLE, Rudolf: *Triadic concept graphs*. Springer, 1998 http://link.springer.com/chapter/10.1007/BFb0054915

[Zsc02] ZSCHALIG, Christian: *Ein Force Directed Placement Algorithmus zum Zeichnen von Liniendiagrammen*, TU Dresden, Diplomarbeit, 2002

[Zsc09] ZSCHALIG, Christian: *Characterizations of planar lattices - an approach based on left relations*, TU Dresden, Diss., 2009